arXiv:2512.17904v1 [math.CO] 19 Dec 2025

平面强连通性增强 *

Stéphane B essy[1],Daniel Gonçalves[1],Amadeus Reinald[1,2],和 Dimitrios M. Thilikos[1]

[1]LIRMM，蒙彼利埃大学，法国国家科学研究中心，法国蒙彼利埃[2]华沙大学，波兰

摘要

我们研究平面有向图中的强连通性增广问题。我们证明，判定一个平面有向图 D 是否可以通过添加（任意数量的）弧 X，使其 $D+X$ 变为强连通，同时仍保持平面且有向，是 NP 困难的。对于平面有向图而言，这个问题则变得显而易见；大多数不受预算约束的连通性增强问题也是如此。

预算版本的平面强连通性增强（PSCA）给定一个平面有向图 D 以及一个整数 k，要求找到一个大小至多为 k 的 X，使得 $D+X$ 强连通，同时保持平面且有向。我们的主要结果是一个求解 PSCA 的固定参数可解算法，运行时间为 $2^{O(k)}n^{O(1)}$。我们方法的核心是一项结构性结果：对于任意固定的 k，每个面都存在数量有界的部分解，它们能够“支配”所有其他部分解。随后，我们的 PSCA 算法将逐面分支与针对多项式时间可解的最小对偶连接集问题的蒙特卡洛归约相结合，并对其进行去随机化。据我们所知，这是首个针对受平面性约束的（困难）连通性增广问题的 FPT 算法。

1 引言

假设给定一个连接各城市的无交叉单行道网络，但其中有些城市无法从其他城市到达。本文要解决的问题如下：

> 如何新建一组单行道，确保每座城市都能从其他任何城市抵达，同时不引入交叉或双向道路？

上述内容可以形式化为平面（嵌入的）定向图上的一个问题（有向图禁止长度为二的环）。随后，我们要寻找一种增强（添加弧），在保持其为平面定向图的同时实现强连通性。我们感兴趣的第一个问题是“可增广性”，即这种增强是否存在；接着，我们研究如何计算最小增强。后一个最小化问题属于更广泛的连通性增强问题，这一领域在无向图和有向图中都已得到充分研究，并且应用于可生存网络设计。有关全面概述，请参阅 Frank 和 Jordán 的综述章节 [8]。

*SB 和 DT 得到了 ANR GODASse项目 ANR-24-CE48-4377 的资助。AR 得到了波兰国家科学中心 SONATA BIS-12 项目（编号为 2022/46/E/ST6/00143）的资助。DT 得到了法德合作项目 ANR/DFG UTMA（ANR-20-CE92-0027）以及法挪PHC AURORA项目 2024—2025（项目编号51260WL）的资助。

连通性增强在无向图情形中有着悠久的历史，主要研究的是最小化问题，而非可增广性问题。事实上，在没有预算条件的情况下，大多数可增广性问题都会变得很简单：只需添加所有可能的边（弧），然后验证所得图的连通性即可。研究最为深入的例子分别是 c-顶点连通性增强和 c-边连通性增强，即 c-VCA 和 c-ECA。这些问题分别要求，在允许使用平行边的情况下，求使图成为 c-顶点连通或 c-边连通所需添加的最少边数。对于边连通性，Watanabe 和 Nakamura [28] 建立了一个针对 c-ECA 的统一多项式时间算法。相比之下， c-VCA 的复杂性仍是该领域一个重要的开放问题，不过 Jackson 和 Jordán [13] 已证明其在 c中的固定参数可处理性。通过从哈密顿回路进行简单归约，这些问题的加权版本对于 $c = 2$, 已经是 NP 困难的。尽管已知常数因子近似算法 [9, 25], ，但加权变体的参数化复杂性仍基本未得到解决（参见 [21]）。

对于有向图，首先关注的是强连通性，即任意两个顶点之间都存在一条有向路径。在他们具有开创性的论文中，Eswaran 和 Tarjan [4] 给出了强连通性增广（SCA）的多项式时间算法。该问题旨在通过添加尽可能少的弧，使有向图变为强连通。对于更高的连通度，Frank [7]证明， k-弧 SCA 可以统一地在多项式时间内求解。与无向情形一样，k-顶点 SCA 的复杂度尚未确定，不过 Frank 和 Jordan [5] 证明了该问题属于固定参数可处理。正如 Eswaran [4], 已指出的，这些问题的（弧）加权版本都是 NP 困难的，即使是加权 SCA 也不例外。积极的一面是，Frederickson 和 Ja'Ja [9], 提出了一个 2-近似算法，而最近，Klinkby、Misra 和 Saurabh [17] 确立了一个 $2^{O(k\,\text{对数}\,k)}n^{O(1)}$ 固定参数可处理算法。

本文关注受平面性和简单性约束的强连通性增广问题：定向图中不允许存在平行弧。如下文所述，这两项约束在该领域都受到广泛关注，但取得的积极成果寥寥无几。

（有向）图中的简单性约束。上文讨论的两个主要多项式算法——针对 k-ECA 和 k-Arc SCA 的算法——其关键在于能够添加平行边和平行弧（以及二边形）。换言之，这些算法实际上解决的是多重（有向）图上的问题，而非（简单）图上的问题。这或许也能解释为何边（弧）连通性问题取得了这些积极成果，而其顶点连通性对应问题却迟迟未能解决。Frank [8], 早已指出这一点，并提出了在保持简单性的同时进行连通性增广的算法问题。

在无向图情形下，Jordan [15] 证明，当目标连通度 c作为输入的一部分时，保持简单性的 ECA 变体是 NP 困难。尽管如此，Bang-Jensen 和 Jordan [1] 证明该问题属于固定参数可处理 c, （另见 [14] 关于"增量"变体的研究）。在有向图情形下，Bérczi 和 Frank [3]研究了这些问题。他们针对简单有向图中的弧连通度提升一的问题，给出了一个多项式时间算法；该算法禁止多重弧，但仍允许二边形。

图中的平面性约束。给定一个（简单）图，对增广图结构施加的下一个自然约束是平面性，它可以在多种情形下理解。在抽象图情形中，对应于平面问题，输入图和输出图都应为平面图，但不受任何嵌入的约束。拓扑情形是我们主要关注的情形，对应于平面版本：输入图带有一个固定嵌入，而增强过程必须保留该嵌入。第三种值得关注的情形是几何变体，

其中考虑　　平面直线图，并要求增强所添加的边为直线段　　.

