arXiv:2512.17690v1 [math.OA] 19 Dec 2025

Cartan 子积系统

SUVRAJIT BHATTACHARJEE、OLOF GISELSSON 和 SERGEY NESHVEYEV

摘要。给定一个半单紧李群 G 和一个非零支配整权 λ，最高权 G_q-模 $V_{n\lambda}$ 构成一个有限维希尔伯特空间的子乘积系统。利用克莱布什–戈尔丹系数的渐近行为猜想，我们将相应的 Cuntz–Pimsner 代数识别为 G齐性空间上的量子化函数代数。我们还证明，Toeplitz 代数的规范不变部分为全矩阵代数收敛到量子旗流形提供了一个模型；这补充并推广了 Landsman 和 Rieffel 关于 $q = 1$ 的结果，以及 Vaes–Vergnioux 关于 $q \neq 1$秩一情形的结果。

我们验证了关于 $G = SU(n)$ 的克莱布什–戈尔丹系数以及所有正则权或基本权 ω_1的倍数的权的猜想。对于 $\lambda = \omega_1$，我们还详细描述了 Toeplitz 代数和 Cuntz–Pimsner 代数，将 Arveson 关于对称子积系统的结果加以推广。

引言

由 C*-对应的乘积系统关联的算子代数构成了一个庞大的代数类，其中尤其包括 Cuntz 代数、图代数和半群 C*-代数。子乘积系统 [BM10,SS09] 则产生了一个更大的代数类。这两种情形中的代数都以类似方式定义：它们由 Fock 型空间上的产生算子 S_ξ 生成。然而，子乘积系统的一般情形之所以更加复杂，是因为除了基本不等式 $\sum_i S_{\xi_i} S_{\xi_i}^* \leq 1$ （当 $\sum_i \theta_{\xi_i,\ \xi_i} \leq 1$ 时）之外，没有显而易见的关系同时涉及产生与湮灭算子。目前尚无通用方法来获得这些 C*-代数中的关系、描述其理想结构或计算其 K-理论。

最近，第三位作者与 Erik Habbestad 引入了一类所谓的 Temperley–Lieb 子积系统 [HN24, HN25] ，它们具有丰富的量子对称性，也就是说，相应的 Cuntz–Pimsner 代数带有一个紧量子群的自然遍历作用。利用构造中的对称性这一想法当然并非新鲜事。在 Arveson 的奠基性工作 [Arv98] 中，酉群的作用就已被用于关键性地描述相应的 Cuntz–Pimsner 代数；后来，Andersson [And15]，明确开启了对等变子乘积系统的研究，随后 Arici 和 Kaad [AK21] 也开展了相关工作。 [HN24] 的新意在于引入量子群理论的现代工具，例如幺半范畴等价和 Baum–Connes 猜想的范畴化表述，来分析相关代数、描述其生成元与关系，并计算其 K-理论。Temperley–Lieb 子积系统由非交换变量中的特定二次多项式定义。Aiello、Del Vecchio 和 Rossi [ADVR25]，已分析了更一般的二次多项式；最近，Arici 和 Ge [AG25] 对二次子乘积系统开展了系统研究。

本文考虑另一类自然的等变子乘积系统，其中包括 Arveson 的对称子积系统；此外，Temperley–Lieb 子积系统在幺半范畴等价意义下也属于此类。具体而言，取一个单连通半单紧李群 G。考虑其 q 变形 G_q ，并取一个不可约最高权 G_q 模 V_λ。

日期：2025年12月15日。本研究得到了 NFR 项目 300837“量子对称性”的资助。S.B. 还获得了波兰国家科学中心通过 WEAVE-UNISONO 项目提供的资助，项目编号为 2023/05/Y/ST1/00046。

于是，对所有 m， $n \geq 0$，模 $V_{m\lambda} \otimes V_{n\lambda}$ 中都包含一个与 $V_{(m+n)\lambda}$ 同构的唯一子模，称为张量积的 Cartan 分量。由此我们得到一个子乘积系统 $(V_{n\lambda})_{n\geq 0}$，以及与之关联的 Cuntz–Pimsner 代数 $\mathcal{O}_{\lambda,\, q}$。

在 [And15], 中曾尝试分析 $\mathcal{O}_{\lambda,q}$ 的规范不变子代数，但遗憾的是， [And15] 存在若干似乎难以弥补的漏洞（其中最关键的是对过于乐观的 [And15, 定理 4.9] 的证明）。我们对 $\mathcal{O}_{\lambda,q}$ 的分析，核心在于推导产生与湮灭算子之间的近似混合交换关系。事实上，当投影 $V_\lambda^{\otimes n} \to V_{n\lambda}$ 既没有类似 [HN24,HN25], 中那样简单的 Jones–Wenzl 类型公式，也无法像 [Arv98], 中那样通过蛮力计算找到湮灭算子的显式表达式时，如何做到这一点，正是促使我们开展这项工作的主要动机之一。

我们发现的方法依赖于克莱布什–戈尔丹系数的一个猜想性质，大致来说，当 $q \geq 1$ 和 n 很大时， $V_\lambda \otimes V_{n\lambda}$ 中的每个最高权向量都接近于形如 $\xi \otimes \xi_{n\lambda}$ 的向量，其中 $\xi_{n\lambda}$ 是 $V_{n\lambda}$ 中的一个最高权向量；而每个满足 $\xi \perp \xi_\lambda$ 的这种形式的向量都接近于与 $V_{(n+1)\lambda}$ 正交。精确表述见第 3.4 节。对于 $q = 1$，第一个性质可由 [dGR98], 的主要结果推出，但我们认为 [dGR98] 中的证明并不完整，且未处理关键的分析难点。我们尚未能在一般情形下证明这一猜想，但已验证它适用于 $G = SU(N)$，以及所有正则或为基本权 ω_1 的倍数的权 λ（该基本权对应于 $SU(N)$ 在 $\mathbb{C}^N$ 上的标准表示）。

本文的结构安排如下。在预备性的第1节中，我们汇集了与子乘积系统和量子群有关的定义和构造。这里的主要新结果是，给出了紧量子群作用于等变子乘积系统的 Cuntz–Pimsner 代数时，该作用具有遍历性的一个充分条件。

在第2节中，作为一般情形的预热，我们研究 q-对称子积系统的 Toeplitz 代数和 Cuntz–Pimsner 代数，它们对应于情形 $G = SU(N)$ 和 $\lambda = \omega_1$。在这种情形下，一切都可以显式计算。紧量子群 $SU_q(N)$ 在分析中发挥着重要作用，但除其定义外，我们几乎不需要其他性质。这里的结果推广了 Arveson 关于 $q = 1$ [Arv98] 的一些结果。

第3节包含我们的主要结果。我们分析 $\mathcal{O}_{\lambda,\, q}$ 的策略如下（第3节中按相反顺序介绍）。我们利用克莱布什–戈尔丹系数的猜想渐近行为，在$\mathcal{O}_{\lambda,\, q}$ 中得到足够多的关系，从而能够得出结论： G_q 在$\mathcal{O}_{\lambda,\, q}$ 上的作用是遍历的。随后，我们在 $\mathcal{O}_{\lambda,\, q}$ 上构造一个特征。这使我们能够定义一个单射的 G_q-等变同态 $\mathcal{O}_{\lambda,\, q} \to C(G_q)$。接下来，确定其像是相对常规的步骤。

在第4节中，我们将进一步研究 Toeplitz 代数的规范不变子代数 $\mathcal{T}_{(0)\,\lambda,q}$。我们首先证明，$\mathcal{T}_\lambda^{(0)}{}_{,q}$ 是一个以 $\mathbb{Z}_+ \cup \{\infty\}$ 为底空间、纤维分别为 $\mathcal{B}(V_{n\lambda})$（在 $n \in \mathbb{Z}_+$ 处）和 $C(K_q^S \backslash G_q)$（在 ∞ 处）的 C* 代数连续场的截面代数，其中 $K_q^S \backslash G_q$ 是一个量子旗流形。这可以解释为收敛 $\mathcal{B}(V_{n\lambda}) \to C(K_q^S \backslash G_q)$。这类结果由来已久。对于 $q = 1$，Landsman 首先利用 Berezin 量子化的性质证明了这种连续场结构的存在性 [Lan98] 。后来，Rieffel 证明 [Rie04], 收敛 $\mathcal{B}(V_{n\lambda}) \to C(K^S \backslash G)$ 可以在量子度量空间理论中得到严谨的理解；另见 [Li06] ，其中给出了一种替代方法，以及 [INT06, AKK22] ，其中讨论了量子情形下的一些相关工作。作为对这些结果的补充，我们证明，由 $\mathcal{T}_\lambda^{(0)}$ 定义的连续场结构与 [Lan98] 中引入的结构一致。

关于收敛 $\mathcal{B}(V_{n\lambda}) \to C(K_q^S \backslash G_q)$ 的另一种解释，可以从离散量子空间的紧化角度给出。对于 $G_q = SU_q(2)$（以及更一般地，对于幺半群等价的自由正交量子群），Vaes 和 Vergnioux [VV07]利用琼斯–温茨尔投影的性质构造了这类紧化。推广

[HN24], 的结果，我们证明，关于 Clebsch–Gordan 系数的渐近行为的猜想，足以在高秩情形下构造类似的紧化。此外，我们对 $\mathcal{T}_{\lambda}^{(0)}$, q 的分析使我们得以一举实现两个目标：证明这些紧化确实存在，且相应的边界就是量子旗流形 $K_q^S\backslash G_q$。

最后需要指出，对于本文中的若干结果，考虑定义在支配整权幺半群 P_+ 上的子乘积系统，而非定义在 $\mathbb{Z}_+$ 上的子乘积系统，会更加自然。虽然我们在第3.3节中简要采用了这一视角，但对此类系统的详细分析将留待别处进行。

1. 紧量子群与等变子乘积系统

1.1.紧量子群。让我们固定记号并回顾一些基本概念，更多详情参见 [NT13] 。紧量子群 G 指由有限维酉右余模的矩阵系数生成的 Hopf $*$-代数 $(\mathbb{C}[G],\ \Delta)$。这类余模与 G 的有限维酉表示一一对应；也就是说，酉算子 $U \in \mathcal{B}(H_U) \otimes \mathbb{C}[G]$ 满足 $(\iota \otimes \Delta)(U) = U_{12}U_{13}$。具体而言，$H_U$ 上的右余模结构定义为

$$\delta_U : H_U \to H_U \otimes \mathbb{C}[G], \quad \delta_U(\xi) = U(\xi \otimes 1).$$

两个酉表示的张量积（也记作 $U \oplus V$或 $U \times V$）定义为 $U_{13}V_{23}$。

用 h表示 $\mathbb{C}[G]$ 上的 Haar 态，用 $L^2(G)$表示相应的 GNS空间。我们将$\mathbb{C}[G]$ 视为 $\mathcal{B}(L^2(G))$ 的子代数。定义 G上的连续函数的（约化）C*代数 $C(G)$为 $\mathbb{C}[G]$的范数闭包。

考虑与余代数 $(\mathbb{C}[G], \Delta)$ 对偶的 $*$代数 $\mathcal{U}(G) = \mathbb{C}[G]^*$，其对合为 $\omega^*(x) = \omega(S(x)^*)$。 G 的每个有限维酉表示 U 都定义一个 $*$-表示

$$\pi_U : \mathcal{U}(G) \to \mathcal{B}(H_U), \quad \pi_U(\omega) = (\iota \otimes \omega)(U).$$

我们通常省略 π_U ，并用 $\omega\xi$ 代替 $\pi_U(\omega)\xi$。

现在假设 A 是一个 C*代数，且 α: $A \to A \otimes C(G)$ 是一个 $*$-同态，满足 $(\alpha \otimes \iota)\alpha = (\iota \otimes \Delta)\alpha$。如果满足以下任一等价条件，我们就称 α 为 A上的 G （右）作用，或称 A 为 G-C*代数:

(1) 线性空间 $\alpha(A)(1\otimes C(G))$ 是 $A\otimes C(G)$ 的稠密子空间（Podleś条件）；(2) 存在一个稠密的 $*$ 子代数 $\mathcal{A} \subset A$ ，在其上 α 定义了 Hopf代数 $(\mathbb{C}[G], \Delta)$ 的余作用，即对于所有 $a \in \mathcal{A}$， $\alpha(\mathcal{A}) \subset \mathcal{A} \otimes_{\mathrm{alg}} \mathbb{C}[G]$ 且 $(\iota \otimes \varepsilon)\alpha(a) = a$,

其中 $\otimes_{\mathrm{alg}}$ 表示纯代数张量积。则满足 (2) 的最大子代数为

$$\mathcal{A} = \mathrm{span}\{(\iota \otimes h)(\alpha(a)(1 \otimes x)) : a \in A,\ x \in \mathbb{C}[G]\},$$

其元素称为正则的。

若 α 是单射，则称该作用为约化的；或者等价地，由于 h 在 $C(G)$ 上的忠实性，若条件期望

$$E = (\iota \otimes h)\alpha : A \to A^G = \{a \in A : \alpha(a) = a \otimes 1\}$$

是忠实的。如果 G 是余可和的，也就是说， $\mathbb{C}[G] \subset C(G)$上的余单位 ε 是有界的，那么$(\iota\otimes\varepsilon)\alpha = \iota$ 作用于 A，因此 G的所有作用都是约化的。

1.2. 子乘积系统。回顾一下，按照 [SS09、BM10], ，有限维希尔伯特空间（在加法幺半群 $\mathbb{Z}_+$上）的子乘积系统 $\mathcal{H}$ 是一列希尔伯特空间$(H_n)_{n=0}^\infty$，并配有等距映射$w_{k,\,l}\colon H_{k+l}\to H_k\otimes H_l$，满足

$$\dim H_0=1,\qquad \dim H_1=m<\infty,\qquad (w_{k,l}\otimes 1)w_{k+l,n}=(1\otimes w_{l,n})w_{k,l+n}.$$

根据 [SS09 引理 6.1], ，我们可以假设 $H_0=\mathbb{C}$、 $H_{k+l}\subset H_k\otimes H_l$ 以及等距映射 $w_{k,l}$ 就是嵌入映射。满足这一更强性质的子乘积系统称为标准子乘积系统。对于这样的子乘积系统，我们用 f_n 表示投影 $H_1^{\otimes n}\to H_n$。

给定一个子乘积系统 $\mathcal{H}=(H_n)_{n=0}^\infty$，与之关联的 Fock 空间定义为

$$\mathcal{F}_{\mathcal{H}}=\bigoplus_{n=0}^\infty H_n.$$

对于每个 $\xi\in H_1$，我们定义一个创造算子

$$S_\xi\colon \mathcal{F}_{\mathcal{H}}\to\mathcal{F}_{\mathcal{H}}\quad\text{by}\quad S_\xi\zeta=w_{1,n}^*(\xi\otimes\zeta)\quad\text{for}\quad\zeta\in H_n.$$

我们通常固定 H_1 中的一个标准正交基 $(\xi_i)_{i=1}^N$，并用 S_i 表示 S_{ξ_i}。 $\mathcal{H}$ 的 Toeplitz 代数 $\mathcal{T}_{\mathcal{H}}$ 定义为由 $S_1,\dots,S_N$ 生成的含单位元 C*- 代数。

若 $\mathcal{H}$ 是标准的且 $H=H_1$，则将 $\mathcal{F}_{\mathcal{H}}$ 视为全 Fock 空间 $\mathcal{F}(H)=\bigoplus_{n=0}^\infty H^{\otimes n}$.的子空间会很方便。考虑算子 $T_i\colon \mathcal{F}(H)\to\mathcal{F}(H)$, $T_i\zeta=\xi_i\otimes\zeta$，以及投影 $e_{\mathcal{H}}\colon \mathcal{F}(H)\to\mathcal{F}_{\mathcal{H}}$.。于是 $S_i=e_{\mathcal{H}}T_i|_{\mathcal{F}_{\mathcal{H}}}$且 $S_i^*=T_i^*|_{\mathcal{F}_{\mathcal{H}}}$。由于 $1-\sum_{i=1}^N T_iT_i^*$是到 $H^{\otimes 0}=\mathbb{C}$上的投影，我们便得到

$$e_0=1-\sum_{i=1}^N S_iS_i^*,\tag{1.1}$$

其中 e_0 是投影 $\mathcal{F}_{\mathcal{H}}\to H_0$。由此可得 $\mathcal{K}(\mathcal{F}_{\mathcal{H}})\subset\mathcal{T}_{\mathcal{H}}$。 $\mathcal{H}$ 的 Cuntz–Pimsner 代数 [V12] 定义如下：

$$\mathcal{O}_{\mathcal{H}}=\mathcal{T}_{\mathcal{H}}/\mathcal{K}(\mathcal{F}_{\mathcal{H}}).$$

我们将 S_i 和 S_ξ 在 $\mathcal{O}_{\mathcal{H}}$ 中的像分别记为 s_i 和 s_ξ。

固定 H中的一组标准正交基 $(\xi_i)_{i=1}^N$ 后，将张量代数 $T(H)$与由 N个非交换变量构成的多项式代数 $\mathbb{C}\langle X_1,\dots,X_N\rangle$ 视为同一对象通常会很方便。根据 [SS09，命题 7.2], ，标准子积系统与满足一次齐次分量 I_1 为零的齐次理想 I（位于 $\mathbb{C}\langle X_1,\dots,X_N\rangle$ 中）之间存在一一对应关系。也就是说，给定这样的理想 I，我们定义

$$H_n=I_n^\perp\subset H^{\otimes n}.$$

于是， $\mathcal{F}_{\mathcal{H}}$可以视为代数 $\mathbb{C}\langle X_1,\dots,X_N\rangle/I$ 的完备化。在这一图景下，产生算子 S_i 是该代数上由左乘 X_i 定义的算子，因此显然有 $p(S_1,\dots,S_N)=0$ 对所有 $p\in I$ 均成立。

