arXiv:2512.17618v1 [math.AC] 19 Dec 2025

非同胚空间的同构 Loday 函子

伊戈尔·巴斯科夫

Abstract. 每个交换代数 A 都会导出一个表示$\mathcal{L}_A$，我们称之为 A 的 Loday 函子，它属于有限集及其满射构成的范畴 Ω。本文给出两个定义在 $\mathbb{C}$ 上的（无限维）非同构代数，它们的 Loday 函子同构——分别是 Möbius 带和圆柱面上的连续函数代数。

1. Introduction.

令 Ω 为一个范畴，其对象是集合 $\langle n\rangle = \{1,\dots,n\}$、$n \in \mathbb{N}$，态射为满射。域 k 上的非幺交换 k-代数 A 导出一个函子 $\mathcal{L}_A : \Omega \to \mathsf{Vect}_k$，它将对象 $\langle n\rangle$ 映射到向量空间 $A^{\otimes n}$，并将满射 $\sigma\colon \langle n\rangle \to \langle m\rangle$ 映射到线性映射 $\sigma^* : A^{\otimes n} \to A^{\otimes m}$,

$$a_1 \otimes \cdots \otimes a_n \mapsto b_1 \otimes \cdots \otimes b_m,$$

$$b_j = \prod_{i \in \sigma^{-1}(j)} a_i.$$

类似的函子曾在 [Lod92] 中被研究。

在 [Pod11] 中，Podkorytov 证明：如果对于代数闭域 k 上的有限维代数 A 和 B，函子 $\mathcal{L}_A$ 和 $\mathcal{L}_B$ 同构，那么代数 A 和 B 同构。

在本文中，我们给出了两个具有同构 Loday 函子但彼此不同构的代数，它们定义在 $\mathbb{C}$ 上。特别地，我们证明，圆柱面上的连续函数的 $\mathbb{C}$-代数与莫比乌斯带上的连续函数的 $\mathbb{C}$-代数具有同构的 Loday 函子。在离散情形下，[Pod20] 得到了一个相关结果。

目前尚不清楚能从函子 $\mathcal{L}_{C(X)}$ 中恢复关于空间 X 的哪些信息。根据 Gelfand–Kolmogorov 定理，如果对于紧 Hausdorff 空间 X 和 Y，代数 $C(X)$ 与 $C(Y)$ 作为代数同构，那么 X 和 Y 同胚。由定理 8 可知，从 $\mathcal{L}_{C(X)}$ 与 $\mathcal{L}_{C(Y)}$ 的同构中，不能得出空间 X 与 Y 同胚的结论。

致谢。本文的证明基于 [Pod20] 中的思想。

2. Projections and twists.

设 X 和 Y 为拓扑空间。用 $\langle Y^X \rangle$ 表示由所有连续映射 $X \to Y$ 在 $\mathbb{C}$ 上的线性张成。我们将 $\langle Y^X \rangle$ 的一个元素称为系综。一个系综

$$A = \sum_{i=1}^{n} u_i a_i \in \langle Y^X \rangle,$$

其中，$a_i : X \to Y$ 是连续映射，且 $u_i \in \mathbb{C}$，由此得到一个线性映射 $C(Y) \to C(X)$。此外，对于每个 $r \in \mathbb{N}$，这样的 A 都会诱导一个线性映射

$$A^{(r)} : C(Y)^{\otimes r} \to C(X)^{\otimes r}$$

其规则为

$$A^{(r)}(f_1 \otimes \cdots \otimes f_r) = \sum_{i=1}^{n} u_i (f_1 \circ a_i) \otimes \cdots \otimes (f_r \circ a_i).$$

如果对 X 中的任意两点 $x \neq y$，都存在一个函数 $f\colon X \to [0,1]$，使得 $f(x) = 0$ 且 $f(y) = 1$，则称拓扑空间 X 为完全豪斯多夫空间。

定义1。设 $r \in \mathbb{N}$。若一个系综 $A \in \langle Y^X \rangle$ 满足 $A^{(r)} = 0$，则称其为 r-相干的。

