arXiv:2512.17611v1 [math.AP] 19 Dec 2025

加权指数非线性的双调和方程中的对称性破缺

MartaCalanchi,Cristina Tarsi *米兰大学数学系,
意大利米兰市C. Saldini路50号，邮编20133

摘要

我们研究一类四阶椭圆问题，其中涉及指数型非线性项以及H´énon型空间权函数。受到半线性二阶问题（如H´énon方程）中观察到的对称性破缺现象的启发，我们考虑如下形式的加权泛函：

$$F_m(u) = \int_B |x|^\alpha \left(e^{\sigma|u|^2} - \sum_{k=0}^{m} \frac{\sigma^k}{k!}|u|^{2k} \right) dx,$$

该泛函定义在单位球 $B \subset \mathbb{R}^4$上，其中 $m \in \mathbb{N}_0$ $\alpha > 0$、 $\sigma > 0$为适当的参数。我们首先建立带权Adams型不等式，刻画双调和Sobolev空间单位球面上 F 有界性的尖锐阈值。随后证明，当权重指数 α较大时，极大化子的径向对称性会发生破缺。这些结果将二阶情形中的经典结论（例如Trudinger–Moser型泛函和加权H´énon方程）推广到双调和背景，并为理解高阶偏微分方程中权函数、非线性与对称性之间的相互作用提供了新见解。

关键词： H´enon 型问题，对称性破缺，双调和算子 Adams–Moser–Trudinger 不等式。

2010年数学主题分类： 35J60,35J40

1 引言

本文研究四维空间中存在 H´enon 权函数时，具有 Adams 型临界指数增长的四阶椭圆算子相关极大化问题中的对称性破缺现象。

我们的目标有两个方面：一方面，我们希望将源自 H´enon 和 Ni 关于二阶

*电子邮箱：marta.calanchi@unimi.it, cristina.tarsi@unimi.it

算子的若干经典思想推广到双调和情形；另一方面，我们精确且定量地揭示导致极值函数失去径向对称性的机制，从而与 Smets–Su–Willem 和 Calanchi–Terraneo 在低阶情形下的奠基性贡献相呼应。

我们研究的出发点是著名的 H´énon 问题

$$\begin{cases} -\Delta u &= |x|^{\alpha} u^{p-1} \qquad \text{in } B \\ u &> 0 \\ u &= 0 \qquad\qquad\quad \text{on } B, \end{cases} \tag{1.1}$$

（其中， $B \subset \mathbb{R}^N$ 是以原点为中心的球， $N \geq 2$， $\alpha > 0$ 且 $p > 2$），该问题源于 H´énon 于 1973 年提出的数学模型 [11]，用于描述受到各向异性力作用的球状星团的分布。该模型的一个显著特征在于幂型径向权函数 $|x|^{\alpha}$，它使解的集中位置偏离原点，进而导致相关变分问题的解析结构发生深刻变化。

Ni 的开创性论文 [16] 开启了对 H´énon 问题的现代分析。他利用 $H_0^1(B)$ 中的能量泛函，证明了权函数的存在显著扩大了径向解 p所对应的指数范围，即

$$p \in \left(2,\, 2^* + \tfrac{2\alpha}{N-2}\right), \qquad 2^* = \tfrac{2N}{N-2},$$

他还借助 Pohozaev恒等式证明了这一范围是精确的。Ni 的洞见揭示了一个基本机制：H´énon 权函数与缩放相互作用，从而有效地“移动”了嵌入的临界指数。这一现象虽然表述简单，但后来已被证明在广泛的椭圆问题中具有深远的类似表现。

然而，非径向解在 Ni 的径向框架之外出现了。Chen–Ni–Zhou [5], 首次提供了数值迹象，他们构造出了二维中的显式非径向基态。Smets、Su 和 Willem [18], 则给出了完整图景，他们研究了瑞利商的极小化子（基态解）

$$R_{\alpha}^{p}(u) = \frac{\int_B |\nabla u|^2 dx}{\left(\int_B |x|^{\alpha} |u|^p dx\right)^{\frac{2}{p}}}, \qquad u \in H_0^1(B), \qquad u \neq 0, . \tag{1.2}$$

并证明，对于任意 $p \in (2,\ 2^*)$，当 α 充分大时，极小化子会失去径向对称性：

定理 (Smets - Su - Willem, [18])。 假设 $N \geq 2$。对于任意 $p \in (2, 2^*)$ ($2^* = +\infty$ 对于 $N = 2$)，存在 $\alpha^* > 0$ ，使得只要 $\alpha > \alpha^*$，(1.2) 的任何极小化子都是非径向的。

这一结果如今已成为对称性破缺理论中的经典参考，确立了由权重指数 α 驱动的分岔现象。

在临界情形 $N=2$ 下，经典索博列夫嵌入只能保证对数可求和性；因此，莫泽－特鲁丁格不等式 [15, 21, 14] 成为自然的解析框架。

众所周知，在 $H_0^1(\Omega)$，$\Omega \subset \mathbb{R}^2$ 中，函数的最大可求和阶为二次指数型，这一点由波霍扎耶夫 [15]和特鲁丁格 [21] 分别独立证明（另见 [23]）。数年后，Moser [14] 简化了特鲁丁格的证明，并确定了最优阈值；更确切地说，

$$\sup_{\|\nabla u\|_2 \le 1} \int_\Omega e^{\alpha u^2}\, dx \le M(\alpha)|\Omega|$$

其中，常数 $M(\alpha)$ 在 $\alpha \le 4\pi$ 时保持有界，而当 $\alpha > 4\pi$ 时，上确界趋于无穷。

Calanchi 和 Terraneo 最早在 [6] 中研究了具有指数增长的 H´énon 问题的一种自然的二维推广。他们发现，具有指数型非线性项的 H´énon 问题表现出与多项式情形惊人相似的行为，并再次证明，当 α 足够大时，极大化子的径向对称性会消失。他们的工作表明，权重集中与临界指数增长之间的相互作用在不同维数和函数空间框架下均具有稳健性。

他们的主要结果可表述如下：

定理 (卡兰基 - 特拉内奥， [6])。 设 $B \subset \mathbb{R}^2$ 为单位球，并考虑泛函

$$F : H_0^1(B) \to \mathbb{R}, \qquad F(u) = \int_B |x|^\alpha \left(e^{p|u|^\gamma} - 1 - p|u|^\gamma \right) dx,$$

其中 $\alpha > 0$、 $p > 0$ 和 $1 < \gamma \le 2$。那么，

$$if \quad 1 < \gamma < 2 \quad and \quad p > 0, \quad or \quad \gamma = 2 \quad and \quad 0 < p < 4\pi,$$

存在一个阈值 $\alpha^* = \alpha^*(p, \gamma) > 0$，使得对于所有 $\alpha > \alpha^*$， F 在 $H_0^1(B)$ 的单位球上的任意极大化子都是非径向的。也就是说，当权重指数 α取较大值时，径向对称性会被打破。

上述所有结果均得到了改进，并沿多个方向进一步发展（例如，参见 [3], [4], [8], [17],及其中的参考文献）。

受这一系列思想的启发，自然会产生一些问题：

- 在由 *Adams* 型不等式支配的临界增长高阶问题中，是否仍存在类似的可解范围？

- 在相同设定下，类似的对称性破缺现象是否仍会出现？

本文旨在将上述思想推广到四维空间中的四阶算子情形。

近年来，带有非线性源项的双调和方程引起了广泛关注。

沿着上述文献的研究思路，在 [24] 中，作者考虑了如下问题

$$\begin{cases} \Delta^2 u &= |x|^{\alpha} u^{p-1} & \text{in } B, \\ u = \dfrac{\partial u}{\partial n} &= 0 & \text{on } \partial B, \end{cases}$$

并证明了当 $N \geq 8, p = \dfrac{2N}{N-4}$为临界 Sobolev 指数且 $\alpha > 0$ 足够大时，至少存在一个非径向解。
几年后，Wang [22] 考虑了具有不同边界类型条件的同一问题，

$$\begin{cases} \Delta^2 u &= |x|^{\alpha} u^{p-1} & \text{in } B, \\ u = \Delta u &= 0 & \text{on } \partial B, \end{cases}$$

并证明了当 $N \geq 6, p = \dfrac{2N}{N-4}$和 $\alpha > 0$ 足够大时，至少存在一个非径向解。另一方面，在次临界情形下，上述双调和方程可视为 [7], 中研究的一个更一般系统的特例，该文作者探讨了 Hardy-H´énon 型椭圆系统的径向解和非径向解的存在性。具体而言，他们在论文中考虑了推广加权双调和问题结构的系统，并表明即使在次临界区域，也可能存在非径向解。这一结果进一步凸显了解结构的丰富性，而这种丰富性受到权函数和区域几何形状的影响。关于多重性及相关主题的结果，还可参见 [24, 25] 及其中的参考文献。