一般而言，除了由 (1.1) 得出的不等式 $\sum_i S_iS_i^*\le 1$ 之外，似乎很难说明算子 S_i 与 S_j^* 之间的关系。甚至也不清楚以下性质何时成立。

定义 1.1。给定一个子乘积系统 $\mathcal{H}$，若元素 $S_{i_1}\dots S_{i_n}S_{j_1}^*\dots S_{j_m}^*$ 张成 $\mathcal{T}_{\mathcal{H}}$ 的一个稠密子空间，我们就称 $\mathcal{T}_{\mathcal{H}}$ 满足正规排序 。类似地，若元素 $s_{i_1}\dots s_{i_n}s_{j_1}^*\dots s_{j_m}^*$ 张成 $\mathcal{O}_{\mathcal{H}}$ 的一个稠密子空间，我们就称 $\mathcal{O}_{\mathcal{H}}$ 满足正规排序。

我们指出，广泛悬而未决的 Arveson–Douglas 猜想（例如参见 [Har23，第3节.5]）预言，如果与 $\mathcal{H}$ 对应的理想 I 包含交换子$[X_i,X_j]$，那么 $\mathcal{O}_{\mathcal{H}}$ 就是交换的。当 $\mathcal{O}_{\mathcal{H}}$ 是交换的时，它显然具有正规排序。

1.3. 等变子乘积系统。 设 G 是一个紧量子群，且 $\mathcal{H}=(H_n)_{n=0}^{\infty}$ 是由有限维 G-模构成的子乘积系统。具体来说，给定 U_n 在 H_n 上的 G 酉表示，以及作为G-交织算子的结构映射 $H_{k+l}\to H_k\otimes H_l$。

在这种情况下，我们有一个酉表示

$$U_{\mathcal{H}}=\bigoplus_{n=0}^{\infty}U_n\in M(\mathcal{K}(\mathcal{F}_{\mathcal{H}})\otimes C(G))$$

关于 G 在 $\mathcal{F}_{\mathcal{H}}$上的作用。它定义了 G 在 $\mathcal{K}(\mathcal{F}_{\mathcal{H}})$ 和 $\mathcal{T}_{\mathcal{H}}$ 上的约化右作用，由

$$\alpha(T)=U_{\mathcal{H}}(T\otimes 1)U_{\mathcal{H}}^{*}.$$

在 $\mathcal{T}_{\mathcal{H}}$ 上的作用可传递为 $\mathcal{O}_{\mathcal{H}}$ 上一个可能非约化的作用。我们有以下关于此作用遍历性的充分条件。

命题 1.2. 假设 G 是一个紧量子群，且 $\mathcal{H}=(H_n)^{n\geq 0}$ 是一个有限维希尔伯特空间的 G-等变子乘积系统。假设

(i) G-模 H_n 是单模且两两不同构；(ii) *Cuntz–Pimsner* 代数 $\mathcal{O}_{\mathcal{H}}$ 具有正规排序。

于是， G 在 $\mathcal{O}_{\mathcal{H}}$ 上的作用是遍历的。

证明。 考虑由 $S^{(n)}(\xi_1\otimes\cdots\otimes\xi_n)=s_{i_1}\dots s_{i_n}$定义的线性映射 $S^{(n)}\colon H_1^{\otimes n}\to\mathcal{O}_{\mathcal{H}}$。它们是 G-等变的，并具有性质 $S^{(n)}=S^{(n)}f_n$，其中 f_n 是投影 $H_1^{\otimes n}\to H_n$。更一般地，考虑由下式定义的线性映射 $S^{(n,m)}\colon H_1^{\otimes n}\otimes\bar{H}_1^{\otimes m}\to\mathcal{O}_{\mathcal{H}}$

$$S^{(n,m)}(\xi_1\otimes\cdots\otimes\xi_n\otimes\bar{\zeta}_1\otimes\cdots\otimes\bar{\zeta}_m)=s_{\xi_1}\dots s_{\xi_n}s_{\zeta_1}^{*}\dots s_{\zeta_m}^{*}.$$

于是 $S^{(n,m)}=S^{(n,m)}(f_n\otimes\bar{f}_m)$，其中 $\bar{f}_m\colon \bar{H}_1^{\otimes m}\to\bar{H}_m$ 是由下式定义的余等距算子

$$\bar{f}_m(\bar{\zeta}_1\otimes\cdots\otimes\bar{\zeta}_m)=\overline{f_m(\zeta_m\otimes\cdots\otimes\zeta_1)}$$

并且我们利用伴随映射将 $\bar{H}_m$ 视为 $\bar{H}_1^{\otimes m}$的子空间，从而 $\bar{f}_m$ 成为一个投影。若考虑 G 在 H_1上的对偶作用，则映射 $S^{(n,m)}$ 变为等变映射，也就是说，相应的 $\mathcal{U}(G)$-模结构由$\omega\xi=S(\omega)^{*}\xi$给出，其中$S(\omega)=\overline{\omega S}$，而 S 是 $(\mathbb{C}[G],\ \Delta)$上的反 antipode。

考虑条件期望 $E\colon \mathcal{O}_{\mathcal{H}}\to\mathcal{O}_{\mathcal{H}}^{G}$，其定义为 $E(a)=(\iota\otimes h)\alpha(a)$，其中$\alpha\colon \mathcal{O}_{\mathcal{H}}\to\mathcal{O}_{\mathcal{H}}\otimes C(G)$ 是 G的作用，而 h是 $C(G)$ 上的 Haar 态。由正规排序假设 (ii)，我们得出，形如 $S^{(n,m)}(v)$ 的元素张成 $\mathcal{O}_{\mathcal{H}}^{G}$ 的一个稠密子空间，其中 $v\in H_n\otimes\bar{H}_m$是一个 G-不变向量。根据假设 (i)，当 $n\neq m$时不存在这样的非零向量 v；而当 $n=m$时，这类向量构成的空间是一维的。因此，对于每个 $n\geq 1$，空间 $E(S^{(n,n)}(H_1^{\otimes n}\otimes\bar{H}_1^{\otimes n}))=E(S^{(n,n)}(H_n\otimes\bar{H}_n))$ 至多是一维的。这个空间确实包含单位元，因为一旦我们在 H_1 中固定一个标准正交基，就可由 (1.1) 得到 $\sum_{i_1,\dots,i_n}s_{i_1}\dots s_{i_n}s_{i_n}^{*}\dots s_{i_1}^{*}=1$。因此 $\mathcal{O}_{\mathcal{H}}^{G}=\mathbb{C}1$。□

1.4. 半单紧李群的 Drinfeld–Jimbo 变形。设 G为单连通半单紧李群， $\mathfrak{g}$ 为其复化李代数。泛包络代数 $U\mathfrak{g}$ 是带有对合的 Hopf $*$-代数，其实李代数 G由反自伴元素构成。在 $\mathfrak{g}$ 上固定一个非退化对称伴随不变形式，使其在 G 的实李代数上的限制为负定。设 $\mathfrak{h}\subset\mathfrak{g}$ 为 T 在 G 中所确定的 Cartan 子代数。当 G 为单时，我们总是将对称形式归一化，使得对 $\mathfrak{h}^{*}$ 上的对偶形式以及每个短根 $\alpha\in\Delta$，都有 $(\alpha,\ \alpha)=2$。

对于每个根 α，令 $d_\alpha=(\alpha,\alpha)/2$。令 $H_\alpha\in\mathfrak{h}$ 为在同一化 $\mathfrak{h}\cong\mathfrak{h}^{*}$ 下与余根$\alpha^{\vee}=2\alpha/(\alpha,\alpha)$ 对应的元素。固定一组单根 $\Pi=\{\alpha_1,\dots,\alpha_r\}$。对于每个正根 $\alpha\in\Delta_+$，选取 $E_\alpha\in\mathfrak{g}_\alpha$，使得 $(E_\alpha,E_\alpha^{*})=d_\alpha^{-1}$，并令

$F_\alpha = E_\alpha^* \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$，从而 $[E_\alpha, F_\alpha] = H_\alpha$。我们分别用 E_i, F_i, H_i 表示 $E_{\alpha_i}, F_{\alpha_i}, H_{\alpha_i}$。记$\omega_1, \dots, \omega_r$为基本权，因此 $\omega_i(H_j) = \delta_{ij}$。

固定一个数 $q > 0$。若 $q = 1$，则令 $U_1\mathfrak{g} = U\mathfrak{g}$。对于 $q \neq 1$，量子化包络代数 $U_q\mathfrak{g}$ 由元素 E_i、F_i、K_i、K_i^{-1}、$1 \le i \le r$生成，并满足以下关系：

$$K_iK_i^{-1} = K_i^{-1}K_i = 1, \quad K_iK_j = K_jK_i, \quad K_iE_jK_i^{-1} = q_i^{a_{ij}}E_j, \quad K_iF_jK_i^{-1} = q_i^{-a_{ij}}F_j,$$

$$E_iF_j - F_jE_i = \delta_{ij}\frac{K_i - K_i^{-1}}{q_i - q_i^{-1}},$$

$$\sum_{k=0}^{1-a_{ij}} (-1)^k \begin{bmatrix} 1-a_{ij} \\ k \end{bmatrix}_{q_i} E_i^k E_j E_i^{1-a_{ij}-k} = 0, \quad \sum_{k=0}^{1-a_{ij}} (-1)^k \begin{bmatrix} 1-a_{ij} \\ k \end{bmatrix}_{q_i} F_i^k F_j F_i^{1-a_{ij}-k} = 0,$$

where $a_{ij} = (\alpha_i^\vee, \alpha_j) = \alpha_j(H_i)$, $\begin{bmatrix} m \\ k \end{bmatrix}_{q_i} = \frac{[m]_{q_i}!}{[k]_{q_i}![m-k]_{q_i}!}$, $[m]_{q_i}! = [m]_{q_i}[m-1]_{q_i}\dots[1]_{q_i}$, $[n]_{q_i} = \frac{q_i^n - q_i^{-n}}{q_i - q_i^{-1}}$, $q_i = q^{d_i}$ and $d_i = d_{\alpha_i}$. This is a Hopf $*$-algebra with coproduct $\hat{\Delta}_q$ and counit $\hat{\varepsilon}_q$ defined by

$$\hat{\Delta}_q(K_i) = K_i \otimes K_i, \quad \hat{\Delta}_q(E_i) = E_i \otimes 1 + K_i \otimes E_i, \quad \hat{\Delta}_q(F_i) = F_i \otimes K_i^{-1} + 1 \otimes F_i,$$

$$\hat{\varepsilon}_q(E_i) = \hat{\varepsilon}_q(F_i) = 0, \quad \hat{\varepsilon}_q(K_i) = 1,$$

其对合定义为 $K_i^* = K_i$、$E_i^* = F_iK_i$、$F_i^* = K_i^{-1}E_i$。

若 V 是一个有限维 $U_q\mathfrak{g}$-模，且 $\lambda \in P$ 是一个整权，则用 $V(\lambda)$表示权为 λ的向量 $v \in V$ 所构成的空间，因此对所有 i，都有 $K_iv = q^{(\lambda,\alpha_i)}v = q_i^{\lambda(i)}v$，其中 $\lambda(i) = (\lambda, \alpha_i^\vee) = \lambda(H_i)$。回忆一下，若 $V = \oplus_{\lambda\in P}V(\lambda)$，则称 V为可容许。每个这样的模都可以酉化，因此我们总可以假设 V 是一个希尔伯特空间，且表示 $U_q\mathfrak{g} \to \mathcal{B}(V)$是一个 $*$-同态。我们用 $\mathcal{C}_q(\mathfrak{g})$表示有限维可容许酉 $U_q\mathfrak{g}$-模构成的张量范畴。该范畴是半单的，其简单对象是对应于占优整权 $\lambda \in P_+$的最高权模 V_λ。

记 $\mathbb{C}[G_q] \subset (U_q\mathfrak{g})^*$ 为有限维可容许 $U_q\mathfrak{g}$-模的矩阵系数构成的 Hopf $*$-代数。这定义了一个紧量子群，其表示范畴为 $\mathcal{C}_q(\mathfrak{g})$。该范畴中的融合规则以及最高权模的权分解对所有 $q > 0$都相同。

极大环面 $T \subset G$ 可视为 $\mathcal{U}(G_q)$的酉群的子群，而其复化 $T_\mathbb{C}$ 可视为 $\mathcal{U}(G_q)$可逆元群的子群：若 $X \in \mathfrak{h}$，则对于任意可容许的 $U_q\mathfrak{g}$-模 V和 $\lambda \in P$，元素 $\exp(X) \in T_\mathbb{C}$在 $V(\lambda)$上的作用等同于乘以 $e^{\lambda(X)}$。在这一嵌入 $T_\mathbb{C} \hookrightarrow \mathcal{U}(G_q)$下，对于 $i = 1, \dots, r$，有 $K_i = q_i^{H_i}$。

我们需要以下经典结果，参见例如 [Kum10，命题 3.2 和推论 3.4]。

定理 1.3。对于任意支配整权 λ、μ、$\nu \in P_+$，V_ν在$V_\lambda \otimes V_\mu$ 中的重数 $m_{\lambda,\,\mu}^{\nu}$不大于 维数$V_\lambda(\nu - \mu)$。当且仅当对所有 i 以及 V_λ 的权分解中的所有权 λ'，$\lambda'(i) + \mu(i) \ge -1$ 时，等号成立。

范畴 Rep G_q是编织的，其编织为 $\sigma = \Sigma\mathcal{R}$，其中 $\Sigma\colon V \otimes W \to W \otimes V$是翻转映射，而 $\mathcal{R} \in \mathcal{U}(G_q \times G_q)$ 是一个普适的 R-矩阵，由以下性质唯一确定：若 $\zeta \in V$ 是权为 λ 的最低权向量，且 $\xi \in W$ 是权为 μ的最高权向量，分别属于某些有限维单 G_q-模 V和 W，则

$$\mathcal{R}(\zeta \otimes \xi) = q^{(\lambda,\mu)}\zeta \otimes \xi. \tag{1.2}$$

具体而言， R-矩阵具有如下形式

$$\mathcal{R} = q^{\sum_{i,j}(B^{-1})_{ij}H_i\otimes H_j} \prod_{\alpha\in\Delta_+} \exp_{q_\alpha}((1-q_\alpha^{-2})F_\alpha \otimes E_\alpha), \tag{1.3}$$

其中 B i 是矩阵 $((\alpha_i^\vee, \alpha_j^\vee))_{i,j}$，乘积是按照某个特定顺序取的

在集合 Δ_+ 正根上，

$$\exp_q(\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} q^{n(n+1)/2} \frac{\omega^n}{[n]_q!},$$

并且 E_α （分别为 F_α）是关于 $K_i^{\pm 1}$和 E_i （分别为 F_i）的多项式，使得 $K_iE_\alpha = q^{(\alpha_i,\alpha)}E_\alpha K_i$（分别为 $K_iF_\alpha = q^{-(\alpha_i,\alpha)}F_\alpha K_i$），详情见 [CP94，定理 8.3。9]（按照 [CP94]的约定，我们有 $q = e^h$、 $K_i = e^{-d_ihH_i}$、 $E_i = X_i^-$和 $F_i = X_i^+$）。

From（1.3) 我们看到，(1.2) 对更一般的权向量对也成立。具体而言，写 g wt(ξ) 表示 ξ 的权，我们有

$$\mathcal{R}(\zeta\otimes\xi) = q^{(\mathrm{wt}(\zeta),\mathrm{wt}(\xi))}\zeta\otimes\xi \tag{1.4}$$

对于所有满足以下条件之一的权向量 ζ 和 ξ，该结论均成立： ζ 是最低权向量，或 ξ 是最高权向量。

接下来回顾一下相对于标准 r-矩阵的 G 的泊松–李子群及其 qNT12] 变形 [的描述。取 Π 的一个子集 S 。记 $\tilde{K}^S$ 为 G 的闭连通子群，其复化李代数 $\tilde{\mathfrak{g}}_S$ 由元素 E_i 和 F_i 生成，其中 $\alpha_i \in S$，因此

$$\tilde{\mathfrak{g}}_S = \mathrm{span}\{H_i \mid \alpha_i \in S\} \oplus \bigoplus_{\alpha\in\Delta_S} \mathfrak{g}_\alpha,$$

其中， Δ_S 是由 $\alpha_i \in S$ 生成的群中所含的根的集合。记 $P(S^c)$ 为由满足 $\alpha_i \in S^c = \Pi\setminus S$ 的基本权 ω_i 生成的权格 P 的子群。令 L 为 $P(S^c)$ 的一个子群。将 P 与极大环面 T 的对偶群等同，记 T_L 为 L 在 T 中的湮灭子。由于 T 正规化了 $\tilde{K}^S$，由 $\tilde{K}^S$ 和 T_L 生成的群 $K^{S,L}$ 是 G 的闭子群，其复化李代数为

$$\mathfrak{g}_{S,L} = \mathfrak{h}_L \oplus \bigoplus_{\alpha\in\Delta_S} \mathfrak{g}_\alpha,$$

其中 $\mathfrak{h}_L \subset \mathfrak{h}$ 是 $L \subset \mathfrak{h}^*$ 的湮灭子。注意，若 $L = P(S^c)$，则 $K^{S,L}$ 是群 $\tilde{K}^S$。若 $L = 0$，我们将 K^S 记作 $K^{S,L}$。于是 $K^S = G \cap P_S$，其中 $P_S \subset G_{\mathbb{C}}$ 是对应于 S的抛物子群，而 $\tilde{K}^S$ 是 K^S 的半单部分。