有一种简单的方法可以检验 A 是否是 r-相干的。对于任意有限集 $T \hookrightarrow X$，存在限制映射

$$\langle Y^X \rangle \to \langle Y^T \rangle, \qquad A \mapsto A|_T = \sum_{i=1}^{n} u_i (a_i|_T).$$

引理 1. 设 X 和 Y 是拓扑空间，$A \in \langle Y^X \rangle$ 是一个系综。若对于至多包含 r 个点的所有有限集 $T \subset X$，$A|_T = 0$ 都成立，则系综 A 是 r-相干的。若 Y 是完全豪斯多夫的，则逆命题也成立。

证明. 首先，假设对于至多包含 r 个点的所有有限集 $T \subset X$，$A|_T = 0$ 都成立。取 $T = \{x_1, \ldots, x_r\} \subset X$（其中某些点可能重合）。在系综 $A|_T$ 中重新分组这些指标，得到

$$A|_T = \sum_{\psi : T \to Y} v_\psi \cdot \psi,$$

其中求和遍历所有映射 $T \to Y$。那么，条件 $A|_T = 0$ 意味着，对于所有函数 $\psi : T \to Y$，都有 $v_\psi = 0$。取 f_1、……、$f_r \in C(Y)$ 和一点 $(x_1$、……、$x_r) \in X^r$。利用自然嵌入 $C(X)^{\otimes r} \hookrightarrow C(X^r)$，我们可以将元素 $A^{(r)}(f_1 \otimes \cdots \otimes f_r)$ 视为定义在 X^r 上的函数。于是有

$$A^{(r)}(f_1 \otimes \cdots \otimes f_r)(x_1, \ldots, x_r) = \sum_{i=1}^{n} u_i f_1(a_i(x_1)) \ldots f_r(a_i(x_r)).$$

再次对直和项重新分组，得到

$$A^{(r)}(f_1 \otimes \cdots \otimes f_r)(x_1, \ldots, x_r) = \sum_{\psi: T \to Y} v_\psi \cdot f_1(\psi(x_1)) \ldots f_r(\psi(x_r)) = 0.$$

反过来，假设对于所有，.....，，都有 $A^{(r)}(f_1 \otimes \cdots \otimes f_r) = 0$ $f_r \in C(Y)$。假设存在一个有限集 $T = \{x_1, \ldots, x_r\} \subset X$，满足 $A|_T \neq 0$。那么存在一个函数 φ: $T \to Y$，使得

$$\sum_{i:\, a_i|_T = \varphi} u_i = v_\varphi \neq 0.$$

定义集合 $S_j = \{a_i(x_j) \mid i = 1, \ldots..., n\}$。由于 Y 是完全豪斯多夫的，我们可以选取连续函数 f_j: $Y \to \mathbb{C}$、 $j = 1, \ldots..., r$，使得 $f_j(\varphi(x_j)) = 1$，并且 $f_j = 0$ 在 $S_j \setminus \{\varphi(x_j)\}$ 上成立。于是

$$A^{(r)}(f_1 \otimes \cdots \otimes f_r)(x_1, \ldots, x_r) =$$

$$\sum_{\substack{\psi: T \to Y, \\ \psi \neq \varphi}} v_\psi \cdot f_1(\psi(x_1)) \ldots f_r(\psi(x_r)) + v_\varphi \cdot f_1(\varphi(x_1)) \ldots f_r(\varphi(x_r)) = v_\phi \neq 0.$$

□

定义 2. 设 X 和 Y 为拓扑空间。以下函数集合称为投影与扭曲集合:

(1) p_n： $X \to X$, q_n： $Y \to Y$, $n \in \mathbb{N}$，满足恒等式

- $p_n^2 = p_n$,
- $p_i \circ p_j = p_j \circ p_i$,
- $q_n^2 = q_n$,
- $q_i \circ q_j = q_j \circ q_i$,
- 集合 Mov $p_n = \{x \in X \mid p_n(x) \neq x\}$ 两两不相交,
- 移动集 $q_n = \{y \in Y \mid q_n(y) \neq y\}$ 两两不相交。 (2) h_n： $X \to Y$， h_n： $Y \to X$， $n \in \mathbb{N}$，满足以下恒等式
- $q_j \circ h_i = h_i \circ p_j$,
- $p_j \circ h_i = h_i \circ q_j$,
- $h_j \circ h_i = p_j \circ p_i$,
- $h_i \circ h_j = q_i \circ q_j$。

