arXiv:2512.17761v1 [math.CA] 19 Dec 2025

关于一种可推出成就集为 Cantorval 的新条件及其应用

PIOTR NOWAKOWSKI

摘要。给定一个正数非递增序列 (a_n)，使得级数 $\sum a_n$ 收敛，我们用 $E(a_n)$ 表示级数 $\sum a_n$ 所有子和构成的集合，并称其为 (a_n) 的成就集。众所周知，这样的集合可以是有限个闭区间的并、康托尔集或 Cantorval。我们给出一个能够推出最后一种情形出现的新条件。我们还展示如何利用该条件构造新的可实现 Cantorval。特别地，我们证明，Kakeya条件无法告诉我们比 Kakeya 已证明的更多有关成就集形式的信息。

1. 引言

设 (a_n) 是一个正数非递增序列，使得级数 $\sum a_n$ 收敛。我们将 $\sum a_n$ （或 (a_n)）的成就集定义为其所有子和构成的集合，即

$$E(a_n) := \{\sum_{n\in A} a_n \colon A \subset \mathbb{N}\}.$$

我们用 r_n 表示级数的第 n 个余项，即 $r_n := \sum_{i=n+1}^{\infty} a_i$。

关于成就集的研究始于 100 多年前，由角谷开创。在他的论文 [11] 中，他证明了 $E(a_n)$ 是一个区间，当且仅当对所有 $n \in \mathbb{N}$ 都有 $a_n \le r_n$；而它是有限个区间的并，当且仅当对几乎所有 $n \in \mathbb{N}$ 都有 $a_n \le r_n$。此外，若对所有 $n \in \mathbb{N}$ 都有 $a_n > r_n$，那么 $E(a_n)$ 是一个康托尔集（实际上，只需对几乎所有 n 都有 $a_n > r_n$）。他猜想成就集只可能有这两种形式。尤其是，他认为如果对无穷多个 n 都有 $a_n > r_n$，那么 $E(a_n)$ 就是一个康托尔集。大约过了 60 年，这一猜想才被推翻。最终，Guthrie 和 Nymann 在 [9] 中给出了成就集的完整分类，指出还存在另一种可能形式：Cantorval。

我们称紧致完全集 $D \subset \mathbb{R}$ 为 Cantorval，若 D （ D 的一个补集的连通分支）中每个间隙的端点都是其他间隙以及 D 的非平凡连通分支的聚点（比较 [16]）。

找出能推出某个成就集是康托尔集或 Cantorval 的条件，已成为成就集研究中最重要的问题之一（例如参见 [1, 2, 3, 4, 5, 6, 10,13, 20]）。尽管关于这一主题的论文很多，我们距离完整刻画给定成就集何时为康托尔集或 Cantorval，仍相去甚远。

根据角谷的结果，我们知道，如果不等式 $a_n \le r_n$ 或 $a_n > r_n$ 对几乎所有 n成立，会出现什么情况。很自然地会问：如果两个不等式都成立无穷多次，但其中一个只在一个较小的指标集上成立（在某种意义下），又会出现什么情况？在论文 [15] 中，作者证明，对于任意无限集 $K \subset \mathbb{N}$，都存在一个非递减序列 (a_n)，使得$\{n \in \mathbb{N}\colon\ a_n > r_n\} = K$ 且 $E(a_n)$ 是一个康托尔集。另一方面，他们还证明，对于

2020数学学科分类。 11B05,11B99,26D15.关键词和短语。 成就集，康托尔值集，Kakeya 条件。

任意 $\alpha \in [0,1)$，都存在一个非递增序列 (a_n)，使得 $\{n \in \mathbb{N}\colon\ a_n > r_n\}$ 的渐近密度等于 α，并且 $E(a_n)$ 是一个 Cantorval。在论文 [19] 中，对$\alpha = 1$也得到了同样的结论。在 [15] 中提出了一个问题：对于任意无限集 $K \subset \mathbb{N}$，是否都存在一个非递增序列 (a_n)，使得 $\{n \in \mathbb{N}\colon\ a_n > r_n\} = K$ 且 $E(a_n)$ 是一个 Cantorval? 我们将在本文后文解决这个问题。

有一类序列对于成就集的研究尤为重要，即多重几何序列，也就是具有如下形式的序列：$(k_1 q,\ k_2 q,\ \ldots,\ k_m q,\ k_1 q^2,\ k_2 q^2,\ \ldots,\ k_m q^2,\ k_1 q^3,\ \ldots)$，其中 $m \in \mathbb{N}, k_1,\ \ldots,\ k_m \in \mathbb{R}, q \in (0,\ 1)$。多重几何序列的成就集是分形。关于这类集合的一个重要问题是 Palis 猜想的一种变体：每个多重几何序列的成就集是否必然满足以下二者之一：勒贝格测度为零，或具有非空内点? 尽管本文的结果尚未回答这个问题，但可能有助于今后解决这一问题（第 4 节将对此作出说明）。

本文的结构安排如下。下一节将介绍我们在全文中使用的定义、符号和基本引理。第 3 节将证明本文的主要定理。最后一节将给出该主要定理的例子和应用。

2. 预备知识

设 I 为一个区间。我们用 $l(I)$ 表示它的左端点，用 $r(I)$ 表示它的右端点。对于两个序列 t, s，我们用 $t\hat{}s$ 表示它们的连接。我们用 $i^{(n)}$ 表示由 n i-s 组成的序列（即序列 $i\hat{}i\hat{}\ldots\hat{}i$）。我们用 $|t|$ 表示序列 t的长度。对于 $j \in \{0, 1, \ldots, k-1\}$，我们用 $A^{<k}$ 表示所有长度为 j且各项都在 A 中的序列所组成的集合。

每当 $m < k$ 时，我们就假设对于任意序列（a_i），$\sum_{i=k}^{m} a_i = 0$。

全文中，我们始终采用以下假设和记号。

定义 1。设 $a = (a_n)$ 是一个正项递减序列，满足 $\sum_n a_n$ 收敛，$a_n > r_n$ 无限多次，$a_n < r_n$ 无限多次，且 $a_1 < r_1$。下面我们将归纳地构造两个序列（k_n）和（m_n）。令 $k_1 = \min\{i \in \mathbb{N}\colon\ a_i > r_i\}$，并令 $m_1 = \min\{i \in \mathbb{N}\colon\ a_{k_1+i} \le r_{k_1+i}\}$。若对某个 $n \in \mathbb{N}$，我们已定义 k_n 和 m_n，则令 $k_{n+1} = \min\{i > k_n + m_n\colon\ a_i > r_i\}$，并令 $m_{n+1} = \min\{i \in \mathbb{N}\colon\ a_{k_{n+1}+i} \le r_{k_{n+1}+i}\}$。置 $K_n := \{k_n, \ldots, k_n + m_n - 1\}$ 和 $K := \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$.

设 $I := I_\emptyset = [0, r_0]$。设 $I_0 = [0, r_1]$ 和 $I_1 = [a_1, r_0]$。设 $n \in \mathbb{N}$ 和 $t \in \{0,1\}^n$。假设我们已经定义了区间 I_t。那么我们定义 $I_{t\hat{}0} = [l(I_t)\ l(I_t) + r_{n+1}]$ 和 $I_{t\hat{}1} = [l(I_t) + a_{n+1}, r(I_t)]$。如果 $a_{n+1} > r_{n+1}$，则用 G_t 表示 I_t中的一个间隙，即区间 $(l(I_t) + r_{n+1}, l(I_t) + a_{n+1}) = (r(I_{t\hat{}0})\ l(I_{t\hat{}1}))$。我们称其为阶 $n+1$ 的间隙（注意，G_t 不一定是整个集合 $E(x)$中的间隙）。如果 $a_{n+1} \le r_{n+1}$，则用 Z_t 表示 I_t中的一个重叠，即区间 $[l(I_t) + a_{n+1}, l(I_t) + r_{n+1}] = [l(I_{t\hat{}1})\ r(I_{t\hat{}0})]$。众所周知，

$$E(x) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{t\in\{0,1\}^n} I_t.$$

对于每个 $n \in \mathbb{N}$，我们称间隙 $G_{0^{(k_n-1)}}$ 来自 0，称间隙 $G_{1^{(k_n-1)}}$ 来自 1。令 $t \in \{0,1\}^k$，其中 $k \in \mathbb{N}$。对于每个满足 $n \in \mathbb{N}$ 的 $k_n - 1 > k$，我们称间隙 $G_{t\hat{}0^{(k_n-1-k)}}$ 来自 l（I_t），称间隙 $G_{t\hat{}1^{(k_n-1-k)}}$ 来自 r（I_t）。如果 $k+1 \in K$，则称间隙来自 G_t

如果它来自 $l(G_t) = r(I_{t^\frown 0})$，或来自 $r(G_t) = l(I_{t^\frown 1})$。如果对于某个 $n \in \mathbb{N}$ 和 $m_n > 0$ 有 $|t| = k_n - 1$，那么间隙 $G_{t^\frown t_{k_n-1}{}^\frown s}$（其中 $s \in \{0,1\}^{<m_n-1}$）被称为 G_t 的相邻间隙。

对于 $n \in \mathbb{N}$，令

$$\mathcal{L}_n = \begin{cases} \{G_{0^{(k_n-1)}}\} & \text{if } m_n = 1 \\ \{G_{0^{(k_n-1)}}, G_{0^{(k_n)}}\} & \text{if } m_n = 2 \\ \{G_{0^{(k_n-1)}}, G_{0^{(k_n)}}\} \cup \{G_{0^{(k_n)}\wedge s} : |s| \le m_n - 2\} & \text{if } m_n \ge 3 \end{cases}$$

and

$$\mathcal{R}_n = \begin{cases} \{G_{1^{(k_n-1)}}\} & \text{if } m_n = 1 \\ \{G_{1^{(k_n-1)}}, G_{1^{(k_n)}}\} & \text{if } m_n = 2\,. \\ \{G_{1^{(k_n-1)}}, G_{1^{(k_n)}}\} \cup \{G_{1^{(k_n)}\wedge s} : |s| \le m_n - 2\} & \text{if } m_n \ge 3 \end{cases}$$