对于 $q > 0$、 $q \neq 1$，令 $\mathcal{U}(K^{S,L}_q)$ 为由 T_L 和 E_i, F_i（其中 $\alpha_i \in S$）生成的 $\mathcal{U}(G_q)$ 中的 $\sigma(\mathcal{U}(G_q)\ \mathbb{C}[G_q])$-闭子代数。换言之，元素 $\omega \in \mathcal{U}(G_q)$ 属于 $\mathcal{U}(K^{S,L}_q)$，当且仅当对每个有限维可容许的 $U_q\mathfrak{g}$-模 V，由 ω 作用于 V 所得到的算子属于由 T_L 和 E_i, F_i（其中 $\alpha_i \in S$）生成的代数。将 $\mathbb{C}[K_q^{S,L}] \subset \mathcal{U}(K^{S,L}_q)^*$ 记作 Hopf $*$-代数，它是 $\mathbb{C}[G_q]$ 在限制映射 $\mathcal{U}(G_q)^* \to \mathcal{U}(K^{S,L}_q)^*$ 下的像；令 $C(K^{S,L}_q)$ 为其 C*-包络代数。

我们需要定理 1.3 第一部分的以下加强结论。

命题 *1.4.* 假设给定 $\lambda, \mu, \nu \in P_+$。令 $S = \{\alpha \in \Pi : (\nu,\alpha) = (\mu,\alpha) = 0\}$和 $L = \mathbb{Z}(\nu-\mu)$。那么， V_ν 在 $V_\lambda \otimes V_\mu$ 中的重数不大于 $V_\lambda(\nu-\mu)$中由 $K^{S,L}_q$固定的向量子空间的维数，也就是说，满足对所有 $\omega \in \mathcal{U}(K^{S,L}_q)$， ξ 使得 $\omega\xi = \hat{\varepsilon}_q(\omega)\xi$ 的向量。

证明。 考虑对偶模 V_μ，使得 $\omega\bar{\eta} = \overline{S_q(\omega)^*\eta}$ 对于 $\omega \in U_q\mathfrak{g}$ 和 $\eta \in V_\mu$ 成立，其中 S_q 是 $(U_q\mathfrak{g}, \Delta_q)$ 上的反 antipode。设 $\zeta \in V_\mu$ 为一个最低权向量。它的权为 $-\mu$。

¯设 $\xi \in V_\nu$ 为一个最高权向量，其权为 ν。则向量 $\xi \otimes \zeta \in V_\nu \otimes V_\mu$ 是循环的。由于 ξ 和 ζ 都被 E_i 和 F_i （对于 $\alpha_i \in S$）湮灭，因此 $\xi \otimes \zeta$ 也具有相同性质。此外，该向量的权为 $\nu - \mu$。因此， V_ν 在 $V_\lambda \otimes V_\mu$ 中的重数（等于态射空间 $V_\nu \otimes V_\mu \to V_\lambda$ 的维数¯）不大于 V_λ $(\nu - \mu)$ 中被 $K^{S}{}_{,q}{}^{L}$ 固定的向量子空间的维数。□

根据构造，我们有一个 Hopf $*$代数的满态射 $\pi\colon \mathbb{C}[G_q] \to \mathbb{C}[K_q^{S,L}]$。令

$$\mathbb{C}[G_q/K_q^{S,L}] = \{a \in \mathbb{C}[G_q] \mid (\iota \otimes \pi)\Delta_q(a) = a \otimes 1\},$$

其中 Δ_q 是 $\mathbb{C}[G_q]$上的余乘法。等价地， $a \in \mathbb{C}[G_q/K_q^{S,L}]$ 当且仅当对于所有 $\omega \in \mathcal{U}(K^{S}{}_{,q}{}^{L})$，$(\iota \otimes \omega)\Delta_q(a) = \hat{}\varepsilon_q(\omega)a$。将 $C(G_q/K^{S}{}_{,q}{}^{L})$记为 $\mathbb{C}[G_q/K_q^{S,L}]$ 在 $C(G_q)$中的范数闭包。C*代数 $C(G_q/K^{S}{}_{,q}{}^{L})$也可以定义为 $\mathbb{C}[G_q/K_q^{S,L}]$的一个普适 C*-完备化，参见 NT12，注记 2.1]。类似地，我们可以定义 $C(K^{S}{}_{,q}{}^{L}\backslash G_q)$。

对于 $\lambda \in P_+$和 ξ， $\zeta \in V_\lambda$用 $C^{\lambda}_{\zeta,\,\xi} \in \mathbb{C}[G_q]$ 表示矩阵系数 $(\cdot\,\xi,\ \zeta)$。那么 $\mathbb{C}[G_q/K_q^{S,L}]$ 是由满足 $\lambda \in P_+$、 $\zeta \in V_\lambda$ 且 $\xi \in V_\lambda$ 由 $K^{S}{}_{,q}{}^{L}$固定的元素 $C^{\lambda}_{\zeta,\,\xi}$ 线性张成的。

2. 案例研究： q-对称子积系统

固定一个自然数 $N \geq 2$和一个实数 $q > 0$。本节研究由 $\mathbb{C}\langle X_1, \ldots\ldots, X_N\rangle$ 的齐次理想定义的子乘积系统，其生成元为 $X_iX_j - qX_jX_i$，其中$i < j$。

2.1. 一个 q-类比的 Drury–Arveson 空间。 </style}代数，……， $X_N\rangle$ 的相应商是量子化多项式代数 $\mathbb{C}_q[e_1 \ldots, e_N]$，其中生成元 e_i满足以下关系

$$e_ie_j = qe_je_i, \quad i < j.$$

通过完备化 $\mathbb{C}_q[e_1, \ldots, e_N]$ 得到的 Fock 空间 $H^2_{N,\,q}$ 是 Drury–Arveson 空间 H^2_N 的 q 类比。空间 $H^2_{N,\,q}$ 在 [BB02] 中以更一般的形式被引入。不过， [BB02] 中内积的定义是特设的，因此无法立即看出它与利用子乘积系统定义的内积一致。我们的首要目标是验证这一点确实成立。

事实上，我们将证明得更多。在 $q = 1$ 的情形下，已知 $\mathbb{C}[e_1, \ldots, e_N]$ 上的内积完全由以下性质确定，见 [Har23, 第2节.2]：(i) 不同次数的齐次多项式彼此正交；(ii) 内积在 $SU(N)$ 的作用下保持不变；(iii) 对所有 $k \geq 0$， $\|e_1^k\| = 1$。我们将看到，对于所有 $q > 0$，若将 $SU(N)$ 换成紧量子群 $SU_q(N)$，上述结论同样成立。

使用量子化包络代数 $U_q\mathfrak{sl}_N$ 会更方便。因此，内积的不变性意味着，通过商去掉由 $X_iX_j - qX_jX_i$ $(i < j)$ 生成的 $\mathbb{C}\langle X_1、\ldots\ldots、X_N\rangle$ 的不变理想，在$\mathbb{C}_q[e_1, \ldots, e_N]$上得到的该代数的表示是一个 $*$-表示。

回忆一下， $U_q\mathfrak{sl}_N$在 $\mathbb{C}^N = \mathbb{C}e_1 + \cdots + \mathbb{C}e_N$上的标准表示由下式给出：

$$E_ie_j = \delta_{i+1,j}q^{1/2}e_{j-1}, \qquad F_ie_j = \delta_{i,j}q^{-1/2}e_{j+1}, \qquad K_ie_j = q^{\delta_{i,j}-\delta_{i+1,j}}e_j$$

对于 $i = 1、\ldots\ldots、N-1$ 以及 $j = 1、\ldots\ldots、N$。

命题 2.1 (参见 [Arv98, 引理 3.8], [BB02, 第 1]节)。 对于所有 $N \geq 2$ 和 $q > 0$，单项式 $e_1^{d_1} \ldots e_N^{d_N}$$(d_1, \ldots, d_N \in \mathbb{Z}_+)$ 构成 $H^2_{N,q}$ 中的正交基，并且

$$\|e_1^{d_1} \cdots e_N^{d_N}\|^2 = q^D \frac{[d_1]_q! \cdots [d_N]_q!}{[d_1 + \cdots + d_N]_q!}, \tag{2.1}$$

其中 $D=\sum_{1\le i<j\le N} d_i d_j$。

证明。显然，单项式 $e_1^{d_1}\dots e_N^{d_N}$ 张成了 $H^2_{N,\,q}$ 的稠密子空间，而且次数不同的单项式彼此正交。次数相同的不同单项式也彼此正交，因为它们相对于 $U_q\mathfrak{sl}_N$ 的作用具有不同的权。因此我们只需证明 (2.1)。

注意，在 $\mathbb{C}\langle X_1,\dots,X_N\rangle$ 中，单项式 X_1^k 与任何形如 $P(X_1,\dots,X_N)(X_iX_j-qX_jX_i)Q(X_1,\dots,X_N)$ 的非交换多项式正交，$i<j$。由此可得 $\|e_1^k\|=1$。我们将利用 $U_q\mathfrak{sl}_N$ 的作用，由此推导出 (2.1)。

我们先考虑 $N=2$ 的情形。通过简单的归纳论证，可以得到 $U_q\mathfrak{sl}_2$ 对 $\mathbb{C}_q[e_1,e_2]$ 中单项式的作用所满足的以下公式：

$$E(e_1^me_2^n)=q^{m-n+3/2}[n]_qe_1^{m+1}e_2^{n-1},\qquad F(e_1^me_2^n)=q^{-m+n+1/2}[m]_qe_1^{m-1}e_2^{n+1}$$

并且 $K(e_1^me_2^n)=q^{m-n}e_1^me_2^n$。因此，根据 $F^*=K^{-1}E$，我们得到

$$(e_1^me_2^n,e_1^me_2^n)=\frac{q^{m-n+3/2}}{[m+1]_q}(Fe_1^{m+1}e_2^{n-1},e_1^me_2^n)=q^{m-n+1}\frac{[n]_q}{[m+1]_q}(e_1^{m+1}e_2^{n-1},e_1^{m+1}e_2^{n-1}).$$

由此对 n 运用归纳法可得

$$\|e_1^me_2^n\|^2=q^{mn}\frac{[m]_q![n]_q!}{[m+n]_q!}\|e_1^{m+n}\|^2=q^{mn}\frac{[m]_q![n]_q!}{[m+n]_q!}.$$

这就证明了 $N=2$ 时的 (2.1)。

现在考虑一般情形。注意，由 E_{N-1}、F_{N-1} 和 K_{N-1} 生成的 $U_q\mathfrak{sl}_2$ 在 $U_q\mathfrak{sl}_N$ 中的副本在 $\mathbb{C}_q[e_1,\dots,e_{N-2}]$ 上作用平凡。与 $N=2$ 情形中的论证相同，可知对任意 $p\in\mathbb{C}_q[e_1,\dots,e_{N-2}]$，我们有

$$\|pe_{N-1}^me_N^n\|^2=q^{mn}\frac{[m]_q![n]_q!}{[m+n]_q!}\|pe_{N-1}^{m+n}\|^2.$$

然后我们使用由 E_{N-2}、F_{N-2} 和 K_{N-2} 生成的 $U_q\mathfrak{sl}_2$ 在 $U_q\mathfrak{sl}_N$ 中的副本，依此类推。对单项式长度作简单归纳即可得到 (2.1)。□

2.2. **Cuntz–Pimsner 代数**。令 S_i 表示作用于 H^2_N 上的产生算子 $S_{e_i\,,\,q}$。因此，

$$S_i(e_1^{d_1}\cdots e_N^{d_N})=e_ie_1^{d_1}\cdots e_N^{d_N}=q^{-D_{i-1}}e_1^{d_1}\cdots e_i^{d_i+1}\cdots e_N^{d_N},$$

其中 $D_{i-1}=\sum_{j<i}d_j$。我们还设 $D_N=d_1+\cdots+d_N$。利用命题 2.1，我们得到伴随算子的如下公式。

引理 2.2。对于所有的 $i=1,\dots,N$ 和 $d_1,\dots,d_N\in\mathbb{Z}_+$，我们有

$$S_i^*(e_1^{d_1}\cdots e_N^{d_N})=q^{D_N-D_i}\frac{[d_i]_q}{[D_N]_q}e_1^{d_1}\cdots e_i^{d_i-1}\cdots e_N^{d_N}.$$

由此我们将得到以下结果。

引理 2.3。在由次数为 n 的单项式张成的子空间 $H_n\subset\mathbb{C}_q[e_1,\dots,e_N]$ 上，我们有：

$$S_i^*S_j=\frac{[n]_q}{[n+1]_q}S_jS_i^*\quad(i\ne j),$$

$$S_i^*S_i=q\frac{[n]_q}{[n+1]_q}S_iS_i^*+(q-q^{-1})\frac{[n]_q}{[n+1]_q}\sum_{j=i+1}^{N}S_jS_j^*+\frac{q^{-n}}{[n+1]_q}\mathrm{id}.$$

证明。 第一个关系是前述引理的直接推论，我们将重点讨论第二个关系。对于 $n = 0$，该关系显然成立，因此设 $n \geq 1$。给定d_1，.....， $d_N \in \mathbb{Z}_+$ 且满足 $d_1 + \cdots + d_N = n$，我们有

$$S_i^* S_i(e_1^{d_1} \cdots e_N^{d_N}) = q^{n-D_i-D_{i-1}} \frac{[d_i+1]_q}{[n+1]_q} e_1^{d_1} \cdots e_N^{d_N},$$
$$S_j S_j^*(e_1^{d_1} \cdots e_N^{d_N}) = q^{n-D_j-D_{j-1}} \frac{[d_j]_q}{[n]_q} e_1^{d_1} \cdots e_N^{d_N}.$$

因此，我们需要证明的全部内容就是以下恒等式：

$$q^{n-D_i-D_{i-1}}[d_i+1]_q = q^{n+1-D_i-D_{i-1}}[d_i]_q + (q-q^{-1}) \sum_{j=i+1}^{N} q^{n-D_j-D_{j-1}}[d_j]_q + q^{-n}.$$

利用 $[d_i+1]_q = q[d_i]_q + q^{-d_i}$，我们可以将其改写为

$$q^{n-2D_i} = (q-q^{-1}) \sum_{j=i+1}^{N} q^{n-D_j-D_{j-1}}[d_j]_q + q^{-n}.$$

反过来，通过对 i 进行向下归纳法即可轻松验证这一点。 □

记 $\mathcal{T}_{N,q}$ 为由算子 S_i $(1 \leq i \leq N)$ 生成的 $\mathcal{B}(H_{N,q}^2)$ 的 C*-子代数，以及 $\mathcal{O}_{N,q}$ 相应的 Cuntz–Pimsner 代数 $\mathcal{T}_{N,q}/\mathcal{K}(H_{N,q}^2)$。回忆一下，我们将 S_i 在 $\mathcal{O}_{N,q}$ 中的像记作 s_i。以下定理推广了 [Arv98，定理 5.7]。

定理 2.4。 对于任意 $N \geq 2$ 和 $q > 0$，*Cuntz–Pimsner* 代数 $\mathcal{O}_{N,q}$ 是一个带单位的普适 *C**-代数，其生成元为 $s_1, \ldots, s_N$，满足以下关系：

(1) 若 $q \geq 1$，则

$$\sum_{i=1}^{N} s_i s_i^* = 1, \qquad s_i s_j = q s_j s_i \quad (i<j), \qquad s_i^* s_j = q^{-1} s_j s_i^* \quad (i \neq j),$$

$$s_i^* s_i = s_i s_i^* + (1-q^{-2}) \sum_{j=i+1}^{N} s_j s_j^*;$$

(2) 若 $q \leq 1$，则

$$\sum_{i=1}^{N} s_i s_i^* = 1, \qquad s_i s_j = q s_j s_i \quad (i<j), \qquad s_i^* s_j = q s_j s_i^* \quad (i \neq j),$$

$$s_i^* s_i = s_i s_i^* + (1-q^2) \sum_{j=1}^{i-1} s_j s_j^*.$$

证明。 我们只证明 (1)。(2) 的证明类似；也可以利用同构 $\mathbb{C}_q[e_1, \ldots, e_N] \cong \mathbb{C}_{q^{-1}}[e_1, \ldots, e_N]$, $e_i \mapsto e_{N-i+1}$ 从 (1) 推出。

(1) 中的第一个等式对所有子乘积系统都成立；第二个等式直接由 $\mathbb{C}_q[e_1, \ldots, e_N]$ 中的关系得出；其余两个等式则由前述引理推出。这些关系刻画了量子齐性空间 $S_q^{2N-1} = SU_q(N-1) \backslash SU_q(N)$ 上连续函数的代数，见 [VS90],，其中 $SU(N-1)$ 作为右下角嵌入 $SU(N)$。因此，我们有一个满射的 $SU_q(N)$-等变同态 $C(S_q^{2N-1}) \to \mathcal{O}_{N,q}$。它必定是同构，因为 $C(S_q^{2N-1})$ 没有非平凡的 $SU_q(N)$-等变商。□

注意，(2) 中的关系刻画了 C*-代数 $C(SU_q(N-1)\backslash SU_q(N))$，其中 $SU(N-1)$ 作为左上角嵌入 $SU(N)$。对于所有 $q>0$，两个代数 $C(SU_q(N-1)\backslash SU_q(N))$ 都定义良好，并且作为 C*-代数彼此同构；对 $q=1$ 而言，这显然成立，而对 $q\neq 1$，则可由以下事实推出：这些代数都同构于一个图 C*-代数，该代数由在 (1) 中形式地令 $q^{-1}=0$ 得到（为此，需将关系 $s_is_j=qs_js_i$ 写成 $q^{-1}s_is_j=s_js_i$），或在 (2) 中令 $q=0$ 得到，见 [HS02]。与此同时，对于每个 $q\neq 1$，它们作为 $SU_q(N)$-C*- 代数并不同构。