如果存在这样一组映射，我们就说 X 和 Y 通过投影和扭曲相连。

在定理 8 中，我们证明，如果 X 和 Y 通过投影与扭曲相连，那么函子 $\mathcal{L}_{C(X)}$ 和 $\mathcal{L}_{C(Y)}$ 同构。

定义这些集合

$$Z_n = \prod_{i=1}^{n} (1 - p_i) \in \langle X^X \rangle, \qquad \bar{Z}_n = \prod_{i=1}^{n} (1 - q_i) \in \langle Y^Y \rangle,$$

其中，乘积表示复合，1 表示恒等映射。我们还设定 $Z_0 = 1$ 和 $Z_0 = 1$。

由于 p_n 和 q_n 是幂等元，元素 $1-p_n$ 和 $1-q_n$ 也是幂等元，因此 Z_n 和 Z_n 是幂等元。

引理 2. 我们有如下恒等式

$$Z_0p_1 + Z_1p_2 + \cdots + Z_{n-1}p_n = 1 - Z_n,$$
$$\bar{Z}_0q_1 + \bar{Z}_1q_2 + \cdots + \bar{Z}_{n-1}q_n = 1 - \bar{Z}_n$$

对于 $n \in \mathbb{N}$。

证明。 我们对 $n \geq 1$ 使用归纳法证明第一个恒等式。基例$n = 1$ 显然成立。假设该恒等式对 $n-1$ 成立。我们有

$$Z_0p_1 + Z_1p_2 + \cdots + Z_{n-2}p_{n-1} + Z_{n-1}p_n =$$
$$= 1 - Z_{n-1} + Z_{n-1}p_n = 1 - Z_{n-1}(1-p_n) = 1 - Z_n.$$

第二个恒等式的证明类似。 □

接下来，定义这些集合

$$T_n = \sum_{i=1}^{n} \bar{Z}_{i-1}h_i \in \langle Y^X \rangle, \qquad \bar{T}_n = \sum_{i=1}^{n} Z_{i-1}\bar{h}_i \in \langle X^Y \rangle.$$

引理 3. 对于任意 $n \in \mathbb{N}$，我们有以下恒等式

$$T_n\bar{T}_n = 1 - \bar{Z}_n, \qquad \bar{T}_nT_n = 1 - Z_n.$$

证明。我们有

$$T_n\bar{T}_n = \left(\sum_{i=1}^{n} \bar{Z}_{i-1}h_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} Z_{i-1}\bar{h}_i\right) = \sum_{i,j=1}^{n} \bar{Z}_{i-1}h_iZ_{j-1}\bar{h}_j.$$

利用投影和扭曲的性质，我们可以将 h_iZ_{j-1} 交换为 $Z_{j-1}h_i$并化简，得到

$$T_n\bar{T}_n = \sum_{i,j=1}^{n} \bar{Z}_{i-1}\bar{Z}_{j-1}h_i\bar{h}_j = \sum_{i,j=1}^{n} \bar{Z}_{i-1}\bar{Z}_{j-1}q_iq_j.$$

将此和拆分为对角和与非对角和：

$$T_n\bar{T}_n = \sum_{i=1}^{n} \bar{Z}_{i-1}\bar{Z}_{i-1}q_iq_i + \sum_{i,j=1,\ i\neq j}^{n} \bar{Z}_{i-1}\bar{Z}_{j-1}q_iq_j.$$

对于对角和，我们得到

$$\sum_{i=1}^{n} \bar{Z}_{i-1}\bar{Z}_{i-1}q_iq_i = \sum_{i=1}^{n} \bar{Z}_{i-1}q_i = 1 - \bar{Z}_n$$