因此，自然会想到此类结果能否推广到具有临界（甚至超临界）增长的高阶问题。

与一阶情形一样，在极限情形 $p = N/m$ 下，Sobolev 嵌入 $W^{m,\,p}(\Omega) \subset L^{p^*}$、$\Omega \subset R^N$ 的临界指数 $p^* = Np/(N - mp)$ 变为 $+\infty$。高阶空间中 Moser 不等式的类似形式已由 D.R. Adams 于 1988 年证明 [1]，从而得到

$$\sup_{\substack{u \in W_0^{m,\frac{N}{m}}(\Omega) \\ \|\nabla^m u\|_{\frac{N}{m}} \leq 1}} \int_{\Omega} e^{\beta |u|^{\frac{N}{N-m}}} \begin{cases} \leq C|\Omega| \ , \ \text{if} \ \ \beta \leq \beta_{N,m} \\ \\ = +\infty \ , \ \ \text{if} \ \ \beta > \beta_{N,m} \end{cases}$$

其中$\beta_{N,\,m}$ 是显式的， $\nabla^m u$表示 u的 m阶梯度：

$$\nabla^m u = \begin{cases} \Delta^{m/2} u, & m \text{ odd} \\ \\ \nabla \Delta^{(m-1)/2} u, & m \text{ even}. \end{cases}$$

这一结果在较弱的边界条件下仍然成立，正如 Tarsi 在 [20], 中所证明的，他考虑了 $W^{m,\,\mathcal{N}}{}^{m}(\Omega)$，即由具有边界条件 $u \in W^{m,\,\frac{N}{m}}(\Omega)$ 的函数组成的 Sobole夫空间

条件 $u = \Delta u = ... = \Delta^{[(m-1)/2]} u = 0$ 在 $\partial\Omega$ 上，其中 $N > m$，且 Ω 是 $\mathbb{R}^N$ 中的一个有界区域（所谓的***Navier***型条件）。

受二阶情形下 Ni 的类似结果 [24, 22]启发，我们研究四维中双调和算子的情形。

若 $N = 4$ 且 $m = 2$，则 Adams $\beta_{N给出的m}$ 尖锐阈值化简为 $32\pi^2$，而具有 Navier边界条件的 Sobole夫空间 $W^{m,\ \mathcal{N}}{}_{m}^{N}(\Omega)$ 与 $H^2_{\mathcal{N}}(\Omega) = H^1_0(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ 重合。

我们首先证明，施加径向对称性后，相关 H´énon 型极大化问题的可解范围会扩大。具体而言，径向权函数的存在不仅能保持上确界有限，还能以精确且可量化的方式提高临界指数增长，如以下定理 1 和 2 所述:

定理1。设 $B \subset \mathbb{R}^4$ 为单位球。设 $H^2_{\mathcal{N},\ rad}(B) = H^1_{0,\ rad}(B) \cap H^2_{rad}(B)$ 为 $H^2_{\mathcal{N}}(B) = H^1_0(B) \cap H^2(B)$ 中具有径向对称性的函数所构成的子空间，并考虑泛函 $F: H^2_{\mathcal{N},\ rad}(B) \to \mathbb{R}$，其定义为

$$F(u) = \int_B |x|^\alpha \ e^{\sigma u^2} \ dx.$$

Then

$$T^{rad}_\alpha = \sup_{H^2_{\mathcal{N},rad}, ||\Delta u||_2 = 1} F(u) < +\infty \quad \Longleftrightarrow \quad \sigma \leq \ 32\pi^2(1 + \frac{\alpha}{4}) := \sigma_\alpha.$$

我们注意到，该结果不受边界类型条件的影响，并且在具有 Dirichlet边界条件的空间 $H^2_{0,\ rad}$ 中仍以相同的尖锐阈值成立:

定理2. 设 $B \subset \mathbb{R}^4$ 为单位球。设 $H^2_{0,\ rad}$（B）为 H^2_0（B）中具有径向对称性的函数构成的子空间。那么

$$T^{0,rad}_\alpha = \sup_{u \in H^2_{0,rad}, ||\Delta u||_2 = 1} F(u) < +\infty \quad \Longleftrightarrow \quad \sigma \leq \sigma_\alpha.$$

注1. 截断泛函也有相同结论

$$F_m : H^2_{\mathcal{N},rad}(B) (or \ H^2_{0,rad}(B)) \to \mathbb{R}$$

定义如下

$$F_m(u) = \int_B |x|^\alpha \ \left(e^{\sigma u^2} - \sum_{k=0}^{m} \frac{\sigma^k u^{2k}}{k!} \right) \ dx.$$

现在我们转而探讨：在存在径向权函数的情况下，对称性破缺是否仍会持续。以下结果对此给出了精确说明，并凸显了对称性破缺的稳健性。

定理 3. 设 $B \subset \mathbb{R}^4$ 为单位球，并考虑上文定义的泛函 F_m，其中 $m \in \mathbb{N}$、$\alpha > 0$、$\sigma \leq 32\pi^2$。设

$$T_{\alpha,m}^{rad} = \sup_{u \in H^2_{\mathcal{N},rad}(B), ||\Delta u||_2 = 1} F_m(u), \quad T_{\alpha,m} = \sup_{u \in H^2_{\mathcal{N}}(B), ||\Delta u||_2 = 1} F_m(u)$$

是 F_m 在具有 *Navier* 边界条件的索伯列夫空间上的上确界，并且

$$T_{\alpha,m}^{0,rad} = \sup_{u \in H^2_{0,rad}(B) ||\Delta u||_2 = 1} F_m(u), \quad T_{\alpha,m}^{0} = \sup_{u \in H^2_{0}(B) ||\Delta u||_2 = 1} F_m(u)$$

是 F_m 在具有狄利克雷边界条件的索伯列夫空间上的上确界。那么存在一个阈值 $\alpha^* > 0$，使得对所有 $\alpha > \alpha^*$,

$$T_{\alpha,m}^{rad} < T_{\alpha,m}, \quad T_{\alpha,m}^{0,rad} < T_{\alpha,m}^{0} \quad for\ any \quad m \in \mathbb{N}, m \geq 1.$$

推论 4. 对于 $\sigma < 32\pi^2$，两个上确界均可达到。因此，极大化子是非径向的。

我们只能针对截断的泛函 F_m确立这一对称性破缺现象。尽管这一限制乍看之下似乎仅仅是技术性的，但我们的分析表明，障碍要微妙得多；要将结果推广到完整泛函，很可能需要真正的新思路。

本文结构如下：由于我们的方法依赖于精细估计，我们首先在第 2 节给出一个径向引理（引理5），它在确定泛函的临界阈值方面起着关键作用。

接下来，在第 3 节中，我们证明两个主要定理，即定理 1 和 2；并通过构造一列 Moser 型函数，证明临界值的最优性，对于这列函数，泛函趋于无界。

在第 4 节中，我们借鉴 [18]和 [6], 中提出的论证，证明对称性破缺，并得到泛函 F 在限制于径向函数类时的上确界 $\alpha \to +\infty$的渐近上界。随后，我们给出该泛函在整个可容许函数空间上的上确界下界。比较这两个估计即可得出所需结论。

2 迈向临界阈值

本节旨在对能够保证泛函 F 在空间 $H^2_{\mathcal{N},\ rad}(B)$ 上具有一致有界性的临界阈值σ_α 给出启发式说明。关键在于对 $H^2_{\mathcal{N},\ rad}(B)$ 中径向函数的逐点估计。在证明 $H^2_{0,\ rad}(B)$ 中的对称性破缺结果时（该结果包含于 $H^2_{\mathcal{N},\ rad}(B)$ 中），这一估计将发挥关键作用。

其基本思想并不新颖。在处理 Sobole夫嵌入定理的极限情形时，另一种方法是寻找嵌入到适当 Zygmund空间中的任意（可能是最优的）嵌入。*Zygmund*空间 $Z^{\alpha}(\Omega)$ 由 Ω 上满足以下条件的所有可测函数 $u(x)$ 组成：

$$\int_{\Omega} e^{\lambda|u|^{\frac{1}{\alpha}}}dx<\infty \qquad \text{for some } \lambda=\lambda(u)>0$$

配备拟范数

$$\|u\|_{Z^{\alpha}}=\sup_{t\in(0,|\Omega|)}\frac{u^{*}(t)}{\left[1+\log\left(\frac{|\Omega|}{t}\right)\right]^{\frac{1}{\alpha}}},$$