因此，$\mathcal{L}_n$ 由来自 0、阶为 k_n 的间隙及其所有邻接空隙组成，而 $\mathcal{R}_n$ 由来自 0、阶为 k_n 的间隙及其所有邻接空隙组成。

现在我们将归纳定义间隙族 $(\mathcal{G}_i)$。假设 $k_1 > 1$。$\mathcal{G}_1$ 由来自 0 和 1、阶为 k_1 的间隙及其所有邻接空隙组成，即 $\mathcal{G}_1 := \mathcal{L}_1 \cup \mathcal{R}_1$。

图 1 展示了当 $m_1 = 3$ 时的集合 $I \setminus \bigcup \mathcal{G}_1$。字母分别对应以下间隙：$A = G_{0^{(k_1+1)}}$、$B = G_{0^{(k_1)}}$、$C = G_{0^{(k_1)^\frown 1}}$、$D = G_{0^{(k_1-1)}}$、$E = G_{1^{(k_1-1)}}$、$F = G_{1^{(k_1)^\frown 0}}$、$G = G_{1^{(k_1)}}$、$H = G_{1^{(k_1+1)}}$。我们有 $\mathcal{L}_1 = \{A, B, C, D\}$ 和 $\mathcal{R}_1 = \{E, F, G, H\}$。间隙 D 来自 0，而 E 来自 1。间隙 A, B, C 是 D 的邻接空隙，而 F, G, H 是 E 的邻接空隙。



图 1

假设对于某个 $n \in \mathbb{N}$，我们已经定义了一个间隙族 $\mathcal{G}_n$。在族 $\mathcal{G}_{n+1}$ 中，包含所有由阶为 $\bigcup_{i=1}^n \mathcal{G}_i$ 的间隙或由 0、1 及其相邻间隙产生的阶为 k_{n+1} 的间隙。形式化地，

$$\mathcal{G}_{n+1} = \mathcal{L}_{n+1} \cup \mathcal{R}_{n+1} \cup \bigcup_{\substack{P \in \bigcup_{i=1}^n \mathcal{G}_i \\ L \in \mathcal{L}_{n+1}}} (L + \max P) \cup \bigcup_{\substack{P \in \bigcup_{i=1}^n \mathcal{G}_i \\ R \in \mathcal{R}_{n+1}}} (R + \min P - r_0).$$

令 $\mathcal{G} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{G}_n$。

对于区间 I, J，我们记 $I < J$，如果 $r(I) < l(J)$。令 $\mathcal{H}$ 为一个间隙族。如果不存在间隙 $J \in \mathcal{H}$ 使得 $G < J < H$，则称间隙 $G < H$ 是 $\mathcal{H}$ 中的连续间隙。

在证明主定理之前，我们先集中列出证明过程中经常使用的性质。它们可直接由区间 I_t, G_t 和 Z_t 的定义推出。

引理 2.1. 设 (a_n) 是定义 *1* 中的一个序列。设 $k \in \mathbb{N}$、$t \in \{0,1\}^k$、$m \in \mathbb{N}$ 和 $j \in \mathbb{N}$ 满足 $k + j \in K$。那么

(i) *If* $k + 1 \in K$, *then* $l(G_t) = r(I_{t^\frown 0})$, $r(G_t) = l(I_{t^\frown 1})$.

(ii) 若 $k+1 \notin K$，则 $l(Z_t) = l(I_{t^\frown 1})$，$r(Z_t) = r(I_{t^\frown 0})$。(iii) $l(I_{t^\frown 0^{(m)}}) = l(I_t)$，$r(I_{t^\frown 1^{(m)}}) = r(I_t)$。(iv) $r(G_{t^\frown 0^{(j-1)}}) - l(I_t) = a_{k+j}$，$l(G_{t^\frown 0^{(j-1)}}) - l(I_t) = r_{k+j}$，$r(I_t) - l(G_{t^\frown 1^{(j-1)}}) = a_{k+j}$，$r(I_t) - r(G_{t^\frown 1^{(j-1)}}) = r_{k+j}$.

3. 主要结果

在表述主要结果之前，我们先介绍一个过程。

定义2. 星形过程 设 (a_n) 是定义 1 中的序列。对于 $i \notin K$，令 $\delta_i = r_i - a_i$。对于 $i < k_1 - 1$，令 $M_i^1 := \delta_i$。假设对于某个 $n \in \mathbb{N}$，我们已定义了一个由正数组成的有限序列 $(M_i^n)_i$。考虑以下依赖于数 M_i^n 和 δ_{k_n-1} 的条件:

$$(*)\ \begin{cases} M_i^n - a_{k_n} > 0 \\ r_{k_n} + r_{k_n+m_n-1} - M_i^n > 0 \\ \forall_{j\in\{1,\dots,m_n-1\}}\ M_i^n - 2a_{k_n+j} - \sum_{l=1}^{j-1} a_{k_n+l} > 0; \end{cases}$$

$$(**)\ M_i^n - 2a_{k_n} > 0;$$

$$(*')\ \begin{cases} \delta_{k_n-1} - \sum_{j=1}^{m_n-1} a_{k_n+j} > 0 \\ \forall_{j\in\{1,\dots,m_n-1\}}\ 2r_{k_n+j} - \delta_{k_n-1} + \sum_{i=1}^{j-1} a_{k_n+i} > 0. \end{cases}$$

如果对于每个数 M_i^n，条件 $(*)$ 或 $(**)$ 至少有一个成立，并且 $(*')$ 也成立，那么我们继续该过程，定义一个由正数组成的有限序列 (M_i^{n+1})，其元素由条件 $(*)$、$(*')$ 或 $(**)$ 中所有成立的不等式的左端以及所有满足$k_n + m_n \le i < k_{n+1} - 1$的数 δ_i 组成。否则，该过程终止。

现在，我们可以证明本文的主要结果了。

定理 3.1. 设(a_n) 是定义 *1* 中的一个序列。若对每个 $n \in \mathbb{N}$，都可以按照星形过程定义正数(M_i^n)（即星形过程永不停止），那么 $E(a_n)$ 是一个 *Cantorval*。

证明。 首先，对于每个重叠 Z_t，我们将定义一族间隙 Z_t^*。假设 $n \in \mathbb{N}$,$t \in \{0,1\}^k$，其中 $k_{n-1} + m_{n-1} - 1 \le k \le k_n - 3$ 或 $k = k_{n-1} - 2$，且 $m_{n-1} = 1$。我们称 Z_t 为第一类重叠。在 Z_t^* 中，间隙来自 $l(Z_t) = l(I_{t^\frown 1})$ 和 $r(Z_t) = r(I_{t^\frown 0})$ 及其相邻间隙。形式化地，$G_{t^\frown(1-j)^\frown j^{(k_n-k-2)}} \in Z_t^*$，对 $j \in \{0,1\}$。若 $m_n > 1$，则还有$G_{t^\frown(1-j)^\frown j^{(k_n-k-1)^\frown s}} \in Z_t^*$，对 $j \in \{0,1\}$ 和 $s \in \{0,1\}^{<m_n-1}$。

现在，假设 $m_n > 1$ 和 $t \in \{0,1\}^{k_n-2}$。我们称 Z_t 为第二类重叠。于是，对于 $j \in \{0,1\}$ 和 $s \in \{0,1\}^{<m_n-1}$，有$G_{t^\frown(1-j)^\frown j^\frown s} \in Z_t^*$。

假设我们已定义了属于 Z_t^* 且阶不超过 $k_j + m_j - 1$ 的所有间隙（任意类型）。那么， Z_t^* 中还包括阶为 k_{j+1} 的所有间隙（及其相邻间隙），它们来自 l（Z_t）、 r（Z_t），或来自 Z_t^* 中阶不超过 $k_j + m_j - 1$的任意间隙。

设 $k \notin K$和 $t \in \{0,1\}^k$。我们将证明，若 $G, H \in Z_t^*,$，则 $G, H \subset Z_t$和 $G \cap H = \emptyset$。注意到 $|Z_t| = r_k - a_k = \delta_k$。若 Z_t 属于第一类，则根据假设，条件（$*$）或（$**$）对 δ_k 成立；若 Z_t 属于第二类，则条件（$*'$）对 δ_k成立。下面考虑各种情形。

情况 1. δ_k 满足（$*$）。我们将说明，间隙的排列如图 2 所示（对于 $m_n = 3$），其中呈现了重叠 Z_t 以及连续间隙之间的距离（或 Z_t 的端点与最近的

间隙之间的距离）等于序列（M_i^{n+1}）中的数值。这些字母对应以下间隙：$A = G_{t^\frown 0^\frown 1^{(k_n-k-2)}}$, $B = G_{t^\frown 1^\frown 0^{(k_n-k)}}$, $C = G_{t^\frown 0^\frown 1^{(k_n-k-1)^\frown 0}}$, $D = G_{t^\frown 1^\frown 0^{(k_n-k-1)}}$, $E = G_{t^\frown 0^\frown 1^{(k_n-k-1)}}$, $F = G_{t^\frown 1^\frown 0^{(k_n-k-1)^\frown 1}}$, $G = G_{t^\frown 0^\frown 1^{(k_n-k)}}$, $H = G_{t^\frown 1^\frown 0^{(k_n-k-2)}}$。

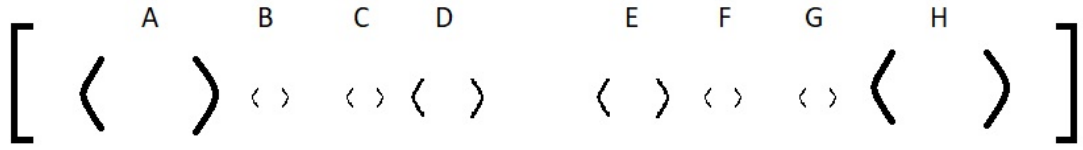

图 2

我们有 $G_{t^\frown 1^\frown 0^{(k_n-k-2)}} \subset J_{t^\frown 1}$，因此 $l(G_{t^\frown 1^\frown 0^{(k_n-k-2)}}) > l(I_{t^\frown 1}) = l(Z_t)$。此外，由引理 2.1，

$$r(Z_t) - r(G_{t^\frown 1^\frown 0^{(k_n-k-2)}}) = r(Z_t) - l(Z_t) - (r(G_{t^\frown 1^\frown 0^{(k_n-k-2)}}) - l(I_{t^\frown 1})) = |Z_t| - a_{k_n} = \delta_k - a_{k_n} > 0,$$