1989年，Rappaport [22] 证明了 Simple Circuit 的 NP 困难性。在该问题中，给定一组嵌入平面中的线段，要求判断是否可以通过添加新的线段，将其增强为一个简单多边形。这个问题可以看作平面直线图中 2-连通性增强的一个限制，并且似乎是第一个受平面性约束的（连通性）增强问题。这也可以看作一个“可增广性”问题，因为多边形这一限制已经要求我们恰好添加与给定线段数量相同的线段。第一个被证明为 NP 困难的平面连通性增强问题是 Planar 2-VCA，这源于 Kant 和 Bodlaender [16] 的一项结果。Rutter 和 Wolff [23] 证明了 2-ECA 的平面和几何变体具有 NP 困难性，而 Gutwenger、Mutzel 和 Zey [12] 证明了 Plane 2-VCA 的 NP 困难性。在积极的一面，Planar 2-VCA 存在一个 2-近似 [16] 算法，并且对于连通实例，平面 2-VCA 可以在多项式时间内求解 [12]。在本文之前，对于受平面性约束的 NP 困难连通性增强问题，还没有获得任何固定参数可处理算法。

SCA 的结构约束SCA。如今，除了 [3]讨论的简单性问题外，人们对受结构约束的强连通性增广复杂性知之甚少。受方格框架刚性问题的启发，Gabow 和 Jordán[10] 设计了一种多项式时间算法，用于处理输入为二分有向图且必须保留输入二分划分的 SCA。另一种有趣的结构限制与我们的定向要求正交：只允许添加这样的新弧，即若（v，u）是新弧，则（u，v）属于初始有向图。也就是说，我们希望通过将弧变为二边形，使有向图成为强连通图。事实上，这等价于最小二分支问题；Frank [6], 通过对 Lucchesi-Younger 定理 [19]给出构造性证明，证明了该问题可在多项式时间内求解。

1.1 我们的结果

我们关注平面简单有向图中的强连通性增广。要求有向图简单有两种自然方式：禁止同一方向上的平行弧，得到有向图；禁止任何平行弧，则得到定向图。我们将采用后一种解释，探讨以下可增广性问题：给定一个平面简单有向图，能否在保持其平面性和简单性的同时，将其增广为强连通图？若按有向图意义理解简单性，答案总是肯定的：任意极大的弧集都会形成一个双向三角剖分，而它是强连通的。因此，我们的可增广性问题只有在平面定向图中才有意义。事实上，这些图并非总能按要求增广，例如，任何尚未强连通的定向三角剖分就是一例。我们的第一个结果是：判定平面定向图中的这种强连通性可增广性问题，已经是 NP 困难的。

定理 1. 判定一个平面有向图是否存在既为平面又为定向的强连通增广是 *NP* 完全的。此外，根据指数时间假设，该问题不存在运行时间为 $2^{o(\sqrt{n})}$ 的算法。

这使我们的问题成为少数因结构约束而非预算约束导致 NP 困难的连通性增强问题之一。另一个例子是 Simple Circuit [22]，其中结构已迫使解具有确定的大小（PSCA 并非如此）。我们的归约可以调整为生成三连通实例；这类实例的嵌入是唯一的，因此我们的问题的平面变体也具有困难性。虽然定理 1 让人联想到

平面 2-VCA 和平面 2-VCA 都是困难问题，但后者的困难性确实依赖于预算。

根据定理 1，我们下文定义的预算受限版本问题 PSCA 也是 NP 完全的。

平面强连通性增强（PSCA）**参数：** k**输入：** 一个连通的平面有向图 D 和一个整数 k**问题：** 是否存在某个 $X \subseteq V(D)^2$，满足 $\lvert X\rvert \leq k$，使得对于 D 的同一嵌入，$D + X$ 是强连通、定向且平面的?

我们的主要结果是，PSCA 关于解的大小参数化时具有固定参数可处理性 k.

定理 2。平面强连通性增强关于解的大小 k 是固定参数可处理的，并且存在一个 $2^{O(k)}n^{O(1)}$ 算法。

我们的算法可以扩展到任意连通的定向图，只要它（细胞式地）嵌入在亏格有界的曲面上。若能为 PSCA 的平面变体设计一种算法也将很有意义，在该变体中嵌入并非固定。关于简单性，目前尚不清楚，当我们要求所得有向图为定向图（如 PSCA 中所要求）时，SCA 是否仍可在多项式时间内求解。

正如我们已经论证过的，PSCA 的可增广性变体对于有向图而言是平凡的，但其受预算约束的版本仍值得关注:

有向平面强连通性增强（Directed-PSCA）**输入：** 一个连通的平面有向图 D 和一个整数 k **问题：** 是否存在某个 $X \subseteq V(D)^2$，满足 $\lvert X\rvert \leq k$，使得 $D + X$ 在与 D 相同的嵌入下是强连通的有向平面图?

虽然我们将证明该问题属于固定参数可处理，以此引出针对 PSCA 的算法（第 3 节），但我们猜想它甚至可以在多项式时间内求解。

猜想 3。 *Directed-PSCA* 可在多项式时间内求解。

我们还要指出，平面连通性增广问题的参数化复杂性仍是一个悬而未决的问题。特别是，对于双连通性，我们还没有定理 2 的无向类比问题。

问题 4。 平面2-*VCA* 是否能以解的大小为参数实现固定参数可处理?