其中， u^{*} 表示 u的递减重排，即从 $[0,+\infty)$到 $[0,+\infty)$的唯一非增右连续函数，且与 u等分布。事实上，对于任意 $1\leq m<N$，Sobole夫空间 $W^{m}_{,0}{}^{\frac{N}{m}}(\Omega)$都嵌入到 Zygmund空间 $Z^{\frac{N}{N-m}}$中；最佳嵌入常数与Moser–Adams不等式的一致界尖锐阈值密切相关，这一点可从Moser的原始证明 [14] （另见 [2]）以及高阶情形的 [20] 中看出：对于$\beta<\beta_{n,m}$，Moser–Adams不等式是最优Zygmund嵌入的直接推论，这归功于嵌入常数的显式公式（即使边界条件放宽为Navier型）以及将问题恰当化归至径向情形的论证。

在 $m=2,N=4$ 的情形下，事实证明，同一个尖锐嵌入为径向情形下的 Hénon泛函 F 提供了一致有界性，至少对于$\sigma<\sigma_{\alpha}$而言：由于我们认为这进一步揭示了极限 Sobolev 嵌入情形的性质，因此在此给出径向情形下一个自成一体的证明。定理 1 和 2 的严格证明（其中包括对临界情形 $\sigma=\sigma_{\alpha}$ 的讨论，以及关于 $\sigma>\sigma_{\alpha}$ 的反例）将在接下来的章节中给出。

我们首先回顾以下径向逐点估计（一般情形及 Zygmund 情形下的结果另见 [20, 命题 1] ）。

L引理 5. 设 $u\in\mathcal{C}^{2}(B)\cap\mathcal{C}^{0}(B)$ 为一个径向函数，且在 ∂B上满足 $u=0$。则 ，

$$|u(x)|\leq\frac{(-\log|x|)^{1/2}}{2\sqrt{\omega_{3}}}||\Delta u||_{2}, \tag{2.3}$$

其中 ω_{3} 是 $\mathbb{R}^{4}$中球面的面积。

证明。 为简化记号，我们记 $u(x)=u(|x|)$。

令 $v(t)=u(1/\sqrt{t})$， $t\in[1,+\infty)$。我们有 $v(1)=0$ 且 $v'(+\infty)=0$。

对 v 求导可得

$$v'(t)=-\frac{1}{2t^{3/2}}u'(1/\sqrt{t}),\quad v''(t)=\frac{1}{4t^{3}}u''(1/\sqrt{t})+\frac{3}{4t^{5/2}}u'(1/\sqrt{t}),$$

因此

$$u'(1/\sqrt{t}) = -2t^{3/2}v'(t), \quad u''(1/\sqrt{t}) = 4t^3v''(t) + 6t^2v'(t).$$

因此,

$$\begin{aligned}\int_B |\Delta u|^2 dx &= \omega_3 \int_0^1 \left| u''(r) + \frac{3}{r}u'(r) \right|^2 r^3 dr =_{r=1/\sqrt{t}} \\ &= \omega_3 \int_1^{+\infty} \left| 4t^3v''(t) + 6t^2v'(t) + 3\sqrt{t}(-2t^{3/2}v'(t)) \right|^2 t^{-3/2}\frac{1}{2}t^{-3/2}dt \\ &= 8\omega_3 \int_1^{+\infty} \left| v''(t) \right|^2 t^3 dt. \end{aligned} \tag{2.4}$$

另一方面,

$$\begin{aligned}|v(s)| &= \left| \int_1^s v'(t)dt \right| = \left| \int_1^s \int_t^{+\infty} v''(\xi)d\xi\ dt \right| = \left| \int_1^s \int_t^{+\infty} v''(\xi)d\xi\ dt \right| \\ &\le \left| \int_1^s \int_t^{+\infty} |v''(\xi)|^2\xi^2 d\xi dt \right|^{1/2} \left| \int_1^s \int_t^{+\infty} \xi^{-2} d\xi dt \right|^{1/2} \\ &= \left| \int_1^s \int_t^{+\infty} |v''(\xi)|^2\xi^2 d\xi dt \right|^{1/2} (\log s)^{1/2} \\ &= \left(\int_1^s |v''(\xi)|^2\xi^2 \int_1^{\xi} dt d\xi + \int_s^{+\infty} |v''(\xi)|^2\xi^2 d\xi \int_1^s dt \right)^{1/2} (\log s)^{1/2} \\ &= \left(\int_1^s |v''(\xi)|^2\xi^2(\xi-1) dt d\xi + \int_s^{+\infty} |v''(\xi)|^2\xi^2\ (s-1)\ d\xi \right)^{1/2} (\log s)^{1/2} \\ &\le \left(\int_1^s |v''(\xi)|^2\xi^3 d\xi + \int_s^{+\infty} |v''(\xi)|^2\xi^3\ \ d\xi \right)^{1/2} (\log s)^{1/2}, \end{aligned}$$

因此，由（2.4）

$$|v(s)| \le \left(\int_1^{+\infty} |v''(\xi)|^2\xi^3 d\xi \right)^{1/2} (\log s)^{1/2} = \frac{(\log s)^{1/2}}{\sqrt{8\omega_3}} ||\Delta u||_2,$$

也就是说

$$\left| u(1/\sqrt{s}) \right| \le \frac{(\log s)^{1/2}}{\sqrt{8\omega_3}} ||\Delta u||_2 \implies |u(r)| \le \frac{(-\log r)^{1/2}}{2\sqrt{\omega_3}} ||\Delta u||_2.$$

□

由此，我们得到如下（嵌入）结果:

命题 6。 对所有 $p \ge 1$, $H^2_{N,\ rad}$ 连续嵌入于 $L^p(B, |x|^\alpha dx)$，且有

$$||u||^p_{L^p(\Omega,|x|^\alpha dx)} = \int_B |x|^\alpha |u(x)|^p dx \le \frac{1}{(\alpha+4)^{1+\frac{p}{2}}} \Gamma\left(1+\frac{p}{2}\right) \frac{\omega_3^{1-\frac{p}{2}}}{2^p} ||\Delta u||_2^p,$$

其中 Γ是经典伽马函数。
特别地，对于 $p=2k,\ k\in\mathbb{N}$，我们有以下不等式

$$\int_B |x|^\alpha |u(x)|^{2k} \le k!\ \frac{\varepsilon^{1+k}}{4^{1+2k}}\omega_3^{1-k}||\Delta u||_2^{2k}.$$

证明。根据稠密性论证，我们证明 $u\in\mathcal{C}^2(B)\cap\mathcal{C}^0(\bar{B})$ 在 ∂B 上的 $u=0$ 满足该不等式。
由引理5

$$\int_B |x|^\alpha |u(x)|^p = \omega_3\int_0^1 r^{\alpha+3}|u(r)|^p dr \le \frac{\omega_3^{1-\frac{p}{2}}}{2^p}||\Delta u||_2^p\int_0^1 r^{\alpha+3}\left(-\log r\right)^{p/2}dr.$$

作代换 $r=\rho^\varepsilon,\ \varepsilon=\dfrac{4}{4+\alpha}$，可得

$$\int_0^1 r^{\alpha+3}\left(-\log r\right)^{p/2}dr = \varepsilon\int_0^1 \rho^{\varepsilon(\alpha+3)}\left(-\varepsilon\log\rho\right)^{p/2}\rho^{\varepsilon-1}d\rho = \varepsilon^{1+p/2}\int_0^1 \rho^3\left(-\log\rho\right)^{p/2}d\rho.$$

令 $\rho=e^{-t/4}$，我们得到

$$\int_0^1 \rho^3\left(-\log\rho\right)^{p/2}d\rho = \frac{1}{4^{1+p/2}}\int_0^\infty t^{p/2}e^{-t}dt = \frac{\Gamma(1+p/2)}{4^{1+p/2}}.$$

综上可得结论

$$\int_B |x|^\alpha |u(x)|^p \le \left(\frac{\varepsilon}{4}\right)^{1+\frac{p}{2}}\Gamma\left(1+\frac{p}{2}\right)\frac{\omega_3^{1-\frac{p}{2}}}{2^p}||\Delta u||_2^p.$$

□

现在我们可以证明以下命题：

命题7。设 $F:H^2_{\mathcal{N},rad}\to\mathbb{R}$ 为泛函

$$F(u)=\int_B |x|^\alpha\ e^{\sigma|u|^2}\ dx,\quad F_m(u)=\int_B |x|^\alpha\ \left(e^{\sigma u^2}-\sum_{k=0}^m\frac{\sigma^k u^{2k}}{k!}\right)\ dx..$$