因此 $G_{t^\frown 1^\frown 0^{(k_n-k-2)}} \subset Z_t$。类似地，$G_{t^\frown 0^\frown 1^{(k_n-k-2)}} \subset Z_t$。根据（$*$），我们还有

$$l(G_{t^\frown 1^\frown 0^{(k_n-k-2)}}) - r(G_{t^\frown 0^\frown 1^{(k_n-k-2)}}) = l(Z_t) + r_{k_n} - (r(Z_t) - r_{k_n}) = 2r_{k_n} - |Z_t| = 2r_{k_n} - \delta_k \geq r_{k_n} + r_{k_n+m_n-1} - \delta_k > 0.$$

所以，$G_{t^\frown 1^\frown 0^{(k_n-k-2)}} \cap G_{t^\frown 0^\frown 1^{(k_n-k-2)}} = \emptyset$。

特别地，$G_{t^\frown 0^\frown 1^{(k_n-k-2)}} \subset I_{t^\frown 1^\frown 0^{(k_n-k-1)}}$ 和 $G_{t^\frown 1^\frown 0^{(k_n-k-2)}} \subset I_{t^\frown 0^\frown 1^{(k_n-k-1)}}$。

若 $m_n > 1$，则间隙 $G_{t^\frown 0^\frown 1^{(k_n-k-1)}}$，$G_{t^\frown 1^\frown 0^{(k_n-k-1)}} \in Z_t^*$。由（$*$）可得，

$$l(G_{t^\frown 1^\frown 0^{(k_n-k-1)}}) - r(G_{t^\frown 0^\frown 1^{(k_n-k-2)}}) = l(Z_t) + r_{k_n+1} - (r(Z_t) - r_{k_n}) = -|Z_t| + r_{k_n} + r_{k_n+1} = -\delta_k + r_{k_n} + r_{k_n+1}$$
$$\geq -\delta_k + r_{k_n} + r_{k_n+m_n-1} > 0.$$

类似地，

$$l(G_{t^\frown 1^\frown 0^{(k_n-k-2)}}) - r(G_{t^\frown 0^\frown 1^{(k_n-k-1)}}) = -\delta_k + r_{k_n} + r_{k_n+1} > 0.$$

此外，

$$l(G_{t^\frown 0^\frown 1^{(k_n-k-1)}}) - r(G_{t^\frown 1^\frown 0^{(k_n-k-1)}}) = r(Z_t) - a_{k_n+1} - (l(Z_t) + a_{k_n+1}) = |Z_t| - 2a_{k_n+1} = \delta_k - 2a_{k_n+1} > 0.$$

因此，

$$G_{t^\frown 0^\frown 1^{(k_n-k-2)}} < G_{t^\frown 1^\frown 0^{(k_n-k-1)}} < G_{t^\frown 0^\frown 1^{(k_n-k-1)}} < G_{t^\frown 1^\frown 0^{(k_n-k-2)}}.$$

特别地，$G_{t^\frown 0^\frown 1^{(k_n-k-1)}} \subset I_{t^\frown 1^\frown 0^{(k_n-k-1)^\frown 1}}$ 和 $G_{t^\frown 1^\frown 0^{(k_n-k-1)}} \subset I_{t^\frown 0^\frown 1^{(k_n-k-1)^\frown 0}}$。

假设 G，H，G_v，$G_w \in Z_t^*$，其中对于 $0 \leq i \leq m_n - 3$，$|v| = |w| = k_n + i$ 满足：$G < G_v < G_w < H$ 是来自 Z_t^* 的阶至多为 $k_n + i + 1$ 的连续间隙，$l(G_v) - r(G) = l(H) - r(G_w) = -\delta_k + r_{k_n} + r_{k_n+i+1}$，以及 $l(G_w) - r(G_v) = \delta_k - 2a_{k_n+i+1} - \sum_{l=1}^{i} a_{k_n+l}$。再次利用（$*$），可得

$$l(G_{v^\frown 0}) - r(G) = l(G_v) - a_{k_n+i+2} - r(G) = -\delta_k + r_{k_n} + r_{k_n+i+1} - a_{k_n+i+2} = -\delta_k + r_{k_n} + r_{k_n+i+2}$$
$$\geq -\delta_k + r_{k_n} + r_{k_n+m_n-1} > 0.$$

类似地，

$$l(G_v) - r(G_{w^\frown 0}) = l(G_{v^\frown 1}) - r(G_w) = l(H) - r(G_{w^\frown 1}) = -\delta_k + r_{k_n} + r_{k_n+i+2} > 0.$$

此外，

$$l(G_w) - r(G) = l(G_w) - r(G_v) + r(G_v) - l(G_v) + l(G_v) - r(G)$$

$$= \delta_k - 2a_{k_n+i+1} - \sum_{l=1}^{i} a_{k_n+l} + a_{k_n+i+1} - r_{k_n+i+1} - \delta_k + r_{k_n} + r_{k_n+i+1} = r_{k_n} - \sum_{l=1}^{i+1} a_{k_n+l} = r_{k_n+i+1},$$

so $r(G) = l(I_{w\hat{}0})$. Therefore,

$$l(G_{w\hat{}0}) - r(G_{v\hat{}0}) = r(G) + r_{k_n+i+2} - (l(G_v) - r_{k_n+i+2}) = \delta_k - r_{k_n} - r_{k_n+i+1} + 2r_{k_n+i+2} = \delta_k - 2a_{k_n+i+2} - \sum_{l=1}^{i+1} a_{k_n+l} > 0.$$

同样,

$$l(G_{w\hat{}1}) - r(G_{v\hat{}1}) = \delta_k - 2a_{k_n+i+2} - \sum_{l=1}^{i+1} a_{k_n+l} > 0.$$

最后，我们得到， $G < G_{v\hat{}0} < G_{w\hat{}0} < G_v$ 和 $G_w < G_{v\hat{}1} < G_{w\hat{}1} < H$ 是 Z_t^*中阶不超过 $k_n + i + 2$的连续间隙。特别地， $G_{v\hat{}0} \subset I_{w\hat{}0\hat{}0}$、 $G_{w\hat{}0} \subset I_{v\hat{}0\hat{}1}$、 $G_{v\hat{}1} \subset I_{w\hat{}1\hat{}0}$和$G_{w\hat{}1} \subset I_{w\hat{}1\hat{}1}$。根据归纳法， Z_t^*中阶不超过 $k_n + m_n - 1$ 的所有间隙均互不相交，并且包含于Z_t中；每个这样的间隙都包含于某个区间 I_s 中，其中 $s \in \{0,1\}^{k_n+m_n-1}$。此外，它们之间的距离（以及 Z_t 的端点与离它们最近的间隙之间的距离）等于序列 (M_i^{n+1}) 中的数。

情形 2. δ_k 满足（$**$）。我们将证明，间隙的排列如图 3 所示（对于 $m_n = 3$），其中呈现了重叠 Z_t，且间隙 G 与 H 之间的距离是数值 M_i^{n+1} 之一（间隙之间的其他区间，或 Z_t 的端点与最近间隙之间的区间，都是某些区间 I_v，对于 $v \in \{0,1\}^{k_n+m_n-1}$）。这些字母分别对应以下间隙:
$A = G_{t\hat{}1\hat{}0^{(k_n-k)}}$、 $B = G_{t\hat{}1\hat{}0^{(k_n-k-1)}}$、 $C = G_{t\hat{}1\hat{}0^{(k_n-k)\hat{}}1}$、 $D = G_{t\hat{}1\hat{}0^{(k_n-k-2)}}$、
$E = G_{t\hat{}0\hat{}1^{(k_n-k-2)}}$、 $F = G_{t\hat{}0\hat{}1^{(k_n-k)\hat{}}0}$、 $G = G_{t\hat{}0\hat{}1^{(k_n-k-1)}}$、 $H = G_{t\hat{}0\hat{}1^{(k_n-k)}}$。



图 3

与情况 1 类似，我们有 $l(G_{t\hat{}1\hat{}0^{(k_n-k-2)}}) > l(I_{t\hat{}1}) = l(Z_t)$ 和 $r(G_{t\hat{}0\hat{}1^{(k_n-k-2)}}) < r(I_{t\hat{}0}) = r(Z_t)$。

由 $(**)$，我们还有:

$$l(G_{t\hat{}0\hat{}1^{(k_n-k-2)}}) - r(G_{t\hat{}1\hat{}0^{(k_n-k-2)}}) = r(Z_t) - a_{k_n} - (l(Z_t) + a_{k_n}) = \delta_k - 2a_{k_n} > 0.$$

Z_t^* 中所有其他阶不超过 $k_n + m_n - 1$ 的间隙都包含在 $I_{t\hat{}0\hat{}1^{(k_n-k-1)}}$ 或 $I_{t\hat{}1\hat{}0^{(k_n-k-1)}}$ 中，并且根据上述计算，这些区间两两不相交。因此， Z_t^* 中所有阶不超过 $k_n + m_n - 1$ 的间隙两两不相交，且包含在 Z_t 中。此外，间隙 $G_{t\hat{}1\hat{}0^{(k_n-k-2)}}$ 和 $G_{t\hat{}0\hat{}1^{(k_n-k-2)}}$ 之间的距离是序列 (M_i^{n+1}) 中的一个数。

情形 3. δ_k 满足 $(*')$。我们将证明，间隙的排列如图 4 所示（对于 $m_n = 4$），其中呈现了重叠 Z_t，且连续间隙之间（或 Z_t 的端点与最近间隙之间）的距离等于序列 (M_i^{n+1}) 中的数。字母对应以下间隙: $A = G_{t\hat{}0\hat{}1\hat{}0\hat{}0}$, $B = G_{t\hat{}1\hat{}0\hat{}0\hat{}0}$, $C = G_{t\hat{}0\hat{}1\hat{}0}$, $D = G_{t\hat{}1\hat{}0\hat{}0}$, $E = G_{t\hat{}0\hat{}1\hat{}0\hat{}1}$,
$F = G_{t\hat{}1\hat{}0\hat{}0\hat{}1}$,

$G = G_{t\hat{}0\hat{}1}$, $H = G_{t\hat{}1\hat{}0}$, $J = G_{t\hat{}0\hat{}1\hat{}1\hat{}0}$, $K = G_{t\hat{}1\hat{}0\hat{}1\hat{}0}$, $L = G_{t\hat{}0\hat{}1\hat{}1}$, $M = G_{t\hat{}1\hat{}0\hat{}1}$, $N = G_{t\hat{}0\hat{}1\hat{}1\hat{}1}$, $O = G_{t\hat{}1\hat{}0\hat{}1\hat{}1}$.