固定参数可处理算法的方案。我们解决 PSCA（以及 Directed-PSCA）的策略是寻找受支持的解。这些解直观上对应于这样的情况： X 在 D的每个面F 中， X 的端点都偏向由F诱导的有向图的“终端分量”。尽管受支持解的定义本身已经相当复杂，我们的主要结构性结果给出了受支持补全数量的上界——即将受支持解限制到 F 上所得的结果——该上界是 k的函数。随后，我们根据所诱导的“终端”分量数量，将面区分为简单面与交替面。我们证明，对于正实例（D， k），交替面的数量总是由 k的某个函数所界定，因此可以对这些面上的所有受支持补全进行分支枚举。这样，问题就归结为计算一种解，它只在简单面内添加弧。此时的主要障碍是，简单面的数量可能与实例规模呈线性关系；但关键在于，每个简单面都只允许常数个（绝对常数）“最小”受支持

补全。我们设计了一种随机化过程，在每个简单面内猜测一个“允许的”受支持补全，然后将仅使用这些弧来寻找最小解的问题归约为最小对偶连接集。使用 Frank 的算法 [6]求解后者，可得到一个多项式时间的蒙特卡洛算法，用于计算简单面内的解。之后可以利用通用集将其去随机化，运行时间仅增加一个 $2^{O(k)}n^{O(1)}$ 倍的因子。结合针对交替面的分支过程与针对简单面的（去随机化）算法，即可得到一个 $2^{O(k)}n^{O(1)}$ 算法，用于判定 PSCA 是否存在（受支持的）解。

论文结构。在第 2 节介绍一些预备知识后，我们将在第 3 节展示一个用于 Directed-PSCA 的固定参数可处理算法，作为 PSCA 算法的引入。虽然总体步骤相同，但 PSCA 的大多数技术细节在 Directed-PSCA 中都可以省去，因为受支持解有一种非常自然的定义。本节最后，我们将在第 3.5 小节讨论 PSCA 相较于 Directed-PSCA 的技术细节：如何定义受支持解，以及为何需要随机化在简单面内计算解的过程。接着，第 4 节将展示我们的 PSCA 固定参数可处理算法，并由此证明定理 2。最后，我们将在第 5 节证明 PSCA 的困难性，从而得到定理 1。

2 预备知识

本文考虑的所有有向图都是平面有向图，并给定其嵌入。我们将平面有向图 D 的任意面 F 与其边界等同，边界定义为沿着 F 周围的闭游走排列的带标号顶点循环列表（v_1，..... v_r）。当 D 不是 3-连通时，同一顶点可能沿边界多次出现。对于任意有向图 D 以及任意 $U \subseteq V$， $D[U]$ 是由 U 诱导的子有向图。

连通性。本文中，我们将“强连通”和“强连通的”交替使用，并常将有向路径称为有向路径。有向图 $D = (V, A)$ 中的有向割是一个二分划分 $(Z, V \setminus Z)$，其中所有跨越该划分的弧都从 Z 指向 $V \setminus Z$。如果一个强连通分量只包含一个顶点，则称其为平凡的。若强连通分量 C（特别是单个顶点）满足 $(C, V \setminus C)$ 是一个有向割，则称其为源点；若 $(V \setminus C, C)$ 是一个有向割，则称其为汇点。 D 的源点和汇点构成终端分量集合 $\mathcal{T}(D)$。于是， D 的凝缩是通过将每个强连通分量合并为单个顶点，并删除重复弧而得到的（平面）有向图。

补全及其限制。对于平面有向图 $D = (V, A)$，以及给定了嵌入的任意 $Y \subseteq V(D)^2$， $D + Y = (V, A \cup Y)$ 和 $D - Y = (V, A \setminus Y)$ 都是尊重 D 嵌入的平面有向图。 D 的补全是给定了嵌入的 $V(D)^2$, 的一个子集 X，使得 $D + X$ 是平面且定向的（在第 3 节中为有向的）。此外，若 $D + X$ 是强连通的，则 X 是 D 的一个解。给定一个面 F， F 的补全是 D 的一个补全，满足 $X' \subseteq (V(F))^2$,，且 X' 的所有弧都嵌入在 F. 中。对于任意补全 X 以及 D 的任意面 F， X 在 F 上的限制 X_F 是 X 中嵌入于 F 的部分。对于 F 的子游走 I， X 在 I 上的限制 X_I 是 X 中至少有一个端点位于 I 上的弧集合。

3 允许 digo 时的固定参数可处理性 ns

本节将介绍一个用于 Directed-PSCA 的 FPT 算法，其输入实例为 (D, k)，其中D 包含一个平面有向图，且解中允许出现二边形。因此，本节始终将补全 （以及 解）视为某种 X (V)D^2，使得 $D + X$ 是一个平面有向图。我们首先

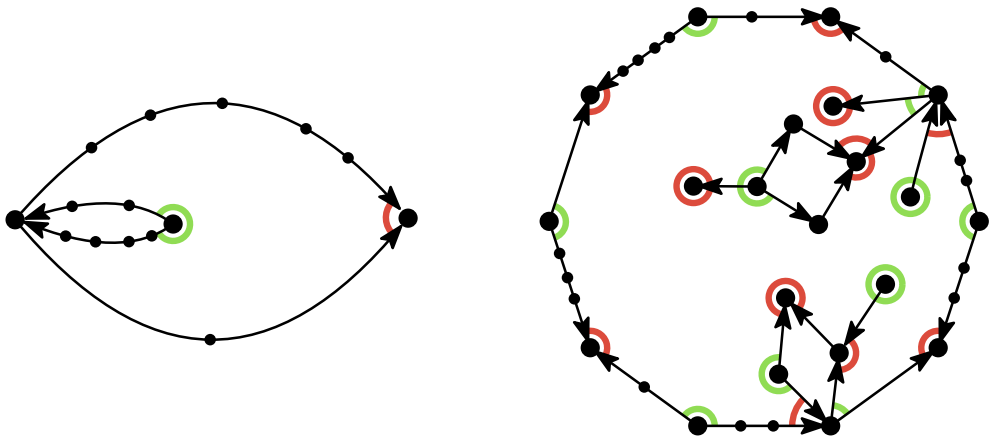

图 1：一个简单面，包含两个局部终端；以及一个交替面，包含 22 个局部终端。局部源点以绿色角表示，局部汇点以红色角表示。注意，同一个顶点可以同时出现在局部汇点、局部源点，甚至非终端角中。