那么，

$$\sigma<\ 32\pi^2(1+\frac{\alpha}{4})\quad\Longrightarrow\quad\sup_{u\in H^2_{\mathcal{N},rad}||\Delta u||_2=1}F(u),F_m(u)<+\infty.$$

证明。我们使用指数函数的泰勒展开

$$F(u)=\int_B |x|^\alpha\ e^{\sigma|u|^2}\ dx=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\sigma^k}{k!}\int_B |x|^\alpha\ |u(x)|^{2k}dx.$$

由命题 6 可知

$$F(u) \le \sum_{k=0}^{+\infty} \sigma^k \ \frac{\varepsilon^{1+k}}{4^{1+2k}} \omega_3^{1-k} ||\Delta u||_2^{2k} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\sigma^k}{(4+\alpha)^{1+k}} \ \frac{4^{1+k}}{4^{1+2k}} \omega_3^{1-k} ||\Delta u||_2^{2k}$$
$$= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\omega_3 \sigma^k}{(4+\alpha)^{1+k}} \ \frac{1}{(4\omega_3)^k} ||\Delta u||_2^{2k},$$

并且，对于 F_m,

$$F_m(u) \le \sum_{k=m}^{+\infty} \frac{\omega_3 \sigma^k}{(4+\alpha)^{1+k}} \ \frac{1}{(4\omega_3)^k} ||\Delta u||_2^{2k}.$$

因此，如果 $\sigma < (4+\alpha)(4\omega_3) = 32\pi^2 \left(1 + \frac{\alpha}{4}\right)$，那么

$$T_\alpha^{rad}, \quad T_{\alpha,m}^{rad} < +\infty.$$

其中 T_α^{rad}，而 $T_{\alpha, m}^{rad}$ 是泛函 F，F_m 在 $H_{\mathcal{N}, rad}^2(B)$ 上的上确界。

□

对于临界阈值 $\sigma_\alpha = 32\pi^2(1+\frac{\alpha}{4})$，我们需要进行更精细的计算。

3 临界阈值 σ_α：定理 1 和 2 的证明

接下来我们将看到，值 $\sigma_\alpha = 32\pi^2 \left(1 + \frac{\alpha}{4}\right)$ 确实是 $F(u)$ 在 $H_{\mathcal{N}, rad}^2(B)$ 和 $H_{0, rad}^2(B)$ 上一致有界性的阈值。

3.1 充分条件

为了证明 $F(u)$ 对 $\sigma = \sigma_\alpha$ 也一致有界，只需考虑更大的空间 $H_{\mathcal{N}, rad}^2(B)$。

对于任意 $\gamma > 0$，稍微滥用一下记号，定义

$$u(x) = u(r) = \frac{w\left(\gamma \log \frac{1}{r}\right)}{2\pi\sqrt{2\gamma}}, \quad \text{i.e.,} \quad w(t) := 2\pi\sqrt{2\gamma}\, u\left(e^{-\frac{t}{\gamma}}\right).$$

Then

$$u'(r) = -\frac{\gamma w'(t)}{2\pi\sqrt{2\gamma}} e^{t/\gamma}, \quad u''(r) = \left(\frac{\gamma w'(t)}{2\pi\sqrt{2\gamma}} + \frac{\gamma^2 w''(t)}{2\pi\sqrt{2\gamma}}\right) e^{2t/\gamma}$$
$$u''(r) + \frac{3}{r} u'(r) = -\left(\frac{2\gamma w'(t) - \gamma^2 w''(t)}{2\pi\sqrt{2\gamma}}\right) e^{2t/\gamma}.$$

因此,

$$\begin{aligned}\int_B |\Delta u|^2\,dx &= 2\pi^2\int_0^{+\infty}\left|-\left(\frac{2\gamma w'(t)-\gamma^2 w''(t)}{2\pi\sqrt{2\gamma}}\right)e^{2t/\gamma}\right|^2 e^{-4t/\gamma}\cdot\frac{dt}{\gamma}\\ &= 2\pi^2\int_0^{+\infty}\left|\frac{\gamma^2 w''(t)}{2\pi\sqrt{2\gamma}}-\frac{2\gamma w'(t)}{2\pi\sqrt{2\gamma}}\right|^2\cdot\frac{dt}{\gamma}\\ &= \int_0^{+\infty}\left|\frac{\gamma}{2}w''(t)-w'(t)\right|^2 dt.\end{aligned}$$

此外,

$$\begin{aligned}\int_B |x|^\alpha e^{\sigma u^2}dx &= \omega_3\int_0^1 e^{\sigma u^2}r^{\alpha+3}\,dr\\ &= \frac{\omega_3}{\gamma}\int_0^{+\infty} e^{\frac{\sigma w^2}{8\pi^2\gamma}}\cdot e^{-\frac{\alpha+3}{\gamma}t}\cdot e^{-\frac{t}{\gamma}}\,dt\\ &= \frac{\omega_3}{\gamma}\int_0^{+\infty}\exp\left(\frac{\alpha+4}{\gamma}\left[\frac{\sigma}{8\pi^2(\alpha+4)}w^2-t\right]\right)dt.\end{aligned}$$

现在取 $\gamma=\alpha+4$: 回想起 $\sigma=\sigma_\alpha=32\pi^2\left(1+\frac{\alpha}{4}\right)$, 只需证明

$$\sup\left\{\int_0^{+\infty}e^{w^2-t}\,dt:\quad\int_0^{+\infty}\left|w'-\frac{(\alpha+4)w''}{2}\right|^2 dt\le 1\right\}<+\infty.$$

我们通过引用以下引理完成论证, 该引理最初由 Marshall 提出 [13], , 它简化了 Moser 的一个著名结果 [14]:

引理 8 (Marshall-Moser)。 存在一个常数 $C>0$, 使得

$$if\quad\int_0^{+\infty}\psi^2(y)dy\le 1,\quad then\quad\int_0^{+\infty}e^{-F(t)}dt<C,$$

where $F(t)=t-\left(\int_0^t\psi(y)dy\right)^2$.

注意到 $w(0)=\lim_{r\to+\infty}u(r)=0$, 我们有 $w(t)=\int_0^t w'(s)ds$, 因此

$$\int_0^{+\infty}e^{w^2-t}\,dt=\int_0^{+\infty}e^{-F(t)}dt,\quad\text{where }\psi=w'.$$

一旦我们证明了$\int_0^{+\infty}|w'|^2dt\le 1$, 我们的结论便可直接由前面的引理推出。事实上,

$$1\ge\int_0^{+\infty}\left|w'-\frac{(\alpha+4)w''}{2}\right|^2 dt=\int_0^{+\infty}|w'|^2dt-(\alpha+4)\int_0^{+\infty}w'w''dt+\int_0^{+\infty}\frac{(\alpha+4)^2}{4}|w''|^2dt$$

$$\geq \int_0^{+\infty} |w'|^2 dt - (\alpha+4)\int_0^{+\infty} w'w''dt$$

现在只需证明 $\int_0^{+\infty} w'w''dt \leq 0$。但是

$$\int_0^{+\infty} w'w''dt = \frac{1}{2}(w')^2\big|_0^{+\infty} = -\frac{1}{2}(w')^2(0)$$

由于 $u'(r) \to 0$ as $r \to 0^+$（根据 u 的光滑性和径向对称性），并且

$$w'(t) = -\frac{2\pi\sqrt{2}}{\sqrt{\gamma}} e^{-t/\gamma} u'\left(e^{-t/\gamma}\right) = -\frac{2\pi\sqrt{2}}{\sqrt{\gamma}} \cdot ru'(r)\Big|_{r=e^{-t/\gamma}} \to 0, \quad \text{as } t \to +\infty.$$

因此,

$$-(\alpha+4)\int_0^{+\infty} w'w''dt \geq 0, \quad \text{and, in turn,} \quad \int_0^{+\infty} |w'|^2 dt \leq 1.$$

这就完成了充分条件的证明。

3.2 必要条件： σ_α 的最优性

为了证明阈值 σ_α 是最优的，我们在一个合适的 Moser 型序列上计算该泛函。尽管在 $H_{0,\mathrm{rad}}^2(B)$ 构造一个序列就足以直接证明即使在 Navier 边界条件下 σ_α 的锐性，但鉴于涉及的技术问题不同，我们更倾向于分别介绍这两个序列。

