arXiv:2512.17619v1 [math.AC] 19 Dec 2025

持久图与超图上的持久交换代数

Faisal Suwayyid*[1]和 Guo-Wei Wei†[2, 3, 4][1]法赫德国王石油与矿业大学数学系，宰赫兰 31261，沙特阿拉伯。[2]密歇根州立大学数学系，密歇根州 48824，美国。[3]密歇根州立大学电气与计算机工程系，密歇根州 48824，美国。[4]密歇根州立大学生物化学与分子生物学系，密歇根州 48824，美国。

2025年12月22日

摘要

我们引入一种持久交换代数，用于研究图与超图的边理想在滤过下的代数演化与组合演化。基于持久 Stanley–Reisner 理论（PSRT），我们提出持久边理想的概念，并分析图或超图滤过中的分次贝蒂数。为开展这项分析，我们建立 Hochster 公式的持久扩展，从而给出代数持久性与拓扑持久性之间的函子对应。我们还考察了持久情形下贝蒂分裂的行为，并证明了一个一般不等式，将经典分裂结果推广到单项式理想的滤过。受图论解释的启发，我们引入持久化极小顶点覆盖，用以编码演化中的图或超图内组合依赖关系的时间结构。对无比对基因组分类和分子异构体鉴别的应用，展示了持久边理想作为代数不变量的可解释性与表征能力，架起了组合交换代数与数据科学之间的桥梁。

目录

1 引言 **2**

2 预备知识 **3**

2.1 分次与多重分次贝蒂数.3 2.2 边理想与独立复形.4

3 模块与单项式理想的持久分次贝蒂数 **12**

*suwayyid@msu.edu
†weig@msu.edu

4 边理想的持久极小素理想 16 5 超图、边理想与面理想 17 6 应用 186.1 应用：基于持久化边理想的基因组分类.18 6.2 分子表示.20

7 讨论 21 8 结论 22

1 引言

拓扑数据分析（TDA）为从高维复杂数据中提取拓扑结构提供了严谨的框架。其中最强大的工具之一是持久（上）同调，它追踪一族单纯复形在滤过 $[1,\ 2,\ 3]$ 下的拓扑特征——连通分支、圈和更高维的空洞——如何演变。基于滤过的构造（例如 Vietoris–Rips 复形和 Čech复形）能够在多个尺度上编码数据，生成持久模，其条形码和图可量化这些特征的持续时间 $[4,\ 5]$。持久同调及其变体已成功应用于各种问题，从蛋白质折叠、药物发现到信号处理和材料科学 $[6,\ 7,\ 8,\ 9]$。尽管取得了成功，同调方法只能捕捉拓扑变化，无法检测某些结构差异或非拓扑差异——例如，无法区分数据中的五元环和六元环 $[10,\ 11]$。

组合交换代数（CCA）也推动了平行的代数发展，它将组合学与单项式理想的代数联系起来。Stanley–Reisner 对应将单纯复形编码为平方自由单项式理想，而 Hochster 公式则用诱导子复形的约化上同调来表达其分次贝蒂数[12, 13, 14]。这种对应架起了代数几何、拓扑与组合学之间的桥梁，并提供了可补充拓扑不变量的精细代数不变量。

在这一基础上，持久 Stanley–Reisner 理论（PSRT） [15]通过研究滤过下 Stanley–Reisner 理想的演变，统一了持久同调与组合交换代数。PSRT 引入了持久分次 Betti 数、持久 f 和 h 向量，以及面持久条形码，并证明了与经典持久同调中类似的稳定性定理。这些不变量捕捉了单纯复形中多尺度的代数变化，为基于拓扑的持久性方法提供了具有代数基础的替代方案。

PSRT 框架推动了持久交换代数这一更广泛研究方向的发展，而该方向是交换代数学习近期多项进展的基础。值得注意的是，交换代数k学（CAKL）框架 [16] 将持久代数不变量应用于基因组分类和病毒系统发育；而交换代数机器学习（CAML） [17] 则将这一范式拓展至蛋白质–配体结合亲和力预测。交换代数在预测蛋白质-核酸结合亲和力方面取得了成功 [18]。近期，交换代数神经网络（CANet） [19] 利用从 DNA 数据中提取的持久代数描述符，揭示了疾病的遗传起源。分次Betti曲线也已在计算生物学中得到探索 [20]。此外，已有研究对持久交换代数、持久同调和拓扑谱理论进行了比较 [21]。总而言之，这些研究表明，交换代数中的持久性为跨分子和生物领域的多尺度学习提供了统一、可解释且可扩展的数学基础。

本文聚焦于滤过下边理想的代数与组合演变，并由此引入图和超图的持久边理想这一概念。为奠定其理论基础，我们将 Hochster 公式推广到持久情形，通过子复形上同调中的诱导映射，将代数持久性与拓扑持久性联系起来。我们进一步研究了贝蒂分裂在滤过过程中的表现，并证明了一个一般不等式，将经典分解原理推广到持久情形。此外，我们定义了持久化极小顶点覆盖，用以编码演变中的图内组合依赖关系的时间动态。这些进展为边理想建立了持久Betti理论，连接了持久性在代数、拓扑和图论方面的内容，并

展示了其在基因组分类和分子异构体鉴别应用中的可解释性与可表示性。

2 预备知识

2.1 分次与多重分次贝蒂数

设 $S = k[x_1, \dots, x_n]$ 是域 k上的多项式环。全文中，我们在 S上使用标准$\mathbb{Z}$–分次，$\deg(x_i) = 1$，并考虑有限生成的 $\mathbb{Z}$–分次 S–模。

给定一个有限生成的 $\mathbb{Z}$–分次 S–模 M，其最小分次自由分解以尊重分次的方式封装了 M 的同调信息：

$$0 \longleftarrow M \longleftarrow \bigoplus_{j\in\mathbb{Z}} S(-j)^{\beta_{0,j}(M)} \longleftarrow \bigoplus_{j\in\mathbb{Z}} S(-j)^{\beta_{1,j}(M)} \longleftarrow \cdots \longleftarrow \bigoplus_{j\in\mathbb{Z}} S(-j)^{\beta_{i,j}(M)} \longleftarrow \cdots \longleftarrow 0.$$

整数 $\beta_{i,\,j}(M) \in \mathbb{N}$是 M的分次贝蒂数；等价地，它们记录了导出函子 Tor 的分次部分：

$$\beta_{i,j}(M) = \dim_k\big(\mathrm{Tor}_i^S(M,k)_j\big).$$

对所有内部分次求和，可得总第 i–个贝蒂数，

$$\beta_i(M) := \sum_{j\in\mathbb{Z}} \beta_{i,j}(M),$$

它衡量极小分解中第 i 步的总体大小。

保留完整的多重次数数据通常很方便。赋予 S 标准的 $\mathbb{Z}^n$ 分次，其中 $\deg x_r = \mathbf{e}_r$，并令 M 为有限生成的 $\mathbb{Z}^n$ 分次 S 模。多重分次贝蒂数定义为

$$\beta_{i,\alpha}(M) := \dim_k\big(\mathrm{Tor}_i^S(M,k)_\alpha\big) \qquad (\alpha \in \mathbb{Z}^n).$$

从多重分次情形转到单分次情形，相当于通过权映射 $|\alpha| := \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$ 进行粗化；这两个概念通过以下关系相容：

$$\beta_{i,j}(M) = \sum_{|\alpha|=j} \beta_{i,\alpha}(M).$$

因此，分次不变量是将所有具有相同总权重的多重次数所对应的贡献相加得到的。

贝蒂数与正合列之间的相互作用体现了 Tor 的函子性。对于分次 S 模的短正合列

$$0 \to N \to M \to Q \to 0,$$

按次数考察，Tor中的长正合序列为

$$\cdots \longrightarrow \mathrm{Tor}_i^S(N,k)_j \longrightarrow \mathrm{Tor}_i^S(M,k)_j \longrightarrow \mathrm{Tor}_i^S(Q,k)_j \longrightarrow \mathrm{Tor}_{i-1}^S(N,k)_j \longrightarrow \cdots$$

对所有的 $i \geq 0$ 和 $j \in \mathbb{Z}$ 均成立。正合性直接推出次可加性

$$\beta_{i,j}(M) \ \leq \ \beta_{i,j}(N) \ + \ \beta_{i,j}(Q) \qquad \text{for all } i, j,$$

a并且，对 j 求和后，可得关于总贝蒂数的相应结论 rs,

$$\beta_i(M) \ \leq \ \beta_i(N) \ + \ \beta_i(Q) \qquad (i \geq 0).$$

在序列分裂（等价地， $M \cong N \oplus Q$ 作为分次模）这一特殊情形下，逐次长正合序列分解，可加性严格成立:

$$\beta_{i,j}(M) \ = \ \beta_{i,j}(N) \ + \ \beta_{i,j}(Q) \qquad \text{for all } i, j.$$

此外，假设 M 是 S–平坦的。那么对所有 $i \geq 1$, $\mathrm{Tor}_i^S(M,\ k) = 0$ ，并且 $- \otimes_S k$ 在给定的短正合列上是正合的。因此，Tor 中的长正合序列按 $j \in \mathbb{Z}$ 逐次分解为同构:

$$\mathrm{Tor}_i^S(Q, k)_j \ \cong \ \mathrm{Tor}_{i-1}^S(N, k)_j \qquad \text{for all } i \geq 1,$$

因此

$$\beta_{i,j}(Q) \ = \ \beta_{i-1,j}(N) \qquad (i \geq 1,\ j \in \mathbb{Z}).$$

对 j 求和，可得总贝蒂数的相应恒等式:

$$\beta_i(Q) = \beta_{i-1}(N) \ (i \geq 1).$$

所有结论在多重分次情形下仍然成立。在这种情况下，需要将 j 替换为多重次数 u。

分次与多重分次贝蒂数刻画了 syzygy 在各个次数中的规模与分布；多重分次数据细化了单分次图景，而正合列则控制这些不变量在扩张与直和之间的比较。关于交换代数与同调代数的全面背景知识及基础结果，请读者参阅经典著作 [12, 13, 22, 23]。

2.2 边理想与独立复形

固定一个域 k，并记 $S = k[x_1, \ldots, x_n]$ 为标准的 $\mathbb{N}$–分次多项式环，其中 $\deg x_i = 1$。本文始终假设所有图都是有限简单图（没有环或重边），且所有单项式理想都包含在 S 中。

定义 2.1（边理想）。设 $G = (V,\ E)$ 是一个顶点集为 $V = \{1, \ldots, n\}$ 的有限简单图。G 的边理想是平方自由单项式理想

$$I(G) \ := \ \left(x_i x_j \ \middle| \ \{i, j\} \in E \right) \ \subseteq \ S.$$

上述定义只是将 G 的边集编码为 S 中次数为 2 的平方自由生成元。根据构造， $I(G)$ 由次数为 2 的平方自由单项式生成（每条边对应一个）。

记录平方自由单项式理想的一个基本性质很方便，它可以直接应用于边理想。

命题 2.2（平方自由单项式理想是根理想）。如果 $I \subseteq S$ 由平方自由单项式生成，那么 I 是根理想；等价地，$\sqrt{I} = I$。

特别是，每个 y 边理想可规范地描述为单项式素理想的交 .