在第3.1小节描述实例结构、局部终端，以及简单面与交替面。随后，我们在第3.2小节证明受支持解的存在性。在第3.3小节中，我们界定所有交替面上可能的受支持补全数量，从而可以对它们进行分支。最后，在第3.4小节中，我们完成对该 FPT 算法的描述；该算法归结为在简单面内计算一个最小（受支持）解。

3.1 实例的结构

我们的第一步是　将 Directed-PSCA 的任意实例归约为（多项式个）无环实例。

引理 5. *Directed-PSCA* 可在多项式时间内图灵归约到无环实例上的同一问题。

通过收缩属于某个强连通分量的弧，直到得到所研究有向图的平面凝缩图，即可轻松得到这样的归约。不过，在收缩环时，这会涉及一些非本质的技术细节，因此我们将证明推迟到 A.1 小节。于是，在下文中，我们可以假设 $(D,\ k)$ 是 Directed-PSCA 的一个无环实例。

局部终端与面类型。 对于任意面 F，F 的一个带标号顶点 v_i，如果其在边界上的两条关联弧均指向外，则为局部源点；如果两条弧均指向内，则为局部汇点。局部源点和局部汇点构成 F的局部终端，见图 1。对于任意面 F，局部源点和局部汇点必须沿边界交替出现。因此，任意一对相邻局部终端之间都有一条有向游走；由于不存在有向环，这实际上是一条有向路径。因此，F 中的局部源点数量等于局部汇点数量，我们将 lt(F) 定义为 F中局部终端的数量（该数为偶数）。注意，对于无环实例，lt($lt(F)$) 始终非零，否则 F 的边界将构成一个有向环。在本节余下部分，如果一个面恰好包含一个局部源点和一个局部汇点，我们称其为简单面；否则称为交替面，如图 1 所示。

3.2 受支持解的存在性

在本节中，若一个面 F 的补全受到支撑，则该面的所有弧都位于 F的局部终端之间。于是，若 D 的补全（或解） X 受到支撑，则 X 在每个面上的限制都受到支撑。以下引理表明，任何解都可以通过将其端点适当地朝局部终端移位，从而经一系列操作重新配置为受到支撑的解。

引理 6. 如果 *Directed-PSCA* 的一个无环实例存在大小为 k的解，那么它也存在一个大小至多为 k.的受支持解

证明。 考虑一个实例 (D, k)，其中 D 无环，并假设它存在一个大小至多为 k的解 X 。为了将 X 重新配置为受支持的解，我们遍历所有面 F，并将 X 中的X_F 重新配置为受支持的补全，同时保持 X 是一个解。在每个面 F内，我们依次考虑从局部源点 s 到相邻局部汇点 t 的任意子游走 P（回想一下，P 此时是一条有向路径）。我们将说明如何重新配置属于 P的限制 X_P的端点，并且只重新配置这些端点，使其仅与 s 和 t关联。只需说明这最后一步；对每一对相邻局部终端及每个面重复上述操作，即可将 X 重新配置为受支持解。下面，考虑 s 和t之间的这样一个 P，并说明如何重新配置 X_P。

我们首先考虑 X_P 中包含一条两个端点都位于 P 上的弧的情况。我们按如下方式修改 X_P 在 P 上的端点：删除所有两个端点都位于 P 上的弧，并将它们替换为一条（单独的） $(t,\ s)$。然后，对于 X_P 的所有其他弧，将它们在 P 上的所有端点替换为 s。显然，可以在保持 $D+X$ 的平面嵌入的同时修改这些弧。添加 $(t,\ s)$ 可确保 $V(P)$ 现在在 $D+X$ 中强连通。接着，考虑初始 X_P 中任意一条弧 $(x,\ p)$，其中 $p \in P$ 和 $x \notin P$。由于修改后它变为 $(x,\ s)$，注意到重配置后，从 x 到 p 的路径仍然保留。事实上，我们可以先沿着 $(x,\ s)$，然后沿着 $V(P)$ 中通往 p 的任意路径前进。这说明 $D+X$ 仍然强连通，并由此完成此情形的证明。

在证明的其余部分，我们可以假设 X_P 中的所有弧都恰有一个端点位于 P。取任意一个与 X_P 中的弧关联的顶点 $v \in V(P) \setminus \{s,t\}$，并令 $X_v \subseteq X_P$ 为这些弧构成的子集。简单来说，我们的策略是证明总能将它们的 v 端点“移向” s 或 t。考虑 v，令 u （分别为 w）表示沿着 P 前进时，与 X_P 相邻的前一个（分别为后一个）顶点。若不存在这样的顶点，则令 $u = s$ （分别为 $w = t$）。我们将 X_u（分别为 X_w）定义为从 X_v 得到的弧的子集：将 X_v 中各弧的每个 v 端点替换为 u （分别替换为 w），见图 2。我们将证明，在保持解不变的情况下，可以用 X_u 或 X_w 替换 X_v，并将其置于 X 中。首先注意，根据 $u,\ w$ 的定义，并且 X_v 在 P 上的唯一端点是 v，因此 $D+X-X_v+X_u$ 和 $D+X-X_v+X_w$ 都是平面的。因此，令 $D' = D+X-X_v$，只需证明 $D'+X_u$ 或 $D'+X_w$ 中至少一个是强连通的。

首先，注意到 X_v 构成一个定向星，与 D'的所有终端分量相接。在 D'中，令 Y'_v 为包含 v 的强连通分量，$(S'_i)_i$ 为其余源分量，$(T'_j)_j$ 为其余汇分量。由于 $D'+X_v$ 是强连通的， X_v 包含从 v 到每个 S'_i的弧，以及从每个 T'_j 到 v的弧。特别地，我们有以下性质：

$$X_v \text{ induces a directed path from every sink to every source of } D' \tag{1}$$