我们先证明 σ_α 在 $H_{\mathcal{N},rad}^2(B)$ 的最优性。受 [12]，启发，我们考虑以下函数族:

$$u_\varepsilon(r) = \frac{1}{\sqrt{\omega_3}} \begin{cases} \sqrt{\dfrac{|\log\varepsilon|}{4}} + \dfrac{\sqrt{\varepsilon} - r^2}{2\sqrt{\varepsilon|\log\varepsilon|}} & \text{if} \quad r \leq \sqrt[4]{\varepsilon} \\ \dfrac{|\log r|}{\sqrt{|\log\varepsilon|}} & \text{if} \quad \sqrt[4]{\varepsilon} < r \leq 1 \end{cases}$$

这些函数在 B上连续,

$$u_\varepsilon'(r) = \frac{1}{\sqrt{\omega_3}} \begin{cases} \dfrac{-r}{\sqrt{\varepsilon|\log\varepsilon|}} & \text{if} \quad r \leq \sqrt[4]{\varepsilon} \\ \dfrac{-1}{r\sqrt{|\log\varepsilon|}} & \text{if} \quad \sqrt[4]{\varepsilon} < r \leq 1 \end{cases}$$

它们连续且为负，并且

$$u_\varepsilon''(r)=\frac{1}{\sqrt{\omega_3}}\begin{cases}\dfrac{-1}{\sqrt{\varepsilon|\log\varepsilon|}} & \text{if}\quad r<\sqrt[4]{\varepsilon}\\[2ex] \dfrac{1}{r^2\sqrt{|\log\varepsilon|}} & \text{if}\quad \sqrt[4]{\varepsilon}<r\le 1\end{cases}.$$

就 $\bar{w}_\varepsilon(t):=2\sqrt{(\alpha+4)\omega_3}\,u_\varepsilon\left(e^{\frac{t}{\alpha+4}}\right)$ 而言，

$$\bar{w}_\varepsilon(t)=2\sqrt{(\alpha+4)}\begin{cases}\sqrt{\dfrac{|\log\varepsilon|}{4}}+\dfrac{\sqrt{\varepsilon}-e^{-\frac{2t}{\alpha+4}}}{2\sqrt{\varepsilon|\log\varepsilon|}} & \text{if}\quad t\ge\dfrac{\alpha+4}{4}|\log\varepsilon|\\[2ex] \dfrac{t}{\sqrt{|\log\varepsilon|}} & \text{if}\quad t\le\dfrac{\alpha+4}{4}|\log\varepsilon|\end{cases}$$

直接计算可得，

$$\|\Delta u_\varepsilon\|_2^2=\left[\int_0^{\sqrt[4]{\varepsilon}}\frac{16}{\varepsilon|\log\varepsilon|}r^3dr+\int_{\sqrt[4]{\varepsilon}}^1\frac{4}{r^4|\log\varepsilon|}r^3dr\right]=1+\frac{4}{|\log\varepsilon|}.$$

考虑归一化函数序列 $v_\varepsilon=\dfrac{u_\varepsilon}{\|\Delta u_\varepsilon\|_2}\in H^2_{\mathcal{N},\,rad}(B)$；我们证明 σ_α 的锐性，从而验证对任意 $\beta>1$

$$\int_B e^{\beta\sigma_\alpha v_\varepsilon^2}|x|^\alpha\,dx\longrightarrow+\infty\quad\text{as }\varepsilon\to0^+,$$

也就是说，

$$\int_0^{+\infty}e^{\beta w_\varepsilon^2-t}\,dt\longrightarrow+\infty\quad\text{as }t\to+\infty,$$

其中 $w_\varepsilon(t)=\bar{w}_\varepsilon(t)\|\Delta v_\varepsilon\|_2$。事实上，
有

$$\int_0^{+\infty}e^{\beta w_\epsilon^2-t}\,dt\ge\int_{\frac{\alpha+4}{4}|\log\varepsilon|}^{+\infty}e^{\beta w_\epsilon^2-t}\,dt\ge\int_{\frac{\alpha+4}{4}|\log\varepsilon|}^{+\infty}\exp\left(\beta\cdot\frac{(\alpha+4)|\log\varepsilon|}{4\left(1+\frac{4}{|\log\varepsilon|}\right)}-t\right)dt$$

$$=\exp\left(\frac{\alpha+4}{4}\left[(\beta-1)|\log\varepsilon|-4+\mathrm{o}(1)\right]\right)\to+\infty,\quad\text{as}\quad\varepsilon\to0^+.$$

现在我们来证明，即使在 $H^2_{0,rad}$ 的情况下，σ_α 的取值也具有最优性。我们需要对函数序列稍作修改，如下所示：

$$u_{\varepsilon,0}(r)=\begin{cases}u_\varepsilon(r) & \text{if}\quad r\le1-\eta_\varepsilon\\[2ex] \dfrac{2\log(1-\eta_\varepsilon)|\log r|^2-|\log r|^3}{\log^2(1-\eta_\varepsilon)\sqrt{\omega_3|\log\varepsilon|}} & \text{if}\quad 1-\eta_\varepsilon<r\le1\end{cases},$$

其中

$$\eta_\varepsilon := \frac{1}{\log|\log\varepsilon|}.$$

容易验证，$u_{\varepsilon,0}$ 连续，且 $u_{\varepsilon,0}(\mathbf{1}) = 0$；此外，

$$u'_{\varepsilon,0}(r) = \begin{cases} u'_\varepsilon(r) & \text{if} \quad r \le 1-\eta_\varepsilon \\ \\ \dfrac{-4\log(1-\eta_\varepsilon)\log r + 3|\log r|^2}{r\log^2(1-\eta_\varepsilon)\sqrt{\omega_3|\log\varepsilon|}} & \text{if} \quad 1-\eta_\varepsilon < r \le 1 \end{cases},$$

它仍然连续，且 $u'_{\varepsilon,0}(\mathbf{1}) = 0$；最后，

$$u''_{\varepsilon,0}(r) = \begin{cases} u'_\varepsilon(r) & \text{if} \quad r < 1-\eta_\varepsilon \\ \\ \dfrac{-4\log(1-\eta_\varepsilon) - 2|\log r|(3+2\log(1-\eta_\varepsilon)) - 3|\log r|^2}{r^2\log^2(1-\eta_\varepsilon)\sqrt{\omega_3|\log\varepsilon|}} & \text{if} \quad 1-\eta_\varepsilon < r < 1 \end{cases}.$$

因此，

$$\begin{aligned} \|\Delta u_{\varepsilon,0}\|_2^2 &= \omega_3\left[\int_0^{1-\eta_\varepsilon}|\Delta u_\varepsilon|^2 r^3 dr + \int_{1-\eta_\varepsilon}^1 |\Delta u_{\varepsilon,0}|^2 r^3 dr\right] = 1 + \frac{4}{|\log\varepsilon|} \\ &= 1 + \frac{4}{|\log\varepsilon|} + 4\frac{\log(1-\eta_\varepsilon)}{|\log\varepsilon|} + \omega_3\int_{1-\eta_\varepsilon}^1 |\Delta u_{\varepsilon,0}|^2 r^3 dr. \end{aligned}$$

通过直接计算，若 $1-\eta_\varepsilon < r < 1$

$$\Delta u_{\varepsilon,0} = \frac{-4\log(1-\eta_\varepsilon) - 2|\log r|(3-4\log(1-\eta_\varepsilon)) + 6|\log r|^2}{r^2\log^2(1-\eta_\varepsilon)\sqrt{\omega_3|\log\varepsilon|}}$$

从而

$$\begin{aligned} \omega_3\int_{1-\eta_\varepsilon}^1 |\Delta u_{\varepsilon,0}|^2 r^3 dr &= \int_{1-\eta_\varepsilon}^1 \frac{|-4\log(1-\eta_\varepsilon) - 2|\log r|(3-4\log(1-\eta_\varepsilon)) + 6|\log r|^2|^2}{r\log^4(1-\eta_\varepsilon)|\log\varepsilon|} dr \\ \text{(for some positive C)} \quad &\le \frac{C}{\log^4(1-\eta_\varepsilon)|\log\varepsilon|}\int_{1-\eta_\varepsilon}^1 \frac{\log^2(1-\eta_\varepsilon) + |\log r|^2(1+\log^2(1-\eta_\varepsilon)) + |\log r|^4}{r} dr \\ &= C\frac{-\log^3(1-\eta_\varepsilon) - \frac{1}{3}\log^3(1-\eta_\varepsilon)(1+\log^2(1-\eta_\varepsilon) - \frac{1}{5}\log^5(1-\eta_\varepsilon)}{\log^4(1-\eta_\varepsilon)|\log\varepsilon|} \\ &\le \frac{-C}{\log(1-\eta_\varepsilon)|\log\varepsilon|} = \mathrm{O}\left(\frac{\log|\log\varepsilon|}{|\log\varepsilon|}\right). \end{aligned}$$