推论 2.3 (素理想交分解， [24])。对于任意图 G，边理想 $I(G)$ 是根理想。因此，它可分解为素理想的交（且该分解不可约冗余）：

$$I(G) \;=\; \bigcap_{t=1}^{r} \mathfrak{p}_t, \qquad \textit{with each } \mathfrak{p}_t \textit{ a monomial prime of } S.$$

转而使用顶点覆盖的语言后，所讨论的分解便有了清晰的图论表述。

定义 2.4（顶点覆盖与极小顶点覆盖）。子集 $C \subseteq V$ 是 G 的顶点覆盖，如果 G 的每条边都至少包含一个来自 C 的顶点。若顶点覆盖 C 的任何真子集都不是顶点覆盖，则称 C 为极小顶点覆盖。

直观地说，顶点覆盖从每条边中选取一个端点。转到理想的语言， $\mathfrak{p}_C := \langle x_i : i \in C\rangle$ 恰好消去这些变量，因此包含每个满足 $\{i,j\} \in E$ 的二次生成元 x_ix_j 。C 的极小性对应于在 $I(G)$ 之上的极小素性。我们将其记录如下。

定理 2.5。设 $G = (V、E)$ 是一个有限简单图，其中有 $V = \{1,\dots,n\}$，且令 $S = k[x_1,\dots,x_n]$。记其边理想为

$$I(G) \;=\; \langle\, x_ix_j \;:\; \{i,j\} \in E \,\rangle \;\subseteq\; S.$$

对于 $C \subseteq V$，记作 $\mathfrak{p}_C := \langle x_i : i \in C\rangle$。那么素理想 $\mathfrak{p} \subseteq S$ 在 $I(G)$ 上极小，当且仅当 $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_C$ 对于某个 G 的极小顶点覆盖 C 成立。

证明。（⇒）设 $\mathfrak{p}$ 是包含于 $I(G)$ 上的极小素理想。令

$$C \;:=\; \{\, i \in V \;:\; x_i \in \mathfrak{p} \,\}.$$

我们断言 C 是一个顶点覆盖。事实上，如果 $\{i,j\} \in E$，则 $x_ix_j \in I(G) \subseteq \mathfrak{p}$，由于 $\mathfrak{p}$ 是素理想，因此 $x_i \in \mathfrak{p}$ 或 $x_j \in \mathfrak{p}$，即 $\{i,j\} \cap C \neq \varnothing$。所以 C 与每条边都有交，故 C 是一个顶点覆盖。因此 $I(G) \subseteq \mathfrak{p}_C$（因为每个生成元 x_ix_j 在 C 中都有一个端点），并且根据构造有 $\mathfrak{p}_C \subseteq \mathfrak{p}$（因为所有满足 $i \in C$ 的 x_i 都在 $\mathfrak{p}$ 中）。于是 $I(G) \subseteq \mathfrak{p}_C \subseteq \mathfrak{p}$。$\mathfrak{p}$ 在 $I(G)$ 上的极小性迫使 $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_C$。
还需证明 C 是极小顶点覆盖。假设并非如此；那么存在 $i_0 \in C$，使得 $C' := C \setminus \{i_0\}$ 仍是一个顶点覆盖。但这样一来， $I(G) \subseteq \mathfrak{p}_{C'} \subsetneq \mathfrak{p}_C = \mathfrak{p}$，这与 $\mathfrak{p}$ 在 $I(G)$ 上的极小性相矛盾。因此， C 是一个极小顶点覆盖。

(⇐) 设 $C \subseteq V$ 是一个极小顶点覆盖。理想 $\mathfrak{p}_C = \langle x_i : i \in C\rangle$ 是 S 的一个单项式素理想。由于 C 与每条边都有交，每个 $I(G)$ 的生成元 x_ix_j 都含有 $i \in C$ 或 $j \in C$，因此 $x_ix_j \in \mathfrak{p}_C$；从而 $I(G) \subseteq \mathfrak{p}_C$。

为证明其极小性，设 $\mathfrak{q}$ 是满足 $I(G) \subseteq \mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{p}_C$ 的素理想。令 $D := \{\, i \in V : x_i \in \mathfrak{q} \,\}$。如上所述，对于每条边 $\{i,j\} \in E$，都有 $x_ix_j \in I(G) \subseteq \mathfrak{q}$，因此由素性可知 $x_i \in \mathfrak{q}$ 或 $x_j \in \mathfrak{q}$，从而 D 是一个顶点覆盖。此外，$\mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{p}_C$ 意味着 $D \subseteq C$。由 C 作为顶点覆盖的极小性可知，我们

必须有 $D = C$。因此 $\mathfrak{q} = \langle x_i : i \in D \rangle = \mathfrak{p}_C$，这表明 $I(G)$ 与 $\mathfrak{p}_C$ 之间不可能存在由素理想给出的真包含。因此 $\mathfrak{p}_C$ 是 $I(G)$ 上的极小素理想。

综合两个方向，$I(G)$ 的极小素理想恰好是满足 C 为 G的极小顶点覆盖的 $\mathfrak{p}_C$。

□

由于 Stanley–Reisner 对应，从边理想过渡到单纯复形通常既有成效又很自然：每个平方自由单项式理想 $I \subseteq S = k[x_1, \ldots, x_n]$ 都是某个唯一的、定义在 $[n] = \{1, 2, \cdots, n\}$上的单纯复形 Δ 的 Stanley–Reisner 理想 I_Δ，其中

$$I_\Delta = \langle x^\sigma : \sigma \notin \Delta \rangle.$$

对于定义在 $[n]$ 上的图 G，Δ 的标准选择是独立复形 Ind(G)，其面是 G的独立集。这一对应将 S/I的代数不变量从G转化为 Ind(G) 的拓扑/组合不变量，具体对应关系由 Hochster 公式给出。

定义 2.6（独立复形）。G的独立复形（或稳定集复形）是单纯复形

$$\mathrm{Ind}(G) := \{ \sigma \subseteq V \mid \sigma \text{ contains no edge of } G \}.$$

等价地，Ind(G) 的面就是 G 中的独立集。

通过这一对应，边理想可视为 Stanley–Reisner 理想。

命题 2.7 (边理想作为 Stanley–Reisner 理想，[25])。设 I_Δ 表示底集为 V 的单纯复形 Δ 的 *Stanley–Reisner* 理想，即

$$I_\Delta = \big(x_F \mid F \subseteq V,\ F \notin \Delta\big) \quad \textit{with } x_F := \prod_{i \in F} x_i.$$

那么对于任意图 G，

$$I(G) = I_{\mathrm{Ind}(G)}.$$

特别地，$\mathrm{Ind}(G)$ 的极小非面恰好是 G 的边，而 $I_{\mathrm{Ind}(G)}$ 的极小单项式生成元则是 $I(G)$ 的边单项式。

最后，我们为后续的同调计算引入一些记号。设 Δ 是一个底集为$V = \{1, \ldots, n\}$ 的单纯复形，并将其 Stanley–Reisner 环记为 S/I_Δ。对于 $W \subseteq V$，记

$$\Delta_W := \{ \sigma \in \Delta \mid \sigma \subseteq W \}$$

W上的诱导子复形。由 Hochster 公式可知，S/I_Δ 的分次贝蒂数和多重次数贝蒂数由这些诱导子复形的（上）同调[26]所决定。令 $\{\mathbf{e}_1, \ldots\ldots, \mathbf{e}_n\}$ 为 $\mathbb{Z}^n$的标准基。对于 $W \subseteq V$，将其示性多重次数$\mathbf{1}_W \in \mathbb{Z}^n$ 定义为

$$\mathbf{1}_W := \sum_{i \in W} \mathbf{e}_i.$$

在后续各节中，我们将采用这一观点，不再另行说明。

定理 2.8 (Hochster 公式（多分次形式）， [13])。 设 $S = k[x_1, \dots, x_n]$ 带有$\mathbb{Z}^n$–分次，且 $\deg(x_i) = \mathbf{e}_i$，并设 Δ 是以 $[n] = \{1, \dots, n\}$为顶点集的单纯复形。记 I_Δ 为 ***Stanley–Reisner*** 理想，且 $k[\Delta] = S/I_\Delta$。对于 $W \subseteq [n]$，令 $\mathbf{1}_W \in \{0,1\}^n$ 表示其示性多重次数，并令 $\Delta_W := \{\sigma \in \Delta \mid \sigma \subseteq W\}$。那么对于所有 $i \geq 0$ 和 $W \subseteq [n]$，

$$\beta_{i,\mathbf{1}_W}\big(k[\Delta]\big) \;=\; \dim_k\Big(\operatorname{Tor}_i^S\big(k[\Delta], k\big)_{\mathbf{1}_W}\Big) \;=\; \dim_k\, \widetilde{H}^{\,|W|-i-1}\big(\Delta_W; k\big).$$

证明。 令 $K_\bullet = K_\bullet(x_1, \dots, x_n;\, S)$ 为关于 $(x_1, \dots, x_n)$ 的 Koszul 复形。记 $K_i \cong \bigwedge^i V \otimes_k S$，其中 $V = \bigoplus_{j=1}^n k\, e_j$。对于 $F = \{j_1 < \cdots < j_i\}$，令 $e_F := e_{j_1} \wedge \cdots \wedge e_{j_i}$ 微分为

$$d\big(e_F \otimes f\big) = \sum_{t=1}^{i} (-1)^{t-1}\, e_{F\setminus\{j_t\}} \otimes x_{j_t} f.$$

赋予 $K_\bullet$ $\mathbb{Z}^n$–分次，使得 $\deg(e_j) = \mathbf{e}_j$，因此 $\deg(e_F \otimes x^\alpha) = \sum_{j\in F} \mathbf{e}_j + \alpha$，且 d 是多重次数为 $\mathbf{0}$ 的齐次元素。由于 $K_\bullet$ 是 $k = S/(\mathbf{x})$ 的自由分解，

$$\operatorname{Tor}_i^S\big(k[\Delta], k\big) \;\cong\; H_i\big(k[\Delta] \otimes_S K_\bullet\big).$$

固定 $W \subseteq [n]$。齐次分量 $\big(k[\Delta] \otimes_S K_i\big)_{\mathbf{1}_W}$ 由以下元素的等价类张成

$$e_F \otimes \overline{x^U} \qquad \text{with } F \subseteq [n],\ |F| = i,\ U \subseteq [n],\ F \cap U = \varnothing,\ F \cup U = W,$$

其中 $\overline{(\cdot)}$ 是在 $k[\Delta] = S/I_\Delta$ 中的像，且 $x^U := \prod_{u\in U} x_u$。多重次数条件为 $\deg(e_F) + \deg(x^U) = \mathbf{1}_W$，即 $F \cap U = \varnothing$ 和 $F \cup U = W$。

在 $k[\Delta]$ 中，$x^U \neq 0$ 当且仅当 $U \in \Delta$。因此，$\big(k[\Delta] \otimes_S K_i\big)_{\mathbf{1}_W}$ 的一个 k–基为

$$\mathcal{B}_{i,W} = \big\{\, e_F \otimes \overline{x^{W\setminus F}} \;:\; F \subseteq W,\ |F| = i,\ W \setminus F \in \Delta \,\big\}.$$