容易看出，任何满足等式（1）的 D' 平面补全（取代 X_v）也是 D'的一个解。我们证明， X_u 或 X_w 必有一个满足等式（1）。根据定义， X_u 和 X_w 都构成星，这些星从每个 T'_j 到每个 S'_i诱导出一条长度为 2 的有向路径。特别地，如果 Y'_v不是终端分量，则 D' 的所有终端分量都形如（S'_i）$_i$ 或（T'_j）$_j$，这意味着 X_u和 X_w都满足等式（1）。随后，我们将 X 更新为 $X - X_v + X_u$，这仍保持D的一个解。现在，如果 Y'_v是 D'的源分量，则有向子路径（s，.....， $u \ldots$， v）

由 P可知 $u \in Y'_v$也成立。于是， X_u包含从 D'的所有汇点（T'_j）j指向 Y'_v的弧，因此 X_u满足等式（1），将 X 更新为 $X - X_v + X_u$ 即可保持 D的一个解。图 2 展示了该情形。类似地，当 Y'_v为汇分量时，子路径（v，……，w，$\ldots t$）推出 $w \in Y'_v$成立，而将 X 更新为 $X - X_v + X_w$ 即可得到 D的一个解。

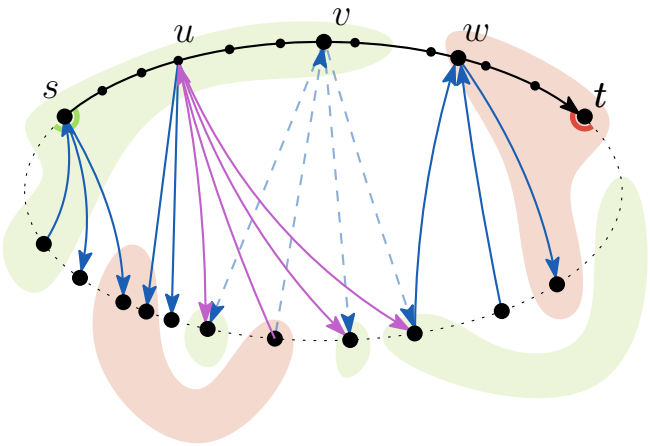

图 2：从一个面的局部源点 s 到局部汇点 t 的有向路径 P，与其关联的解中的弧以蓝色显示。移除与顶点 v 关联的弧后，会产生若干源分量和汇分量（分别以绿色和红色显示），其中一个源分量同时包含 u 和 v。如紫色所示，将它们的端点移位至 $u,$，即可得到一个与 P.的内部顶点关联更少的解

只要 X_P中仍存在未与 s 或 t关联的端点，我们就重复上一段所述的操作。这个过程必定终止，因为 P 上属于 X_P 且不同于 s 或 t 的端点数量会严格减少。最终， P 上 X_P 的所有端点（且仅这些端点）都会被重新配置到 s 或 t，同时保持 X 为一个解。由此证明了 X_P的重配置，证明也就完成了。□

3.3 界定交替面中的受支持补全

从现在起，引理 6 使我们能够将搜索范围缩小到受支持解；为此，我们考察它们在每个面内的限制，即受支持补全。在本小节中，我们将根据 k，界定所有交替面中大小为 k 的受支持补全的数量。第一步是针对单个面得到这样的上界，首先以该面的局部终端数量为依据。

引理 7. 对于 D 的任意面 F，至多存在 F 的 $2^{O(\mathsf{lt}(F))}$ 个受支持的补全，并且这些补全可在 $2^{O(\mathsf{lt}(F))}$ 时间内生成。

证明。设 F 是 D的一个面，且 $\mathsf{lt} = \mathsf{lt}(F)$。注意，任何 F 的受支持补全 X 的嵌入，完全由其所关联的局部终端（ F的带标号顶点）决定。因此，我们的目标是枚举局部终端之间所有可能的带标号外平面有向图。为此，我们可以先将局部终端视为循环面上的不同顶点，之后再将它们收缩。由此，我们枚举的每个有向图都可以视为一个具有 lt 个顶点的带标记有向三角剖分。众所周知，具有 lt 个角的多边形的带标号三角剖分数量对应于卡特兰数 $C_{\mathsf{lt}-2}$， 其值为 $2^{O(\mathsf{lt})}$，参见 Walkup [27]。这些三角剖分也可以使用 Bespamyatnikh [2]的算法在 $2^{O(\mathsf{lt})}$ 时间内枚举。

接着，每个三角剖分都包含 $2\mathsf{lt}-3$ 条边，而为每条边选择非弧、弧（任一方向）或二边形的方式数不超过 $4^{2\mathsf{lt}-3}=2^{O(\mathsf{lt})}$。综上，带标号外平面有向图的数量，因而 F的受支持补全数量，不超过 $2^{O(\mathsf{lt})}$，其枚举耗时为 $2^{O(\mathsf{lt})}$。□

以下给出了所有交替面上局部终端数量的上界，因此根据引理 7，也给出了它们的受支持补全数量上界。

引理 8. *Directed-PSCA* 的每个无环实例(D,k) 要么是一个否实例，要么满足：

$$\sum_{F\in\mathcal{AF}(D)}\mathsf{lt}(F)<8k,$$

其中， D 的交替面集合为 $\mathcal{AF}(D)$。

引理 8 的证明推迟至 A.2 小节，但很容易从 Guattery 和 Miller [11] 的结果推导得出。结合引理 7 和引理 8，我们得到交替面上可能的受支持补全数量的如下界限，并且可以在固定参数可处理时间内枚举这些补全。

推论 9. *Directed-PSCA* 的每个无环实例(D,k) 要么是一个否实例，要么有$2^{O(k)}$ 种不同的受支持补全，位于 $D.$ 的交替面内。此外，可以在 $2^{O(k)}$时间内判定这一点并生成这些补全。