最后，我们得到

$$\|\Delta u_{\varepsilon,0}\|_2 = 1 + \mathrm{O}\left(\frac{\log|\log\varepsilon|}{|\log\varepsilon|}\right).$$

如上所述，考虑归一化函数序列 $v_{\varepsilon,0} = \dfrac{u_\varepsilon}{\|\Delta u_{\varepsilon,0}\|_2} \in H^2_{0,rad}(B)$；我们证明 σ_α 的锐性，即验证对于任意 $\beta > 1$

$$\int_B e^{\beta\sigma_\alpha v_{\varepsilon,0}^2}|x|^\alpha\, dx \longrightarrow +\infty \quad \text{as } \varepsilon \to 0^+.$$

事实上，有

$$\omega_3 \int_0^1 e^{\beta\sigma_\alpha v_{\epsilon,0}^2}\, r^{3+\alpha} dr \geq \omega_3 \int_0^{\sqrt[4]{\varepsilon}} e^{\beta\sigma_\alpha v_{\epsilon,0}^2}\, r^{3+\alpha} dr = \omega_3 \int_0^{\sqrt[4]{\varepsilon}} e^{\beta\sigma_\alpha u_\epsilon^2 \|\Delta_{v_{\varepsilon,0}}\|_2^{-2}}\, r^{3+\alpha} dr$$

$$\geq \int_{\frac{\alpha+4}{4}|\log\varepsilon|}^{+\infty} \exp\left(\beta \cdot \frac{(\alpha+4)|\log\varepsilon|}{4\left(1+\mathrm{O}\left(\frac{\log|\log\varepsilon|}{|\log\varepsilon|}\right)\right)} - t\right) dt$$

$$= \exp\left(\frac{\alpha+4}{4}\left[(\beta-1)|\log\varepsilon| + \mathrm{O}(\log|\log\varepsilon|)\right]\right) \xrightarrow[\varepsilon\to 0^+]{} +\infty.$$

□

4 对称性破缺：定理 3 的证明

本节旨在证明，在考虑以下两个极大化问题时会出现对称性破缺现象

$$T_{\alpha,1} = \sup_{u\in H^2_{\mathcal{N}}(B)||\Delta u||_2=1} F_1(u), \quad T^0_{\alpha,1} = \sup_{u\in H^2_0(B)||\Delta u||_2=1} F_1(u),$$

也就是说，在整个空间 $H^2_{\mathcal{N}}(B)$ 上取上确界，严格大于限制在径向子空间上取相应的上确界：

$$T_{\alpha,1} > T^{rad}_{\alpha,1}, \quad T^0_{\alpha,1} > T^{0,rad}_{\alpha,1},$$

如果 α 足够大。

注 2. 注意，根据标准的紧性论证，当 $\sigma \in (0, 32\pi^2)$ 时，所有这些上确界均可达到（径向情形下，这个区间要大得多）。因此，存在一个非径向极大化子。相反，在一般情形下，我们不知道当 $\sigma = 32\pi^2$ 时上确界是否可达到。

严格不等式的证明依赖于对 $T_{\alpha,1}, T^0_{\alpha,1}$ 及其径向对应情形在 $\alpha \to +\infty$ 时的两种不同渐近估计。

我们的第一个结果是对任意 $m \geq 0$ 下 $T_{\alpha、m}$、$T^0_{\alpha、m}$ 的渐近估计。

命题 9（关于 $T_{\alpha、m}$ 和 $T^0_{\alpha、m}$的估计）。设 $\sigma \leq 32\pi^2$。那么存在$C > 0$ 使得

$$T_{\alpha,m}, T^0_{\alpha,m} \geq \frac{C}{\alpha^4}, \quad \text{for every} \quad m \in \mathbb{N}_0.$$

证明。设 u 是一个支集包含于 B 中的正光滑函数（最终严格包含），并且满足 $||\Delta u||_2 = 1.$。令 $u_\alpha(x) = u(\alpha(x - x_\alpha))$，其中 $x_\alpha = (1 - \frac{1}{\alpha}, 0, 0, 0)$。$u_\alpha$ 的支集包含于 $B_\alpha := B(x_\alpha, 1/\alpha)$，即以 x_α 为中心、半径为

$r_\alpha = 1/\alpha$，且 $B_\alpha \subset B$；此外， $\|\Delta u_\alpha\|_2 = 1$。因此，固定一个函数 $u \in H^2_{\mathcal{N}}(B)$：我们有

$$\begin{aligned} T_{\alpha,m} \geq F_m(u_\alpha) &= \int_{B_\alpha} |x|^\alpha \left(e^{\sigma|u_\alpha|^2} - \sum_{k=0}^{m} \frac{\sigma^k |u_\alpha|^{2k}}{k!} \right) dx \\ &\geq \left(1 - \frac{2}{\alpha}\right)^\alpha \int_{B_\alpha} \left(e^{\sigma|u_\alpha|^2} - \sum_{k=0}^{m} \frac{\sigma^k |u_\alpha|^{2k}}{k!} \right) dx \\ &= \left(1 - \frac{2}{\alpha}\right)^\alpha \frac{1}{\alpha^4} \int_{B} \left(e^{\sigma|u|^2} - \sum_{k=0}^{m} \frac{\sigma^k |u|^{2k}}{k!} \right) dx = \\ &= \frac{1 + \mathrm{o}(1)}{e^2 \alpha^4} \int_{B} \left(e^{\sigma|u|^2} - \sum_{k=0}^{m} \frac{\sigma^k |u|^{2k}}{k!} \right) dx \geq \frac{C}{\alpha^4}. \end{aligned}$$

同样的论证也适用于 $T^0_{\alpha,\ m}$。

□

现在我们来考察径向子空间上上确界的渐近估计。由于

命题 10 （关于 $T^{rad}_{\alpha\, m,}$ ，$T^{0,\ rad}_{\alpha\, m,}$ 的估计）。 设 $\sigma \leq 32\pi^2$ 和 $m \geq 1.$。那么存在 $C > 0$ 使得

$$T^{0,rad}_{\alpha,m}, T^{rad}_{\alpha,m} \leq \frac{C}{\alpha^{9/2}}, \quad \text{as} \quad \alpha \to +\infty.$$

证明。 由于 $H^2_{0,\ rad} \subset H^2_{\mathcal{N},\ rad}$，我们只考虑较大的空间。根据稠密性论证，我们可以考虑 $\mathcal{C}^2(B) \cap C(B)$ 中的径向函数。
证明主要依赖于反复应用分部积分公式，并结合一些针对具体情形的逐点估计。一个关键要求是处理满足 $u'(1) \leq 0$ 的正 径向函数。事实上，我们将看到，结合 Talenti比较原理和标准椭圆估计，可以将问题归结为径向递减 函数的情形。

事实上，让我们回顾 G. Talenti 的以下比较原理 [19]：设 $u,\ v$分别是下列问题的弱解

$$(P) \begin{cases} -\Delta v = f, & \text{in } \Omega \\ v = 0, & \text{on } \partial\Omega \end{cases} \quad \text{and} \quad (P^*) \begin{cases} -\Delta u = f^\sharp, & \text{in } \Omega^\sharp \\ u = 0, & \text{on } \partial\Omega^\sharp \end{cases}$$

其中 $f \in L^p(\Omega)$、 $p > N/2$。于是，我们得到逐点估计

$$u(|x|) \geq v^\sharp(|x|).$$

现在，根据稠密性论证，我们可以假设 $v \in \mathcal{C}^\infty(B) \cap \mathcal{C}(B)$ 是径向函数，使得 $v = 0$ on ∂B and $\Delta v \in L^2(B)$，并令 $f := -\Delta v$。由 L^2 范数在重排下的不变性，我们有

$$\|\Delta v\|_2 = \|f\|_2 = \|f^\sharp\|_2 = \|\Delta u\|_2$$

而

$$\int_B F(v)dx = \int_B F(v^\sharp)dx \le \int_B F(u)dx$$

对于任意连续、正且递增的 $F(\cdot)$，由卡瓦列里原理可知。最后请注意，由于 $v \in \mathcal{C}^\infty(B) \cap \mathcal{C}(B)$，因此 $f^\sharp$ 是利普希茨连续的，即 $f^\sharp \in \mathcal{C}^{0,\,1}(B)$。因此，根据标准椭圆理论（[10] 推论 6.9），$u \in \mathcal{C}^2(B)$。