图 4

我们有 $G_{t\hat{}1\hat{}0} \subset J_{t\hat{}1}$，因此 $l(G_{t\hat{}1\hat{}0}) > l(J_{t\hat{}1}) = l(Z_t)$。此外，

$$r(Z_t) - r(G_{t\hat{}1\hat{}0}) = r(Z_t) - (l(Z_t) + a_{k_n+1}) = |Z_t| - a_{k_n+1} = \delta_k - a_{k_n+1} > 0,$$

因此 $G_{t\hat{}1\hat{}0} \subset Z_t$。类似地， $G_{t\hat{}0\hat{}1} \subset Z_t$。根据 $(*')$，我们还有

$$l(G_{t\hat{}1\hat{}0}) \text{ 0。 } r(G_{t\hat{}0\hat{}1}) = l(Z_t) + r_{k_n+1} - (r(Z_t) - r_{k_n+1}) = 2r_{k_n+1} - |Z_t| = 2r_{k_n+1} - \delta_k >$$

所以， $G_{t\hat{}1\hat{}0} \cap G_{t\hat{}0\hat{}1} = \emptyset$。特别地， $G_{t\hat{}1\hat{}0} \subset I_{t\hat{}0\hat{}1\hat{}1}$ 和 $G_{t\hat{}0\hat{}1} \subset I_{t\hat{}1\hat{}0\hat{}0}$.

假设 G_v， $G_w \in Z_t^*$，其中 $|v| = |w| = k_n + i$ 对于 $0 \le i \le m_n - 3$ 满足 $G_v < G_w$，则区间 $[l(I_w)$ $l(G_v)]$， $[r(G_v)$ $l(G_w)]$， $[r(G_w)$ $r(I_v)]$，$l(G_v) - l(I_w) = r(I_v) - r(G_w) = \delta_k - \sum_{j=1}^{i+1} a_{k_n+j}$ 以及 $l(G_w)$ $- r(G_v) = 2r_{k_n+i+1} - \delta_k + \sum_{l=1}^{i} a_{k_n+l}$中不存在阶不超过 $k_n + i + 1$、来自 Z_t^*的间隙。

利用（$*'$），得到

$$l(G_{v\hat{}0}) - l(I_w) = l(G_v) - a_{k_n+i+2} - l(I_w) = \delta_k - \sum_{j=1}^{i+1} a_{k_n+j} - a_{k_n+i+2} = \delta_k - \sum_{j=1}^{i+2} a_{k_n+j} \ge \delta_k - \sum_{j=1}^{m_n-1} a_{k_n+j} > 0.$$

类似地，

$$l(G_v) - r(G_{w\hat{}0}) = l(G_{v\hat{}1}) - r(G_w) = r(I_v) - r(G_{w\hat{}1}) = \delta_k - \sum_{j=1}^{i+2} a_{k_n+j} > 0.$$

此外，

$$l(G_{w\hat{}0}) - r(G_{v\hat{}0}) = l(I_w) + r_{k_n+i+2} - (l(G_v) - r_{k_n+i+2}) = -\delta_k + \sum_{j=1}^{i+1} a_{k_n+j} + 2r_{k_n+i+2}.$$

同理，

$$l(G_{w\hat{}1}) - r(G_{v\hat{}1}) = -\delta_k + \sum_{j=1}^{i+1} a_{k_n+j} + 2r_{k_n+i+2} > 0.$$

最后，我们得到 $l(I_w) < G_{v\hat{}0} < G_{w\hat{}0} < G_v$ 和 $G_w < G_{v\hat{}1} < G_{w\hat{}1} < r(I_v)$，并且它们之间在 Z_t^*中不存在阶不超过 $k_n + i + 2$的间隙。特别地， $G_{v\hat{}0} \subset I_{w\hat{}0\hat{}0}$、 $G_{w\hat{}0} \subset I_{v\hat{}0\hat{}1}$、 $G_{v\hat{}1} \subset I_{w\hat{}1\hat{}0}$ 和 $G_{w\hat{}1} \subset I_{v\hat{}1\hat{}1}$。根据归纳法， Z_t^* 中所有阶不超过 $k_n + m_n - 1$的间隙两两不相交，且包含于 Z_t 中，并且每个这样的间隙都包含于某个区间 I_s 中，其中$s \in \{0,1\}^{k_n+m_n-1}$。此外，它们之间的距离（以及 Z_t 的端点与离其最近的间隙之间的距离）等于序列（M_i^{n+1}）中的数。

现在，假设对于某个 $j \in \mathbb{N}$， Z_t^*中阶不超过 $k_j + m_j - 1$ 的所有间隙两两不相交，且包含在 Z_t 中，并且它们之间的距离（以及 Z_t 的端点与最近的

与它们相邻的间隙之间的距离）等于序列 (M_i^{j+1}) 中的数值。由于所有数值 M_i^{j+1} 都满足 $(*)$ 或 $(**)$，因此我们可以重复情况 1 或情形 2 中的推理，证明 Z_t^* 中阶不超过 $k_{j+1}+m_{j+1}-1$ 的所有间隙两两不相交，且包含在 Z_t中。根据归纳法，Z_t^*中的所有间隙两两不相交，且包含在 Z_t中。

现在，我们将通过归纳法证明，每个间隙 G 要么属于 $\mathcal{G}$，要么存在 t 使得$G \in Z_t^*$。

设 $s \in \{0,1\}^{k_1-1}$。若对于所有 i，$s_i = 0$ 或 $s_i = 1$，则 G_s 来自 0 或 1，因此 $G_s \in \mathcal{G}$。若情况并非如此，则存在 $N < k_1 - 1$ 使得对于 $i > N$，$s_N \neq s_i$。于是 G_s 来自$l(I_{s|(N-1)^\frown 1}) = l(Z_{s|(N-1)})$，或来自 $r(I_{s|(N-1)^\frown 0}) = r(Z_{s|(N-1)})$，因此 $G_s \in Z^*_{s|(N-1)^\circ}$

现在，若 $m_1 > 1$，则对 $i \in \{0,\dots,m_1-2\}$令 $s \in \{0,1\}^{k_1+i}$。若 $s_{k_1} = s_{k_1-1}$，则 G_s是 $G_{s|k_1-1}$的邻接空隙。我们已经证明，对于某个 t，$G_{s|k_1-1} \in \mathcal{G}$ 或 $G_{s|k_1-1} \in Z_t^*$。因此，若 $G_{s|k_1-1} \in \mathcal{G}$，则 $G_s \in \mathcal{G}$ 也成立；若 $G_{s|k_1-1} \in Z_t^*$，则 $G_s \in Z_t^*$也成立。若 $s_{k_1} \neq s_{k_1-1}$，则根据第二类重叠的定义，我们有 $G_s \in Z^*_{s|(k_1-2)}$。

现在，假设所有阶不超过 $k_n + m_n - 1$ 的间隙要么属于 $\mathcal{G}$，要么属于某个 Z_t^*。令 $s \in \{0,1\}^{k_{n+1}-1}$。如果对所有 i，$s_i = 0$ 或 $s_i = 1$，那么 G_s 来自 0 或 1，因此 $G_s \in \mathcal{G}$。若情况并非如此，则存在 $N < k_{n+1} - 1$，使得对 $i > N$，$s_N \neq S_i$。如果 $N \notin K$，那么 G_s 来自 l（$Z_{s|(N-1)}$）或 r（$Z_{s|(N-1)}$），因此 $G_s \in Z^*_{s|(N-1)^\circ}$ 如果 $N \in K$，那么 G_s 是一个来自 $G_{s|(N-1)}$ 的间隙，而 $G_{s|(N-1)}$ 是一个阶不超过 $k_n + m_n - 1$ 的间隙。如果 $G_{s|(N-1)} \in \mathcal{G}$，那么 $G_s \in \mathcal{G}$ 也成立；并且如果对某个 t，$G_{s|(N-1)} \in Z_t^*$，那么 $G_s \in Z_t^*$ 也成立。

现在，若 $m_{n+1} > 1$，则令 $s \in \{0,1\}^{k_{n+1}+i}$ for $i \in \{0,\dots,m_{n+1}-2\}$。若 $s_{k_{n+1}} = s_{k_{n+1}-1}$，则 G_s 是 $G_{s|k_{n+1}-1}$的邻接空隙。我们已经证明，$G_{s|k_{n+1}-1} \in \mathcal{G}$ 或 $G_{s|k_{n+1}-1} \in Z_t^*$ for 某个 t。因此，若 $G_{s|k_{n+1}-1} \in \mathcal{G}$，则 $G_s \in \mathcal{G}$ 也成立；若 $G_{s|k_{n+1}-1} \in Z_t^*$，则 $G_s \in Z_t^*$也成立。若 $s_{k_{n+1}} \neq s_{k_{n+1}-1}$，则根据第二类重叠的定义，有 $G_s \in Z^*_{s|(k_{n+1}-2)}$。