3.4 在简单面中计算解的其余部分

有了推论 9，我们可以针对交替面中的 $2^{O(k)}$ 种可能的受支持补全进行分支。然后，如果存在 (D,k) 的受支持解 X，我们可以假设当前所处的分支已正确计算出其在交替面集合 $X_{\mathcal{AF}}=\cup_{F\in\mathcal{AF}}X_F$ 上的限制。由于我们知道 X 是 D 的一个解，因此 $X\setminus X_{\mathcal{AF}}$ 是 $(D+X_{\mathcal{AF}},k-|X_{\mathcal{AF}}|)$ 的一个受支持解，其中所有弧都在简单面中补全。因此，我们不必精确地恢复 $X\setminus X_{\mathcal{AF}}$，而可以只在 D 的简单面中寻找 $(D+X_{\mathcal{AF}},\ k-|X_{\mathcal{AF}}|)$ 的任意受支持解。

在计算这样的解之前，关键的观察是，每个简单面 F 都恰好有一种非空的受支持补全，即从其局部汇点 t 到其局部源点 s 的弧。请注意，这条弧总能使 $V(F)$ 成为强连通，这也是在 F 中进行补全所能达到的最佳结果。于是，要在简单面中求解 $(D+X_{\mathcal{AF}},\ k-|X_{\mathcal{AF}}|)$，只需计算实现强连通性所需的、从局部汇点到（相应）局部源点的最少弧数。最直接的做法是将问题归约为 Weighted-SCA。在这个问题中，给定一个有向图 D，一个权函数 $w\colon V(D)^2\to\mathbb{R}^+$（对应所有可能添加的新弧），以及数值 k，$\alpha.$。如果存在一个至多包含 k 条弧、总权重至多为 α 的集合 $X\subseteq V(D)^2$，使得 $D+X$ 强连通，那么该实例为肯定实例。

现在，我们令 Weighted-SCA 的输入有向图为 $D+X_{\mathcal{AF}}$，并令所有可能的弧的权函数值均为 $k+1$，但以下弧除外：$(t,\ s)$，其中 t 是某个简单面 F，的局部汇点，而 s 是该面的局部源点；这种情况下，权重为 1。接着，将解的最大规模和总权重都设为 $k-|X_{\mathcal{AF}}|$，即可得到一个显然等价于我们问题的 Weighted-SCA 实例。使用 Klinkby、Misra 和 Saurabh 的算法 [17]，可以在 $2^{O(k\log k)}n^{O(1)}$ 时间内求解该实例。由此可得一个用于 Directed-PSCA 的 $2^{O(k\log k)}n^{O(1)}$ 固定参数可处理算法。还要指出，只需在每个简单面中加入弧 $(s,\ t)$，面内的计算就可归约为（多项式时间可解的）最小二分支问题，从而得到一个 $2^{O(k)}n^{O(1)}$ 算法。

3.5 将该策略调整为 PSCA

我们强调　　将 Directed-PSCA 的算法推广到 PSCA 的主要障碍　　.

非无环实例中的局部终端。尝试将用于 Directed-PSCA 的方法推广时，首先遇到的障碍是，PSCA 的实例在凝缩下并不等价。事实上，收缩弧可能会增加解的大小，甚至会使实例无法增广，见图 3。因此，我们为 PSCA 定义的局部终端可能具有线性大小，见第 4.2 小节，这使得受支持解的定义更加复杂。

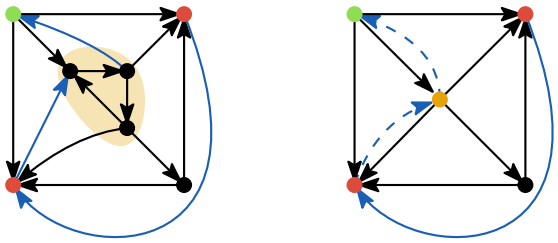

图 3：一个 PSCA 实例，其中橙色部分为非平凡强连通分量；将其收缩为单个顶点后得到的定向图。初始实例有一个大小为三的解（以蓝色标出），但该解在凝缩后无法保留，而凝缩所得的是一个否定实例。

避免二边形的受支持解。在 PSCA 中，主要难点在于定义面的一种受支持补全，使其避免二边形，同时又受到足够的约束，从而能够用 k 给出界限。显而易见的障碍是，某个解 X 中的一条弧无法重新配置到一对已经在当前面中构成弧的顶点上。更棘手的是，当 D 不是 3-连通时， F 的顶点之间可能存在嵌入于 F 外部的弧，但这些弧仍会妨碍重配置过程中 X 中弧的“移位”。在 Directed-PSCA 中，这种移位最终总会到达局部终端，但对于 PSCA 的实例而言，并不能保证如此。我们的目标仍是沿用这一思路：将 X 向 F 的局部终端进行“最左”或“最右”移位，同时避免二边形（见第 4.4 小节）。我们证明，这些移位只能落在数量有界的“支撑点”（角的集合）上，但代价是失去强连通性（见第 4.5 小节）。随后，我们展示如何在保持位于支撑点内的同时恢复强连通性，从而定义受支持解。进而，这将我们的搜索限制为每个面中数量有界的受支持补全（见第 4.7 小节）。

交替面中的分支。 尽管每个局部终端的规模现在可能非常大，但利用 Directed-PSCA 中所用的论证（见第 4.2 小节），交替面上的局部终端数量仍可由 k 的某个函数所界定。然后，得益于我们对受支持补全的定义，我们可以针对所有交替面，枚举有界数量的可能补全。

在简单面中进行猜测。 在交替面内对可能的（受支持）补全进行分支之后，剩下的任务便是在所有简单面中寻找一个最小受支持解。在 Directed-PSCA 中，由于每个简单面都具有唯一的受支持补全——从其局部汇点到其局部源点的弧，从而使 $D[V(F)]$ 强连通——该问题可借助加权 SCA 来处理。这在 PSCA 中无法实现，因为 D 中已有的从局部源点到局部汇点的弧可能会阻止在相反方向添加一条弧。在