等价地，令 $\sigma := W \setminus F$，我们按满足 $|\sigma| = |W| - i$ 的面 $\sigma \in \Delta_W$ 编号。对于 $F \subseteq W$ 和 $\sigma = W \setminus F$，

$$d\big(e_F \otimes \overline{x^\sigma}\big) = \sum_{j\in F} (-1)^{\operatorname{pos}(j;F)-1}\, e_{F\setminus\{j\}} \otimes \overline{x_j x^\sigma} = \sum_{j\in F} (-1)^{\operatorname{pos}(j;F)-1}\, e_{F\setminus\{j\}} \otimes \overline{x^{\sigma\cup\{j\}}}.$$

当且仅当 $\sigma\cup\{j\} \in \Delta$ 时，对应的项才不为零。对于满足 $|F| = i$ 的 $i \geq 0$ 和 $F \subseteq W$，令 $\sigma := W\setminus F$，并定义

$$\Phi_W^i :\quad \big(k[\Delta] \otimes_S K_i\big)_{\mathbf{1}_W} \longrightarrow C^{\,|W|-i-1}(\Delta_W; k), \qquad \Phi_W^i\big(e_F \otimes \overline{x^\sigma}\big) \;:=\; (-1)^{\binom{|\sigma|}{2}}\, \operatorname{sgn}(\pi_{F,\sigma})\, \sigma^*.$$

这里，$\pi_{F,\,\sigma}$ 是唯一一个将连接串 $(\sigma,\ F)$ 重排为 W 的（递增）顺序的置换，而 $\operatorname{sgn}(\cdot)$ 是其符号。这是 $\mathbf{1}_W$ 多重分次分量上的良定义 k 同构。单纯上余边界 $\delta\colon C^q(\Delta_W;\, k) \to C^{q+1}(\Delta_W;\, k)$ 采用标准符号约定：

$$\delta(\sigma) \;=\; \sum_{\substack{\tau\in\Delta_W \\ \sigma\subset\tau,\ |\tau|=|\sigma|+1}} (-1)^{\operatorname{pos}(v;\tau)-1}\, \tau, \qquad \text{for } \tau = \sigma \cup \{v\},$$

其中，$\operatorname{pos}(v;\, \tau)$ 表示 v 在 τ 的递增排列中的位置。

对于 $j \in F$，令 $\tau_j := \sigma \cup \{j\}$。沿着正方形追踪基元素 $e_F \otimes \overline{x^\sigma}$

$$\begin{array}{ccccccc}
\cdots & \xrightarrow{d} & \big(k[\Delta]\otimes K_i\big)_{\mathbf{1}_W} & \xrightarrow{d} & \big(k[\Delta]\otimes K_{i-1}\big)_{\mathbf{1}_W} & \xrightarrow{d} & \cdots \\
 & & \Phi_W^i\downarrow\cong & & \Phi_W^{i-1}\downarrow\cong & & \\
\cdots & \xrightarrow[\delta]{} & C^{\,|W|-i-1}(\Delta_W;k) & \xrightarrow[\delta]{} & C^{\,|W|-i}(\Delta_W;k) & \xrightarrow[\delta]{} & \cdots
\end{array}$$

我们比较通过“先向右再向下”与“先向下再向右”得到的 τ_j^* 的系数。删除 F 中的 j 时，Koszul微分贡献因子 $(-1)^{\mathrm{pos}(j;F)-1}$；将 j 添加到 σ 时，单纯上余边界贡献因子 $(-1)^{\mathrm{pos}(j;\tau_j)-1}$。因此，这两条路径分别得到

$$\text{(right then down)}\quad (-1)^{\mathrm{pos}(j;F)-1}\cdot(-1)^{\binom{|\tau_j|}{2}}\cdot \mathrm{sgn}\big(\pi_{F\setminus\{j\},\,\tau_j}\big),$$

$$\text{(down then right)}\quad (-1)^{\binom{|\sigma|}{2}}\cdot \mathrm{sgn}\big(\pi_{F,\sigma}\big)\cdot(-1)^{\mathrm{pos}(j;\tau_j)-1}.$$

两个基本恒等式解释了符号的协调：

$$\mathrm{sgn}\big(\pi_{F\setminus\{j\},\,\tau_j}\big) = (-1)^{\mathrm{pos}(j;F)-1}\,(-1)^{\mathrm{pos}(j;\tau_j)-1}\,(-1)^{|\sigma|}\,\mathrm{sgn}\big(\pi_{F,\sigma}\big), \tag{1}$$

$$\binom{|\tau_j|}{2} = \binom{|\sigma|+1}{2} \equiv \binom{|\sigma|}{2} + |\sigma| \pmod 2. \tag{2}$$

利用 (1) 和 (2)，“先向右再向下”所得的系数等于

$$(-1)^{\binom{|\tau_j|}{2}+|\sigma|}\,(-1)^{2(\mathrm{pos}(j;F)-1)}\,\mathrm{sgn}(\pi_{F,\sigma})\,(-1)^{\mathrm{pos}(j;\tau_j)-1} = (-1)^{\binom{|\sigma|}{2}}\,\mathrm{sgn}(\pi_{F,\sigma})\,(-1)^{\mathrm{pos}(j;\tau_j)-1},$$

这恰好就是“先向下再向右”所得的系数。因此

$$\Phi_W^{i-1}\circ d \;=\; \delta\circ\Phi_W^i.$$

前面的恒等式表明，在多重次数 $\mathbf{1}_W$ 上，

$$\big(k[\Delta]\otimes_S K_\bullet\big)_{\mathbf{1}_W} \;\cong\; C^{\,|W|-1-\bullet}(\Delta_W;k) \quad \text{as chain complexes.}$$

因此

$$H_i\big((k[\Delta]\otimes_S K_\bullet)_{\mathbf{1}_W}\big) \;\cong\; \widetilde{H}^{\,|W|-i-1}(\Delta_W;k),$$

并取多重分次部分的 k 维数，

$$\beta_{i,\mathbf{1}_W}\big(k[\Delta]\big) = \dim_k \mathrm{Tor}_i^S\big(k[\Delta],k\big)_{\mathbf{1}_W} = \dim_k \widetilde{H}^{\,|W|-i-1}(\Delta_W;k). \qquad \square$$

特别地，对于顶点集为 $[n]$ 的简单图 G，Hochster 公式给出，对任意 $W\subseteq[n]$ 和 $i\ge 0$，

$$\beta_{i,\mathbf{1}_W}\big(S/I(G)\big) \;=\; \dim_k \widetilde{H}^{\,|W|-i-1}\big(\mathrm{Ind}(G)_W;k\big),$$

其中，$\mathrm{Ind}(G)_W$ 表示独立复形 $\mathrm{Ind}(G)$ 在 W 上诱导出的子复形。

由短正合列 $0\to I(G)\to S\to S/I(G)\to 0$ 以及 S 关于自身的平坦性，Tor中的长正合序列给出按次数分次的同构

$$\mathrm{Tor}_i^S\big(S/I(G),k\big)_{\mathbf{1}_W} \;\cong\; \mathrm{Tor}_{i-1}^S\big(I(G),k\big)_{\mathbf{1}_W} \qquad \text{for all } i\ge 1 \text{ and } W\subseteq[n].$$

因此，多重分次贝蒂数满足

$$\beta_{i-1,\mathbf{1}_W}\big(I(G)\big) \;=\; \beta_{i,\mathbf{1}_W}\big(S/I(G)\big) \qquad (i \geq 1,\; W \subseteq [n]).$$

此外，对于 $\beta_{0,\mathbf{0}}(S/I(G)) = 1$ 和 $\beta_{0,u}(S/I(G)) = 0$ ，有 $u \neq \mathbf{0}$。另一方面，对于边理想 $I(G)$，有

$$\beta_{0,j}\big(I(G)\big) = \begin{cases} |E(G)|, & \text{if } j = 2, \\ 0, & \text{if } j \neq 2, \end{cases}$$

因为 $\beta_{0,j}(I)$ 统计了 I 在次数 j 下的极小生成元个数，而 $I(G)$ 的极小生成元为二次齐次多项式 $\{x_i x_j : \{i,j\} \in E(G)\}$。等价地，以多分次形式表示为：$\beta_{0,\mathbf{e}_i+\mathbf{e}_j}\big(I(G)\big) =:$ 若 $\{i,j\} \in E(G)$，则为 1；否则为 0。

例 2.9 （三顶点路径）。令 $G = P_3$，其中 $V = \{1,2,3\}$ 且 $E = \{\{1,2\},\{2,3\}\}$。那么

$$I(G) \;=\; (x_1x_2,\; x_2x_3) \;\subseteq\; S = k[x_1,x_2,x_3].$$

极小顶点覆盖为 $C_1 = \{2\}$ 和 $C_2 = \{1,3\}$。因此

$$I(G) \;=\; (x_2) \;\cap\; (x_1,x_3).$$

独立复形为

$$\mathrm{Ind}(G) = \big\{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,3\}\big\},$$

其面（包含意义下极大的面）为 $\{1,3\}$ 和 $\{2\}$。将 Hochster 公式应用于 $\Delta =$Ind(G)，可得 $S/I(G)$ 的分次贝蒂数：

$$\beta_{0,0} = 1, \qquad \beta_{1,2} = 2, \qquad \beta_{2,3} = 1,$$

而对所有其他的配对 (i,j)，$\beta_{i,j} = 0$ 。等价地，唯一非零的项出现在同调次数 $i = 0, 1, 2$ 和内次数 $j = 0, 2, 3$ 处，如上所列。以内部次数 j 为行、同调次数 i 为列：

	$i=0$	$i=1$	$i=2$
$j=0$	1	0	0
$j=1$	0	0	0
$j=2$	0	2	0
$j=3$	0	0	1

自由分解为

$$0 \longleftarrow I(G) \longleftarrow S(-2)^2 \longleftarrow S(-3) \longleftarrow 0.$$

例 2.10 （星图与星理想）。设 G 是一个有 $t+1$ 个顶点的星图，其中心顶点为 x，叶顶点为 $N(x) = \{x_1,\ldots,x_t\}$，即

$$E(G) = \big\{\{x,x_1\},\ldots,\{x,x_t\}\big\}.$$

那么，边理想就是星理想

$$I(G) \;=\; \langle\, xx_1,\ldots,xx_t \,\rangle \;=\; x\,\langle x_1,\ldots,x_t\rangle \;\subseteq\; S = k[x,x_1,\ldots,x_t].$$

顶点覆盖要么是 $\{x\}$，要么是完整叶集 $\{x_1,\dots,x_t\}$；二者都是极小的。因此，

$$I(G) \;=\; (x) \;\cap\; (x_1,\dots,x_t),$$

我们有

$$\operatorname{Ind}(G) \;=\; \big(\text{simplex on } \{x_1,\dots,x_t\}\big) \;\sqcup\; \{x\},$$