备注 2.5。利用引理 2.3 和定理 2.4，可以像 [HN24 的定理 3.4 和备注 3.5] 那样，用生成元与关系来描述 Toeplitz 代数 $\mathcal{T}_{N,q}$。

3. Cartan 子乘积系统

本节中，我们固定一个单连通半单紧李群 G 和 $q>0$。对于任意支配整权 $\lambda,\mu\in P_+$，G_q-模 $V_\lambda\otimes V_\mu$ 包含 $V_{\lambda+\mu}$的唯一一个副本，称为张量积的 ***Cartan*** 分量。因此，对每个$\lambda\in P_+$，我们得到一个子乘积系统 $(V_{n\lambda})_{n\geq 0}$，称之为 ***Cartan*** 子乘积系统。我们的目标是描述相应的 Cuntz–Pimsner 代数 $\mathcal{O}_{\lambda,q}$。

3.1. 最高权向量的稳定子群。 对于 $q>0$ 和每个 $\lambda\in P_+$，固定一个最高权单位向量 $\xi_\lambda\in V_\lambda$ 和一个最低权单位向量 $\zeta_\lambda\in V_\lambda$。注意，$\mathrm{wt}(\zeta_\lambda)=w_0\lambda$，其中 w_0 是 Weyl 群的最长元素。在 P 上定义一个对合，令 $\bar{\lambda}=-w_0\lambda$。我们有如下结果。

命题 3.1. 对于 $\lambda\in P_+$，定义

$$S=\{\alpha\in\Pi:(\lambda,\alpha)=0\},\quad L=\mathbb{Z}\lambda.$$

则以下性质成立：

(1) 对于 $q=1$，$\xi_\lambda\in V_\lambda$ 在 G 中的稳定子群 G^λ 与 $K^{S,L}$重合；(2) 对于每个 $q>0$，$*$-代数 $\mathbb{C}[G_q/G_q^\lambda]$ 由元素 $C^\lambda_{\eta,\xi_\lambda}$ $(\eta\in V_\lambda)$ 生成；(3) 对于每个 $q>0$，$*$-代数 $\mathbb{C}[G_q/G_q^{\bar{\lambda}}]$ 由元素 $C^\lambda_{\eta,\zeta_\lambda}$ $(\eta\in V_\lambda)$ 生成。

证明。(1) 众所周知且不难看出，若将 V_λ 视为 G的复化 $G_{\mathbb{C}}$ 上的模，则由使直线 $\mathbb{C}\xi_\lambda$保持不变的 $G_{\mathbb{C}}$ 中的元素构成的子群 H 是一个抛物子群，因此对于某个 $S\subset\Pi$，有 $H\cap G=K^S$。利用 SU的表示论 (2) 也很容易得出 $S=\{\alpha\in\Pi:(\lambda,\alpha)=0\}$ 和 $\tilde{K}^S\subset G^\lambda$。因此，$G^\lambda$ 位于 $\tilde{K}^S$ 与 K^S 之间，故它与某个子群 $L\subset P(S^c)$ 的 $K^{S,L}$ 重合。这意味着 $G^\lambda\cap T\subset T$是 $L\subset P$的湮灭子。根据定义，$G^\lambda\cap T$是将 λ视为 T的一个特征时的核，因此其湮灭子为 $\mathbb{Z}\lambda$。于是，$L=\mathbb{Z}\lambda$。

(2)、(3) 由于对合将由矩阵系数 $C^\lambda_{\eta,\xi_\lambda}$ $(\eta\in V_\lambda)$ 张成的空间映到由 $C^{\bar{\lambda}}_{\eta,\zeta_{\bar{\lambda}}}$ $(\eta\in V_{\bar{\lambda}})$ 张成的空间，因此，对 λ 而言的第 (2) 部分等价于对 $\bar{\lambda}$而言的第 (3) 部分。我们还有一个同构 $G_q\cong G_{q^{-1}}$，它交换最高权与最低权的含义。因此，要证明 (2) 和 (3)，只需证明 $0<q\leq 1$的 (2)。

显然，元素 $C^\lambda_{\eta,\xi_\lambda}$ 属于 $\mathbb{C}[G_q/G_q^\lambda]$。考虑由它们生成的 $*$-代数 $\mathcal{A}_q$。注意，由于 G_q 在 V_λ 上的表示是酉的，该代数含有单位元。用 A_q表示 $\mathcal{A}_q$ 在 $C(G_q)$ 中的范数闭包。由于代数 $\mathcal{A}_q$ 在 G_q的左作用下是不变的，对于 A_q 也同样如此；此外，$\mathcal{A}_q$ 与 A_q中的正则元素子代数一致。因此，只需证明 $A_q=C(G_q/G_q^\lambda)$。

对于 $q=1$，等式 $A_1=C(G/G^\lambda)$ 可由斯通–魏尔斯特拉斯定理推出，因为函数 $(\cdot\,\xi_\lambda,\eta)$ $(\eta\in V_\lambda)$ 能分离 G/G^λ 的点。

对于 $0<q<1$，论证原则上类似，但现在我们必须使用针对第一类 C* 代数的 Stone–Weierstrass 定理 [Dix77，命题 11.1.6]。为此，我们需要

证明 $C(G_q/G_q^\lambda)$ 的不可约表示限制到 A_q 后仍为不可约表示，且不等价的不可约表示限制后仍不等价。$C(G_q/G_q^\lambda) = C(G_q/K^S{}_q{}^L)$ 的不可约表示见 [NT12，定理 2.2], 另见 [DS99，定理 5.9]。它们的等价类由配对 $(w,\ x) \in W^S \times T/T_L$ 参数化，其中 W^S 是 Weyl 群中由满足以下条件的元素 w 组成的子集：$w\alpha > 0$ 对所有 $\alpha \in S$ 均成立。具体而言，作为与 $(w,\ tT_L)$ 对应的表示，可以取 Soibelman 表示 $\pi_{w,\ t}$ 在 $C(G_q)$ 上到 $C(G_q/G_q^\lambda)$ 的限制。接着可以验证，用于分类 $C(G_q/G_q^\lambda)$ 的不可约表示的论证表明，我们对 A_q 得到了所需性质。简而言之，论证如下。

[DS99 命题 5.5], 的证明验证了 $\pi_{w,t}(w \in W^S,\ t \in T)$ 在 $C(G_q/G_q^\lambda) = C(G_q/K^S{}_q{}^L)$ 的某个 $*$-子代数上的限制不可约；该证明只用到了矩阵系数 $C^\lambda_{\eta,\xi_\lambda}$ $(\eta \in V_\lambda)$，因此表明 $\pi_{w,t}|_{A_q}$ 不可约。事实上，它还证明了更强的性质：$\pi_{w,t}$ 在由元素 $(C^\lambda_{\eta,\xi_\lambda})^* C^\lambda_{\zeta,\xi_\lambda}$ $(\eta,\zeta \in V_\lambda)$ 生成的 C*-子代数 $A_q \subset A_q$ 上的限制不可约。接下来，[DS99 引理 5.8] 的证明表明，若 $w, w' \in W^S$ 且 $w \neq w'$，则 $\pi_{w,t}$ 和 $\pi_{w',t'}$ 在 A_q 上的限制不等价。最后，取 $w \in W^S$ 和 $t,t' \in T$。于是，$\pi_{w,t}$ 和 $\pi_{w,t'}$ 在 $\tilde{A}_q$ 上的限制相同，并且如我们已经观察到的，它们是不可约的。因此，如果 $\pi_{w,t}$ 和 $\pi_{w,t'}$ 在 A_q 上的限制等价，那么它们必定相等。令 $\eta \in V_\lambda$ 为权 $w\lambda$ 的单位向量，它在相位因子意义下唯一。已知 $\pi_{w,t}(C^\lambda_{\eta,\xi_\lambda}) \neq 0$。由于 $\pi_{w,t'}(C^\lambda_{\eta,\lambda}) = \lambda(t^{-1}t')\pi_{w,t}(C^\lambda_{\eta,\lambda})$，可得 $t^{-1}t' \in \ker\lambda = T_L$。命题得证。□

由于反 antipode 将 V_λ 的矩阵系数变换为 $V_{\bar\lambda}$ 的矩阵系数，并交换最高权向量和最低权向量的角色，因此我们还得到以下结果。

推论 3.2. 对于每个 $\lambda \in P_+$ 和 $q > 0$，我们有：

(1) $*$-代数 $\mathbb{C}[G_q^\lambda \backslash G_q]$ 由元素 $C^\lambda_{\xi_\lambda,\eta}$ $(\eta \in V_\lambda)$ 生成；(2) $*$-代数 $\mathbb{C}[G_q^{\bar\lambda} \backslash G_q]$ 由元素 $C^\lambda_{\zeta_\lambda,\eta}$ $(\eta \in V_\lambda)$ 生成。

3.2. **交换关系**。固定 $\lambda \in P_+$。我们将 $(V_{n\lambda})_{n\geq 0}$ 视为一个标准子乘积系统，其中嵌入 $V_{n\lambda} \to V_\lambda^{\otimes n}$ 通过将 $\xi_{n\lambda}$ 与 $\xi_\lambda^{\otimes n}$ 识别而得到。记 f_n 为投影 $V_\lambda^{\otimes n} \to V_{n\lambda}$。我们常在各种相关构造中加上下标 λ 和 q，因此相应的 Fock 空间、Toeplitz 代数和 Cuntz–Pimsner 代数分别记作 $\mathcal{F}_{\lambda,q}$, $\mathcal{T}_{\lambda,q}$, $\mathcal{O}_{\lambda,q}$ 等。对于 $q = 1$，省略下标。

引理 3.3. 取权向量 $\xi,\zeta \in V_\lambda$。若 ξ 是最高权向量，或 ζ 是最低权向量，则在 $\mathcal{T}_{\lambda,q}$ 中有

$$S_\zeta S_\xi = q^{-(\lambda,\lambda)+(\mathrm{wt}(\zeta),\mathrm{wt}(\xi))} S_\xi S_\zeta.$$

证明。考虑编织 $\sigma = \Sigma\mathcal{R}$，其中 Σ 是翻转映射。由 (1.4)，由于 $\sigma(\xi_\lambda \otimes \xi_\lambda) = q^{(\lambda,\lambda)}\xi_\lambda \otimes \xi_\lambda$，我们在 $V_\lambda \otimes V_\lambda$ 上有 $f_2\sigma = q^{(\lambda,\lambda)} f_2$。考虑映射 $S^{(2)}: V_\lambda \otimes V_\lambda \to \mathcal{T}_{\lambda,q}$，其定义为 $S^{(2)}(\zeta\otimes\xi) = S_\zeta S_\xi$。由包含关系 $V_{n\lambda} \subset V_{2\lambda} \otimes V_{(n-2)\lambda}$ 可知 $S^{(2)} f_2 = S^{(2)}$。因此 $S^{(2)}\sigma = q^{(\lambda,\lambda)} S^{(2)}$。换言之，对于所有 $\xi,\zeta \in V_\lambda$，我们有

$$S_\zeta S_\xi = q^{-(\lambda,\lambda)} S^{(2)}\sigma(\zeta \otimes \xi). \tag{3.1}$$

再次利用 (1.4)，即可得到结论。□

利用这个引理，我们可以在 $\mathcal{T}_{\lambda,q}$ 上构造某些特征，它们将在后文发挥重要作用。

引理 3.4。存在态 φ_h 和 φ_l，它们定义在 $\mathcal{T}_{\lambda,q}$ 上，使得

$$\varphi_h(S_{\xi_\lambda}) = 1, \qquad \varphi_l(S_{\zeta_\lambda}) = 1.$$

此外，任何此类态在 $\mathcal{K}(\mathcal{F}_{\lambda,q})$ 上都为零，并且

(1) 若 $q>1$，则 φ_h 是一个特征，满足 $\varphi_h(S_\zeta)=0$，对所有 $\zeta\perp\xi_\lambda$均成立；(2) 若 $q<1$，则 φ_l 是一个特征，满足 $\varphi_l(S_\xi)=0$，对所有 $\xi\perp\zeta_\lambda$均成立；(3) 若 $q=1$ 且 $\mathcal{O}_\lambda$ 是交换的，则 φ_h 和 φ_l 是特征，满足 $\varphi_h(S_\zeta)=0$以及 $\varphi_l(S_\xi)=0$，对所有 $\zeta\perp\xi_\lambda$ 和 $\xi\perp\zeta_\lambda$均成立。

证明。为了证明 φ_h 存在，考虑向量 $\xi_{n\lambda}(n\geq 0)$ 的闭线性张成 $H\subset\mathcal{F}_{\lambda,q}$。考虑由 $u\xi_{n\lambda}=\xi_{(n+1)\lambda}$ 定义的等距算子 u: $H\to H$。由 u 生成的 C*-代数 $C^*(u)\subset\mathcal{B}(H)$ 是通常的 Toeplitz 代数 $\mathcal{T}$。考虑其上的态 φ，使得$\varphi(u)=1$；也就是说，在同构 $\mathcal{T}/\mathcal{K}\cong C(\mathbb{T})$ 下，它对应于在$1\in\mathbb{T}$处的求值。将其扩张为 $\mathcal{B}(H)$ 上的一个态。记投影 $\mathcal{F}_{\lambda,q}\to H$ 为 P。然后通过 $\varphi_h(a)=\varphi(PaP)$ 在 $\mathcal{T}_{\lambda,q}$ 上定义一个态 φ_h。由于 $PS_{\xi_\lambda}P=u$，它具有所需的性质 $\varphi_h(S_{\xi_\lambda})=1$。以相同方式通过考虑最低权向量来证明 φ_l 的存在。

现在假设 φ_h 是任意一个满足 $\varphi_h(S_{\xi_\lambda})=1$的态。由于 S_{ξ_λ} 是一个压缩算子，可知 $\varphi_h(S_{\xi_\lambda}^*S_{\xi_\lambda})=1=\varphi_h(S_{\xi_\lambda}S_{\xi_\lambda}^*)$，且 S_{ξ_λ} 属于 φ_h的乘法域。

由 (1.1) 可知，对于 V_λ 中任意选取的标准正交基，都有 $\sum_i S_iS_i^*=1-e_0$。选取一个包含 ξ_λ 的基并应用 φ_h，可得对于任意$\zeta\perp\xi_\lambda$，$\varphi_h(e_0)=0$ 且 $\varphi_h(S_\zeta S_\zeta^*)=0$。记投影 $\mathcal{F}_{\lambda,q}\to V_{n\lambda}$ 为 e_n。由 (1.1) 得 $\sum_{i,j}S_iS_jS_j^*S_i^*=1-e_0-e_1$；又由于 $\varphi_h(S_{\xi_\lambda}S_{\xi_\lambda}S_{\xi_\lambda}^*S_{\xi_\lambda}^*)=1$，可得 $\varphi_h(e_1)=0$。类似地，对于所有 $n\geq 0$，有 $\varphi_h(e_n)=$0。因此，φ_h 在 $\mathcal{K}(\mathcal{F}_{\lambda,q})$ 上为零。同理可验证，φ_l 在 $\mathcal{K}(\mathcal{F}_{\lambda,q})$ 上为零。

接下来，假设 $q>1$。由于我们已知，对于任意 $\zeta\perp\xi_\lambda$，S_{ξ_λ} 属于 φ_h的乘法域，且 $\varphi_h(S_\zeta S_\zeta^*)=0$（因此 $\varphi_h(S_\zeta)=0$），为了证明 (1)，只需证明每个这样的 S_ζ 都属于 φ_h 的乘法域，也就是说，$\varphi_h(S_\zeta^*S_\zeta)=0$。不妨假设对于某个 $\mu\neq\lambda$，有 $\zeta\in V_\lambda(\mu)\neq 0$。于是利用引理 3.3，可得

$$\varphi_h(S_\zeta^*S_\zeta)=\varphi_h(S_{\xi_\lambda}^*S_\zeta^*S_\zeta S_{\xi_\lambda})=q^{-2(\lambda,\lambda)+2(\mu,\lambda)}\varphi_h(S_\zeta^*S_{\xi_\lambda}^*S_{\xi_\lambda}S_\zeta)\leq q^{-2(\lambda,\lambda)+2(\mu,\lambda)}\varphi_h(S_\zeta^*S_\zeta)$$

由于 $q>1$ 且 $(\lambda-\mu,\ \lambda)>0$，这意味着 $\varphi_h(S_\zeta^*S_\zeta)=0$。

类似地，利用 $\mathrm{wt}(\zeta_\lambda)=w_0\lambda$，可证明第 (2) 部分；并且

$$(\lambda,\lambda)-(\mu,w_0\lambda)=(\lambda-w_0\mu,\lambda)>0$$

对于 V_λ的权分解中的所有权 $\mu\neq w_0\lambda$。

最后，为了证明 φ_h 的 (3)，只需证明对于所有 $\zeta\perp\xi_\lambda$，$\varphi_h(S_\zeta^*S_\zeta)=0$，如上所述。但这显然成立，因为我们已经知道 $\varphi_h(S_\zeta S_\zeta^*)=0$, φ_h 可经由 $\mathcal{O}_\lambda$ 分解，且根据假设，$\mathcal{O}_\lambda$ 是交换的。φ_l 的情形也类似。□

3.3. 产生与湮灭算子的近似交换关系。 在本小节中，考虑一种比我们严格来说分析 Cartan 子乘积系统所需的情形更一般的设置将很方便。

对于固定的 $q>0$，我们将集合 $(V_\lambda)_{\lambda\in P_+}$ 视为幺半群 P_+ 上的标准子乘积系统，其中嵌入 $V_{\lambda+\mu}\to V_\lambda\otimes V_\mu$ 通过将 $\xi_{\lambda+\mu}$ 与 $\xi_\lambda\otimes\xi_\mu$ 认同来定义。与 $\mathbb{Z}_+$ 上的子乘积系统类似，我们由此得到一个全 Fock 空间

$$\mathcal{F}_{P_+,q}=\bigoplus_{\lambda\in P_+}V_\lambda$$

以及创造算子 L_ξ: $\mathcal{F}_{P_+,q}\to\mathcal{F}_{P_+,q}$ 将映射 V_μ 到 $V_{\lambda+\mu}$，用于 $\xi\in V_\lambda$。