事实上，一个简单面的受支持补全可能需要多条弧，甚至其本身也可能无法使$D[V(F)]$强连通。特别是，F可能存在多个受支持补全，它们在连通性方面两两不可比。关键步骤是证明这一数量仍可由一个常数界定（见第 4.7 小节），但这阻碍了直接归约到加权 SCA（或最小对偶连接集）。事实上，我们需要预先为每个面选择一个补全，以防止算法产生带有交叉的解。为克服这一点，我们在每个简单面中均匀随机地猜测一个允许的补全，然后给出到最小二分支问题的归约。当在包含该解的一条弧的至多 k 个简单面上猜中了某个受支持解的“正确”限制时，我们的归约保证能找到某个最小解。由于该概率仅是 k 的函数，我们的算法可利用通用集在固定参数可处理时间内去随机化。

4 PSCA 的固定参数可处理算法

本节旨在证明定理 2，从而确立平面强连通性增强的固定参数可处理性。回顾一下，当前章节中的技术细节是由第 3.5 小节讨论的障碍所促成的。我们从第 4.1 小节中专门针对 PSCA 的定义开始，特别是将补全表示为相对于角而非带标号顶点的形式。在第 4.2 小节中，我们描述实例的结构：局部终端、它们之间的区间（子游走）以及面类型。我们的重配置将在多重补全上进行；多重补全是在第 4.3 小节中定义的一种对补全的（轻微）放宽。在第 4.4 小节中，我们定义移位操作，它作用于多重补全的端点，将作为我们的主要重配置工具。接着，在第 4.5 小节中，我们引入左栈和右栈，它们对应于区间上多重补全端点的“最大移位”位置，并证明这些端点必定位于数量有界的顶点上，这些顶点称为支撑点。尽管解并不总能以这种方式移位，但这些操作使我们得以在第 4.6 小节中定义受支持解。随后，我们给出受支持补全数量的上界，尤其是所有交替面上的受支持补全数量上界。在第 4.8 小节中，我们展示了一个计算简单面的最小解的（去随机化）算法，并在第 4.9 小节中将其与针对交替面的分支结合起来，从而得到我们的 PSCA 固定参数可处理算法。

4.1 定义

$\widehat{\text{角}}$与边界。给定一个面 F，F的一个角 $w = eve'$是一个有序三元组，由一个顶点 v及其在 F上的两条关联弧 e、e'组成。当我们将 w称为顶点时，始终指的是v。除非另有说明，每个 w 都按照 F顺时针排列；e 是位于 v之前的弧，而 e' 是位于 v之后的弧。于是，令 $W(F)$ 表示 F的角集，$W(D)$ 表示 D所有面上的角集。我们用边界来标识每个面 F；该边界现在是一个角的循环列表 $(w_1, w_2, \ldots, w_r)$，沿着 F的闭游走按顺时针方向排列。为简化记号，我们通常将边界上的带标记顶点 v_i 与其对应的角 $w_i = a_i\widehat{v_i a_{i+1}}$视为同一对象。于是，$F$ 从 w_i 到 w_j （或从 v_i 到 v_j）的区间，记作 $I = [w_i, w_j]$，是 F 上从 w_i 到 w_j的（顺时针）子游走。在证明中，所有区间都按顺时针方向，也就是从“左”到“右”来考虑；但根据对称性，对于按逆时针方向排列的区间，结论同样成立。

角及其端点之间的补全。 在本节中，X 的补全 D 被指定为一个 $X \subseteq W(D)^2$，使得 $D + X$是平面且定向的，其中 $e = (w, w') \in X$嵌入在 D的两个角 w 和 w' 之间。注意，将 X 的弧视为这样的弧，可以唯一确定其在 $D + X$中的嵌入。给定一个元素 $e = (w, w') \in X$，w^e 表示

∘ e 在角 w处关联的端点，并令 X 为 X的端点集合。对于任意端点集合 U， $W(U)$是角的集合，而 $V(U)$是与 U对应的顶点集合。对于一个

∘ ∘补全 X，令 $W(X) = W(X)$ 且 $V(X) = V(X)$。

∘ ∘给定 F 的一个区间 I， X_I 表示 I 上 X 的端点集合 $X \cap I$。回顾一下， X_I 是 X 中至少有一个端点位于 I 上的弧集合。特别地，当 I 是 F 的整个边界时，

∘ ∘X_F（分别为 X_F）由嵌入在 F 中的 X 的所有弧（分别为 X 的所有端点）组成。当 $I = [w]$ 只包含一个顶点时，我们可以将此集合简记为 X_w，称其为 X 位于 w 处的端点。

4.2 实例的结构

本节中，我们始终令 (D, k) 为 PSCA 的一个实例，其中 D 是平面有向图，并寻求一个大小至多为 k 的解 X，使得 $D + X$ 仍然是平面且定向的。在本小节中，我们定义重配置发生的区间：局部终端和区间有向路径，然后根据局部终端区分面类型。

为处理非无环实例，我们应当刻画同一强连通分量中的顶点在强连通性增广方面的“等价性”。以下定义将实现这一点。

定义10（强区间）。 面 F 的一个强区间 是其边界上的一个极大区间，其中所有对应顶点都属于 D 的同一个强连通分量。

4.2.1 局部终端

现在我们定义局部终端，图4给出了示意图。

定义 11（局部终端）。 给定一个平面有向图 D（允许存在自环）及其一个面 F， D 的一个局部终端 是一个强区间 $I = [w_i, w_j]$，满足以下条件之一：

- 沿 F 看，位于 w_i 之前和 w_j 之后的弧均为出弧，则 I 是一个局部源点。
- 沿着 F，位于 w_i 之前和 w_j 之后的弧都是入弧，那么 I 就是一个局部汇点。

局部终端也可以视为 F 的强区间，这些强区间在由 F 的弧所诱导的有向图中构成有向割。定义 11 中需要自环仅仅是引理 15 中使用的一种技术性处理，但我们的实例中都不含自环。