通过归纳法，我们得到每个间隙 G_s（其中 $|s|+1 \in K$）要么属于 $\mathcal{G}$，要么属于 Z_t^*，其中某个t。

现在我们将通过归纳法证明：对于每个 $x \in I \setminus \bigcup \mathcal{G}$ 和每个 $n \in \mathbb{N}$，存在 $t \in \{0,1\}^{k_n+m_n-1}$，使得 $x \in I_{t.}$。令 $x \in I \setminus \bigcup \mathcal{G}$。假设对于任意 $p \in \{0,1\}^{k_1+m_1-1}$，都有 $x \notin I_p$。于是，对于某个 $s \in \{0,1\}^{<k_1+m_1-1}$，有 $x \in G_s$。由于 $x \notin \bigcup \mathcal{G}$，我们有 $G_s \notin \mathcal{G}$，因此，对于某个 t，有 $G_s \in Z_t^*$。根据假设，$\delta_{|t|+1}$ 满足 $(*)$、$(**)$ 或 $(*')$。若 $\delta_{|t|+1}$ 满足 $(*)$ 或 $(*')$，则我们已证明，对于某个 $w \in \{0,1\}^{k_1+m_1-1}$，有 $G_s \subset I_w$，这与假设矛盾。因此，假设 $\delta_{|t|+1}$ 满足 $(**)$。由于 $G_s \subset Z_t$，我们有 $G_s \subset I_{t^\frown(1-j)}$，其中 $j = s_{|t|+1}$。由于对于任意 $p \in \{0,1\}^{k_1+m_1-1}$，都有 $x \notin I_p$，因此 $x \in G_w$，其中 $t^\frown(1-j) \prec w$。我们知道 G_s 与 $G_{t^\frown(1-j)^\frown j^{(k_1-2-|t|)}}$ 不相交。不失一般性，假设 $j = 1$。我们有 $r(G_{t^\frown 0^{(k_1-1-|t|)}}) = l(I_t) + a_{k_1} < l(I_t) + a_{|t|+1} \leq l(Z_t)$，因此 $G_{t^\frown 0^{(k_1-1-|t|)}} \cap G_s = \emptyset$。由于不可能有 $G_w \in \mathcal{G}$，存在 v，使得 $G_w \in Z_v^*$。我们还有 $G_w \neq G_{t^\frown 0^{(k_1-1-|t|)}}$ 和 $G_w \neq G_{t^\frown 0^\frown 1^{(k_1-2-|t|)}}$（而且它也与这些间隙的相邻间隙不相交）。因此，$t^\frown 0 \prec v$，于是 $|v| > |t|$。若 $|Z_v|$ 满足 $(*)$ 或 $(*')$，则与前面类似，我们会得到矛盾。否则，我们重复上述推理，证明 x 位于一个间隙中，该间隙属于满足 $|u| > |v|$ 的 Z_u^*。有限次重复这一推理后，我们将得到 x 位于一个间隙中，该间隙属于满足 $(*)$ 或 $(*')$ 的 Z_q^*（因为最终 $|q| = k_1 - 2$，因此 $|Z_q| = \delta_{k_1-1}$ 满足 $(*')$）。于是，对于某个 $p \in \{0,1\}^{k_1+m_1-1}$，有 $x \in I_p$。

现在，假设对于某个 $n \in \mathbb{N}$ 和某个 $p \in \{0,1\}^{k_n+m_n-1}$，有 $x \in I_p$。设对于任意 $q \in \{0,1\}^{k_{n+1}+m_{n+1}-1}$，都有 $x \notin I_q$。于是，对于某个满足 $p \prec s$ 的 $s \in \{0,1\}^{<k_{n+1}+m_{n+1}-1}$，有 $x \in G_s$。若 G_s 不是由 $l(I_p)$ 或 $r(I_p)$ 得到的间隙，也不是它们的相邻间隙，则存在 w 和 $|w| \geq k_n + m_n - 1$，使得 $G_s \in Z_w^*$。重复上述推理，我们得到对于某个 $q \in \{0,1\}^{k_{n+1}+m_{n+1}-1}$，有 $x \in I_q$。现在，不失一般性，假设 G_s 是由 $l(I_p)$ 得到的间隙（或该间隙的相邻间隙）。由于 $G_s \notin \mathcal{G}$，我们有 $l(I_p) \neq 0$。因此，$N = \max\{i\colon\ p_i = 1\} > 0$。若 $N \in K$，则 $l(I_p)$ 是某个间隙 G_w 的端点，而该间隙属于某个 Z_v^*。若 $N \notin K$，则 $l(I_p) = l(Z_v)$，其中 $v = p|(N-1)$。两种情形下都有 $G_s \in Z_v^*$。由于 Z_v^* 中的所有间隙互不相交，我们有 G_s 位于 Z_v^* 中阶不超过 $k_n + m_n - 1$ 的间隙之间的某个区间 J 内（或位于 Z_v 的端点与 Z_v^* 中某个间隙之间）。我们已经证明，要么 $|J| = M_i^{n+1}$（在情况 1、情形 3 以及有时在情形 2 中），要么 $J = I_p$（在情形 2 中，若 J 所在的两个间隙是同一间隙的相邻间隙）。若 $|J| = M_i^{n+1}$，则该数满足 $(*)$ 或 $(**)$；与前面类似地推理，可得对于某个 $q \in \{0,1\}^{k_{n+1}+m_{n+1}-1}$，有 $x \in I_q$。若 $J = I_p$，则包含 G_w 的区间（重叠）的长度满足 $(**)$（或者 $|Z_v^*|$ 满足 $(**)$）。但再次重复上述推理，可得对于某个 $q \in \{0,1\}^{k_{n+1}+m_{n+1}-1}$，有 $x \in I_q$。

因此，对于任意 $n \in \mathbb{N}$，我们都有 $I \setminus \bigcup \mathcal{G} \subset \bigcup_{t \in \{0,1\}^{k_n+m_n-1}}$，从而 $I \setminus \bigcup \mathcal{G} \subset E(a_n)$。所以，$E(a_n)$ 是一个 Cantorval。

□

4. 示例与应用

在本节中，我们将展示如何利用定理 3.1 构造新的 Cantorval。在这一背景下，一类特别有趣的序列是多重几何序列。对于任意 $m \in \mathbb{N}$、$q \in (0,\ 1)$，$k_1,\ k_2,\ \ldots\ldots,\ k_m \in \mathbb{R}$。序列 $(k_1 q,\ k_2 q,\ \ldots\ldots,\ k_m q,\ k_1 q^2,\ k_2 q^2,\ \ldots\ldots,\ k_m q^2,\ \ldots\ldots)$ 被称为多重几何序列，记作 $(k_1,\ k_2,\ \ldots\ldots,\ k_m;\ q)$。我们先从下面的例子开始。

例 3. 考虑集合 $E(1, 2\sqrt{2}-2; \bar{q})$，其中 $\bar{q} = \frac{2-\sqrt{2}}{2}$。我们将证明该集合是一个 Cantorval。首先，注意到 $k_n = 2n$。事实上，

$$r_2 - a_2 = q((2\sqrt{2}-1) \cdot \frac{q}{1-q} - 2\sqrt{2} + 2) \approx -0,07q < 0,$$

因此 $r_2 < a_2$。此外，$r_{2n} = r_2 \cdot q^{n-1}$ 且 $a_{2n} = a_2 \cdot q^{n-1}$，所以对于 $n \in \mathbb{N}$，$r_{2n} < a_{2n}$。另一方面，$r_1 - a_1 = q((2\sqrt{2}-1) \cdot \frac{q}{1-q} + 2\sqrt{2} - 2 - 1) \approx 0,59q > 0$，所以 $r_1 > a_1$。此外，$r_{2n-1} = r_1 \cdot q^{n-1}$ 且 $a_{2n-1} = a_1 \cdot q^{n-1}$，所以对于 $n \in \mathbb{N}$，$r_{2n-1} > a_{2n-1}$。

我们将证明定理 3.1 的假设均得到满足。设 $n \in \mathbb{N}$。如果 $n = 1$，那么不存在 $i \notin K$，$i < k_1 - 1 = 1$，因此不存在 M_1^1 and $\delta_1 > 0$，所以 $(*')$ 得到满足。如果 $n > 1$，那么

$\delta_{2n-3} - 2a_{2n} = r_{2n-3} - a_{2n-3} - 2a_{2n} = r_1 \cdot q^{n-2} - a_1 q^{n-2} - 2a_2 q \cdot q^{n-2} = q^{n-2} \cdot (r_1 - a_1 - 2a_2 q) \approx 0$，$1q^{n-1} > 0$，因此它满足 $(**)$。

现在，如果 $n > 2$，那么对于 $M = \delta_{2n-5} - 2a_{2n-2}$，我们有

$$M - a_{2n} = q^{n-3}(r_1 - a_1 - 2a_2 q - a_2 q^2) \approx 0,03q^{n-2} > 0.$$

经过计算，我们还得到

$$2r_{2n} - M = M - a_{2n} > 0.$$

因此，条件（$*$）成立。如果 $n > 3$，那么经过简单但繁琐的计算可得
$\delta_{2n-7} - 2a_{2n-4} - a_{2n-2} = 2r_{2n-2} - (\delta_{2n-7} - 2a_{2n-4}) = \delta_{2n-5} - 2a_{2n-2} = M$，所以它也满足（$*$）。由此我们得到，其余所有数 M_i^n 都等于 M，因此条件（$*$）对它们全部成立。因此，定理 3.1 的假设均得到满足，所以 $E(a_n)$ 是一个 Cantorval。

值得注意的是，这可能是第一个系数不可公度、且其成就集为 Cantorval 的多重几何序列例子。

如前所述，在论文 [15] 中，$L \subset \mathbb{N}$ 作者证明，对于任意无限的 $L \subset \mathbb{N}$，都存在一个非递增序列 (a_n)，使得 $E(a_n)$ 是具有 $K = L$ 的康托尔集。他们提出了一个问题：对于 Cantorval，是否也能证明同样的结论。现在，我们来回答这个问题。

定理 4.1。 设 (k_n)、(m_n) 是自然数序列，满足 $k_1 > 1$ 和 $k_{n+1} > k_n + m_n$。令 $k_0 := 0$, $m_0 := 1$, $K_n := \{k_n, \dots, k_n + m_n - 1\}$, $K = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$。令 $a_1 > 0$，并且对于 $i > 1$

$$a_i := \begin{cases} \frac{1}{2}a_{i-1} \quad if \ \ i-1, i, i+1 \notin K \ \ or \ i-1, i \in K \\ \frac{2^{m_n}+1}{2^{m_n+1}}a_{i-1} \quad if \ \ i = k_n - 1 > k_{n-1} + m_{n-1} \\ \frac{2^{m_n}+1}{2^{m_n+2}}a_{i-1} \quad if \ \ i = k_n - 1 = k_{n-1} + m_{n-1} \\ \frac{2^{m_n}}{2^{m_n+1}}a_{i-1} \quad if \ \ i = k_n \\ \frac{1}{4}a_{i-1} \quad if \ \ i, i+1 \notin K, i-1 \in K. \end{cases}$$