也就是说，一个 $(t-1)$–单纯形与一个孤立顶点的不交并。记 $S/I(G)$ 为 Ind(G) 的 Stanley–Reisner 环。由于每个包含 x 且至少包含一个叶顶点的子集 W 所对应的诱导子复形恰有两个连通分支，由 Hochster 公式可得：

$$\beta_{0,0}=1, \qquad \beta_{j-2,\,j}=\begin{pmatrix} t \\ j-1 \end{pmatrix} \text{ for } 2\le j\le t+1, \qquad \beta_{i,j}=0 \text{ otherwise.}$$

等价地，

$$\beta_{i,\,i+2}=\begin{pmatrix} t \\ i+1 \end{pmatrix} \quad \text{for } 0\le i\le t-1,$$

其余所有分次贝蒂数均为零。因此，非零项都位于单一对角线 $j=i+2$ 上（以及 $\beta_{0,\,0}$），故该自由分解是 2–线性的。特别地，最小分次自由分辨具有如下形式

$$0 \longleftarrow I(G) \longleftarrow S(-2)^{\binom{t}{1}} \longleftarrow S(-3)^{\binom{t}{2}} \longleftarrow \cdots \longleftarrow S\big(-(t+1)\big)^{\binom{t}{t}} \longleftarrow 0.$$

例2.11 （完全图）。设 $G=K_n$。那么

$$I(G) \;=\; \big(x_ix_j \mid 1\le i<j\le n\big) \;\subseteq\; S=k[x_1,\dots,x_n].$$

一个极小顶点覆盖的大小为 $n-1$，事实上，V 的每个 $(n-1)$–子集都是一个极小顶点覆盖。因此，

$$I(K_n) \;=\; \bigcap_{\substack{C\subseteq V\\ |C|=n-1}} (x_i \mid i\in C), \qquad \operatorname{ht} I(K_n)=n-1.$$

这里，Ind(G)恰由空面和单点集组成：

$$\operatorname{Ind}(K_n)=\big\{\varnothing,\{1\},\dots,\{n\}\big\},$$

因此，每个诱导子复形 $\operatorname{Ind}(K_n)_W$ 都是由 $|W|$ 个点构成的离散集。由此，Hochster 公式给出了 $S/I(K_n)$的贝蒂数呈线性（纯）模式：

$$\beta_{0,0}=1, \qquad \beta_{j-1,\,j}=\binom{n}{j}(j-1) \;\text{ for } 2\le j\le n, \qquad \beta_{i,j}=0 \;\text{ otherwise.}$$

等价地，

$$\beta_{i,\,i+1}=i\begin{pmatrix} n \\ i+1 \end{pmatrix} \quad \text{for } 1\le i\le n-1,$$

且所有其余的分次贝蒂数均为零。特别地，非零项仅出现在内部分次 $j=0$、2、3、…、n 中，且位于单一对角线 $j=i+1$ 上（除 $\beta_{0,\,0}$ 外）。初始步骤之后，最小分次自由分辨是纯的且为 1-线性：

$$0 \longleftarrow I(K_n) \longleftarrow S(-2)^{\binom{n}{2}} \longleftarrow S(-3)^{2\binom{n}{3}} \longleftarrow \cdots \longleftarrow S(-n)^{(n-1)\binom{n}{n}} \longleftarrow 0.$$

边理想通常具有一种特殊的分解方式，使得可以递归地计算分次贝蒂数。其核心概念如下。

定义 2.12（贝蒂分裂，[25, 27]）。设 $I \subseteq S$ 是一个单项式理想，可分解为

$$I \;=\; J \;+\; K$$

单项式理想 $J, K \subseteq S$，且其极小单项式生成元集合互不相交，$\mathcal{G}(I) = \mathcal{G}(J) \sqcup \mathcal{G}(K)$。若对所有 $i \geq 0$ 及所有 $j \in \mathbb{Z}$，均有

$$\beta_{i,j}(I) \;=\; \beta_{i,j}(J) \;+\; \beta_{i,j}(K) \;+\; \beta_{i-1,j}\big(J \cap K\big),$$

并约定 $\beta_{-1,j}(\,\cdot\,) = 0$。等价地，在多重分次情形下，同一恒等式也成立。

实践中，通常通过一些众所周知的充分判据来验证贝蒂分裂性质（例如，Tor 上自然映射消失，或 J 和 K满足线性商假设）；详情请参阅标准参考文献。关键在于，贝蒂分裂将 I 的贝蒂数归结为 J、K及其交 $J \cap K$的贝蒂数。

现在我们记录边理想的顶点分解，它提供了一个典范的递归步骤[25, 27]。

定理 2.13（[25, 27]）. 设 G 是定义在 $V = \{1, \ldots, n\}$ 上的有限简单图，固定一个顶点 $x \in V$，并假设 $G \setminus \{x\}$ 不是由孤立顶点构成的图。将 x 的（开）邻域记为 $N(x) = \{x_1, \ldots, x_t\}$。令

$$J \;:=\; \langle\, xx_1, \ldots, xx_t \,\rangle \qquad \textit{and} \qquad K \;:=\; I\big(G \setminus \{x\}\big).$$

Then

$$I(G) \;=\; J \;+\; K$$

is 是 $I(G)$ 的贝蒂分裂。此外，交可显式分解为

$$J \cap K \;=\; \langle xx_1, \ldots, xx_t \rangle \cap I\big(G \setminus \{x\}\big) \;=\; x\, I\big(G(x)\big) \;+\; xx_1\, I(G_1) \;+\; \cdots \;+\; xx_t\, I(G_t),$$

其中，对于任意顶点 $a \in V$，辅助图 $G(a)$ 定义在 $V \setminus \{a\}$ 上，其定义如下：

$$E\big(G(a)\big) \;:=\; \big\{\, \{u, v\} \in E(G) \;\big|\; \{u, v\} \cap N(a) \neq \emptyset,\; u \neq a,\; v \neq a \,\big\},$$

以及 $G_i := G \setminus (N(x) \cup N(x_i))$，其中 $i = 1, \ldots, t$。

因此，分次贝蒂数满足递归恒等式

$$\beta_{i,j}\big(I(G)\big) \;=\; \beta_{i,j}(J) \;+\; \beta_{i,j}\big(I(G \setminus \{x\})\big) \;+\; \beta_{i-1,j}\Big(x\, I\big(G(x)\big) \;+\; \sum_{r=1}^{t} xx_r\, I(G_r)\Big),$$

在多重分次情形中也类似。这种基于顶点的分解在文献中是标准做法，也是边理想 [28] 的贝蒂表许多归纳计算的基础。

3 模块与单项式理想的持久分次贝蒂数

本节旨在将熟悉的分次贝蒂不变量扩展到具有函子性的双时间点情形。以下内容中，滤过 $(M(t))_{t\in T}$（或 $(\Delta_t)_{t\in T}$）配备了保持次数的结构映射，对 $a \le b$ 而言皆如此；当 $a = b$ 时，下面的每个定义都会退化为通常的不变量。

定义 3.1（持久分次贝蒂数）。设 $\{M(t)\}_{t\in T}$ 是由全序集 $(T,\ \le)$ 索引的分次 S–模的一个滤过，并假设对于 $a \le b$，给定结构映射 $M(a) \to M(b)$，它们是保持次数的 S–同态。对于 $i,\ j \in \mathbb{Z}$ 定义持久分次贝蒂数如下

$$\beta_{i,j}^{a,b}(M(\bullet)) \ :=\ \operatorname{rank}\Big(\operatorname{Tor}_i^S\big(k, M(a)\big)_j \longrightarrow \operatorname{Tor}_i^S\big(k, M(b)\big)_j\Big), \qquad a \le b.$$

当 $a = b$ 时，这就恢复了通常的贝蒂数：$\beta_i^{a\to a}{}_{,\ j}(M(\bullet)) = \beta_{i,\ j}\big(M(a)\big)$。在多分次情形中，将 j 替换为 $\alpha \in \mathbb{Z}^n$：

$$\beta_{i,\alpha}^{a,b}(M(\bullet)) \ :=\ \operatorname{rank}\big(\operatorname{Tor}_i^S\big(k, M(a)\big)_\alpha \longrightarrow \operatorname{Tor}_i^S\big(k, M(b)\big)_\alpha\big).$$

定义 3.1 将经典分次贝蒂数归结为由 $M(a) \to M(b)$ 诱导的比较映射的秩。特别地，取 $a = b$ 可恢复 $\beta_{i,\ \bullet}(M(a))$，因此后续所有结果都是标准理论真正的持久化扩展。

下一条陈述是 Hochster 公式的持久对应形式：它指出，定义 3.1 中 Stanley–Reisner 环对应的秩，等于沿 $(\Delta_a)_W \hookrightarrow (\Delta_b)_W$ 的上同调限制映射的秩；而当 $a = b$ 时，它在每个次数上都退化为经典的 Hochster 同构。

定理 3.2 (持久霍赫斯特公式（多重分次）)。设 $S = k[x_1, \dots, x_n]$ 满足 $\deg(x_i) = \mathbf{e}_i$，并设 $\{\Delta_t\}_{t\in T}$ 是定义在 $[n]$ 上的单纯复形的一个滤过，其包含关系为 $\Delta_a \subseteq \Delta_b$，其中 $a \le b$。记 I_{Δ_t} 为 ***Stanley–Reisner*** 理想，并记 $k[\Delta_t] = S/I_{\Delta_t}$。对于 $W \subseteq [n]$，令 $(\Delta_t)_W :\ = \{\sigma \in \Delta_t :\ \sigma \subseteq W\}$。那么对于所有 $i \ge 0$ 和 $W \subseteq [n]$,

$$\begin{aligned}\beta_{i,\mathbf{1}_W}^{a,b}\big(k[\Delta_\bullet]\big) &:= \operatorname{rank}\Big(\operatorname{Tor}_i^S\big(k[\Delta_b], k\big)_{\mathbf{1}_W} \to \operatorname{Tor}_i^S\big(k[\Delta_a], k\big)_{\mathbf{1}_W}\Big)\\ &=\ \operatorname{rank}\Big(\widetilde{H}^{\,|W|-i-1}\big((\Delta_b)_W; k\big) \to \widetilde{H}^{\,|W|-i-1}\big((\Delta_a)_W; k\big)\Big).\end{aligned}$$

证明思路。根据 Hochster 同构，对于每个 t 和 W，$\operatorname{Tor}_i^S(k[\Delta_t], k)_{\mathbf{1}_W} \cong \widetilde{H}^{\,|W|-i-1}((\Delta_t)_W; k)$。如果 $a \le b$，包含 $\Delta_a \subseteq \Delta_b$ 给出 $I_{\Delta_b} \subseteq I_{\Delta_a}$，从而得到满射 $k[\Delta_b] \twoheadrightarrow k[\Delta_a]$。Tor 关于第一变量的函子性给出映射

$$\operatorname{Tor}_i^S\big(k[\Delta_b], k\big)_{\mathbf{1}_W} \longrightarrow \operatorname{Tor}_i^S\big(k[\Delta_a], k\big)_{\mathbf{1}_W},$$

在 Hochster 的识别以及包含 $(\Delta_a)_W \subseteq (\Delta_b)_W$ 下，这对应于上同调中的限制映射

$$\widetilde{H}^{\,|W|-i-1}\big((\Delta_b)_W; k\big) \longrightarrow \widetilde{H}^{\,|W|-i-1}\big((\Delta_a)_W; k\big),$$