记 $P_{\lambda,\mu}^h$: $V_\lambda\otimes V_\mu\to V_\lambda\otimes V_\mu$ 为到被所有 E_i 杀死的向量所成子空间的正交投影。记 P_μ^h: $V_\mu\to V_\mu$ 为到 $\mathbb{C}\xi_\mu$ 的正交投影；换言之，$P_\mu^h=P_{0,\mu}^h$。类似地，记 $P_{\lambda,\mu}^l$: $V_\lambda\otimes V_\mu\to V_\lambda\otimes V_\mu$ 为到被所有 F_i 杀死的向量所成子空间的正交投影，并令 $P_\mu^l=P_{0,\mu}^l$。记 $f_{\lambda,\mu}$: $V_\lambda\otimes V_\mu\to V_\lambda\otimes V_\mu$ 为到张量积的 Cartan 分量的投影。

命题 3.5. 取 $q>0$ 和 $\lambda\in P_+$。对于 $\mu\in\lambda+P_+$，定义线性映射 $A_\mu\colon V_\lambda\otimes V_\lambda\to\mathcal{B}(V_\mu)$ 以及 $B_\mu\colon V_\lambda\otimes V_\lambda\to\mathcal{B}(V_\mu)$ 如下：

$$A_\mu(\xi\otimes\bar\zeta)=L_\xi L_\zeta^*|_{V_\mu},\qquad B_\mu(\bar\zeta\otimes\xi)=L_\zeta^*L_\xi|_{V_\mu}.$$

那么存在一个仅取决于 q 和 λ 的常数 $C>0$，使得

$$\begin{aligned}\|B_\mu-q^{-(\lambda,\lambda)}A_\mu\sigma^{-1}\|\le C\big(&\big\|f_{\lambda,\mu}\big((1-P_\lambda^h)\otimes P_\mu^h\big)\big\|+\big\|f_{\lambda,\mu-\lambda}\big((1-P_\lambda^h)\otimes P_{\mu-\lambda}^h\big)\big\|\\&+\|(1-1\otimes P_\mu^h)P_{\lambda,\mu}^h\|\big),\\\|B_\mu-q^{(\lambda,\lambda)}A_\mu\sigma\|\le C\big(&\big\|f_{\lambda,\mu}\big((1-P_\lambda^l)\otimes P_\mu^l\big)\big\|+\big\|f_{\lambda,\mu-\lambda}\big((1-P_\lambda^l)\otimes P_{\mu-\lambda}^l\big)\big\|\\&+\|(1-1\otimes P_\mu^l)P_{\lambda,\mu}^l\|\big),\end{aligned}$$

其中 $\sigma=\Sigma\mathcal{R}$ 是 $\operatorname{Rep}G_q$ 上的编织。

这里，V_λ 配备了逆变 $U_q\mathfrak{g}$-作用，即 $\omega\overline{\xi}=\overline{S_q(\omega)^*\xi}$。

证明。我们只证明第一个不等式；第二个不等式的证明类似，只需用最低权向量代替最高权向量。

我们先证明，对于任意范数为一的权向量 $\xi,\zeta\in V_\lambda$，存在一个常数$C_1>0$，使得对所有 $\mu\in\lambda+P_+$，都有

$$\begin{aligned}\|(B_\mu\sigma)(\xi\otimes\bar\zeta)\xi_\mu-q^{-(\lambda,\lambda)}A_\mu(\xi\otimes\bar\zeta)\xi_\mu\|\le C_1\big(&\big\|f_{\lambda,\mu}\big((1-P_\lambda^h)\otimes P_\mu^h\big)\big\|\\&+\big\|f_{\lambda,\mu-\lambda}\big((1-P_\lambda^h)\otimes P_{\mu-\lambda}^h\big)\big\|\big).\end{aligned}\tag{3.2}$$

由 (1.3) 可知，$\sigma(\xi\otimes\bar\zeta)$ 是由形如 $\zeta'\otimes\xi'$ 的 $q^{(\mathrm{wt}(\xi),\mathrm{wt}(\bar\zeta)}\bar\zeta\otimes\xi=q^{-(\mathrm{wt}(\xi),\mathrm{wt}(\zeta)}\bar\zeta\otimes\xi$和向量之和，其中 ζ' 和 ξ' 的权分别严格低于 $\mathrm{wt}(\zeta)$ 和 $\mathrm{wt}(\xi)$。因此，为了证明 (3.2)，只需证明：若 $\mathrm{wt}(\xi)=\mathrm{wt}(\zeta)=\lambda$，则

$$B_\mu(\bar\zeta\otimes\xi)\xi_\mu=A_\mu(\xi\otimes\bar\zeta)\xi_\mu,\tag{3.3}$$

而若 $\mathrm{wt}(\xi)$ 或 $\mathrm{wt}(\zeta)$ 不等于 λ，则

$$\|B_\mu(\bar\zeta\otimes\xi)\xi_\mu\|\le\big\|f_{\lambda,\mu}\big((1-P_\lambda^h)\otimes P_\mu^h\big)\big\|,\tag{3.4}$$

$$\|A_\mu(\xi\otimes\bar\zeta)\xi_\mu\|\le\big\|f_{\lambda,\mu-\lambda}\big((1-P_\lambda^h)\otimes P_{\mu-\lambda}^h\big)\big\|\tag{3.5}$$

对所有 $\mu\in\lambda+P_+$。

为了验证 (3.3)，我们可以假设 $\xi=\zeta=\xi_\lambda$。此时，(3.3) 两边都等于 ξ_μ。

接下来证明 (3.4)；不等式 (3.5) 的证明类似。首先假设 $\nu=\mathrm{wt}(\xi)$ 不等于 λ。那么

$$\|B_\mu(\bar\zeta\otimes\xi)\xi_\mu\|\le\|L_\xi\xi_\mu\|=\|f_{\lambda,\mu}(\xi\otimes\xi_\mu)\|\le\big\|f_{\lambda,\mu}\big((1-P_\lambda^h)\otimes P_\mu^h\big)\big\|.$$

现在假设 $\mathrm{wt}(\xi)=\lambda$，但 $\mathrm{wt}(\zeta)\ne\lambda$。于是我们可以假设 $\xi=\xi_\lambda$，从而$L_\xi\xi_\mu=\xi_{\lambda+\mu}$。由于 $\xi_{\lambda+\mu}=\xi_\lambda\otimes\xi_\mu$ 与 $\mathbb{C}\zeta\otimes V_\mu$正交，因此 $B_\mu(\zeta\otimes\xi)\xi_\mu=L_\zeta^*\xi_{\lambda+\mu}=0$。这就完成了(3.4)和(3.5)的证明，因而也完成了(3.2)的证明。

接下来注意到，如果赋予 $\mathcal{B}(V_\mu)$ 伴随作用，则映射 A_μ 和 B_μ 变为 G_q-等变的，因此对于 $\omega\in U_q\mathfrak{g}$和 $T\in\mathcal{B}(V_\mu)$，有 $(\mathrm{ad}\ \omega)(T)=\pi_\mu(\omega_{(1)})T\pi_\mu(S_q(\omega_{(2)}))$，其中$\pi_\mu$表示 $U_q\mathfrak{g}$ 在 V_μ上的表示。在 V_λ中选取一个标准正交基 $(\xi_i)_i$。定义线性映射 $\tilde A_\mu,\tilde B_\mu\colon V_\lambda\otimes V_\mu\to V_\lambda\otimes V_\mu$，使得

$$\tilde A_\mu(\xi\otimes\zeta)=q^{-(\lambda,\lambda)}\sum_i\xi_i\otimes(A_\mu\sigma^{-1})(\bar\xi_i\otimes\xi)\zeta,\quad\tilde B_\mu(\xi\otimes\zeta)=\sum_i\xi_i\otimes B_\mu(\bar\xi_i\otimes\xi)\zeta.$$

利用向量 $\sum_i\xi_i\otimes\xi_i$ 的不变性，很容易验证 $\tilde A_\mu$ 和 $\tilde B_\mu$ 是 $U_q\mathfrak{g}$-模的态射。于是，(3.2) 可改述为：存在一个常数 $C_3>0$，它只依赖于 q 和 λ，使得

$$\|(\tilde B_\mu-\tilde A_\mu)|_{V_\lambda\otimes\mathbb{C}\xi_\mu}\|\le C_3\big(\big\|f_{\lambda,\mu}\big((1-P_\lambda^h)\otimes P_\mu^h\big)\big\|+\big\|f_{\lambda,\mu-\lambda}\big((1-P_\lambda^h)\otimes P_{\mu-\lambda}^h\big)\big\|\big).\tag{3.6}$$

~ ~我们需要估计 $B_\mu - A_\mu$ 在整个空间 $V_\lambda \otimes V_\mu$上的范数。

注意，根据定义，存在一个仅依赖于 q 和 λ的通用上界 C_4 ，它控制~ ~范数 $B_\mu - A_\mu$。将模 $V_\lambda \otimes V_\mu$ 分解为单模后，我们可以将其同一化为$\bigoplus_\nu V_\nu \otimes H_\nu$ ，其中 H_ν 是具有平凡 G_q作用的希尔伯特空间。在此同一化下，任意态射 $T\colon V_\lambda \otimes V_\mu \to V_\lambda \otimes V_\mu$都具有 $\sum_\nu 1 \otimes T_\nu$的形式，其中 $T_\nu \in \mathcal{B}(H_\nu)$；而$P^h_{\lambda,\,\mu}$变为到 $\bigoplus_\nu \mathbb{C}\xi_\nu \otimes H_\nu$上的投影。由此可得$\|T\| = \|TP^h_{\lambda,\,\mu}\|$。因此

$$\|\tilde{B}_\mu - \tilde{A}_\mu\| = \|(\tilde{B}_\mu - \tilde{A}_\mu)P^h_{\lambda,\nu}\| \le C_4\|(1 - 1 \otimes P^h_\mu)P^h_{\lambda,\mu}\| + \|(\tilde{B}_\mu - \tilde{A}_\mu)(1 \otimes P^h_\mu)\|.$$

结合 (3.6)，即完成了该命题的证明。 □

3.4. 克莱布施–戈丹系数的渐近性。 我们猜想，当 $q \ge 1$ 和 n很大时， $V_\lambda \otimes V_{n\lambda}$ 中的每个最高权向量都接近于形如 $\xi \otimes \xi_{n\lambda}$的向量，并且任何满足 $\xi \perp \xi_\lambda$ 的此类向量都几乎与 $V_{(n+1)\lambda}$正交。更确切地说，取$q > 0$和 $\lambda \in P_+$，并回忆一下，投影$P^h_{\lambda,\,\mu}$、 $P^l_{\lambda,\,\mu}$以及$f_{\lambda,\,\mu}$已在命题 3.5 之前引入。

猜想 3.6。我们有:

(1) if $q \ge 1$, then

$$\|(1 - 1 \otimes P^h_{n\lambda})P^h_{\lambda,n\lambda}\| \to 0 \quad \text{and} \quad \big\|f_{\lambda,n\lambda}\big((1 - P^h_\lambda) \otimes P^h_{n\lambda}\big)\big\| \to 0 \quad \text{as} \quad n \to +\infty;$$

(2) 若 $q \le 1$，则

$$\|(1 - 1 \otimes P^l_{n\lambda})P^l_{\lambda,n\lambda}\| \to 0 \quad \text{and} \quad \big\|f_{\lambda,n\lambda}\big((1 - P^l_\lambda) \otimes P^l_{n\lambda}\big)\big\| \to 0 \quad \text{as} \quad n \to +\infty.$$

此外，对于 $q \ne 1$，收敛速度呈指数级，也就是说，对于 $q > 1$ ，我们有 e

$$\|(1 - 1 \otimes P^h_{n\lambda})P^h_{\lambda,n\lambda}\| \le Ct^n \quad \text{and} \quad \big\|f_{\lambda,n\lambda}\big((1 - P^h_\lambda) \otimes P^h_{n\lambda}\big)\big\| \le Ct^n$$

对某些 $C > 0$ 和 $0 < t < 1$，同理对于 $q < 1$。

事实上，关于 $q \ge 1$的部分 (1) 与关于 q^{-1} 的部分 (2) 等价，这归功于标准同构 $G_q \cong G_{q^{-1}}$。利用酉反粒子，也可以用模 $V_{n\lambda} \otimes V_\lambda$ 来表述该猜想。需要强调的是，将最高权和最低权互换后得到的类似猜想，对于 $q \ne 1$ ，即使在 $G = SU(2)$ 的情形下也不 成立。因此，对该猜想的恰当表述取决于 q-变形所采用的约定。

回忆一下，若对于所有 i， $\lambda(i) > 0$ ，则称权 $\lambda \in P_+$ 为正则权。用 $P_{++} \subset P_+$ 表示正则权的子集。对于正则权，猜想 3.6(1) 中的第一个收敛蕴含第二个收敛，因此该猜想可表述如下。

引理 3.7。 假设 $q \ge 1$ 和 $\lambda \in P_{++}$。那么，猜想 *3.6* 等价于以下性质：$\|P^h_{\lambda,}$ $_{n\lambda} - 1 \otimes P^h_{n\lambda}\| \to 0$当 $n \to +\infty$时，且当$q > 1$时，收敛速度为指数级。

证明。 根据定理 1.3，当 n充分大时，投影 $P^h_{\lambda,n\lambda}$和 $1 \otimes P^h_{n\lambda}$具有相同的秩 $\dim V_\lambda$。由此可知，收敛 $\|(1 - 1 \otimes P^h_{n\lambda})P^h_{\lambda,n\lambda}\| \to 0$和$\|P^h_{\lambda,n\lambda} - 1 \otimes P^h_{n\lambda}\| \to 0$等价；若其中一个收敛速度为指数级，则另一个也同样如此。接下来，我们有

$$\big\|f_{\lambda,n\lambda}\big((1 - P^h_\lambda) \otimes P^h_{n\lambda}\big)\big\| \le \|f_{\lambda,n\lambda}(P^h_{\lambda,n\lambda} - P^h_\lambda \otimes P^h_{n\lambda})\| + \|P^h_{\lambda,n\lambda} - 1 \otimes P^h_{n\lambda}\|.$$

算子 $P^h_{\lambda,n\lambda} - P^h_\lambda \otimes P^h_{n\lambda}$是到由 $V_\lambda \otimes V_{n\lambda}$ 中与 $\xi_\lambda \otimes \xi_{n\lambda}$正交的最高权向量张成的空间的投影；也就是说，它投影到张量积中所有不同于 Cartan 分量的分量的最高权向量所张成的空间。因此 $f_{\lambda,n\lambda}(P^h_{\lambda,n\lambda} - P^h_\lambda \otimes P^h_{n\lambda}) = 0$，故$\big\|f_{\lambda,n\lambda}\big((1 - P^h_\lambda) \otimes P^h_{n\lambda}\big)\big\| \le \|P^h_{\lambda,n\lambda} - 1 \otimes P^h_\mu\|$，猜想 3.6(1) 中第二个收敛由第一个收敛推出。□

为了证明正则权的情形，只需验证某一个表示（一般而言并非不可约表示）具有一个更强的性质。具体来说，给定一个有限维酉 G_q-模 V，记 $P^h_{V,\mu}$ 为到 $V \otimes V_\mu$ 中被所有 E_i 消去的向量所成子空间的投影。若每个模 V_λ 都包含在 V 的某个张量幂中，就称 G_q-模 V 是忠实的。不难看出，V 是忠实的，当且仅当 V 分解为简单模时出现的最高权模掉根格 Q 后生成 P。对于 $\mu \in P_+$，记 $N(\mu)$ 为所有 $1 \le i \le r$ 中 $\mu(i)$ 的最小值。

引理 3.8. 假设 $q \ge 1$ 和 V 是一个忠实的有限维酉算子 G_q-模，满足 $\|P^h_{V,\mu} - 1 \otimes P^h_\mu\| \to 0$ 当 $N(\mu) \to +\infty$，且当 $q > 1$ 时收敛速度为指数级，这意味着 $\|P^h_{V,\mu} - 1 \otimes P^h_\mu\| \le Ct^{N(\mu)}$ 其中某个 $C > 0$ 和 $0 < t < 1$。那么，对于 $q^{\pm 1}$ 和所有 $\lambda \in P_{++}$，猜想 *3.6* 成立。

证明. 对于有限维酉算子 G_q-模 W，考虑以下性质 :

$$\|P^h_{W,\mu} - 1 \otimes P^h_\mu\| \to 0 \quad \text{as} \quad N(\mu) \to +\infty. \tag{3.7}$$

根据假设，这对 $W = V$ 成立。此外，我们有

$$\|P^h_{V\otimes W,\mu} - 1 \otimes P^h_{W,\mu}\| \to 0 \quad \text{as} \quad N(\mu) \to +\infty$$