那么，序列 (a_n) 满足 $a_n > r_n$，当且仅当 $n \in K$ 且 $E(a_n)$ 是 *Cantorval*。

证明。 令 $n \in \mathbb{N}$ 和 $j \in K_n$。我们将证明 $r_j < a_j$。注意，若 a_i, $a_{i+1} \in K_n$ 且 $r_{i+1} < a_{i+1}$, 则也有 $r_i < a_i$。事实上，我们有 $a_{i+1} = \frac{1}{2}a_i$，因此 $r_i = r_{i+1} + a_{i+1} < a_{i+1} + a_{i+1} = 2a_{i+1} = a_i$。于是，只需证明对于 $j = k_n + m_n - 1$, $a_j > r_j$。

若 $k_n + m_n < k_{n+1} - 1$，则

$$a_{k_n+m_n} = \frac{1}{4}a_{k_n+m_n-1},$$

$$a_{k_{n+1}-1} = \frac{2^{m_{n+1}}+1}{2^{m_{n+1}+1}}a_{k_{n+1}-2} \leq \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4}a_{k_n+m_n-1} < \frac{1}{2}a_{k_n+m_n-1},$$

$$a_{k_{n+1}} = \frac{2^{m_{n+1}}}{2^{m_{n+1}}+1}a_{k_{n+1}-1} = \frac{1}{2}a_{k_{n+1}-2}$$

对于其余的 $i \in \{k_n + m_n, \dots, k_{n+1} + m_{n+1} - 1\}$，也有 $a_i = \frac{1}{2}a_{i-1}$。若 $k_n + m_n = k_{n+1} - 1$，则

$$a_{k_n+m_n} = \frac{2^{m_{n+1}}+1}{2^{m_{n+1}+2}}a_{k_n+m_n-1} < \frac{1}{2}a_{k_n+m_n-1},$$

$$a_{k_{n+1}} = \frac{2^{m_{n+1}}}{2^{m_{n+1}}+1}a_{k_{n+1}-1} = \frac{1}{4}a_{k_{n+1}-2} = \frac{1}{4}a_{k_n+m_n-1}$$

对于其余的 $i \in \{k_n + m_n, \dots, k_{n+1} + m_{n+1} - 1\}$，也有 $a_i = \frac{1}{2}a_{i-1}$。

因此，

$$r_{k_n+m_n-1} = \sum_{i=k_n+m_n}^{\infty} a_i < \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i}a_{k_n+m_n-1} = a_{k_n+m_n-1}.$$

现在我们将证明，对于每个 $n \in \mathbb{N}$、$\delta_{k_n-1} - \sum_{i=1}^{m_n-1} a_{k_n+i} > 0$，因此 $\delta_{k_n-1} > 0$，这等价于 $r_{k_n-1} > a_{k_n-1}$。稍后我们将证明所有数 M_i^{n+1} 都等于 $\delta_{k_n-1} - \sum_{i=1}^{m_n-1} a_{k_n+i}$，因此都是正数（对于 $i \notin K$, δ_i 也都是正数），这将证明 $a_i > r_i$ 当且仅当 $i \in K$。

我们有 $a_{k_n}=\frac{2^{m_n}}{2^{m_{n+1}}}a_{k_n-1}$，并且

(1)

$$\delta_{k_n-1}-\sum_{i=1}^{m_n-1}a_{k_n+i}=r_{k_n-1}-a_{k_n-1}-\sum_{i=1}^{m_n-1}a_{k_n+i}=a_{k_n}-a_{k_n-1}+r_{k_n+m_n-1}$$

$$=a_{k_n}-\frac{2^{m_n}+1}{2^{m_n}}a_{k_n}+r_{k_n+m_n-1}=-\frac{1}{2^{m_n}}a_{k_n}+r_{k_n+m_n-1}=-\frac{1}{2}a_{k_n+m_n-1}+r_{k_n+m_n-1}.$$

考虑这些情形。

1. $k_n+m_n+1=k_n^{+1}$ 那么我们有 $a_{k_n+m_n}=\frac{2^{m_n}+1}{2^{m_n+2}}a_{k_n+m_n-1}$ 和 $a_{k_n+m_n+1}=\frac{2^{m_n}}{2^{m_n+1}}a_{k_n+m_n}$，因此

$$-\frac{1}{2}a_{k_n+m_n-1}+r_{k_n+m_n-1}>-\frac{1}{2}\cdot\frac{2^{m_n+2}}{2^{m_n}+1}a_{k_n+m_n}+a_{k_n+m_n}+a_{k_n+m_n+1}$$

$$=-\frac{2^{m_n+1}}{2^{m_n}+1}a_{k_n+m_n}+a_{k_n+m_n}+\frac{2^{m_n}}{2^{m_n}+1}a_{k_n+m_n}=\frac{a_{k_n+m_n}}{2^{m_n+1}}(-2^{m_n+1}+2^{m_n}+2^{m_n}+1)=\frac{a_{k_n+m_n}}{2^{m_n+1}}>0.$$

2. $k_{n+1}=k_n+m_n+j$，其中 $j\geq 2$。那么我们有 $a_{k_n+m_n}=\frac{1}{4}a_{k_n+m_n-1}$，
$a_{k_n+m_n+i}=\frac{1}{2}a_{k_n+m_n+i-1}$，对于 $1\leq i\leq j-2$，

$$a_{k_n+m_n+j-1}=\frac{2^{m_n}+1}{2^{m_n+1}}a_{k_n+m_n+j-2}>\frac{1}{2}a_{k_n+m_n+j-2},$$

$$a_{k_n+m_n+j}=\frac{2^{m_n}}{2^{m_n}+1}a_{k_n+m_n+j-1}=\frac{1}{2}a_{k_n+m_n+j-2},$$

so

$$-\frac{1}{2}a_{k_n+m_n-1}+r_{k_n+m_n-1}>-2a_{k_n+m_n}+a_{k_n+m_n}+a_{k_n+m_n+1}+\cdots+a_{k_n+m_n+j}$$

$$>a_{k_n+m_n}(-1+\sum_{i=1}^{j-2}\frac{1}{2^i}+\frac{1}{2^{j-1}}+\frac{1}{2^{j-1}})=0.$$

现在我们将证明，对于任意 $n\in\mathbb{N}$，数 M_i^n对于所有 i 均相等（并且对于 $n>1$，它们等于 $\delta_{k_{n-1}-1}-\sum_{i=1}^{m_{n-1}-1}a_{k_n+i}$），且满足条件（$*$），而 δ_{k_n-1} 满足（$*'$）。特别地，对于$i\notin K$，有 $\delta_i>0$，这将证明 $a_i>r_i$ 当且仅当 $i\in K$。

如果 $k_1=2$，那么不存在定义的数 M_i^1。如果 $k_1=3$，那么我们只有一个这样的数。如果 $k_1\geq 4$，那么对于 $i<k_1-1$，有 $M_i^1=\delta_i$。对于 $i\in\{1,2,\ldots,k_1-3\}$，我们有 $a_{i+1}=\frac{1}{2}a_i$，因此

(2)
$$\delta_{i+1}=r_{i+1}-a_{i+1}=r_i-2a_{i+1}=r_i-2\cdot\frac{1}{2}a_i=r_i-a_i=\delta_i.$$

我们有 $a_{k_1-1}=\frac{2^{m_1+1}}{2^{m_1+1}}a_{k_1-2}$、$a_{k_1}=\frac{2^{m_1}}{2^{m_1+1}}a_{k_1-1}$ 和 $a_{k_1+i}=\frac{1}{2}a_{k_1+i-1}$，对于 $1\leq 1<k_1+m_1$，因此 $a_{k_1-2}=2^{m_1}a_{k_1+m_1-1}$。由此，根据 (1)，

$$\delta_{k_1-2}-a_{k_1}=r_{k_1-2}-a_{k_1-2}-a_{k_1}=-a_{k_1-2}-a_{k_1}+r_{k_1+m_1-1}+a_{k_1-1}+a_{k_1}+\cdots+a_{k_1+m_1-1}$$

$$=r_{k_1+m_1-1}+a_{k_1+m_1-1}(1+2+\cdots+2^{m_1-2}+2^{m_1-1}\cdot\frac{2^{m_1}+1}{2^{m_1}}-2^{m_1})$$

(3)
$$=r_{k_1+m_1-1}-\frac{1}{2}a_{k_1+m_1-1}=\delta_{k_1-1}-\sum_{i=1}^{m_1-1}a_{k_n+i}>0,$$

$$r_{k_1}+r_{k_1+m_1-1}-\delta_{k_1-2}=r_{k_1}+r_{k_1+m_1-1}-r_{k_1-2}+a_{k_1-2}=r_{k_1+m_1-1}-a_{k_1-1}-a_{k_1}+a_{k_1-2}$$

$$=r_{k_1+m_1-1}-\frac{2^{m_1}+1}{2^{m_1}}a_{k_1}-a_{k_1}+2a_{k_1}=r_{k_1+m_1-1}-\frac{1}{2}a_{k_1+m_1-1}$$

(4)
$$=\delta_{k_1-1}-\sum_{i=1}^{m_1-1}a_{k_n+i}>0$$

并且对于 $j \in \{1, \dots, m_1 - 1\}$（若 $m_1 > 1$）（根据 (3)）

(5)

$$\delta_{k_1-2} - 2a_{k_1+j} - \sum_{l=1}^{j-1} a_{k_1+l} = r_{k_1-2} - a_{k_1-2} - a_{k_1+j-1} - \sum_{l=1}^{j-1} a_{k_1+l} = r_{k_1-2} - a_{k_1-2} - \sum_{l=1}^{j-1} a_{k_1} \frac{1}{2^l} - a_{k_1} \frac{1}{2^{j-1}}$$

$$= r_{k_1-2} - a_{k_1-2} - a_{k_1} = \delta_{k_1-1} - \sum_{i=1}^{m_1-1} a_{k_1+i} > 0.$$