根据引理 2。为处理非对角和，考虑其中一个加项

$$\bar{Z}_{i-1}\bar{Z}_{j-1}q_iq_j,$$

其中 $i > j$ （情形 $i < j$ 类似）。注意，元素 Z_{i-1} 含有因子 $1-q_j$。现在，由于所有映射 q_i 彼此可交换，

¯我们有 $Z_{i-1}q_j = 0$，因此整个非对角线求和为零。第二个恒等式类似。□

¯**引理 4.** 集合 Z_{n+1} 和 Z_{n+1} 是 n-相干的。

证明。我们证明 Z_{n+1} 是 n-相干的。根据引理 1，只需证明，对于任意由至多 n 个点组成的有限集 $T \subset X$，其限制$Z_{n+1}|_T$为零。根据定义，集合 Mov p_i 两两不相交，因此存在j使得 Mov $p_j \cap T = \emptyset$。因此，$(1-p_j)|_T = 0$，从而 $Z_{n+1}|_T = 0$。□

推论 5. 集合 $\bar{T}_{n+1}T_{n+1}$ 在 $C(X)^{\otimes n}$上诱导恒等映射，而集合 $T_{n+1}\bar{T}_{n+1}$ 在 $C(Y)^{\otimes n}$上诱导恒等映射。

证明。由引理 3 和引理 4 得出。□

引理 6。 对于 $r \in \mathbb{N}$，我们有

$$T_{r+1}^{(r-1)} = T_r^{(r-1)}.$$

¯证明。考虑系综 $T_{r+1} - T_r = Z_r h_{r+1}$。我们有

$$T_{r+1}^{(r-1)} - T_r^{(r-1)} = \bar{Z}_r^{(r-1)} h_{r+1}^{(r-1)} = 0$$

根据引理 4，有 $\bar{Z}_r^{(r-1)} = 0$。□

取任意满射 $\sigma : \langle r \rangle \to \langle r-1 \rangle$。显然，对于任意系综 $A \in \langle Y^X \rangle$，下图可交换

$$\begin{array}{ccc} C(Y)^{\otimes r} & \xrightarrow{\sigma^*} & C(Y)^{\otimes r-1} \\ \downarrow{\scriptstyle A^{(r)}} & & \downarrow{\scriptstyle A^{(r-1)}} \\ C(X)^{\otimes r} & \xrightarrow{\sigma^*} & C(X)^{\otimes r-1}. \end{array} \tag{1}$$

引理 7。 下方方形图表是交换的

$$\begin{array}{ccc} C(Y)^{\otimes r} & \xrightarrow{\sigma^*} & C(Y)^{\otimes r-1} \\ \downarrow{\scriptstyle T_{r+1}^{(r)}} & & \downarrow{\scriptstyle T_r^{(r-1)}} \\ C(X)^{\otimes r} & \xrightarrow{\sigma^*} & C(X)^{\otimes r-1}. \end{array}$$

证明。由引理 6 可知，只需证明该方块

$$\begin{array}{ccc} C(Y)^{\otimes r} & \xrightarrow{\sigma^*} & C(Y)^{\otimes r-1} \\ \downarrow{\scriptstyle T_{r+1}^{(r)}} & & \downarrow{\scriptstyle T_{r+1}^{(r-1)}} \\ C(X)^{\otimes r} & \xrightarrow{\sigma^*} & C(X)^{\otimes r-1} \end{array}$$

是交换的，这可由一般情形 (1) 得出。□

定理 8. 设 X 和 Y 是由投影和扭曲连接的拓扑空间。那么，*Loday* 函子 $\mathcal{L}_{C(X)}$ 和 $\mathcal{L}_{C(Y)}$ 同构。

证明. 定义态射 $\Phi\colon\ \mathcal{L}_{C(X)} \to \mathcal{L}_{C(Y)}$，其第 r 个分量$\Phi\colon\ C(X)^{\otimes r} \to C(Y)^{\otimes r}$ 为 $\bar{T}^{(r)}_{r+1}$；并定义 $\Psi\colon \mathcal{L}_{C(Y)} \to \mathcal{L}_{C(X)}$，其第 r 个分量 $\Psi\colon\ C(Y)^{\otimes r} \to C(X)^{\otimes r}$ 为 $T^{(r)}_{r+1}$。我们有如下图表

$$\begin{array}{ccccccc}
C(X) & \rightleftarrows & C(X)^{\otimes 2} & \rightleftarrows & C(X)^{\otimes 3} & \rightleftarrows & \cdots \\
\Phi\downarrow\uparrow\Psi & & \Phi\downarrow\uparrow\Psi & & \Phi\downarrow\uparrow\Psi & & \\
C(Y) & \rightleftarrows & C(Y)^{\otimes 2} & \rightleftarrows & C(Y)^{\otimes 3} & \rightleftarrows & \cdots
\end{array}$$