从现在起，我们假设 $u \in \mathcal{C}^2(B) \cap \mathcal{C}(B)$ 是径向递减的，$\Delta u \in L^2(B)$，且 $u(1) = 0$ 和 $\|\Delta u\|_2 = 1$。按照通常的符号滥用约定，令

$$u(x) = u(r) = \frac{1}{2\sqrt{\omega_3(\alpha+4)}} w\left((\alpha+4)\log\frac{1}{r}\right), \text{ i.e. } w(t) := 2\sqrt{\omega_3(\alpha+4)}\, u(e^{-\frac{t}{\alpha+4}}).$$

那么 w 满足

$$\int_B |\Delta u|^2\, dx = \int_0^{+\infty} \left|\frac{\alpha+4}{2} w''(t) - w'(t)\right|^2 dt,$$

满足边界条件

$$w(0) = 0, \quad \lim_{t\to+\infty} w(t) = u(0) \in \mathbb{R}, \quad w(t) \ge 0$$

$$w'(t) = -2\sqrt{\frac{\omega_3}{\alpha+4}}\, r u'(r)\Big|_{r=e^{-\frac{2}{\alpha+4}t}} \quad \Rightarrow \quad w'(0) \in \mathbb{R}^+, \quad \lim_{t\to+\infty} w'(t) = 0, \quad w'(t) \ge 0$$

因为 u 光滑、径向递减且 $u(1) = 0$。
现在我们来证明 $w(t)$ 的一些逐点估计，后文将反复用到这些估计。首先，

$$\left|w(t) - \frac{\alpha+4}{2}\left[w'(t) - w'(0)\right]\right| = \left|\int_0^t \left(w'(s) - \frac{\alpha+4}{2} w''(s)\right) ds\right| \le \int_0^t \left|w' - \frac{\alpha+4}{2} w''\right| ds$$
$$\le \sqrt{t}\, \sqrt{\int_0^t \left|w' - \frac{\alpha+4}{2} w''\right|^2 ds} \le \sqrt{t},$$

因此

$$w'(t) - w'(0) \le \frac{2}{\alpha+4}\sqrt{t} + \frac{2}{\alpha+4} w(t). \tag{4.5}$$

正如第 3 节中已经观察到的那样，

$$1 \ge \int_B |\Delta u|^2\, dx = \int_0^{+\infty} \left(\frac{\alpha+4}{2} w''(t) - w'(t)\right)^2 dt$$
$$\ge -(\alpha+4)\int_0^{+\infty} w''(t) w'(t)\, dt = \frac{\alpha+4}{2}\left(w'(0)\right)^2,$$

以便

$$0 \le w'(0) \le \sqrt{\frac{2}{\alpha+4}}.$$

因此,

$$\int_0^{+\infty}(w')^2dt \le \int_0^{+\infty}\left[(w')^2+\frac{(\alpha+4)^2}{4}(w'')^2\right]dt+\frac{\alpha+4}{2}(w'(0))^2$$
$$=\int_0^{+\infty}\left(w'-\frac{\alpha+4}{2}w''\right)^2dt\le 1,$$

这直接意味着

$$w(t)=\int_0^t w'(s)ds\le\sqrt{t}\sqrt{\int_0^t(w'(s))^2ds}\le\sqrt{t}. \tag{4.6}$$

结合 (4.5) 与 (4.6) 可得

$$w'(t)\le w'(0)+\frac{2}{\alpha+4}(\sqrt{t}+w(t))\le\sqrt{\frac{2}{\alpha+4}}\left(1+2\sqrt{\frac{t}{\alpha+4}}\right). \tag{4.7}$$

现在我们来估计积分 $F_1(u)$。首先，对于任意 $\sigma\le 32\pi^2$,

$$\int_B\left(e^{\sigma u^2}-1-\sigma u^2\right)|x|^\alpha dx=\frac{\omega_3}{\alpha+4}\int_0^{+\infty}\left(e^{\frac{\sigma}{8\pi^2(\alpha+4)}w^2(t)}-1-\frac{\sigma}{8\pi^2(\alpha+4)}w^2(t)\right)e^{-t}\,dt$$

根据不等式

$$e^s-1-s\le s^2e^s,$$

我们有

$$\frac{\omega_3}{\alpha+4}\int_0^{+\infty}\left(e^{\frac{\sigma}{4\omega_3(\alpha+4)}w^2}-1-\frac{\sigma}{4\omega_3(\alpha+4)}w^2\right)e^{-t}\,dt$$
$$\le\frac{\sigma^2}{16\omega_3(\alpha+4)^3}\int_0^{+\infty}w^4e^{\frac{\sigma}{4\omega_3(\alpha+4)}w^2-t}.$$

Le现在我们进行分部积分；注意，由 (4.6) 可知，对于任意幂次 k ≥ 1

$$0\le\lim_{t\to+\infty}w^ke^{\frac{4}{\alpha+4}w^2-t}\le\lim_{t\to+\infty}t^ke^{-\frac{\alpha}{\alpha+4}t}=0.$$

因此，应用上述先前的估计（回忆 $w\ge 0$），对于任意 $\sigma\le 32\pi^2=16\omega_3$，我们得到

$$\frac{\sigma^2}{16\omega_3(\alpha+4)^3}\int_0^{+\infty}w^4e^{\frac{\sigma}{4\omega_3(\alpha+4)}w^2-t}\le\frac{16\omega_3}{(\alpha+4)^3}\int_0^{+\infty}w^4e^{\frac{4}{\alpha+4}w^2-t}$$
$$=\overbrace{-\frac{16\omega_3}{(\alpha+4)^3}w^4e^{\frac{4}{\alpha+4}w^2-t}|_0^{+\infty}}^{=0}+\frac{16\omega_3}{(\alpha+4)^3}\int_0^{+\infty}4w'w^3e^{\frac{4}{\alpha+4}w^2}\left[1+\frac{2w^2}{\alpha+4}\right]e^{-t}\,dt$$
$$\overset{(4.6),(4.7)}{\le}\frac{64\sqrt{2}\omega_3}{(\alpha+4)^{7/2}}\int_0^{+\infty}w^3e^{\frac{4}{\alpha+4}w^2}\left[1+\frac{2t}{\alpha+4}\right]\left[1+2\sqrt{\frac{t}{\alpha+4}}\right]e^{-t}\,dt$$
$$=\frac{64\sqrt{2}\omega_3}{(\alpha+4)^{7/2}}\int_0^{+\infty}w^3e^{\frac{4}{\alpha+4}w^2-t}\,dt+\frac{128\sqrt{2}\omega_3}{(\alpha+4)^{9/2}}\int_0^{+\infty}tw^3e^{\frac{4}{\alpha+4}w^2-t}\left[1+2\sqrt{\frac{t}{\alpha+4}}\right]dt$$
$$=I_1+I_2.$$

I_2 的估计可由（4.6）立即得到：

$$\begin{aligned} I_2 &\le \frac{C}{\alpha^{9/2}} \int_0^{+\infty} t^{5/2} e^{\frac{4}{\alpha+4}t - t} \left[1 + 2\sqrt{\frac{t}{\alpha+4}}\right] \, dt \\ &= \frac{C}{\alpha^{9/2}} \int_0^{+\infty} t^{5/2} e^{-\frac{\alpha}{\alpha+4}t} \left[1 + 2\sqrt{\frac{t}{\alpha+4}}\right] \, dt \\ &\le \frac{C}{\alpha^{9/2}} \int_0^{+\infty} t^{5/2} e^{-\frac{t}{2}} \left[1 + \sqrt{t}\right] \, dt \quad \text{if } \alpha \ge 8 \\ &\sim \frac{C}{\alpha^{9/2}} \quad \text{as } \alpha \to +\infty. \end{aligned}$$

关于 I_1，我们再次进行分部积分：

$$\begin{aligned} I_1 &= \overbrace{-\frac{64\sqrt{2}\omega_3}{(\alpha+4)^{7/2}} w^3 e^{\frac{4}{\alpha+4}w^2 - t}|_0^{+\infty}}^{=0} + \frac{64\sqrt{2}\omega_3}{(\alpha+4)^{7/2}} \int_0^{+\infty} w^2 w' e^{\frac{4}{\alpha+4}w^2} \left[3 + \frac{8}{\alpha+4}w^2\right] e^{-t} \, dt \\ &\overset{(4.6),(4.7)}{\le} \frac{128\omega_3}{(\alpha+4)^4} \int_0^{+\infty} w^2 e^{\frac{4}{\alpha+4}w^2} \left[1 + 2\sqrt{\frac{t}{\alpha+4}}\right] \left[3 + \frac{8}{\alpha+4}t\right] e^{-t} \, dt \\ &= \frac{128\omega_3}{(\alpha+4)^4} \int_0^{+\infty} w^2 e^{\frac{4}{\alpha+4}w^2 - t} \, dt + \frac{256\omega_3}{(\alpha+4)^{9/2}} \int_0^{+\infty} w^2 \sqrt{t} e^{\frac{4}{\alpha+4}w^2} \left[3 + \frac{8}{\alpha+4}t\right] e^{-t} \, dt \\ &= I_3 + I_4. \end{aligned}$$