因此， δ_i 等于 $\delta_{k_{1-1}-1} - \sum_{i=1}^{m_{n-1}-1} a_{k_n+i}$，并且当 $i < k_1 - 1$时满足（$*$）。

现在我们将证明 δ_{k_1-1} 满足（$*'$）。令 $j \in \{1, \dots, m_1 - 1\}$。根据（3），我们有:

(6)

$$2r_{k_1+j} - \delta_{k_1-1} + \sum_{i=1}^{j-1} a_{k_1+i} = 2r_{k_1+j} - r_{k_1-1} + a_{k_1-1} + \sum_{i=1}^{j-1} a_{k_1+i} = 2r_{k_1+j} - r_{k_1+j-1} - a_{k_1} + a_{k_1-1}$$

$$= r_{k_1+j} - a_{k_1+j} - a_{k_1} + a_{k_1-1}$$

$$= r_{k_1-2} - a_{k_1} - a_{k_1+j} - a_{k_1} - a_{k_1+1} - \cdots - a_{k_1+j}$$

$$= r_{k_1-2} - a_{k_1} - a_{k_1-2}(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^{j-2}} + \frac{2}{2^{j-1}})$$

$$= r_{k_1-2} - a_{k_1-2} - a_{k_1} = \delta_{k_1-1} - \sum_{i=1}^{m_1-1} a_{k_1+i} > 0,$$

因此， δ_{k_1-1} 满足（$*'$）。

令 $n \in \mathbb{N}$。假设对于所有 i，数 M_i^n都等于某个 $M > 0$，且 M 满足（$*$），δ_{k_n-1}满足（$*'$），不等式（$*$）和（$*'$）的所有左端均等于 $-\frac{1}{2}a_{k_n+m_n-1} + r_{k_n+m_n-1}$。我们将证明所有数 M_i^{n+1}都相等并满足（$*$），$\delta_{k_{n+1}-1}$ 满足（$*'$），且不等式（$*$）和（$*'$）的所有左端均等于

$\delta_{k_{n+1}-1} - \sum_{j=1}^{m_{n+1}-1} a_{k_n+j} = -\frac{1}{2}a_{k_{n+1}+m_{n+1}-1} + r_{k_{n+1}+m_{n+1}-1}$.

考虑以下情形。

1. $k_n + m_n < k_{n+1} - 1$。则 $a_{k_n+m_n} = \frac{1}{4}a_{k_n+m_n-1}$。因此，

$$\delta_{k_n+m_n} = r_{k_n+m_n} - a_{k_n+m_n} = r_{k_n+m_n-1} - a_{k_n+m_n} - a_{k_n+m_n} = r_{k_n+m_n-1} - \frac{1}{2}a_{k_n+m_n-1}.$$

重复（δ）中的推理，我们得到，对于 $k_n + m_n \le i < k_{n+1} - 1$，所有数 δ_i 都相等，因此所有数 M_i^{n+1} 都相等。由此，我们可以重复证明 $n = 1$ 的证明中的推理，说明它们满足（$*$），$\delta_{k_{n+1}-1}$ 满足（$*'$），并且不等式（$*$）和（$*'$）的所有左端都等于

$\delta_{k_{n+1}-1} - \sum_{j=1}^{m_{n+1}-1} a_{k_n+j} = -\frac{1}{2}a_{k_{n+1}+m_{n+1}-1} + r_{k_{n+1}+m_{n+1}-1}$.

2. $k_n + m_n = k_{n+1} - 1$。那么，唯一的数值 M_i^{n+1}来自不等式（$*$）和（$*'$），根据假设，它们等于 $r_{k_n+m_n-1} - \frac{1}{2}a_{k_n+m_n-1}$。我们已经知道，如果 $k_n + m_n < k_{n+1} - 1$，那么条件（$*$）或（$*'$）左边与 $\delta_{k_{n+1}-1} - \sum_{j=1}^{m_{n+1}-1} a_{k_n+j}$ 之间的所有差都等于 0，但这些差只取决于 $i \ge k_{n+1} - 1$时的数值 M_i^{n+1}、$\delta_{k_{n+1}-1}$ 和 a_i。然而，对于 $i \ge k_{n+1}$，无论 $k_n + m_n = k_{n+1} - 1$ 还是 $k_n + m_n < k_{n+1} - 1$，a_i的定义相对于 $a_{k_{n+1}-1}$都相同。当然，$\delta_{k_{n+1}-1}$ 也只取决于 $i \ge k_{n+1} - 1$时的 a_i。因此，要证明即使 $k_n + m_n = k_{n+1} - 1$，条件（$*$）或（$*'$）左边与 $\delta_{k_{n+1}-1} - \sum_{j=1}^{m_{n+1}-1} a_{k_n+j}$ 之间的所有差也都等于 0，只需证明对于 $i \ge k_n + m_n - 1$，用 a_i 表示的 M_i^{n+1}无论 $k_n + m_n = k_{n+1} - 1$ 还是 $k_n + m_n < k_{n+1} - 1$都相同。如果

$k_n + m_n = k_{n+1} - 1$，于是 $a_{k_{n+1}-1} = \frac{2^{m_{n+1}}+1}{2^{m_{n+1}+2}} a_{k_{n+1}-2}$，依此类推

$$M_i^{n+1} = r_{k_n+m_n-1} - \frac{1}{2}a_{k_n+m_n-1} = r_{k_{n+1}-2} - \frac{1}{2}a_{k_{n+1}-2} = r_{k_{n+1}-2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{2^{m_{n+1}+2}}{2^{m_{n+1}}+1}a_{k_{n+1}-1}$$
$$= r_{k_{n+1}-2} - \frac{2^{m_{n+1}+1}}{2^{m_{n+1}}+1}a_{k_{n+1}-1}.$$

如果 $k_n + m_n < k_{n+1} - 1$，那么 $a_{k_{n+1}-1} = \frac{2^{m_{n+1}}+1}{2^{m_{n+1}+1}} a_{k_{n+1}-2}$，依此类推

$$M_i^{n+1} = \delta_{k_{n+1}-2} = r_{k_{n+1}-2} - a_{k_{n+1}-2} = r_{k_{n+1}-2} - \frac{2^{m_{n+1}+1}}{2^{m_{n+1}}+1}a_{k_{n+1}-1}.$$

因此，在两种情形下，M_i^{n+1}相同（用 a_i 代替 $i \geq k_{n+1} - 1$表示）。所以，根据情况 1，我们得到数 M_i^{n+1} 满足（$*$），$\delta_{k_{n+1}-1}$ 满足（$*'$），并且不等式（$*$）和（$*'$）的所有左端都等于 $\delta_{k_{n+1}-1} - \sum_{j=1}^{m_{n+1}-1} a_{k_n+j} = -\frac{1}{2}a_{k_{n+1}+m_{n+1}-1} + r_{k_{n+1}+m_{n+1}-1}$.

根据归纳法，定理 3.1 的假设得到满足，因此 $E(a_n)$ 是一个 Cantorval。此外，$a_n > r_n$ 当且仅当 $n \in K$。

□

例 4. 令 $k_n = 2n$，并且对所有 $n \in \mathbb{N}$ 都有 $m_n = 1$。我们将使用定理 4.1。对于 $n \in \mathbb{N}$，我们有$a_{2n} = \frac{2}{3}a_{2n-1}$，且 $a_{2n+1} = \frac{3}{8}a_{2n}$.。特别地，如果令 $a_1 = \frac{3}{4}$，则得到 $a_2 = \frac{1}{2}$，$a_{2n} = a_2\cdot(\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{8})^{n-1} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4^{n-1}}$，以及 $a_{2n+1} = a_1\cdot(\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{8})^n = \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4^n}$，因此 $E(a_n)$ 就是著名的 Guthrie-Nymann 康托尔值集$E(3, 2; \frac{1}{4})$。

在文献 [5], [2] 中，作者研究了一些特殊的多重几何序列 $x = (x_1、x_2、...、x_m; q)$。他们证明，对于某些 $q_1 < q_2 < q_3$，如果 $q \geq q_3$，那么 $E(x)$ 是一个区间；如果 $q \in [q_2, q_3)$，那么 $E(x)$ 是一个 Cantorval；如果 $q < q_1$，那么 $E(x)$ 是一个康托尔集。此外，在某个附加假设下，如果 $q = q_1$，那么 $E(x)$ 也是一个 Cantorval。他们还证明，几乎所有的 $q \in (q_1、q_2)$（按测度意义）$E(x)$ 都具有正的勒贝格测度；但在这些区间中也存在一个递减序列p_n，使得对于 $q = p_n$，$E(x)$ 是一个勒贝格测度为零的康托尔集。然而，一般而言，对于 $q \in (q_1、q_2)$，集合 $E(x)$ 的拓扑形式尚不清楚。特别地，在这个区间中尚无 q 的例子，使得 $E(x)$ 是一个 Cantorval。我们将以 $E(4, 3, 2; q)$ 为例，说明定理 3.1与上述结果的对应关系。对于这个例子，我们有$q_1 = \frac{1}{8}$、$q_2 = \frac{1}{6}$、$q_3 = \frac{2}{11}$。关于此类集合的更多内容还见于 [3]和 [8]。关于公比为 q_1 的多重几何序列的结果也可见于 [14], [17] 和 [7]。

例5. 令 $k_n = 3n$ 和 $m_n = 1$ 对所有 $n \in \mathbb{N}$成立。我们将再次使用定理 4.1。对于 $n \in \mathbb{N}$，我们有 $a_{3n} = \frac{2}{3}a_{3n-1}$、$a_{3n-1} = \frac{3}{4}a_{3n-2}$和 $a_{3n+1} = \frac{1}{4}a_{3n}$.。特别地，若令 $a_1 = \frac{1}{2}$，则得到 $a_2 = \frac{3}{8}$、$a_3 = \frac{1}{4}$、$a_{3n} = a_3\cdot(\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4})^{n-1} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{8^{n-1}}$以及$a_{3n-1} = a_2\cdot(\frac{1}{8})^{n-1} = \frac{3}{8}\cdot\frac{1}{8^{n-1}}$和$a_{3n+1} = a_1\cdot\frac{1}{8^n}$，因此$E(a_n)$是已知的 Cantorval $E(4, 3, 2; \frac{1}{8})$。