根据下图。

$$\begin{array}{ccc} \big(k[\Delta_b]\otimes K_i\big)_{\mathbf{1}_W} & \xrightarrow{\ d\ } & \big(k[\Delta_b]\otimes K_{i-1}\big)_{\mathbf{1}_W} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \big(k[\Delta_a]\otimes K_i\big)_{\mathbf{1}_W} & \xrightarrow{\ d\ } & \big(k[\Delta_a]\otimes K_{i-1}\big)_{\mathbf{1}_W} \end{array} \quad\longleftrightarrow\quad \begin{array}{ccc} C^{\,|W|-i-1}((\Delta_b)_W; k) & \xrightarrow{\ \delta\ } & C^{\,|W|-i}((\Delta_b)_W; k) \\ {\scriptstyle i_W^*}\downarrow & & {\scriptstyle i_W^*}\downarrow \\ C^{\,|W|-i-1}((\Delta_a)_W; k) & \xrightarrow[\ \delta\ ]{} & C^{\,|W|-i}((\Delta_a)_W; k) \end{array}$$

取秩即可得到所述等式。

□

将多重分次陈述对所有满足 $|W| = j$ 的 $W \subseteq [n]$ 求和，即得 $\mathbb{Z}$ 分次版本：内部分次为 j 的持久贝蒂数，等于诱导映射在 $\widetilde{H}^{j-i-1}((\Delta_t)_W;\, k)$ 上的秩之和。

推论 3.3 (持久霍赫斯特， $\mathbb{Z}$分次)。 对于 $\mathbb{Z}$ 分次的贝蒂数（内部分次为j），

$$\beta_{i,j}^{a,b}\big(k[\Delta_\bullet]\big) \;=\; \sum_{\substack{W\subseteq[n]\\ |W|=j}} \operatorname{rank}\Big(\widetilde{H}^{\,j-i-1}\big((\Delta_b)_W;k\big) \longrightarrow \widetilde{H}^{\,j-i-1}\big((\Delta_a)_W;k\big)\Big), \qquad \Delta_a \subseteq \Delta_b.$$

在域上，上同调是同调的线性对偶。我们将使用以下秩对偶关系，在持久秩的上同调表述与同调表述之间灵活转换。

引理 3.4 （域上的上同调—同调秩对偶）。 设 k 为一个域， $a \le b$， $W \subseteq [n]$，并令 $q := |W| - i - 1$。则

$$\operatorname{rank}\Big(\widetilde{H}^{\,q}\big((\Delta_b)_W;k\big) \to \widetilde{H}^{\,q}\big((\Delta_a)_W;k\big)\Big) = \operatorname{rank}\Big(\widetilde{H}_{q}\big((\Delta_a)_W;k\big) \to \widetilde{H}_{q}\big((\Delta_b)_W;k\big)\Big).$$

证明。 在域 k 上，单纯上链复形是链复形的 k 线性对偶：$\sim$ $\sim C^q(\Gamma;\, k) = \operatorname{Hom}_k(C_q(\Gamma;\, k)\ k)$，其余边界为 $\delta^q = (\partial_{q+1})^*$。因此， $H^q(\Gamma;\, k) \cong \operatorname{Hom}_k(H_q(\Gamma;\, k)\ k)$ 关于 Γ 自然成立。将此应用于包含关系 $(\Delta_a)_W \hookrightarrow (\Delta_b)_W$；上同调上的诱导映射是同调上诱导映射的对偶。对于有限维 k 向量空间之间的线性映射，$\operatorname{rank}(f) = \operatorname{rank}(f^*)$。结论得证。

□

因此，在 PSRT 框架中通过同调群引入持久分次 Betti 数，其定义是自然的。上述引理表明，在域上使用同调而非上同调，会得到等价且定义良好的不变量。

熟悉的移位 $\beta_i(S/I) = \beta_{i-1}(I)$仍具有函子性：Tor 长正合列中的连接同构具有自然性，因此与由 $I \to I'$ 和$S/I \to S/I'$诱导的态射相交换，并交织滤过中的所有结构映射。令 $a = b$ 即可恢复经典的（逐点）移位。

命题 3.5 （理想与其商之间的贝蒂移位；自然性）。 设 S 是一个 $\mathbb{Z}$分次或$\mathbb{Z}^n$分次的诺特环，且 $I \subset S$ 是一个齐次理想。固定一个域 k ，并将 k 视为集中在次数0的分次S-模。那么：

（a）贝蒂移位（逐点）。对于所有 $i \ge 1$ 和所有次数 j （分别为多重次数 α），

$$\beta_{i,j}(S/I) = \beta_{i-1,j}(I), \qquad \big(resp.\ \ \beta_{i,\alpha}(S/I) = \beta_{i-1,\alpha}(I)\big),$$

并且 $\beta_{0,\ 0}(S/I) = 1$, $\beta_{0,\ j}(S/I) = 0$ 对于 $j \neq 0$ （分别对于 $\beta_{0,\ \alpha}(S/I) = \mathbf{1}_{\{\alpha=\mathbf{0}\}}$） 。

(b) 关于短正合列映射的自然性。设 $\phi:\ I \to I'$ 是一个分次 S-线性映射，并设 ϕ: $S/I \to S/I'$ 是诱导映射。那么对于每个 $i \geq 1$，(a) 中的同构按次数构成交换方块：

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Tor}_i^S(S/I,k)_\bullet & \xrightarrow{\overline{\phi}_*} & \mathrm{Tor}_i^S(S/I',k)_\bullet \\ \downarrow\cong & & \downarrow\cong \\ \mathrm{Tor}_{i-1}^S(I,k)_\bullet & \xrightarrow{\phi_*} & \mathrm{Tor}_{i-1}^S(I',k)_\bullet \end{array}$$

其中 $\bullet$表示单一次数 j 或多重次数 α。

(c) 持久族。若$(I_t)_{t\in T}$ 是由偏序集 T索引的分次族，且对于 $s \leq t$，我们有一个态射 $\phi_{s\to t}:\ I_s \to I_t$，其诱导出 $\phi_{s\to t}:\ S/I_s \to S/I_t$，那么(a) 中的识别与结构映射相容，其意义是对每个 $s \leq t$，均满足(b) 。

证明。(a) 是一个常见结论，前文各节已对此进行讨论。

对于 (b)，设 ϕ: $I \to I'$ 是分次 S-线性的，并考虑短正合列之间的态射

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & I & \xrightarrow{\iota} & S & \xrightarrow{\pi} & S/I & \to & 0 \\ & & \downarrow\phi & & \| & & \downarrow\overline{\phi} & & \\ 0 & \to & I' & \xrightarrow{\iota'} & S & \xrightarrow{\pi'} & S/I' & \to & 0\,. \end{array}$$

Tor 的函子性给出长正合列之间的一个态射，而连接同构δ_i: $\mathrm{Tor}_i^S(S/I,k)_\bullet \xrightarrow{\cong} \mathrm{Tor}_{i-1}^S(I,k)_\bullet$是自然的 [23]。具体而言，对所有 $i \geq 1$ 以及每个次数 $\bullet$,

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Tor}_i^S(S/I,k)_\bullet & \xrightarrow{\overline{\phi}_*} & \mathrm{Tor}_i^S(S/I',k)_\bullet \\ \downarrow\delta_i\cong & & \downarrow\delta_i\cong \\ \mathrm{Tor}_{i-1}^S(I,k)_\bullet & \xrightarrow{\phi_*} & \mathrm{Tor}_{i-1}^S(I',k)_\bullet \end{array}$$

是交换的。取 维数即可得到所述的贝蒂数兼容性。这就证明了 (b) .

对于 (c)，对该族中的每个结构映射 $\phi_{s\to t}:\ I_s \to I_t$ 以及诱导的 $\phi_{s\to t}$:$S/I_s \to S/I_t$应用 (b)。前述交换方块表明，(a) 中的识别给出了持久模之间的一个同构

$$\left(\mathrm{Tor}_i^S(S/I_t,k)_\bullet\right)_{t\in T} \ \cong\ \left(\mathrm{Tor}_{i-1}^S(I_t,k)_\bullet\right)_{t\in T} \qquad (i \geq 1),$$

也就是说，它们与所有结构映射相交织。$i = 0$ 的 0 次情形与 (a) 中相同。 □

最后，如果每个层级 I_t 都具有与跨越 t的包含相兼容的贝蒂分裂，那么持久贝蒂数便可加法分解。在退化情形 $a = b$ 下，这就特化为通常的 Betti 分裂公式。

命题 3.6 (持久贝蒂分裂)。设 $\{I_t\}_{t\in T}$ 是$S = k[x_1,\ldots,x_n]$ 中单项式理想的一个滤过，其中 T全序且 $a \leq b$。假设对每个 t，我们都有一个分解

$$I_t \ =\ J_t + K_t$$

使得 $G\left(I_t\right) = G\left(J_t\right) \cup G\left(K_t\right)$（极小生成元的不交并），并且

$$\beta_{i,j}(I_t) \ =\ \beta_{i,j}(J_t) + \beta_{i,j}(K_t) + \beta_{i-1,j}(J_t \cap K_t) \quad \textit{for all } i,j.$$

等价地，在短正合列中

$$0 \to J_t \cap K_t \longrightarrow J_t \oplus K_t \longrightarrow I_t \to 0,$$

诱导映射 $\operatorname{Tor}_i^S(k, J_t \cap K_t)_j \to \operatorname{Tor}_i^S(k, J_t)j$ 和 $\operatorname{Tor}_i^S(k, J_t \cap K_t)_j \to \operatorname{Tor}_i^S(k, K_t)j$ 对于所有 i, j 均为0 。

于是，持久分次 *Betti* 数满足：

$$\beta_{i,j}^{a,b}(I_\bullet) \;\geq\; \beta_{i,j}^{a,b}(J_\bullet) \;+\; \beta_{i,j}^{a,b}(K_\bullet) \;+\; \beta_{i-1,j}^{a,b}\big((J \cap K)_\bullet\big) \qquad \textit{for all } i, j,$$

多分次形式中也同样成立，只需将 j 替换为 $W \subseteq [n]$。

证明思路。 固定 i, j。对于每个 t ，短正合列

$$0 \to J_t \cap K_t \longrightarrow J_t \oplus K_t \longrightarrow I_t \to 0$$

诱导出 $\operatorname{Tor}^S(-, k)$ 中的长正合列；由 (1)，映射 $\operatorname{Tor}_i(k, J_t \cap K_t)_j \to \operatorname{Tor}_i(k, J_t)j$ 和 $\operatorname{Tor}_i(k, J_t \cap K_t)_j \to \operatorname{Tor}_i(k, K_t)j$ 均为零，因此长正合列按次数分解为短正合列

$$0 \;\longrightarrow\; X_t \xrightarrow{\iota_t} Y_t \xrightarrow{\partial_t} Z_t \;\longrightarrow\; 0, \tag{3}$$

其中

$$X_t := \operatorname{Tor}_i(k, J_t)_j \oplus \operatorname{Tor}_i(k, K_t)_j, \quad Y_t := \operatorname{Tor}_i(k, I_t)_j, \quad Z_t := \operatorname{Tor}_{i-1}(k, J_t \cap K_t)_j.$$