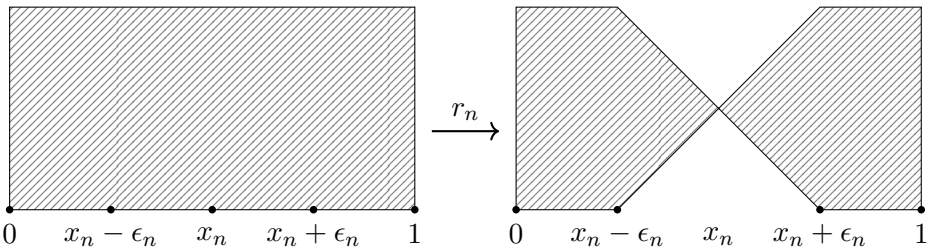
其中，对于所选满射 $\sigma\colon \langle r\rangle \to \langle r-1\rangle$，每个方块都是交换的。由推论 5 可知，竖直映射都是同构。因此，Φ 和 Ψ 是 Loday 函子的互逆自然同构。□

3. The cylinder and the Möbius strip.

本节将说明，圆柱面与 M¨比乌斯带通过投影与扭曲相互联系。根据定理 8，这两个非同胚空间具有同构的 Loday 函子。

将圆柱面 X 定义为 $[0,1]\times[0,1]$ 的商空间，其中通过 $(0,\ y)\ \sim\ (1,\ y)$ 识别竖直边；将 M¨比乌斯带 Y 定义为 $[0,1]\times[0,1]$ 的商空间，其中通过 $(0,\ y)\ \sim (1,\ 1-y)$ 识别竖直边。

设定 $x_n = \dfrac{1}{n+1}$；选择 $\epsilon_n > 0$，使得对于任意 $n \neq m$，区间 $(x_n-\epsilon_n,\ x_n+\epsilon_n)$ 和 $(x_m-\epsilon_m,\ x_m+\epsilon_m)$ 都不相交。观察下图，将右侧的空间记为 $R_n \subset [0,1]\times[0,1]$，并将 r_n 记为：$[0,1]\times[0,1] \to R_n$，一个关于直线 $y=\frac{1}{2}$ 对称的竖直收缩。



复合

$$[0,1]\times[0,1] \xrightarrow{r_n} R_n \hookrightarrow [0,1]\times[0,1]$$

得到映射 $p_n\colon\ X \to X$ 和 $q_n\colon\ Y \to Y$。

将 R_n 的右半部分的半扭转记为 $\gamma_n : R_n \to R_n$，

$$\gamma_n(x,y) = \begin{cases} (x,y), & 0 \le x \le x_n, \\ (x,1-y), & x_n \le x \le 1. \end{cases}$$

复合

$$[0,1]\times[0,1] \xrightarrow{r_n} R_n \xrightarrow{\gamma_n} R_n \hookrightarrow [0,1]\times[0,1]$$

¯产生映射 $h_n\colon\ X \to Y$和 $h_n\colon\ Y \to X$。

读者可以轻松验证，这组映射定义了一组投影和扭曲。

References

[Lod92] Loday, J.-L.《循环同调》，Springer-Verlag，1992。[Pod11] Podkorytov, S.S.《交换代数与有限集范畴的表示》。 *Zapiski Nauchnykh Seminarov POMI*，388（2011），189–195。[Pod20] Podkorytov, S.S.《关于 M ¨ *Zapiski Nauchnykh* obius 皇冠的代数》。，() ，–。 *Seminarov POMI* 492 2020 149 156

St. Petersburg Department of Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences*E-mail address*:
baskovigor@pdmi.ras.ru