对于任意 W，因为根据定理 1.3，模 $W \otimes V_\mu$ 可分解为有限个简单模之和，其最高权为 ν，且差值 $N(\nu) - N(\mu)$ 有界；求和项的个数也有一个普适上界（仅依赖于 W）。由此可知，若 (3.7) 对某个 W 成立，则对 $V \otimes W$ 也成立。于是通过归纳法可得，(3.7) 对所有 n 均成立于 $W = V^{\otimes n}$。由于根据假设，任意 V_λ 都包含于某个 $V^{\otimes n}$，其中 n，因此 (3.7) 对所有 $\lambda \in P_+$ 均成立于 $W = V_\lambda$，也就是说，当 $N(\mu) \to +\infty$ 时，$\|P^h_{\lambda,\mu} - 1 \otimes P^h_\mu\| \to 0$。同样的论证表明，若 $\|P^h_{V,\mu} - 1 \otimes P^h_\mu\| \to 0$ 以指数速度收敛，则对所有 $\lambda \in P_+$，当 $N(\mu) \to +\infty$ 时，收敛 $\|P^h_{\lambda,\mu} - 1 \otimes P^h_\mu\| \to 0$ 的速度也为指数级。特别地，对于 q 和所有 $\lambda \in P_{++}$，猜想 3.6 成立。□

利用这个引理以及某些张量积模的克莱布什–戈尔丹系数的已知公式，可以在某些情形下验证该猜想。具体而言，我们有以下结果。

定理 3.9. 对于 $G = SU(N)$、$q > 0$、$\lambda \in P_{++}$ 和 $\lambda \in \mathbb{N}\omega_1$，猜想 *3.6* 成立。

这里，ω_1 表示 $SU(N)$ 关于单根的标准选取的第一个基本权。定理的证明推迟到附录 A。

3.5. **Cartan 子乘积系统的 Cuntz–Pimsner 代数**。现在我们可以证明主要结果了。

定理 3.10. 假设 G 是单连通半单紧李群，$q > 0$ 和 $\lambda \in P_+ \setminus \{0\}$。考虑相应的 *Cartan* 子乘积系统 $(V_{n\lambda})_{n\ge 0}$，它由 G_q-模构成，并考虑与之关联的 *Cuntz–Pimsner* 代数 $\mathcal{O}_{\lambda,q}$。那么

(1) 若 $q \ge 1$，$\|(1 - 1 \otimes P^h_{n\lambda})P^h_{\lambda,n\lambda}\| \to 0$ 和 $\|f_{\lambda,n\lambda}((1 - P^h_\lambda) \otimes P^h_{n\lambda})\| \to 0$ 作为 $n \to +\infty$，则存在一个 G_q-等变同构 $\mathcal{O}_{\lambda,q} \cong C(G_q^\lambda \backslash G_q)$，$s_\eta \mapsto C^\lambda_{\xi,\eta}$ $(\eta \in V_\lambda)$；*(2)* 若 $q \le 1$，$\|(1 - 1 \otimes P^l_{n\lambda})P^l_{\lambda,n\lambda}\| \to 0$ 和 $\|f_{\lambda,n\lambda}((1 - P^l_\lambda) \otimes P^l_{n\lambda})\| \to 0$ 作为 $n \to +\infty$，则存在一个 G_q-等变同构 $\mathcal{O}_{\lambda,q} \cong C(G_q^{\bar\lambda} \backslash G_q)$，$s_\eta \mapsto C^\lambda_{\zeta,\eta}$ $(\eta \in V_\lambda)$。

证明。我们将证明（1），（2）可用类似方法证明。考虑线性映射 $A\colon V_{\bar\lambda} \otimes V_\lambda \to \mathcal{T}_{\lambda,q}$ 和 $B\colon V_{\bar\lambda} \otimes V_\lambda \to \mathcal{T}_{\lambda,q}$，它们由 $A(\xi \otimes \zeta) = S_\xi S^*_\zeta$ 和 $B(\zeta \otimes \xi) = S^*_\zeta S_\xi$ 定义。假设 $\|(1 - 1 \otimes P^h_{n\lambda})P^h_{\lambda,n\lambda}\| \to 0$，$\|f_{\lambda,n\lambda}((1 - P^h_\lambda) \otimes P^h_{n\lambda})\| \to 0$ 以及命题 3.5 表明，对所有 $\xi, \zeta \in V_\lambda$，我们有

$$B(\bar\zeta \otimes \xi) = q^{-(\lambda,\lambda)} A\sigma^{-1}(\bar\zeta \otimes \xi) \mod \mathcal{K}(\mathcal{F}_{\lambda,q}).$$

由此可知，$\mathcal{O}_{\lambda,q}$ 允许正规排序。此外，当 $q=1$，因此 σ 恰为翻转映射时，这表明元素 s_ζ^* 和s_ξ 交换；又由于根据（3.1），元素 s_ζ 和s_ξ也交换，我们得出 $\mathcal{O}_\lambda$ 是一个交换的 C*-代数。

根据引理 3.4，存在一个特征 φ_h on $\mathcal{O}_{\lambda,q}$ 使得 $\varphi_h(s_{\xi_\lambda})=1$ 且 $\varphi_h(s_\eta)=0$ 对所有$\eta\perp\xi_\lambda$均成立。将 α: $\mathcal{O}_{\lambda,q}\to\mathcal{O}_{\lambda,q}\otimes C(G_q)$ 记为 G_q 的作用，定义一个含幺的 $*$- 同态

$$\pi\colon \mathcal{O}_{\lambda,q}\to C(G_q)\quad\text{by}\quad \pi(a)=(\varphi_h\otimes\iota)\alpha(a).$$

于是得到 $\pi(s_\eta)=C^\lambda_{\xi_\lambda,\eta}$ 对所有 $\eta\in V_\lambda$均成立。由推论 3.2(1)，我们得出 π的像等于 $C(G_q^\lambda\backslash G_q)$。

同态 $\pi\colon \mathcal{O}_{\lambda,q}\to C(G_q^\lambda\backslash G_q)$ 是 G_q-等变的。由命题 1.2，G_q 在 $\mathcal{O}_{\lambda,q}$ 上的作用是遍历的。由于 G_q 由 [NT13, Theorem 2.7.14], 可知是余可和的，标准论证表明 π 是单射，参见例如[HN25, Section 1]中 Definition 1.2 之前的讨论。至此定理得证。□

根据定理 3.9，该结果无条件适用于 $G=SU(N)$、$q>0$、$\lambda\in P_{++}$ 和$\lambda\in\mathbb{N}\omega_1$。对于 $\lambda=\omega_1$，这再次给出定理 2.4，但这两个证明并非相互独立，因为第2节中的一些计算用在了定理 3.9 的证明中。

4. 规范不变子代数

再次固定一个单连通半单紧李群 G 和一个支配整权$\lambda\in P_+\setminus\{0\}$。本节将研究$\mathcal{T}_{\lambda,q}$的规范不变子代数。我们假设 $q\geq 1$，但正如前两节所示，通过交换最高权和最低权的角色，或直接利用同构 $G_{q^{-1}}\cong G_q$，同样可以得到关于 $0<q\leq 1$ 的类似结果。

4.1. 连续场结构与 Berezin 量子化。考虑 $\mathbb{T}$ 在$\mathcal{F}_{\lambda,q}$上的酉表示 $z\mapsto u_z$，其中 u_z 是酉算子，它在 $V_{n\lambda}$ 上的作用为乘以 z^n。于是得到 $\mathbb{T}$ 在 $\mathcal{B}(\mathcal{F}_{\lambda,q})$上的作用 $\mathrm{Ad}\,u$。自同构 $\mathrm{Ad}\,u_z$ 使$\mathcal{T}_{\lambda,q}$整体保持不变，并定义 $\mathbb{T}$ 在$\mathcal{T}_{\lambda,q}$上的规范作用 γ，即对于 $\xi\in V_\lambda$，有 $\gamma_z(S_\xi)=zS_\xi$。这一作用传递到$\mathcal{O}_{\lambda,q}$上。我们将 $\mathcal{T}_\lambda^{(0)},_q\subset\mathcal{T}_{\lambda,q}$ 和 $\mathcal{O}_\lambda^{(0)},_q\subset\mathcal{O}_{\lambda,q}$ 称为规范不变子代数。

假设

$$\|(1-1\otimes P^h_{n\lambda})P^h_{\lambda,n\lambda}\|\to 0\quad\text{and}\quad \big\|f_{\lambda,n\lambda}\big((1-P^h_\lambda)\otimes P^h_{n\lambda}\big)\big\|\to 0\quad\text{as}\quad n\to+\infty. \tag{4.1}$$

那么，由定理 3.10 可得满同态 $\pi\colon\mathcal{T}_{\lambda,q}\to C(G_q^\lambda\backslash G_q)$，其核为$\mathcal{K}(\mathcal{F}_{\lambda,q})$。令 $S=\{\alpha\in\Pi:(\lambda,\alpha)=0\}$。

引理 4.1. 同态 $\pi\colon\mathcal{T}_{\lambda,q}\to C(G_q^\lambda\backslash G_q)$ 将 $\mathcal{T}_{(0)\,\lambda,q}\subset\mathcal{T}_{\lambda,q}$ 映至 $C(K_q^S\backslash G_q)$，因此定义了一个同构 $\mathcal{O}_\lambda^{(0)},_q\cong C(K_q^S\backslash G_q)$。

证明。我们固定的极大环面 $T\subset G$ 通过左平移作用于 $C(G_q)$ 上。此作用以相同的方式缩放所有元素 $C^\lambda_{\xi_\lambda,\eta}$, $\eta\in V_\lambda$。回想一下，$G_q^\lambda=K^S,_q{}^L$，其中 $L=\mathbb{Z}\lambda$，由此可知 π 定义了一个从 $\mathcal{O}_\lambda^{(0)},_q$ 到.....的同构

$$C(G_q^\lambda\backslash G_q)\cap C(T\backslash G_q)=C(K_q^S\backslash G_q),$$

这就证明了该引理。□

同态 $\mathcal{T}_\lambda^{(0)},_q\to C(K_q^S\backslash G_q)$ 与 Berezin 量子化（或者更确切地说，去量子化）密切相关。也就是说，对于每个 n，我们都可以定义一个 G_q-等变的 ucp 映射

$$\sigma_n\colon\mathcal{B}(V_{n\lambda})\to C(K_q^S\backslash G_q)\quad\text{by}\quad \sigma_n(T)=(\omega_n\otimes\iota)(U_n(T\otimes 1)U_n^*),$$

其中， $\omega_n = (\cdot\,\xi_{n\lambda}, \xi_{n\lambda})$ 和 $U_n \in \mathcal{B}(V_{n\lambda}) \otimes \mathbb{C}[G_q]$ 是定义 G_q 在 $V_{n\lambda}$ 上表示的酉算子。在经典情形下， $q = 1$ ，函数 $\sigma_n(T)$ 在 G 上称为 T 的协变贝雷津符号。

子空间 $V_{n\lambda} \subset \mathcal{F}_{\lambda,\,q}$ 在 $\mathcal{T}_{(0)\,\lambda,\,q}$ 下是不变的。给定 $x \in \mathcal{T}^{(0)}_{\lambda\,,\,q}$ ，记 x_n 为 $x|_{V_{n\lambda}}$。

引理 4.2。对于每个 $x \in \mathcal{T}^{(0)}_{\lambda\,,\,q}$ ，序列 $(\sigma_n(x_n))_n$ 在范数下收敛于 $\pi(x)$。

证明。回忆一下，定理 3.10(1)中的同态 π 定义为 $\pi(x) = (\varphi_h \otimes \iota)\alpha(x)$。正如我们在命题 3.5的证明中所展示的，如果 $\zeta \in V_\lambda$ 是权不同于 λ的权向量，则 $S^*_\zeta \xi_{n\lambda} = 0$和$\|S_\zeta \xi_{n\lambda}\| \le \|f_\lambda, {}_{n\lambda}\big((1 - P^h_\lambda) \otimes P^h_{n\lambda}\big)\|\,\|\zeta\|$。由此不难看出，特征 φ_h 在 $\mathcal{T}_{\lambda,q}$ 上的限制到 $\mathcal{T}^{(0)}_{\lambda\,,q}$ 由 $\varphi_h(x) = \lim_n \omega_n(x_n)$给出。因此，对于每个 $x \in \mathcal{T}_{(0)\,\lambda,q}$ ，序列 $(\sigma_n(x_n))_n$ 弱收敛到$\pi(x) \in C(K^S_q \backslash G_q)$。事实上，该收敛是在范数下进行的，因为 $\mathcal{T}^{(0)}_{\lambda\,,q}$ 中的每个元素都可以用包含于有限维 G_q-不变子空间中的元素 x 逼近；对于这样的 x，根据 σ_n 和 π的定义，结论立即成立。 □

因此 $\pi|_{\mathcal{T}^{(0)}_{\lambda\,,\,q}}$ 可以看作协变贝雷津符号的量子类比的极限。这带来如下推论。

定理 4.3。设 G 是一个单连通半单紧李群， $\lambda \in P_+ \setminus \{0\}$ 且$q \ge 1$。令 $S = \{\alpha \in \Pi : (\lambda, \alpha) = 0\}$。假设条件 (4.1) 成立。则 $\mathcal{T}_{(0)\,\lambda,\,q}$ 是 $\bar{}$ 上的 C^* 代数连续场的截面代数，其在 $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{Z}_+ \cup \{\infty\}$ 处的纤维为 $\mathcal{B}\,(V_{n\lambda})$ ，在 $n \in \mathbb{Z}_+$ 处的纤维为 $C\,(K^S_q \backslash G_q)$ 。

证明。我们将每个 $x \in \mathcal{T}^{(0)}_{\lambda\,,\,q}$ 视为 $\bar{\mathbb{Z}}_+$ 上的 C*代数连续场的一个截面，该截面在 $n \in \mathbb{Z}_+$ 处取值 x_n ，并在 ∞处取值 $x_\infty = \pi(x)$。为了证明通过这种方式得到的连续场结构如定理所述，我们需要验证以下三个性质：1）映射 $\mathcal{T}^{(0)}_{\lambda\,,\,q} \ni x \mapsto x_t$的像对于 $t = n$ 为 $\mathcal{B}(V_{n\lambda})$，对于 $t = \infty$为 $C(K^S_q \backslash G_q)$；2）由 $\mathcal{T}^{(0)}_{\lambda\,,\,q}$ 中的元素定义的截面集合在 $\bar{\mathbb{Z}}_+$上连续函数的乘法下保持不变；以及 3）对于所有 $x \in \mathcal{T}^{(0)}_{\lambda\,,\,q}$ ，映射 $t \mapsto \|x_t\|$ 在 $\bar{\mathbb{Z}}_+$ 上连续。

前两条性质由引理 4.1 以及 $\mathcal{T}^{(0)}_{\lambda\,,q}$ 包含 $\mathcal{F}_{\lambda,q}$上的所有规范不变紧算子这一事实得出。要证明第三条性质，我们只需检验，对于所有 $x \in \mathcal{T}^{(0)}_{\lambda\,,q}$ ， $\|x_n\| \to \|\pi(x)\|$ as $n \to +\infty$ 。由于 π 的核为 $\mathcal{K}(\mathcal{F}_{\lambda,q})$，因此对于所有 $x \in \mathcal{T}_{(0)\,\lambda,q}$ ，都有 $\|\pi(x)\| = \limsup_{n\to+\infty} \|x_n\|$ 。另一方面，根据前述引理，我们有$\|\sigma_n(x_n)\| \to \|\pi(x)\|$。由于映射 σ_n 是压缩映射，因此可得 $\|\pi(x)\| \le \liminf_{n\to+\infty} \|x_n\|$。因此 $\|x_n\| \to \|\pi(x)\|$。 □

对于 $q = 1$，Landsman 已无条件证明了存在一种连续场结构，其纤维如定理所述 [Lan98]。具体而言，考虑 G-等变的 ucp 映射

$$\breve{\sigma}_n \colon C(K^S \backslash G) \to \mathcal{B}(V_{n\lambda}), \quad \breve{\sigma}_n(f) = (\dim V_{n\lambda}) \int_G f(g) U_n(g^{-1}) P^h_{n\lambda} U_n(g)\, dg.$$

我们也用 $\breve{\sigma}_\infty(f)$ 表示 f。[Lan98，定理 1] 证明，存在唯一的连续场 C*-代数，其纤维如定理 4.3 所述，并且对于所有 $f \in C(K^S \backslash G)$，截面 $(\breve{\sigma}_n(f))^{n \in \mathbb{Z}_+ \cup \{\infty\}}$ 都是连续的。

命题 4.4. 对于 $q = 1$，定理 *4.3* 中定义的连续场结构与 [Lan98] 中定义的连续场结构一致。换言之，假设条件 (4.1)成立，则 C^*-代数 $\mathcal{T}_{(0)\,\lambda}$ 由 $\mathcal{K}(\mathcal{F}_\lambda) \cap \mathcal{T}_{(0)\,\lambda}$ 以及元素 $(\breve{\sigma}_n(f))_{n\ge 0}$ （ $f \in C(K^S \backslash G)$）生成。

证明. 只需证明，对于所有 $x \in \mathcal{T}^{(0)}\lambda$，都有 $\|x_n - \breve{\sigma}_n(\pi(x))\| \to 0$，其中 $n \to +\infty$。由于映射 $\breve{\sigma}_n$ 根据 [Lan98，定理 2]，构成渐近同态，因此只需在生成 $\mathcal{T}^{(0)}\lambda$（模紧算子）的 $\mathcal{T}_\lambda^{(0)}$ 元素上验证这一点。我们可以取以下元素：$S_\xi S_\zeta^*$（$\xi, \zeta \in V_\lambda$）。

我们将采用与命题 3.5 的证明相同的策略。对于每个 n，考虑两个 G-等变线性映射 A_n，B_n: $V_\lambda \otimes V_\lambda \to \mathcal{B}(V_{n\lambda})$，定义如下

$$A_n(\xi \otimes \bar{\zeta}) = S_\xi S_\zeta^*, \qquad B_n(\xi \otimes \bar{\zeta}) = \breve{\sigma}_n(\pi(S_\xi S_\zeta^*)).$$