如前面对 I_2 所做的那样，

$$\begin{aligned} I_4 &\le \frac{C}{\alpha^{9/2}} \int_0^{+\infty} t^{3/2} e^{\frac{4}{\alpha+4}t - t} \left[3 + \frac{8}{\alpha+4}t\right] \\ &\le \frac{C}{\alpha^{9/2}} \int_0^{+\infty} t^{3/2} e^{-\frac{t}{2}} \left[3 + 2t\right] \, dt \quad \text{if } \alpha \ge 8 \\ &\sim \frac{C}{\alpha^{9/2}} \quad \text{as } \alpha \to +\infty, \end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned} I_3 &= \overbrace{-\frac{128\omega_3}{(\alpha+4)^4} w^2 e^{\frac{4}{\alpha+4}w^2 - t}}^{=0} + \frac{256\omega_3}{(\alpha+4)^4} \int_0^{+\infty} w w' e^{\frac{4}{\alpha+4}w^2} \left[1 + \frac{4}{\alpha+4}w^2\right] e^{-t} \, dt \\ &\overset{(4.6),(4.7)}{\le} \frac{C}{\alpha^{9/2}} \int_0^{+\infty} \sqrt{t} e^{\frac{4}{\alpha+4}w^2} \left[1 + \frac{4}{\alpha+4}t\right] e^{-t} \, dt \\ &\overset{(4.6)}{\le} \frac{C}{\alpha^{9/2}} \int_0^{+\infty} \sqrt{t} e^{-\frac{\alpha}{\alpha+4}} \left[1 + \frac{4}{\alpha+4}t\right] \, dt \\ &\le \frac{C}{\alpha^{9/2}} \int_0^{+\infty} \sqrt{t} e^{-\frac{t}{2}} \left[1 + t\right] \, dt \sim \frac{C}{\alpha^{9/2}}. \end{aligned}$$

将所有估计结合起来，我们得到：对于任意径向递减的 $u \in \mathcal{C}^2(B) \cap \mathcal{C}(B)$, $\bar{}\Delta u \in L^2(B)$，满足 $u(1) = 0$ 和 $\|\Delta u\|_2 = 1$，以及任意 $\sigma \le 32\pi^2$，

$$\int_B \left(e^{\sigma u^2} - 1 - \sigma u^2\right) |x|^\alpha \, dx \le \frac{C}{\alpha^{9/2}} + o\left(\frac{1}{\alpha^{9/2}}\right) \quad \text{as } \alpha \to +\infty,$$

其中常数 C 与 u和 σ.无关。这立即得出：对于任意 $m \geq 1$，结论成立（因为 $F_m(u) \leq F_1(u)$）。 □

现在我们来完成定理 3 的证明。由命题 9,

$$T_{\alpha,m}, T^0_{\alpha,m} \geq \frac{C}{\alpha^4} \quad \text{as } \alpha \to +\infty$$

对于任意 $m \geq 1$。另一方面，由命题 10,

$$T^{rad}_{\alpha,m} \leq T^{rad}_{\alpha,1} \leq \frac{C}{\alpha^{9/2}} \ll \frac{C}{\alpha^4} \leq T_{\alpha,m} \quad \text{for any } \ m \geq 1,$$

类似地,

$$T^{0,rad}_{\alpha,m} \leq \frac{C}{\alpha^{9/2}} \ll \frac{C}{\alpha^4} \leq T^0_{\alpha,m} \quad \text{for any } \ m \geq 1.$$

□

致谢作者是以下机构的成员：*Gruppo Nazionale per l'Analisi Matematica, la Probabilit`a e le loro Applicazioni* (GNAMPA)，隶属*Istituto Nazionale di Alta Matematica* (INdAM)。C. Tarsi 部分获得 INdAM-GNAMPA 项目 2025 的资助：*Critical and limiting phenomena in nonlinear elliptic systems*；M. Calanchi 部分获得 INdAM-GNAMPA 项目 2025 的资助：*Problemi di ottimizzazione in PDEs da modelli biologici*。

参考文献

[1] D. R. Adams，*J. Moser*关于高阶导数的一个锐不等式，Annals of Mathematics，**128**(1988)，385–398。[2] A. Alvino，*Lorentz*空间中*Sobolev*不等式的一个极限情形，Rend. Ac- cad. Sci. Fis. Mat. Napoli **44**(1977)，105–112。[3] D. Bonheure，E. Serra，M.Tarallo，*Moser-Trudinger*不等式中极值函数的对称性及一个H´二维亨农型问题，Adv. Differential Equations **13** (2008)，105–138[4] M. Calanchi，*Trudinger-Moser*型的一些加权不等式，Analysis and Topology in Nonlinear Differential Equations，(2014) 163–174。[5] G. Chen，W. M. Ni，J. Zhou，非线性椭圆方程解的算法与可视化，Internat. J. Bifur. Chaos Appli. Sci. Engng.，**10**(2000)，1565–1612。[6] M. Calanchi，E. 特拉内奥，具有指数非线性泛函的非径向极大化子 $\mathbb{R}^2$，Advanced Nonlinear Studies，5 (2005)，337–350。[7] M. Calanchi，B. Ruf*Hardy-H*´亨农型椭圆系统的径向与非径向解 Calculus of Variations and Part. Diff. Eqs. 38 (2010)，第1-2期，111–133。

[8] F. Gladiali，M. Grossi，S. Neves，´维亨农方程的非径向解 $\mathbb{R}^N$，Adv. Math. 249 (2013)，1–36。[9] B. Gidas，Wei Ming Ni，L. Nirenberg 利用最大值原理研究对称性及其相关性质 Comm. Math. Phys. 68(3)，(1979) 209–243。[10] D. Gilbarg，N. S. Trudinger 二阶椭圆偏微分方程。数学经典丛书。Springer-Verlag，柏林，2001。1998年版重印。[11] M. ´亨农，球形恒星系统稳定性的数值实验，Astronom. Astrophys.，24 (1973)，229–238。[12] Guozhen Lu，Yunyan Yang 四维双拉普拉斯算子的Adams不等式与极值函数，Advances in Mathematics 220 (2009) 1135–1170。[13] D.E. Marshall 关于狄利克雷积分的一个锐不等式的新证明。Ark. Mat. 27 (1989)，131–137。[14] J. Moser，N. Trudinger不等式的一个锐形式，Indiana Univ. Math. J. 20 (1970/71)，1077-1092。[15] S.I. 波霍扎耶夫，情形下的Sobolev嵌入 $pl = n$，Proc.Tech. Sci. Conf. on Adv. Sci., Research 1964–1965，数学分部 (1965)，158–`170，莫斯科能源学院，莫斯科。[16] W. M. Ni，单位球上的一个非线性狄利克雷问题及其应用，Indiana Univ. Math. J.，31 (1982)，801–807。[17] S. Secchi，E. Serra，单位圆盘中具有指数增长问题的对称性破缺结果，Communications in Contemporary Mathematics 8 (2006)，823–839。[18] D. Smets，Su，M. Willem，亨农方程的非径向基态，Communications in Contemporary Mathematics，4 (2002)，467–480。[19] G. Talenti， $\Delta u \in L^2$ (B)，其中 u(1) $= 0$ 且 $\|\Delta u\|_2 = 1$ 椭圆方程与重排，Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. 3 (1976)，697–718。[20] C. Tarsi，Adams不等式与嵌入Zygmund空间的临界Sobolev嵌入，Potential Analysis，37 (2012)，353–385。[21] N.S. Trudinger，Orlicz空间嵌入及其若干应用，J. Math. Mech. 17 (1967)，473–483。[22] Z. Wang，双调和临界增长问题的非径向正解，Commun. Pure Appl. Anal.，11 (2012)，517–545。[23] V.I. Yudovich，与积分算子及椭圆方程解有关的一些估计，Dokl. Akad. Nauk. SSSR 138 (1961)，805–808。[24] Y. Zhang，N. Wang，Y. L¨u，J.Hao 临界Sobolev指数下亨农型双调和方程非径向解的存在性，Abstract and Applied Analysis Vol. 2014，http://dx.doi.org/10.1155/2014/684679。[25] J. Hao，Y. Zhang，X. Chen，具有临界增长的亨农型双调和方程的无穷多个尖峰解，Advanced nonlinear studies，15，(2015)，667–690。