根据 (2) 和 Tor 的自然性，对于 $a \leq b$ ，这些构成了一个由短正合列组成的交换图：

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & X_a & \xrightarrow{\iota_a} & Y_a & \xrightarrow{\partial_a} & Z_a & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle x} & & \downarrow{\scriptstyle y} & & \downarrow{\scriptstyle z} & & \\ 0 & \longrightarrow & X_b & \xrightarrow{\iota_b} & Y_b & \xrightarrow{\partial_b} & Z_b & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

（所有映射均为 k–线性的）。

现在应用关于向量空间短正合列之间映射的初等线性代数引理：在任何如下的交换图中，

$$\operatorname{rank}(y) \;\geq\; \operatorname{rank}(x) \;+\; \operatorname{rank}(z),$$

等号成立当且仅当

$$\operatorname{im}(y) \cap \operatorname{im}(\iota_b) \;=\; \iota_b\big(\operatorname{im}(x)\big) \quad \text{(equivalently, } 0 \to \operatorname{im} x \to \operatorname{im} y \to \operatorname{im} z \to 0 \text{ is exact).}$$

根据持久贝蒂秩的定义，

$$\beta_{i,j}^{a,b}(I_\bullet) = \operatorname{rank}(y), \quad \beta_{i,j}^{a,b}(J_\bullet) = \operatorname{rank}\big(\operatorname{Tor}_i(k, J_a)_j \to \operatorname{Tor}_i(k, J_b)_j\big),$$

$$\beta_{i,j}^{a,b}(K_\bullet) = \operatorname{rank}\big(\operatorname{Tor}_i(k, K_a)_j \to \operatorname{Tor}_i(k, K_b)_j\big), \quad \beta_{i-1,j}^{a,b}\big((J \cap K)_\bullet\big) = \operatorname{rank}(z).$$

由于 rank(x) 等于 J 和 K 的秩之和（在直和上），该引理给出

$$\beta_{i,j}^{a,b}(I_\bullet) \;\geq\; \beta_{i,j}^{a,b}(J_\bullet) \;+\; \beta_{i,j}^{a,b}(K_\bullet) \;+\; \beta_{i-1,j}^{a,b}\big((J \cap K)_\bullet\big).$$

The 多重分次版本可通过在每个多重次数下应用相同的论证得到 .

此外，若中间像是正合的（例如，当短正合列 (3) 通过与滤过相容的映射锥构造，沿 t 函子性地分裂时），则上面的显示式取等号。

□

本节的所有结果均针对分次单项式理想 $(I_t)_{t\in T}$ 以及单纯复形 $(\Delta_t)_{t\in T}$ 的一般滤子陈述。特别是，持久 Hochster 公式和函子性 Betti 位移逐次适用于任何此类滤子；当 $a=b$ 时，它们便化为通常的（非持久）恒等式。

在下面的应用中，我们将范围限定为来自图的滤过。常见的编码方式有两种：

- 边理想：对于定义在固定顶点集 $[n]$ 上的图滤过 $(G_t)_{t\in T}$，取 $I_t := I(G_t) \subset S = k[x_1,\dots,x_n]$。持久贝蒂数 $\beta_i^{a\to b}(I_\bullet)$ 随后度量由 $I(G_a) \hookrightarrow IG_b$ 诱导的 Tor 上映射的秩。

- 独立复形的 Stanley–Reisner 环：设 $\Delta_t := \mathrm{Ind}(G_t)$ 和 $k[\Delta_t] = S/I_{\Delta_t}$。持久 Hochster 公式将 $\beta^{a,\,i}{}^{b,\,W}\big(k[\Delta_\bullet]\big)$ 与上同调映射 $\widetilde{H}^{|W|-i-1}\big(\mathrm{Ind}(G_b[W]);\ k\big) \to \widetilde{H}^{|W|-i-1}\big(\mathrm{Ind}(G_a[W]);\ k\big)$ 的秩对应起来，其中 $G_t[W]$ 表示在 W 上诱导的子图。

因此，上述每个持久性结论都立即给出相应的图论结论；当$a=b$ 时，我们便能恢复关于 $I(G)$和 $k[\mathrm{Ind}(G)]$的经典公式。

4 边理想的持久极小素理想

设 $S = k[x_1,\dots,x_n]$ 为标准分次多项式环，且 $\{G_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ 为固定顶点集 $V=\{1,\dots,n\}$上的简单图的递增滤过，即

$$E_s \subseteq E_t \qquad \text{whenever } s \le t.$$

对每个 t，定义边理想

$$I_t \;:=\; I(G_t) \;=\; \big\langle\, x_i x_j \;\big|\; \{i,j\}\in E_t \,\big\rangle \;\subseteq\; S.$$

由于图的滤过是递增的，边理想构成一个递增链

$$I_s \;\subseteq\; I_t \qquad \text{for all } s \le t.$$

经典结论是， $I(G)$的极小素理想与G的极小顶点覆盖一一对应：若 $C\subseteq V$ 是 G的一个极小顶点覆盖，则

$$P_C \;:=\; (x_i \mid i\in C) \;\subseteq\; S$$

是一个极小素理想me of $I(G)$，且每个极小素理想都具有这种形式。因此，对于每个 t，我们 t

$$\mathcal{P}^t \;:=\; \mathrm{MinAss}(S/I_t) \;=\; \big\{\, P_C \;\big|\; C \text{ a minimal vertex cover of } G_t \,\big\}.$$

为记录覆盖的大小剖面，我们按基数分层：

$$\mathcal{P}^t_k \;:=\; \big\{\, P_C\in\mathcal{P}^t \;\big|\; |C|=k \,\big\}, \qquad \mathcal{P}^t \;=\; \bigsqcup_{k\ge 0} \mathcal{P}^t_k.$$

给定 $t < t'$，如果素理想 $P_C \in \mathcal{P}^t$ 延续到第 t' 层时仍是 $I_{t'}$ 上的极小素理想，即 $P_C \in \mathcal{P}^{t'}$，我们就称它为持久的。等价地说，顶点覆盖 C 对 G_t 和 $G_{t'}$ 都是极小的。我们将持久分量（可选择按大小）汇总如下

$$\mathcal{P}^{t,t'} := \mathcal{P}^t \cap \mathcal{P}^{t'}, \qquad \mathcal{P}_k^{t,t'} := \mathcal{P}_k^t \cap \mathcal{P}_k^{t'},$$

并定义持久素数

$$\Pi^{t,t'} := \left|\mathcal{P}^{t,t'}\right|, \qquad \Pi_k^{t,t'} := \left|\mathcal{P}_k^{t,t'}\right|.$$

一个（顶点覆盖）素理想 P_C 的出生时间为

$$b(P_C) := \inf\{\, t \mid P_C \in \mathcal{P}^t \,\}$$

（如果集合为空，则为 $b(P_C) = +\infty$），死亡时间为

$$d(P_C) := \inf\{\, t > b(P_C) \mid P_C \notin \mathcal{P}^t \,\}.$$

因此，恰好在 $t \in [\,b(P_C),\ d(P_C))$ 期间，P_C 存在（即是 I_t 上的极小理想）。等价地，覆盖 C 恰好在此区间内是 G_t 的极小覆盖。

随着 t 增大，边被加入到 G_t 中，因此 I_t 会获得新的生成元。因此，在时间 t 处为极小的顶点覆盖，可能会在之后的时间 t' 消亡，原因可能是它不再覆盖新加入的边，也可能是它仍然是覆盖、但不再是极小覆盖。反过来，随着组合结构趋于严密，新的极小覆盖（因而新的极小素理想）也可能在之后的时间诞生。不变量 $\{\Pi_k^{t,t'}\}_{k,\ t,\ t'}$（以及它们未分层的版本 $\Pi^{t,\ t'}$）为边理想滤过中极小素理想的持久性提供了纯代数的条形码，与持久同调相对应，但其表达方式基于极小顶点覆盖。

5 超图、边理想与面理想

边理想的构造可以自然地从图推广到一般超图 [28]。顶点集为 $V = \{1, \ldots, n\}$ 的（有限）超图是一个有序对 $H = (V,\ \mathcal{E})$，其中 $\mathcal{E} \subseteq 2^V$ 是非空子集（即超边）的集合。若每条超边的基数均为 d，则称 H 为 d–一致的。

给定超图 $H = (V,\ \mathcal{E})$ 和多项式环 $S = k[x_1, \ldots, x_n]$，其边理想（或超边理想）是平方自由单项式理想

$$I(H) := \left(x_F \mid F \in \mathcal{E}\right) \subseteq S, \qquad x_F := \prod_{i \in F} x_i.$$

与图的情形一样，$I(H)$ 是平方自由的，因此也是根理想。顶点覆盖和极小顶点覆盖的定义与前面完全相同：若子集 $C \subseteq V$ 与每条超边都相交，则称其为 H 的顶点覆盖（或横截集）；若它不包含更小的顶点覆盖，则称其为极小顶点覆盖。对图所用的同一论证表明，$I(H)$ 的极小素理想恰好是单项式素理想

$$\mathfrak{p}_C = \langle x_i : i \in C \rangle$$

与 C 的一个极小顶点覆盖 H。

再次转而研究独立复形会比较方便。 H 的独立复形是单纯复形

$$\mathrm{Ind}(H) \;:=\; \big\{\, \sigma \subseteq V \;\big|\; \sigma \text{ contains no hyperedge of } H \,\big\}.$$

与图的情形一样， H 的边理想与 Ind(H) 的 Stanley–Reisner 理想相同：

$$I(H) \;=\; I_{\mathrm{Ind}(H)}.$$

等价地，Ind(H) 的极小非面恰好是 H 的超边，而 $I_{\mathrm{Ind}(H)}$ 的极小单项式生成元是 $F \in \mathcal{E}$ 对应的单项式 x_F。
因此，将 G 替换为 H，并将 Ind(G) 替换为 Ind(H)，上述关于图的边理想的所有陈述都可原样推广到超图边理想。特别是，Hochster 公式及其持久化版本可通过复形 Ind(H) 应用于 $S/I(H)$，而极小素理想与极小顶点覆盖之间的对应关系也保持不变。

更一般地，本文中的所有构造对于底层分次单项式理想都具有函子性，并且已针对这类理想及其 Stanley–Reisner 环的任意滤过进行了表述。因此，若 $\{H_t\}_{t\in T}$ 是固定顶点集上的超图滤过，并令 $I_t := I(H_t) \subseteq S$，则：

- 持久分次 Betti 数 $\beta^{a,i}_{\bullet}{}^{b}_{,}(I_\bullet)$ 和 $\beta^{a,i}_{\bullet}{}^{b}_{,}(S/I_\bullet)$ 的定义与图的情形完全相同；
- 持久 Hochster 公式将这些 Betti 秩与诱导子复形 $\mathrm{Ind}(H_t)_W \subseteq \mathrm{Ind}(H_{t'})_W$ 的（上）同调上的诱导映射的秩对应起来；
- I_t 与 S/I_t 之间的函子性 Betti 位移以及持久化 Betti 分裂不等式均保持不变；
- 持久极小素理想理论特化为超图滤过的持久化极小顶点覆盖（极小横截集）。