我们需要证明 $\|A_n - B_n\| \to 0$。与命题 3.5 的证明一样，条件 (4.1) 意味着 $\bar{}$ $\bar{}$ $\bar{}$只需验证 $\|(A_n(\xi \otimes \zeta) - B_n(\xi \otimes \zeta))\xi_{n\lambda}\| \to 0$。我们知道 $A_n(\xi \otimes \zeta)\xi_{n\lambda}\bar{}$ 大致是什么样子，因此需要证明，当 $n \to +\infty$ 时，$B_n(\xi_\lambda \otimes \xi_\lambda)\xi_{n\lambda}$ 趋近于 $\xi_{n\lambda}$；而如果 ξ，$\zeta \in V_\lambda$ 是范数为一的权向量，且 $\mathrm{wt}(\xi) \neq \lambda$ 或 $\mathrm{wt}(\zeta) \neq \lambda$，$\bar{}$那么 $B_n(\xi \otimes \zeta)\xi_{n\lambda}$ 趋近于零。

$\bar{}$我们首先考虑（$B_n(\xi\otimes\zeta)\xi_{n\lambda}$，$\xi_{n\lambda}$）=（$\breve{\sigma}_n(\pi(S_\xi S_\zeta^*))\xi_{n\lambda}$，$\xi_{n\lambda}$）。直接计算可得

$$(\breve{\sigma}_n(f)\xi_{n\lambda}, \xi_{n\lambda}) = (\dim V_{n\lambda}) \int_G f(g)|(U_n(g)\xi_{n\lambda}, \xi_{n\lambda})|^2 dg.$$

众所周知，当 $n \to +\infty$ 时，对于所有 $f \in C(K^S\backslash G)$，该表达式收敛到 $f(e)$，例如参见 [Rie04，引理 3.3]，其中给出了一个简短的证明。回顾 $\pi(S_\xi) = C^\lambda_{\xi_\lambda,\ \xi}$，我们得到

$$(\breve{\sigma}_n(\pi(S_\xi S_\zeta^*))\xi_{n\lambda}, \xi_{n\lambda}) \to (\xi, \xi_\lambda)\overline{(\zeta, \xi_\lambda)}.$$

特别地，$(\breve{\sigma}_n(\pi(S_{\xi_\lambda} S_{\xi_\lambda}^*))\xi_{n\lambda},\ \xi_{n\lambda}) \to 1$。由于 $\breve{\sigma}_n(\pi(S_{\xi_\lambda} S_{\xi_\lambda}^*))$ 是一个压缩算子，因此可知$\|\breve{\sigma}_n(\pi(S_{\xi_\lambda} S_{\xi_\lambda}^*))\xi_{n\lambda} - \xi_{n\lambda}\| \to 0$。类似地，若 $\xi \in V_\lambda$ 是一个满足 $\mathrm{wt}(\xi) \neq \lambda$ 的权向量，则我们得到 $(\breve{\sigma}_n(\pi(S_\xi S_\xi^*))\xi_{n\lambda},\ \xi_{n\lambda}) \to 0$，进而得到 $\|\breve{\sigma}_n(\pi(S_\xi S_\xi^*))\xi_{n\lambda}\| \to 0$。最后，若 ξ，$\zeta \in V_\lambda$是范数为一且满足 $\mathrm{wt}(\xi) \neq \lambda$ 的权向量，则

$$\breve{\sigma}_n(\pi(S_\zeta S_\xi^*))^* \breve{\sigma}_n(\pi(S_\zeta S_\xi^*)) \leq \breve{\sigma}_n(\pi(S_\xi S_\zeta^* S_\zeta S_\xi^*)) \leq \breve{\sigma}_n(\pi(S_\xi S_\xi^*))$$

并且，由于 $\pi(S_\xi S_\zeta^*) = \pi(S_\zeta^* S_\xi)$，

$$\breve{\sigma}_n(\pi(S_\xi S_\zeta^*))^* \breve{\sigma}_n(\pi(S_\xi S_\zeta^*)) \leq \breve{\sigma}_n(\pi(S_\xi^* S_\xi)) = \breve{\sigma}_n(\pi(S_\xi S_\xi^*)),$$

因此，当 $n \to +\infty$ 时，$\|\breve{\sigma}_n(\pi(S_\zeta S_\xi^*))\xi_{n\lambda}\|$ 和 $\|\breve{\sigma}_n(\pi(S_\xi S_\zeta^*))\xi_{n\lambda}\|$ 都收敛于零。这就完成了该命题的证明。□

4.2. 离散量子空间的紧化。 现在我们考虑 $q > 1$ 的情形，并给出对 $\mathcal{T}_\lambda^{(0)}{}_{,\ q}$ 的另一种描述。在本小节中，我们始终假设存在 $C > 0$ 和 $0 < t < 1$，使得

$$\|(1 - 1 \otimes P_{n\lambda}^h)P_{\lambda,n\lambda}^h\| \leq Ct^n \quad \text{and} \quad \left\|f_{\lambda,n\lambda}\big((1 - P_\lambda^h) \otimes P_{n\lambda}^h\big)\right\| \leq Ct^n \quad \text{for all} \quad n \geq 0. \tag{4.2}$$

再次回顾，对于 $G = SU(N)$、$\lambda \in P_{++}$ 和 $\lambda \in \mathbb{N}\omega_1$，这一条件是满足的。

定义离散量子集 $\Gamma_{\lambda,\ q}$，令

$$\ell^\infty(\Gamma_{\lambda,q}) = \ell^\infty\text{-}\bigoplus_{n=0}^\infty \mathcal{B}(V_{n\lambda}).$$

换言之，$\ell^\infty(\Gamma_{\lambda,q})$由算子 $x_n \in \mathcal{B}(V_{n\lambda})$的范数有界序列构成。我们将此代数视为 $\mathcal{B}(\mathcal{F}_{\lambda,q})$的一个子代数。我们还将 $c_0(\Gamma_{\lambda,q}) \subset \ell^\infty(\Gamma_{\lambda,q})$定义为满足 $\|x_n\| \to 0$的序列$(x_n)_n$ 所构成的子代数。等价地，$c_0(\Gamma_{\lambda,q}) = \ell^\infty(\Gamma_{\lambda,q}) \cap \mathcal{K}(\mathcal{F}_{\lambda,q})$。任何包含 $c_0(\Gamma_{\lambda,q})$的含幺 C*-$\bar{}$子代数 $C(\Gamma_{\lambda,q}) \subset \ell^\infty(\Gamma_{\lambda,q})$，都可以视为$\Gamma_\lambda$上的某个紧化的连续$\bar{}$函数代数；于是商 $C(\partial\Gamma_{\lambda,q}) = C(\Gamma_{\lambda,q})/c_0(\Gamma_{\lambda,q})$描述相应的边界。

我们将构造$\Gamma_{\lambda,q}$的一个紧化，将 Vaes 和 Vergnioux 针对 $SU_q(2)$及其他自由正交量子群 [VV07]的构造加以推广。它可以视为树的端紧化的一种量子类比。

回忆一下， f_n 表示投影 $V_\lambda^{\otimes n} \to V_{n\lambda}$。考虑由 G_q-等变 ucp 映射构成的归纳系统

$$\psi_{n,n+k}\colon \mathcal{B}(V_{n\lambda}) \to \mathcal{B}(V_{(n+k)\lambda}), \quad T \mapsto f_{n+k}(T\otimes 1)f_{n+k},$$

其中我们利用了 $V_{(n+k)\lambda} \subset V_{n\lambda}\otimes V_{k\lambda}$，并定义

$$\begin{aligned} C(\bar\Gamma_{\lambda,q}) &= \overline{\{x\in \ell^\infty(\Gamma_{\lambda,q}) \mid \psi_{n,n+k}(x_n) = x_{n+k} \text{ for all } n \text{ large enough and } k\ge 0\}} \\ &= \{x\in \ell^\infty(\Gamma_{\lambda,q}) \mid \lim_{n\to+\infty}\sup_{k\ge 0}\|\psi_{n,n+k}(x_n) - x_{n+k}\| = 0\}. \end{aligned} \tag{4.3}$$

显然， $C(\Gamma_{\lambda,\,q})$ 是一个包含 $c_0(\Gamma_{\lambda,\,q})$ 的算子系统，但它是否关于乘法封闭则完全不明显。

定理 4.5. 设 G 是一个单连通半单紧李群， $\lambda \in P_+\setminus\{0\}$ 且 $q>1$。设 $S=\{\alpha\in\Pi : (\lambda,\alpha) = 0\}$。假设条件 *(4.2)* 成立。则由 *(4.3)* 定义的算子系统 $C(\bar\Gamma_{\lambda,q})$ 是 $\ell^\infty(\Gamma_{\lambda,q}) \subset \mathcal{B}(\mathcal{F}_{\lambda,q})$ 的 C^*-子代数，并且有$C(\bar\Gamma_{\lambda,q}) = \mathcal{T}_{\lambda,q}$。此外，定理 *3.10* 中的满射 G_q-等变同态 $\mathcal{T}_{\lambda,q}\to C(G_q^\lambda\backslash G_q)$ 诱导出一个同构

$$C(\partial\Gamma_{\lambda,q}) = C(\bar\Gamma_{\lambda,q})/c_0(\Gamma_{\lambda,q}) \cong C(K_q^S\backslash G_q).$$

这推广了 [HN24，定理 4.1]，适用于 $G_q = SU_q(2)$。我们的策略与 [HN24]，中相同，但有些论证需要做一些调整。

下面的估计将在证明中发挥关键作用。

引理 4.6（参见 [HN24，引理 4.2]）。对所有 $n\ge 2$，都有

$$\|f_{n+1} - (f_n\otimes 1)(1\otimes f_n)\| \le \|(1-1\otimes P^h_{n\lambda})P^h_{\lambda,n\lambda}\| + \big\|f_{\lambda,(n-1)\lambda}\big((1-P^h_\lambda)\otimes P^h_{(n-1)\lambda}\big)\big\|.$$

证明。由于 f_{n+1} 被 $1\otimes f_n$ 和 $f_n\otimes 1$ 支配，引理陈述中的不等式等价于

$$\|(f_n\otimes 1)|_{(V_\lambda\otimes V_{n\lambda})\ominus V_{(n+1)\lambda}}\| \le \|(1-1\otimes P^h_{n\lambda})P^h_{\lambda,n\lambda}\| + \big\|f_{\lambda,(n-1)\lambda}\big((1-P^h_\lambda)\otimes P^h_{(n-1)\lambda}\big)\big\|.$$

正如我们在命题 3.5 的证明中所用，由于 $f_n\otimes 1$ 是一个态射，其范数由限制在被 E_i 各项湮灭的向量子空间上的范数决定。在 $(V_\lambda\otimes V_{n\lambda})\ominus V_{(n+1)\lambda}$ 中，到这类向量子空间的投影为 $P^h_{\lambda,\,n\lambda} - (P^h_\lambda)^{\otimes(n+1)}$，其中我们将 $P_{\lambda,\,n\lambda}$视为作用在 $V_\lambda^{\otimes(n+1)}$ 上的算子。因此

$$\begin{aligned} \|(f_n\otimes 1)|_{(V_\lambda\otimes V_{n\lambda})\ominus V_{(n+1)\lambda}}\| &= \|(f_n\otimes 1)(P^h_{\lambda,n\lambda} - (P^h_\lambda)^{\otimes(n+1)})\| \\ &\le \|(f_n\otimes 1)\big((1\otimes P^h_{n\lambda})P^h_{\lambda,n\lambda} - (P^h_\lambda)^{\otimes(n+1)}\big)\| + \|(1-1\otimes P^h_{n\lambda})P^h_{\lambda,n\lambda}\|. \end{aligned} \tag{4.4}$$

我们可以写成

$$(1\otimes P^h_{n\lambda})P^h_{\lambda,n\lambda} - (P^h_\lambda)^{\otimes(n+1)} = \big((1-P^h_\lambda)\otimes P^h_{(n-1)\lambda}\otimes P^h_\lambda\big)P^h_{\lambda,n\lambda}.$$

由于 f_n 不过是将 $f_{\lambda,(n-1)\lambda}$ 视为作用于 $V_\lambda^{\otimes n}$ 上的算子，因此可得

$$\|(f_n\otimes 1)\big((1\otimes P^h_{n\lambda})P^h_{\lambda,n\lambda} - (P^h_\lambda)^{\otimes(n+1)}\big)\| \le \big\|f_{\lambda,(n-1)\lambda}\big((1-P^h_\lambda)\otimes P^h_{(n-1)\lambda}\big)\big\|.$$

这一点与（4.4）结合起来，即证明了该引理。 □

利用此引理和假设 (4.2)，接下来的几个结果可按照 [HN24]，中的方式同样证明，因此略去证明。不过首先需要引入一些记号。类似于左创造算子 S_ξ，我们可以在 $\mathcal{F}_{\lambda,q}$ 上定义右创造算子 R_ξ：

$$R_\xi\eta = f_{n+1}(\eta\otimes\xi) \quad \text{for} \quad \xi\in V_\lambda \ \text{ and } \ \eta\in V_{n\lambda}.$$

引理 4.7 ([HN24，引理 4。3])。 对于所有 ξ、$\zeta \in V_\lambda$，都有 $[S_\xi, R_\zeta] = 0$。存在一个常数$c > 0$ 使得

$$\|[S_\xi^*, R_\zeta]|_{V_{n\lambda}}\| \le c t^n \|\xi\| \, \|\zeta\| \quad \textit{for all} \quad \xi, \zeta \in V_\lambda \quad \textit{and} \quad n \ge 0.$$

这立即给出以下结果。

推论 4.8. 对于每个 $S \in \mathcal{T}_{\lambda,q}$ 以及由算子 R_ξ,$\xi \in V_\lambda$生成的 C^*-代数中的每个 R，都有 $[S, R] \in \mathcal{K}(\mathcal{F}_{\lambda,q})$。

固定 V_λ 中的一个标准正交基 $(\xi_i)_i$，并记 R_i 为 R_{ξ_i}。与 (1.1) 类似，我们有 $\sum_{i=1}^N R_i R_i^* = 1 - e_0$。定义一个压缩完全正映射

$$\Theta \colon \mathcal{B}(\mathcal{F}_{\lambda,q}) \to \mathcal{B}(\mathcal{F}_{\lambda,q}), \quad \Theta(T) = \sum_i R_i T R_i^*.$$

由于 $\mathcal{K}(\mathcal{F}_{\lambda,q}) \subset \mathcal{T}_{\lambda,q}$，由推论 4.8 可知，此映射保持 $\mathcal{T}_{\lambda,q}$ 整体不变。它也保持$\ell^\infty(\Gamma_{\lambda,q})$整体不变，并且我们有

$$\Theta^k(x)_{n+k} = \psi_{n,n+k}(x_n) \quad \text{for all} \quad x \in \ell^\infty(\Gamma_{\lambda,q}), \quad n, k \ge 0. \tag{4.5}$$

记 $\mathcal{A}_{\lambda,q}$ 为由元素 S_ξ, $\xi \in V_\lambda$生成的 $\mathcal{T}_{\lambda,q}$ 的含单位元 $*$-子代数。令 $\mathcal{A}_\lambda^{(0)}{}_{,q}$为 $\mathcal{A}_{\lambda,q}$ 的规范不变部分。它由 S_ξ 和 S_ξ^* 中产生算子与湮灭算子数量相同的单项式张成。利用引理 4.7 可得以下结果。

引理 4.9 ([HN24, 引理 4.6])。 对于每个 $x \in \mathcal{A}_\lambda^{(0)}{}_{,q}$，都存在一个常数 $C_x > 0$，使得

$$\|x_{n+k} - \Theta^k(x)_{n+k}\| \le C_x t^n \quad \textit{for all} \quad n, k \ge 0.$$

定理 *4.5* 的证明。 定理的最后一部分由引理 4.1 得出，因此我们只需证明等式 $C(\bar{\Gamma}_{\lambda,q}) = \mathcal{T}_\lambda^{(0)}{}_{,q}$。

由 (4.5) 和引理 4.9 可知 $\mathcal{A}_\lambda^{(0)}{}_{,q} \subset C(\bar{\Gamma}_{\lambda,q})$。因此 $\mathcal{T}_\lambda^{(0)}{}_{,q} \subset C(\bar{\Gamma}_{\lambda,q})$。为证明反向包含，任取 $x \in \ell^\infty(\Gamma_{\lambda,q})$，使得

$$x_{n_0+k} = \psi_{n_0,n_0+k}(x_{n_0})$$

对于某个 n_0，且对所有 $k \ge 0$ 均成立。由于映射 ψ_{n_0,n_0+k} 关于伴随作用是 G_q-等变的，我们可以假设 x_{n_0} 属于一个最高权为 $\nu \in P_+$ 的等型分量 $\mathcal{B}(V_{n_0\lambda})_\nu \subset \mathcal{B}(V_{n_0\lambda})$。

也将 $C(K_q^S \backslash G_q)_\nu \subset \mathbb{C}[K_q^S \backslash G_q]$ 记作最高权为 ν 的等型分量（关于右平移的作用）。其重数等于 V_ν 中 K_q^S-不变向量空间的维数。根据命题 1.4，该维数也不小于等型分量 $\mathcal{B}(V_{n\lambda})_\nu$ 的重数，因为这个重数等于 $V_\nu \otimes V_{n\lambda}$ 中 $V_{n\lambda}$ 的重数。因此，

$$\dim \mathcal{B}(V_{n\lambda})_\nu \le \dim C(K_q^S \backslash G_q)_\nu \quad \text{for all} \quad n \ge 0. \tag{4.6}$$