例6。已知 $E(4, 3, 2; q)$ 对于 $q \in [\frac{1}{6}, \frac{2}{11})$ 是一个 Cantorval。我们将证明，这也可以由定理 3.1 推得。首先，注意到 $k_n = 3n$ 和 $m_n = 1$。

事实上，对于 $n \in \mathbb{N}$，我们有

$$r_{3n} - a_{3n} = q^{n-1}(r_3 - a_3) = q^n(\frac{9q}{1-q} - 2) = q^n(\frac{9q - 2 + 2q}{1-q}) = q^n(11q - 2) < 0;$$

$$\delta_{3n-1} = r_{3n-1} - a_{3n-1} = q^{n-1}(r_2 - a_2) = q^n(\frac{9q}{1-q} + 2 - 3) = q^n(\frac{9q - 1 + q}{1-q}) > 0,$$

$$\delta_{3n-2} = r_{3n-2} - a_{3n-2} = q^{n-1}(r_1 - a_1) = q^n(\frac{9q}{1-q} + 5 - 4) = q^n(\frac{9q+1-q}{1-q}) > 0.$$

我们有

$$\delta_{3n-2} - a_{3n} = q^n(\frac{8q+1}{1-q} - 2) = q^n(\frac{10q-1}{1-q}) = \delta_{3n-1} > 0$$

and

$$2r_{3n} - \delta_{3n-2} = 2q^n\frac{9q}{1-q} - q^n\frac{8q+1}{1-q} = q^n\frac{18q-8q-1}{1-q} = q^n\frac{10q-1}{1-q} = \delta_{3n-1} > 0.$$

因此， δ_{3n-2} 对所有 $n \in \mathbb{N}$ 都满足 $(*)$。当然， δ_{3n-1} 满足 $(*')$。对于 $n \geq 1$ ，我们有

$$\delta_{3n-1} - 2\sum_{i=n+1}^{\infty} a_{3i} = q^n(\frac{10q-1}{1-q}) - 2\sum_{i=n+1}^{\infty} 2q^i = q^n(\frac{10q-1}{1-q}) - q^n\frac{4q}{1-q} = q^n\frac{6q-1}{1-q} \geq 0,$$

这意味着对于任意 $n \in \mathbb{N}$ ，除 δ_{3n-2} 外的所有数 M_i^n 都满足 $(**)$。因此，定理 3.1 的假设均满足，所以 $E(4,3,2;\, q)$ 是一个 Cantorval。

例 7。考虑集合 $E(4,3,2;\, q)$，其中 $q = \frac{\sqrt{57}-5}{16}$。那么 $\overline{-q} \in (18,16)$，它就是那个“神秘的”区间。首先，我们将证明 $k_n = 3n$ (以及 $m_n = 1$)。事实上，对于 $n \in \mathbb{N}$ ，我们有

$$r_{3n} - a_{3n} = q^{n-1}(r_3 - a_3) = q^n(\frac{9q}{1-q} - 2) \approx -0,57q^n < 0;$$

$$\delta_{3n-1} := r_{3n-1} - a_{3n-1} = q^{n-1}(r_2 - a_2) = q^n(\frac{9q}{1-q} + 2 - 3) = q^n\frac{10q-1}{1-q} \approx 0,43q^n > 0,$$

$$\delta_{3n-2} := r_{3n-2} - a_{3n-2} = q^{n-1}(r_1 - a_1) = q^n(\frac{9q}{1-q} + 5 - 4) = q^n\frac{8q+1}{1-q} \approx 2,43q^n > 0.$$

我们将证明定理 3.1 的假设均满足。

设 $n \in \mathbb{N}$。我们有

$$\delta_{3n-2} - a_{3n} = q^{n-1}(\delta_1 - a_3) = q^{n-1}(\frac{8q+1}{1-q} - 2) = q^n\frac{10q-1}{1-q} = \delta_{3n-1} > 0$$

and

$$2r_{3n} - \delta_{3n-2} = q^{n-1}(2r_3 - \delta_1) = q^n\frac{18q-8q-1}{1-q} = \delta_{3n-1}.$$

因此，对于 δ_{3n-2}，条件（$*$）成立。由于 $\delta_{3n-1} > 0$，$(*')$ 也成立。若 $n > 1$，则我们知道 $2r_{3n-3} - \delta_{3n-5} = \delta_{3n-5} - a_{3n-3} = \delta_{3n-4}$，但我们还有

$$\delta_{3n-4} - 2a_{3n} = q^{n-1}(\frac{10q-1}{1-q} - 4q) = q^{n-1}\frac{4q^2+6q-1}{1-q} \approx 0,12q^{n-1} > 0,$$

因此，数 δ_{3n-4} 满足（$**$）。此外，若 $n > 2$，则

$$\delta_{3n-7} - 2a_{3n-3} - \delta_{3n-2} = q^{n-2}\frac{4q^2+6q-1}{1-q} - q^n\frac{8q+1}{1-q} = q^{n-2}\frac{-8q^3+3q^2+6q-1}{1-q} = 0,$$

因此 $\delta_{3n-7} - 2a_{3n-3} = \delta_{3n-2}$。所以，所有数 M_i^n都等于 δ_{3n-2}或 δ_{3n-4}。因此，对于每个 M_i^n，条件（$*$）或（$**$）成立。于是，由定理 3.1， $E(a_n)$ 是一个 Cantorval。

值得指出的是，上述例子是已知的第一个满足 $q \neq q_1$ 且 $q \notin [q_2, q_3)$ 的多几何 Cantorval，其中 q_1, q_2, q_3 与 [5] 和 [2] 中的情形相同。

一个相当自然的问题是，关于多重几何序列成就集的 Palis型猜想是否成立，也就是说，这样的每个集合是否要么勒贝格测度为零，要么包含一个区间。对于所有已知的例子，情况确实如此。例 7 可能是朝着证明这一猜想成立迈出的一步。

考察例 5 和例 6，我们可能会想知道定理 3.1 是否推广了 [5] 中的结果（至少对于递减序列而言）。结果表明，如果 $q \in [q_2, q_3)$，那么定理 3.1 的假设并不总是成立。这是因为，在定理 3.1 中，我们总是假设一个间隙由单个重叠“覆盖”。但对于 $q \in [q_2, q_3)$ 的多重几何序列，情况并非总是如此。有时，一个间隙会被多个重叠覆盖，尽管这种覆盖的几何思想与定理 3.1 中的非常相似（例如，论文[15]中的 $E(32, 17, 16, 8, 4, 2; q)$ 就是如此）。这表明，可以自然地推广该定理，允许多个重叠覆盖一个间隙。另一种可能的推广方向是考虑非递增但含有重复项的序列。例如，证明 [12] 中的定理4.19，或 [6] 和 [18] 中的主要定理时，就采用了类似的思路。不过，看来这样一来，假设和证明会更加复杂、更加技术化。

参考文献

[1] R. Anisca, M. Ilie，研究中心Cantor集之和的一种方法，《加拿大数学通报》44（2001），12–18。[2] T. Banakh, A. Bartoszewicz, M. Filipczak, E. Szymonik，某些自相似集的拓扑与测度性质，《非线性分析拓扑方法》46(2)（2015），1013–1028。[3] A. Bartoszewicz, S. Głab, J. Marchwicki，从其值域恢复纯原子有限测度，《数学分析与应用杂志》467（2018），825-841。[4] A. Bartoszewicz, M. Filipczak, F. Prus-Wiśniowski，半快速收敛序列与中心Cantor集的 k和，《欧洲数学杂志》6（2020），1523-1536。[5] A. Bartoszewicz, M. Filipczak, E. Szymonik，多几何序列与Cantorval，《中欧数学杂志》12(7)（2014），1000–1007。[6] T. Filipczak, P. Nowakowski，中心Cantor集的差集成为Cantorval的条件，《数学成果》78（2023），文章编号166。[7] S. Głąb, M. Kula，重新探讨Kenyon定理，arXiv:2508.19454。[8] S. Głąb, J. Marchwicki，Cantorval的唯一性集，《数学成果》78（2023），文章编号9。[9] J.A. Guthrie, J.E. Nymann，无穷级数子和集的拓扑结构，《Colloquium Mathematicum》55（1988），323–327。[10] R. Jones，序列的成就集，《美国数学月刊》118(6)（2011），508–521。[11] S. Kakeya，关于无穷级数的部分和，《东北数学杂志》3（1914），159–164。[12] J. Marchwicki, P. Nowakowski, F. Prus-Wiśniowski，涉及Cantorval的可实现集的代数和，arXiv:2309.01589。[13] D. Karvatskyi, A. Murillo, A. Viruel，广义多几何序列的成就集，《数学成果》79（2024），文章编号132。[14] R. Kenyon，投影一维Sierpiński垫片，《以色列数学杂志》97（1997），221–238。[15] J. Marchwicki, J. Miska，关于成就集的Kakeya条件，《数学成果》76（2021），文章编号181。[16] P. Mendes, F. Oliveira，两个Cantor集的算术和的拓扑结构，《非线性》7（1994），329–343。[17] Z. Nitecki，零序列的Cantorval与子和集，《美国数学月刊》122（2015），862–870。[18] P. Nowakowski，中心Cantor集的差集成为Cantorval的条件：第二部分，《荷兰数学学会会刊》36（2025），1223–1244。[19]F. Prus-Wiśniowski, J. Ptak，几乎不满足反向Kakeya条件的可实现Cantorval，arXiv:2412.08768。[20] Y. Vinishin, V. Markitan, M. Pratsiovytyi, I. Savchenko，子和集为Cantorval的正项级数，《国际几何中心学报》12(2)（2019），26–42（乌克兰语）。

数学与计算机科学学院，罗兹大学，巴纳哈街22号，90-238 罗兹，波兰，开放研究者与贡献者身份识别码：0000-0002-3655-4991电子邮箱地址：piotr.nowakowski@wmii.uni.lodz.pl