特别地，针对图滤过的每个结果都可直接推广到超图滤过，并且更广泛地说，可推广到任意平方自由单项式理想的滤过，包括单纯复形的面理想。

6 应用

6.1 应用：通过持久边理想进行基因组分类

基因组分类在理解生物体之间的进化关系、病原体多样性和功能相似性方面发挥着核心作用。随着公共数据库中病毒和基因组序列的迅速积累，人们越来越需要可靠的无比对方法，以捕捉 DNA 序列内部的固有结构模式。受代数拓扑和持久同调领域近期进展的启发[29], ，我们提出一种基于持久边理想的方法，用以编码基因组序列中 k-mer 出现位置及其组合结构。

我们在 [30]所整理的线粒体基因组数据集上评估了该方法。该数据集包含 545 条完整线粒体序列，分属七个科，各科序列数量近乎均衡，介于 70 至 80 条之间：鲤科（80 条）、鳅科（80 条）、条鳅科（75 条）、爬鳅科（80 条）、鲷科（80 条）、鲤科（70 条）和鲃亚科（80 条）。基因组长度分布高度集中（最短 16,061 bp，平均 16,610 bp，最长 17,282 bp），为这一分类层级提供了均衡的基准数据集（参见表中数据集 5 条目）。我们的比较方案遵循 Hozumi 和 Wei [29]。

令 $\mathcal{A}$ 表示核苷酸字母表，并固定 $k = 4$。对于 DNA 序列 $S = s_1 s_2 \cdots s_N \in \mathcal{A}^N$，我们考察其 k-mer 集合 $\boldsymbol{x} \in \mathcal{A}^k$，并记录位置集合

$$S^{\boldsymbol{x}} = \big\{\, i \in [1, N-k+1] \;\big|\; s_i s_{i+1} \cdots s_{i+k-1} = \boldsymbol{x} \,\big\}.$$

我们为每个 k-mer $\boldsymbol{x}$ 关联一个图 $G^{\boldsymbol{x}}$，其顶点对应于 $S^{\boldsymbol{x}}$ 中的出现位置。只要两个顶点 $i, j \in S^{\boldsymbol{x}}$ 的位置距离满足

$$|i - j| \le r,$$

其中 r 是用于控制局部连通性的预设阈值。该构造生成一个基于距离的交互图，用以刻画相同 k-mer 沿序列的空间分布。为探究不同交互半径下的结构变化，我们考虑一个滤过

$$G^{\boldsymbol{x}}_{r_0} \subseteq G^{\boldsymbol{x}}_{r_1} \subseteq \cdots \subseteq G^{\boldsymbol{x}}_{r_T},$$

并为滤过中的每个图定义其边理想

$$I(G^{\boldsymbol{x}}_r) = \big\langle\, x_i x_j \;\big|\; \{i, j\} \in E(G^{\boldsymbol{x}}_r) \,\big\rangle.$$

补图 $\overline{G^{\boldsymbol{x}}_r}$ 也特别值得关注：$G^{\boldsymbol{x}}_r$ 通常是弦图，而其补图 $\overline{G^{\boldsymbol{x}}_r}$ 通常不是弦图，并且具有线性分辨。这一性质使我们能够追踪沿滤过变化的持久代数不变量 $G^{\boldsymbol{x}}_r$。对于滤过的每个步骤 r，我们计算边理想 $I(G^{\boldsymbol{x}}_r)$ 的分次贝蒂数。其中，系数 $\beta_{n-2,\,n}$——其中 $n = |S^{\boldsymbol{x}}|$ 表示 $\boldsymbol{x}$ 的出现次数——揭示了补图线性分辨的关键信息。由此得到的曲线

$$r \longmapsto \beta_{n-2,n}\big(I(\overline{G^{\boldsymbol{x}}_r})\big)$$

称为与 $\boldsymbol{x}$ 相关联的持久贝蒂曲线。将所有 k-mer 对应的曲线拼接起来，可得到基因组的完整特征表示：

$$\boldsymbol{v}^k_S = \big(\beta^{\boldsymbol{x}}_{n-2,n}(r_t)\big)_{\boldsymbol{x} \in \mathcal{A}^k,\, t = 1, \ldots, T}.$$

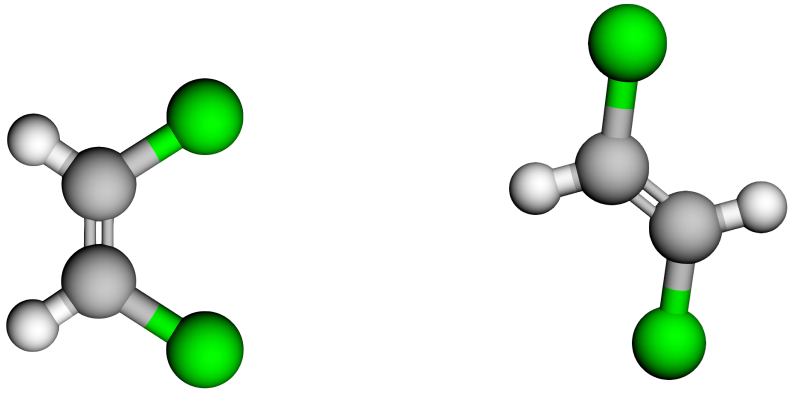
随后，通过计算序列拼接后特征向量之间的欧氏距离，得到序列两两之间的距离，从而提供一种无需比对的基因组相似性度量。

按照 Sun 等人 [31]，提出的最近邻评估协议，如果测试序列的最近邻（按上述特征空间距离计算）属于同一病毒科，则认为该序列分类正确。使用 $k = 4$ 和未加权距离时，所提出的持久边理想表示取得了以下性能：

这些结果表明，持久边理想特征能够捕捉病毒基因组中的信息性结构模式。

	准确率	F_1	平衡准确率	召回率	精确率
得分	0.8385	0.8378	0.8401	0.8401	0.8415

表1：分类性能摘要。



(a) (b)

图1：（a）顺式异构体 [32]和（b）反式异构体 [33]的可视化。

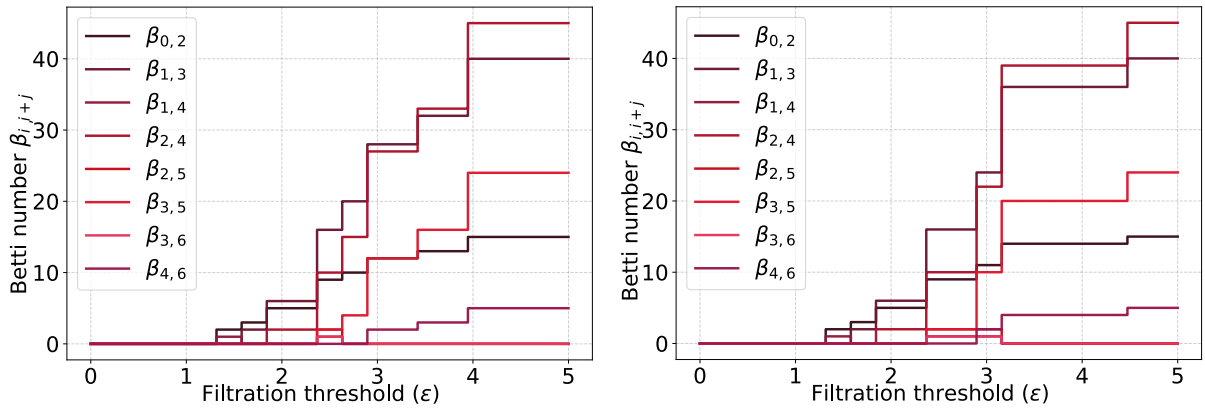
6.2 分子表示

人工智能的最新进展推动了代数与拓扑框架的发展，这些框架能够通过连通性和原子排列来编码分子或网络特征。基于图的表示能够自然地捕捉这些结构关系，其中顶点表示原子，边表示化学键。因此，受拓扑数据分析和持久同调启发的方法已在分子与生物学研究中得到广泛提出，成为当前的研究方向 [34, 35, 36]。

从代数的角度来看，分子图可以通过其边理想来刻画，边理想将邻接信息转化为单项式生成元。这些理想构成了代数描述符，编码了底层图的组合结构和几何结构。在本研究中，我们提出通过引入一个过滤参数来使用持久边理想，该参数依据物理或几何标准（例如原子间距离）控制边的包含。

分子功能从根本上与分子内原子的三维几何结构相关。即使两种化合物具有相同的分子式，其原子的不同空间排列也可能导致极性、反应性和稳定性方面的差异。这种被称为异构现象的现象源于键连通性或原子相对空间位置的差异。传统分析通过实验测量物理性质或光谱性质来区分异构体，而现代计算方法则能够直接根据几何信息和拓扑信息对这类差异进行刻画 [37, 38]。

为展示这一能力，我们将持久边理想框架应用于二氯乙烯的两种几何异构体——顺式和反式 $C_2H_2Cl_2$ ，如图1所示。尽管二者的连通性完全相同，但氯原子相对于碳碳双键的取向不同：在顺式中，氯原子位于分子平面的同一侧；而在反式中，它们则位于相对两侧。利用每种异构体的原子坐标，在 $[0, 5]$ $^{\circ}$A 的范围内构造维托里斯–里普斯过滤，并计算其分次贝蒂数



(a) (b)

图 2：比较基于 Vietoris–Rips 边理想滤过得到的二氯乙烯分子边理想的分次持久贝蒂曲线：(a) 顺式异构体；(b) 反式异构体。

计算各维度下得到的边理想。

滤过揭示了两种形式之间不同的拓扑行为。结构更紧凑的顺式异构体，其与边相关的贝蒂生成元更早出现；而结构更细长的反式异构体则产生激活较晚的边，这一点体现在分次贝蒂数中$\beta_{i,\ i+2}$。此外，由于顺式异构体更加紧凑，其部分组合特征的持续时间短于反式异构体，这一点也体现在分次贝蒂数中$\beta_{i,\ i+3}$。这些差异表明，持久边理想对细微的几何变化十分敏感，能够提供一种纯粹的代数拓扑特征来区分不同的分子异构体。图2a–2b展示了相应的原子几何结构和持久性图。显然，这些异构体的持久分次贝蒂曲线具有截然不同的特征。

7 讨论

本文框架扩展了持久 Stanley–Reisner 理论（PSRT）[15]，中提出的思想，但在概念和技术层面存在显著差异。在 PSRT 中，持久性是通过组合分解的变化来定义的，例如面或 Stanley–Reisner 生成元的演变；持久模则直接建立在这些分解之上，随后再进行稳定性分析。相比之下，本文方法从函子性与同调观点出发：持久性通过 Tor 函子内在地定义，结构映射则由滤过中的包含自然诱导。因此，稳定性和自然性直接源于 Tor 的函子性，以及 Hochster 对应与这些映射的相容性。

此外，PSRT 通过识别相应的持久（上）同调群来表述持久 Hochster 公式，而本文则从基于 Tor 的持久贝蒂数定义出发，进而将 Hochster 描述推导为一个推论。因此，Hochster 公式并非作为定义性陈述出现，而是作为代数与拓扑实现之间一种自然的相容性结果出现。另一个区别在于对贝蒂移位和贝蒂分裂等经典关系的处理。本文所呈现的结果并不局限于图或