选取嵌入映射 $C(K_q^S \backslash G_q)_\nu \to C(K_q^S \backslash G_q)$ 到 G_q-等变线性映射的一个提升

$$\rho \colon C(K_q^S \backslash G_q)_\nu \to \mathcal{A}_{\lambda,q}^{(0)},$$

使得对于 $a \in C(K_q^S \backslash G_q)_\nu$，有 $\pi(\rho(a)) = a$。将引理 4.9 应用于 ρ 的像中的算子，我们可以找到 $c > 0$，使得

$$\|\rho(a)_{n+k} - \Theta^k(\rho(a))_{n+k}\| \le c t^n \|a\| \quad \text{for all} \quad a \in C(K_q^S \backslash G_q)_\nu \quad \text{and} \quad n, k \ge 0. \tag{4.7}$$

接下来，任取 $0 < \delta < 1$。由引理 4.2 可知，我们可以找到 $n_1 \ge 0$，使得对所有 $a \in C(K_q^S \backslash G_q)_\nu$ 和 $n \ge n_1$，都有 $\|\rho(a)_n\| \ge \delta \|a\|$。因此，对所有 $n \ge n_1$，映射

$$C(K_q^S \backslash G_q)_\nu \to \mathcal{B}(V_{n\lambda})_\nu, \quad a \mapsto \rho(a)_n,$$

是一个线性同构。

现在，固定 $\varepsilon > 0$ 并选择 $n \geq \max\{n_0, n_1\}$，使得 $ct^n\|x\| < \varepsilon\delta$。对于满足 $\rho(a)_n = x_n$ 的唯一 $a \in C(K_q^S \backslash G_q)_\nu$，我们有 $\|a\| \leq \delta^{-1}\|\rho(a)_n\| \leq \delta^{-1}\|x\|$。对于所有 $k \geq 0$，我们有

$$x_{n+k} = \Theta^k(x)_{n+k} = \Theta^k(\rho(a))_{n+k}.$$

因此，再次应用 (4.7)，得到

$$\|x_{n+k} - \rho(a)_{n+k}\| \leq ct^n\|a\| < \varepsilon.$$

因此，模去紧算子后，x 与 $\mathcal{A}_\lambda^{(0)}{}_{,q}$相差至多 ε。因此 $x \in \mathcal{T}_\lambda^{(0)}{}_{,q}$。 □

附录 A. $SU_q(N)$的克莱布施–戈丹系数的渐近性

本附录旨在概述定理 3.9 的证明。正如第 3.4 节所述，只需考虑 $q \geq 1$。

A.1. 正则权。 我们首先考虑正则权。我们希望将引理 3.8 应用于 $V = V_{\omega_1}$。因此，我们需要验证

$$\|P^h_{\omega_1,\mu} - 1 \otimes P^h_\mu\| \to 0 \quad \text{as} \quad N(\mu) \to +\infty, \tag{A.1}$$

并且当 $q > 1$ 时，收敛速度呈指数级。

回想一下，每个最高权 μ 都由一个元组 $(\mu_1, \ldots, \mu_{N-1}, 0)$ 描述，其中 μ_i 是满足 $\mu_1 \geq \cdots \geq \mu_{N-1} \geq 0$ 的整数。于是 $\mu(i) = \mu_i - \mu_{i+1}$ (其中 $\mu_N = 0$)，因此

$$N(\mu) = \min_{1 \leq i \leq N-1} (\mu_i - \mu_{i+1}).$$

$V_{\omega_1} \otimes V_\mu$ 的克莱布什–戈尔丹系数可用盖尔范德–策特林基来描述。具体而言，V_μ 的基元素由以下数组参数化：

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} r_{11} & \ldots & r_{1,N-1} & 0 \\ r_{21} & \ldots & r_{2,N-1} & \\ \vdots & & & \\ r_{N1} & & & \end{pmatrix},$$

其中 r_{ij} 是满足以下条件的整数：对于 $j = 1, \ldots, N-1$，$r_{1j} = \mu_j$，且对于所有 i, j，$r_{ij} \geq r_{i+1,j} \geq r_{i,j+1} \geq 0$。在这个基中，最高权向量 ξ_μ 可取为

$$\mathbf{r}(\mu) = \begin{pmatrix} \mu_1 & \ldots & \mu_{N-1} & 0 \\ \mu_1 & \ldots & \mu_{N-1} & \\ \vdots & & & \\ \mu_1 & & & \end{pmatrix}.$$

e_i 标准基的元素 $V_{\omega_1} = \mathbb{C}^N$ 对应于数组 $\mathbf{e}^i = (e^i_{ab})$，简洁地写作

$$e^i_{ab} = \begin{cases} 1, & \text{if } \ 1 \leq a \leq N - i + 1 \ \text{ and } \ b = 1, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

现在，对于 $N(\mu) \geq 1$ 我们有

$$V_{\omega_1} \otimes V_\mu \cong \bigoplus_{i=1}^N V_{\mu^i},$$

其中，对于 $i = 1, \ldots, N-1$，$\mu^i = (\mu_1, \ldots, \mu_i + 1, \ldots, \mu_{N-1}, 0)$，且 $\mu^N = (\mu_1 - 1, \ldots, \mu_{N-1} - 1, 0)$。因此，为了证明 (A.1)，只需证明对所有 $1 \leq i \leq N$，我们都有

$$|(\mathbf{e}^i \otimes \mathbf{r}(\mu), \mathbf{r}(\mu^i))| \to 1 \quad \text{as} \quad N(\mu) \to +\infty,$$

并且当 $q > 1$ 时，收敛速度是指数级的。这确实成立，因为除去相位因子，我们有

$$(\mathbf{e}^i \otimes \mathbf{r}(\mu), \mathbf{r}(\mu^i)) = q^{\frac{1}{2}(i-1)} \sqrt{\frac{\prod_{j=1}^{i-1}[\mu_j - \mu_i - j + i - 1]_q}{\prod_{j=1}^{i-1}[\mu_j - \mu_i - j + i]_q}}, \tag{A.2}$$

这可由 $V_{\omega_1} \otimes V_\mu$ 的克莱布什–戈尔丹系数公式推得，参见例如 [KS97，第 220] 页以及 [CP08，第4节2]。注意，这些参考文献中的约定与我们的不同，因此其中公式里的 q 应替换为 q^{-1}。

A.2. **.....的倍数** ω_1。 接下来我们考虑形如 $\lambda = m\omega_1$ 的权。猜想 3.6(1) 中的第一个收敛性同样可由已知的克莱布什–戈尔丹系数公式推出，参见例如 [AS94], 。不过，与上文所用公式相比，这些公式针对 $m \geq 2$ 的一般形式要复杂得多，因此采用以下论证更为简便。

对于 $N = 2$ ，由正则权的情形可知收敛性成立。因此假设 $N \geq 3$。我们将 $V_{n\omega_1}$ 视为 $\mathbb{C}_q[e_1, \ldots, e_N]$ 中次数为 n 的齐次多项式空间 $\mathbb{C}_q[e_1, \ldots, e_N]_n$。对于 $n \geq m$，有

$$V_{m\omega_1} \otimes V_{n\omega_1} \cong \bigoplus_{k=0}^{m} V_{\mu^{n,k}},$$

其中 $\mu^{n,\ k}$ =($n+k$，$m-k$，0，.....，0)。任取 $0 \leq k \leq m$。根据 SU_q(2) 的融合规则，存在一个权为 (n +k，$m-k$，0，.....，0) 且被 E_1 消去的单位向量 $\xi^{n,\ k} \in \mathbb{C}_q[e_1, e_2]_m \otimes \mathbb{C}_q[e_1, e_2]_n \subset \mathbb{C}_q[e_1, \ldots, e_N]_m \otimes \mathbb{C}_q[e_1, \ldots, e_N]_n$，它在相位因子意义下唯一。显然，对于 $2 \leq i \leq N-1$，它也被 E_i 消去。因此，这是一个最高权向量，它确定了张量积 $V_{m\omega_1} \otimes V_{n\omega_1}$ 的分量 $V_{\mu^{n,\ k}}$。再考虑一个权为 (k，$m-k$，0，.....，0) 的单位向量 $\zeta^k \in \mathbb{C}_q[e_1, e_2]_m \subset \mathbb{C}_q[e_1, \ldots, e_N]_m$，它在相位因子意义下唯一。具体而言，我们可以取

$$\zeta^k = q^{-k(m-k)/2} \Big(\frac{[m]_q!}{[k]_q![m-k]_q!} \Big)^{1/2} e_1^k e_2^{m-k},$$

w这里使用了 (2.1) 以得到正确的归一化。根据情形 $N = 2$ 我们知道 th at

$$|(\zeta^k \otimes e_1^n, \xi^{n,k})| \to 1 \quad \text{as} \quad n \to +\infty,$$

并且当 $q > 1$时，收敛速度呈指数级。因此，猜想 3.6(1) 中的第一个收敛性对 $\lambda = m\omega_1$成立。

对于猜想 3.6(1) 中的第二个收敛性，考虑 $\lambda = \omega_1$。对于 $2 \leq i \leq N$，再次使用 (2.1) 可得

$$\|f_{\omega_1, n\omega_1}(e_i \otimes \xi_{n\omega_1})\| = \|e_i e_1^n\| = q^{-n}\|e_1^n e_i\| = q^{-n/2} \frac{1}{\sqrt{[n+1]_q}}.$$

因此，当 $n \to +\infty$时，我们有 $\big\|f_{\omega_1,\ n\omega_1}\big((1 - P_{\omega_1}^h) \otimes P_{n\omega_1}^h\big)\big\| \to 0$，并且当 $q > 1$时，收敛速度呈指数级。对于 $\lambda = m\omega_1$，类似的论证同样成立。

参考文献

[AKK22] K. Aguilar、J. Kaad 和 D. Kyed，*Podleś*球面收敛到球面，《数学物理通讯》 **392** 2022 3, 1029 1061, 10 1007 00220 022 04363 4 4426737 ( )，第 [25]

392 2022 3, 1029 1061, 10 1007 00220 022 04363 4 4426737 期，– DOI：. /s - - - . MR ADVR V. [25]

Aiello、S. Del Vecchio 和 S. Rossi，*Motzkin* 子乘积系统，《国际数学杂志》**36**（2025），第 14, 2550060, 10 1142 0129167 25500600 4985585 期，论文编号。DOI：. /S X 。MR AS S. [94]

Ališauskas 和 Yu. F. Smirnov，无重数 u ( ) 耦合系数，《物理学杂志 A》**27** （1994），第17期，5925–5939。MR1304220[以及15]

A. Andersson，非交换射影簇的 *Berezin* 量子化，预印本（2015），可见 arXiv:1506.01454v8 [math.OA].[AG25] F. Arici 和 Y. Ge，二次子乘积系统、自由积及其 C^*代数，预印本（2025），可见 arXiv:2504.12843 [math.OA]。

[AK21] F. Arici 和 J. Kaad，Gysin序列与 $SU(2)$-对称性及 C^*-代数，《伦敦数学会会刊》 **8** 2021 1, 440 492, 10 1112 3 12038 4451552 ( )，第
[98] C^*
8 2021 1, 440 492, 10 1112 3 12038 4451552 期，– DOI：. /tlm . . MR Arv W. Arveson，-代数的子代数。III. 多变量算子理论，
[98] C^*
《数学学报》181（1998），第 2, 159 228, 10 1007 02392585 1668582 期，– DOI：. /BF . MR BB B. V. R. Bhat 和 T. Bhattacharyya，q-
[02]
交换压缩元组的模型理论，《算子理论杂志》 **47** 2002 1, 97 116 1905815 ( )，第
[10]
47 2002 1, 97 116 1905815 期，– 。MR BM B. V. R. Bhat 和 M. Mukherjee，乘积系统的包含系统与amalgamated乘积，《无限维
[10]
分析、量子概率及相关主题》13（2010），第1期，1–26，DOI：10.1142/S0219025710003924。MR2646788[CP08] P. S. Chakraborty 和 A. Pal，奇数维量子
球面的 $SU_q(\ell+1)$-等变谱三元组的刻画，《纯粹与应用数学杂志》
623 2008 25 42 2458039 ( )，– 。MR CP V. Chari 和 A. Pressley，《量子群指南》，剑桥
[94]
大学出版社，剑桥，1994。MR1300632[DS99] M. S. Dijkhuizen 和 J. V. Stokman，量子旗流形与不可约 $*$-表示，《数学物理通讯》
203 1999 2, 297 324, 10 1007 002200050613 1697598 ( )，第
[77] C^* 15,
203 1999 2, 297 324, 10 1007 002200050613 1697598 期，– DOI：. /s . MR Dix J. Dixmier，-代数，北荷兰数学
[77] C^* 15,
丛书，第 1977 0458185 卷。北荷兰出版公司，阿姆斯特丹-纽约-
[98] **39**
牛津，1977 0458185 。Francis Jellett 法译英。MR dGR H.
[98] **39**
de Guise 和 D. J. Rowe，渐近极限下的克莱布什–戈尔丹系数，《数学物理杂志》（ 1998 2, 1087 1106, 10 1063 1 532372 1600423 ），
[24]
第 1998 2, 1087 1106, 10 1063 1 532372 1600423 期，– DOI：. / . . MR HN E. Habbestad 和 S. Neshveyev，具有量子群对称性的子乘
[24]
积系统，《非交换几何杂志》 **18** 2024 1, 93 121, 10 4171 523 4705666 ( )，第
[25]
18 2024 1, 93 121, 10 4171 523 4705666 期，– DOI：. /jncg/ . MR HN E. Habbestad 和 S. Neshveyev，具有量子群对称
[25]
性的子乘积系统。II，《美国数学会会刊》 **378** 2025 7, 5159 5185, 10 1090 9459 4919591 ( )，第
[23]
378 2025 7, 5159 5185, 10 1090 9459 4919591 期，– DOI：. /tran/ . MR Har M. Hartz，《Drury–Arveson 空间导
[23]
论》，《解析函数空间及其应用讲座》，Fields研究所专著，第39卷，施普林格，Cham，2023，第347–413页，DOI：10.1007/978-3-031-33572-3_10。
MR4676341[HS02] J. H. Hong 和 W. Szymański，作为图代数的量子球面与射影空间，《数学物理通讯》
232 2002 1, 157 188, 10 1007 00220 002 0732 1 1942860 ( )，第
[06]
232 2002 1, 157 188, 10 1007 00220 002 0732 1 1942860 期，– DOI：. /s - - - . MR INT M. Izumi、S. Neshveyev 和
[06]
L. Tuset，SU ( ) 的对偶的泊松边界，《数学物理通讯》 **262** 2006 2, 505 531, 10 1007 00220 005 1439 2200270 ( )，第
[97]
262 2006 2, 505 531, 10 1007 00220 005 1439 2200270 期，– DOI：. /s - - -x。MR KS A. Klimyk 和 K. Schmüdgen，《量子群及其
[97]
表示》，物理学文本与专著，施普林格出版社，柏林，1997 1492989 。MR Kum S. Kumar，张量积分解，《国
[10]
际数学家大会论文集》第III卷，印度斯坦图书社，新德里，2010, 1226 1261 2827839
[98] **39** 1998
第 2010, 1226 1261 2827839 页–。MR Lan N. P. Landsman，余伴随轨道的严格量子
[98] **39** 1998
化，《数学物理杂志》（），第12期，6372–6383，DOI：10.1063/1.532644。MR1656992[Li06] H. Li，序单位量子Gromov-Hausdorff距离，《泛函分析杂志》
231（2006），第2期，312–360，DOI： 10 1016 2005 03 016 2195335 . /j.jfa. . . . MR NT S. Neshveyev 和 L. Tuset，具有泊松稳定子
[12]
的齐性空间上的量子化函数代数，《数学物理通讯》312（2012），第1期，223–250，DOI：10.1007/s00220-012-1455-6。MR2914062[NT13] S. Neshveyev 和
L. Tuset，《紧量子群及其表示范畴》，Cours Spécialisés [Specialized Courses]，第20卷，法国数学会，巴黎，2013。预印本见
https://folk.universitetetioslo.no/sergeyn/papers/CQGRC.pdf。[Rie04] M. A. Rieffel，矩阵代数在量子Gromov-Hausdorff距离下收敛到球面，《美国数学会
回忆录》 **168** 2004 796, 67 91, 10 1090 0796 2055928 ( )，第
[09] **14** 2009 801 868
168 2004 796, 67 91, 10 1090 0796 2055928 期，– DOI：. /memo/ . MR SS O. M. Shalit 和 B. Solel，子乘积系
[09] **14** 2009 801 868 2608451
统，《数学文献》（），–。MR[07] VV S. Vaes 和 R.
Vergnioux，普适离散量子群的边界、正合性与因子性，《杜克数学杂志》
140 2007 1, 35 84, 10 1215 0012 7094 07 14012 2 2355067 ( )，第
[90] $\breve{}$ $'$ $n+1$,
140 2007 1, 35 84, 10 1215 0012 7094 07 14012 2 2355067 期，– DOI：. /S - - - - . MR VS L. L. Vaksman 和
[90] $\breve{}$ $'$ $n+1$,
Ya. S. Soibel man，量子群 SU( ) 上的函数代数与奇数维量子球面，《代数与分析》2（1990），第5期，101–120（俄文）；英译本见《列宁格勒数学杂志》
2 1991 5, 1023 1042 1086447 ( )，第 **2** 1991 5, 1023 1042 1086447 期，–。MR
[12] [12]
Vis A. Viselter，子乘积系统的 Cuntz-Pimsner代数，《国际数学杂志》23 8，1250081，32，2012 10 1142 0129167 12500814 2949219 ( )，第|期，DOI：. /S
X 。MR

比亚韦斯托克大学数学系，K. Ciołkowskiego 1M，15-245 比亚韦斯托克，波兰电子邮箱：s.bhattacharjee@uwb.edu.pl

查尔姆斯理工大学与哥德堡大学数学科学系，瑞典哥德堡 SE-412 96电子邮箱：olofgi@chalmers.se

奥斯陆大学数学系，PB 1053 Blindern，0316 奥斯陆，挪威电子邮箱：sergeyn@math.uio.no