单纯复形，而是对单项式理想的任意滤过均成立，包括那些源自超图、超边理想和面理想的滤过。从这个意义上说，该框架适用于广泛的组合与代数对象。

与我们的方法并行，Hu 等人将沿滤过取得的 Stanley–Reisner 理想或边理想的关联素理想视为持久理想，并将其出生时刻和死亡时刻用作交换代数条形码 [14]。在本文中，我们集中研究极小关联素理想；它们直接对应于极小顶点覆盖（对于边理想而言），因而能够更透明地反映底层单项式理想的组合结构，并实现更精细的控制。

8 结论

本文为交换代数中的持久性发展了一个函子性同调框架，将持久 Stanley– Reisner 理论（PSRT）的组合方法和基于单纯复形的方法扩展到导出函子框架。通过利用 Tor 函子定义持久分次 Betti 数，我们建立了持久性的函子性概念，该概念自然继承了同调代数中的正合性、自然性和对偶性。此视角将若干经典恒等式——Hochster 公式、贝蒂移位和贝蒂分裂——统一到一个适用于分次单项式理想滤过的持久框架中。

本文推导的持久 Hochster 公式在代数持久性与拓扑持久性之间建立了明确的桥梁。它将 Stanley–Reisner 环滤过的持久分次 Betti 数，与诱导子复形上同调中诱导映射的秩对应起来。因此，这一公式在代数持久模与拓扑持久模之间建立了直接联系，并将经典持久同调作为特殊情形重新得到。将其应用于图、超图及其边理想时，该形式体系产生了一种持久Betti理论，用于追踪边过滤或顶点过滤下 syzygy、极小生成元和高阶代数关系的演化。

除了基于函子性 Betti 的视角外，我们还通过追踪持久极小素理想，引入了边理想滤过的素理想层面概括。记录这些素理想在 t 中的出生时刻和死亡时刻，可得到集合 $\mathcal{P}^{t,\,t'}$ 及其基数 $\mathrm{II}^{t,\,t'}$；它们构成了代数条形码，可作为持久分次贝蒂数据的补充。这些素理想条形码提供了结构变化的直观指标——能够准确识别随着边的添加而保持极小的顶点覆盖——而持久贝蒂数则量化生成元和 syzygy 的演化。总体而言，这些不变量为过滤组合结构提供了多分辨率描述，既便于计算，又与图论语义直接相关，从而增强了下游任务的表现。

除了理论贡献之外，我们的框架还可直接应用于多种数据驱动场景。我们利用持久边理想沿基因组构建 k-mer 互作图，并跟踪不同半径下的分次贝蒂数，从而在精选的线粒体基准数据集 [30] 上得到定长的持久分次贝蒂向量。这一表示可在最近邻方案下支持无比对分类，以一种具有可解释性的代数形式捕捉家族层级结构。对于具有三维坐标的分子图，按原子间距离进行滤过可生成持久边理想，其分次贝蒂特征能够区分几何异构体（例如顺/反二氯乙烯）；顺式构型呈现出更早出现但持续时间更短的线性链特征和近线性链特征，而反式构型则产生出现较晚但持续时间更长的特征，反映出紧凑与伸长的

几何形状所对应的纯代数信号。这些示例性应用展示了所提出方法在数据科学和机器学习中的潜力。

致谢

Suwayyid 的工作得到了法赫德国王石油与矿业大学的支持。Wei 的工作得到了美国国立卫生研究院资助编号 R35GM148196 以及密歇根州立大学研究基金会的支持。

参考文献

[1] Herbert Edelsbrunner 和 John Harer。持久同调——综述。载于《离散与计算几何综述：二十年后》，第453卷，第257–282页。美国数学学会，2008年。[2] Peter Bubenik 和 Pawe l D lotko。用于拓扑统计的持续景观工具箱。《符号计算杂志》，78(1):91–114，2017年。[3] Afra Zomorodian 和 Gunnar Carlsson。计算持久同调。《离散与计算几何》，33(2):249–274，2005年。[4]Gunnar Carlsson。拓扑与数据。《美国数学会通报》，46(2):255–308，2009年。[5] Henry Adams 和 Barıs Co skun uzer。持久同调的几何方法。《*SIAM*应用代数与几何杂志》，6(4):685–710，2022年。[6] Zixuan Cang 和 Guo-Wei Wei。Topologynet：基于拓扑的深度卷积神经网络和多任务神经网络，用于生物分子性质预测。《*PLoS*计算生物学》，13(7):e1005690，2017年。[7] Dong Chen、Jian Liu、Jie Wu 和 Guo-Wei Wei。持续超有向图同调与持续超有向图拉普拉斯算子。《数据科学基础》，5(4):558–588，2023年12月。[8] Jelena Grbi c、Jie Wu、Kelin Xia 和 Guo-Wei Wei。数据科学中拓扑方法的若干方面。《数据科学基础》，4(2):165–216，2022年。[9] JunJie Wee 和 Jian Jiang。分子科学中拓扑数据分析与拓扑深度学习综述。《化学信息与建模杂志》，65(23):12691–12706，2025年12月。在线发表：2025-11-14。[10] Xiaoqi Wei 和 Guo-Wei Wei。持续拓扑拉普拉斯算子——综述。《数学》，13(2):208，2025年。[11] Zhe Su、Xiang Liu、Layal Bou Hamdan、Vasileios Maroulas、Jie Wu、Gunnar Carlsson 和 Guo-Wei Wei。超越持久同调的拓扑数据分析与拓扑深度学习：综述。《人工智能评论》，页码：DOI: 10.1007/s10462–025–11462–w，2025年。

[12] Ezra Miller 和 Bernd Sturmfels。组合交换代数，数学研究生教材第227卷。施普林格，纽约，2005年。精装版：2004年12月。[13] Winfried Bruns 和 H. J¨urgen Herzog。*Cohen-Macaulay*环，第39卷，剑桥高等数学研究。剑桥大学出版社，剑桥，第2版，1998年。[14] Chuanshen Hu、Yu Wang、Kelin Xia、Ke Ye 和 Yipeng Zhang。融入交换代数的拓扑数据分析。*arXiv*预印本 *arXiv:2504.09174*，2025年4月。提交日期：2025-04-12；主题：cs.CG、math.AC、math.AT。[15] Faisal Suwayyid 和 Guo-Wei Wei。持久 Stanley–Reisner 理论。《数据科学基础》，8:287–312，2026年。[16] Faisal Suwayyid、Yuta Hozumi、Hongsong Feng、Mushal Zia、JunJie Wee 和 Guo-Wei Wei。Cakl：基因组学的交换代数k-mer学习。《自然·通讯》，2025年。[17] Hongsong Feng、Faisal Suwayyid、Mushal Zia、Jun Jie Wee、Yuta Hozumi、Chia Chen 和 Guo-Wei Wei。Caml：交换代数机器学习——蛋白质-配体结合亲和力预测案例研究。《化学信息与建模杂志》，65(13):6732–6743，2025年。[18] Mushal Zia、Faisal Abdulaziz Suwayyid、Yuta Hozumi、JunJie Wee、Hongsong Feng 和 Guo-Wei Wei。Cap：基于交换代数的蛋白质-核酸结合亲和力预测。《机器学习：科学与技术》，6:045068，2025年。[19]JunJie Wee、Faisal Suwayyid、Mushal Zia、Hongsong Feng、Yuta Hozumi 和 Guo-Wei Wei。交换代数神经网络揭示疾病的遗传起源。arXiv预印本 arXiv:2509.26566，2025年。[20] Mushal Zia、Faisal Suwayyid 和 Guo-Wei Wei。Gbnl：复杂生物数据的分次 Betti 数学习。*arXiv*预印本 *arXiv:2510.23187*，2025年。[21] Yiming Ren 和 Guowei Wei。交换代数、代数拓扑和拓扑谱理论对真实世界数据的可解释性与可表示性。《高级智能发现》，2025年。[22] David Eisenbud。《交换代数：以代数几何为视角》，数学研究生教材第150卷。施普林格纽约出版社，纽约州纽约市，1995年。[23] Joseph J. Rotman。同调代数导论。Universitext。施普林格纽约出版社，纽约州纽约市，第2版，2009年。[24] J¨urgen Herzog 和 Takayuki Hibi。单项式理想，数学研究生教材第260卷。施普林格，伦敦，2011年。[25] Adam Van Tuyl。边理想与覆盖理想入门指南。载于 Anna M. Bigatti、Philippe Gimenez 和 Eduardo S´aenz-de Cabez´on（编），单项式理想：计算与应用，数学讲义第2083卷，第63–94页。施普林格柏林海德堡，2013年。[26] Melvin Hochster。交换环中的素理想结构。《美国数学会汇刊》，142:43–60，1969年。

[27] Christopher A. Francisco、H^ong T. H`a 和 Adam Van Tuyl。单项式理想的分解。美国数学会会刊，137(10):3271–3282，2009。[28] Huy T`ai H`a 和 Adam Van Tuyl。单项式理想、超图的边理想及其分次贝蒂数。代数组合学杂志，27(2):215–245，2008。[29] Yuta Hozumi 和 Guo-Wei Wei。通过 k-mer 拓扑揭示基因组空间的形态。*SIAM* 生命科学杂志，2026。[30] Pablo Mill´an Arias、Fatemeh Alipour、Kathleen A. Hill 和 Lila Kari。Delucs：用于 DNA 序列无监督聚类的深度学习。*PLOS ONE*，17(1):e0261531，2022年1月。[31] Nan Sun、Shaojun Pei、Lily He、Changchuan Yin、Rong Lucy He 和 Stephen S.-T. Yau。病毒基因组空间的几何构建及其应用。计算与结构生物技术杂志，19:4226–4234，2021。[32] 美国国家生物技术信息中心。PubChem 化合物摘要，CID 643833：顺式-1,2-二氯乙烯。PubChem，2025。[33] 美国国家生物技术信息中心。PubChem 化合物摘要，CID 638186：反式-1,2-二氯乙烯。PubChem，2025。[34] Kelin Xia、D. Vijay Anand、Saxena Shikhar 和 Yuguang Mu。渗透调节剂分子聚集及其氢键网络的持久同调分析。物理化学化学物理，21(37):21038–21048，2019。[35] Dong Chen、Jian Liu、Jie Wu、Guo-Wei Wei、Feng Pan 和 Shing-Tung Yau。分子与材料科学中的路径拓扑。物理化学快报，14(4):954–964，2023。在线发表于2023年1月23日。[36] D. Vijay Anand、Qiang Xu、Jun Jie Wee、Kelin Xia 和 Tze Chien Sum。面向卤化物钙钛矿材料设计的机器学习拓扑特征工程。*npj* 计算材料，8(1):203，2022。[37] Faisal Suwayyid 和 Guo-Wei Wei。持久迈耶-狄拉克。物理学杂志：复杂性，5(4):045005，2024。[38] Junjie Wee、Ginestra Bianconi 和 Kelin Xia。用于分子表示的持久狄拉克。科学报告，13(1):11183，2023年7月。文章编号：11183。