注意， D 的一个（可能是平凡的）终端分量必然会导致它所相交的每个面中至少有一个局部终端。不过，局部终端也可能源自非终端分量，而一个强连通分量可能产生多个局部终端，甚至位于同一个面中。现在，任何不是局部终端的强区间，在边界上都必须与恰好一条入弧和一条出弧相邻。对于 F 的两个相邻局部终端之间的强区间，情况尤其如此。进而，相邻局部终端的类型不同，也就是说，沿着 F，局部源点和局部汇点交替出现。因此，它们的数量相等，$\mathrm{lt}(F)$ 总是偶数。

4.2.2 局部终端之间的区间有向路径

现在我们定义区间有向路径，即局部终端之间的区间，并说明它们在连通性方面的表现基本类似于有向路径。

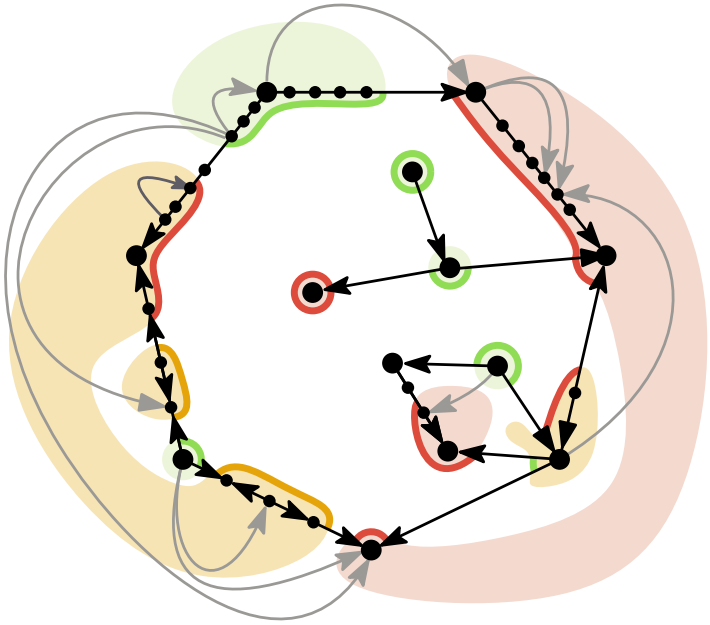

图4： F D的一个面，其中 $D[V$（F）的弧嵌入在 F之外，并以灰色显示。 D 的强连通分量以云朵表示，绿色表示源点，红色表示汇点，橙色表示非平凡的中间分量。这些分量与 F 边界的每个连续交集构成一个强区间。强区间以粗线表示，绿色表示局部源点，红色表示局部汇点，橙色表示其他情况。

定义12。 给定 F的一个面 D， D 的区间有向路 是边界上的一个极大区间 P，且不与任何局部终端相交。

注意，任何区间有向路 $P = [w_1, w_r]$ 都必须与一个局部源点 S 和一个局部汇点 T相邻，我们称 P 是从 S到 T的。除对称情形外，我们总是假设，沿 F顺时针方向， w_1 是某个 $w_0 \in S$之后的角，而 w_r 是后续 $w_{r+1} \in T$的一个入邻点。因此，我们可以用左 指较小的索引（朝向 S），用右 指较大的索引（朝向 T）。

引理 **13.** 设 $P = [w_1, w_r]$ 是从局部源点 S 到局部汇点 T.

1. 对任意顶点 $s \in S$、 $t \in T$，以及任意顶点 $w_i \in P$，存在一条从 s t o w_i 的有向路径，以及一条从 w_i 到 t 的有向路径。*2.* 对于任意 i、$j \in [1, r]$，若满足 $i < j$，则存在一条从 w_i 到 w_j 的有向路径。

证明。 我们证明从顶点 $s \in S$ 出发的第一条路径；对称地，可以得到通向 t 的路径。设 w_0 是 P 外部、在 F. 中先于 w_1 的角。由于 s和 w_0 属于 D的同一个强连通分量，因此存在一条从 s 到 w_0的有向路径，而弧 (w_0, w_1) 给出了通向 w_1的有向路径。要证明存在通向 P 所有角的路径，只需使用第二个性质，下面将证明该性质。

对于第二个性质，考虑两个角 w_i和 w_j，其满足 $i < j$。设 I_0， . . . ， I_q 为 P 的强区间，并按从左到右的顺序排列，使得 $w_i \in I_0$ 和 $w_j \in I_q$ （可能带有 $q = 0$）。由于这些不是局部终端， I_ℓ 的最后一个角有一条出弧连接到 $I_{\ell+1}$的第一个角，对于$i \in [0, q-1]$。这些弧以及每个强区间内连接其端点的有向路径，使得

使我们能够构造出所需的从 w_i 到 w_j的有向路径。 □

4.2.3 简单面与交替面

现在我们可以定义简单面与交替面。令 lt(*F*) 表示面 F 周围局部终端的（偶）数目，回忆一下，lt(*F*) 必然为偶数。由于任意面 F 都至少与 D 的一个强连通分量相交， F 至少包含一个（可能是平凡的）强区间 $I = [a, b]$。如果 I 由 F 的整个边界构成，则 V（F）属于同一个强连通分量，这意味着I 不可能是局部终端，并且 lt(*F*) $= 0$，我们称 F 为强连通。注意，使用极小解中的弧来补全强面是不必要的，因此在下文中基本可以忽略这些弧。若面 F 包含两个局部终端，则称其为简单面，并且$\mathcal{SF}$（D）表示 D 的简单面集合。若面 F 包含至少四个局部终端，则称其为交替面，并且 $\mathcal{AF}$（D）表示 D 的交替面集合。

4.2.4 界定交替面中的局部终端

这里的出发点是：当预算 k 有界时， D 的终端分量数量也有界。事实上，对于属于终端分量集合 D 的任意 Y(*D*)，解 X 必须包含一条端点位于 Y的弧，因此得到以下结论。

观察 14. 对于任意正实例(D, k)，有 $|\mathcal{T}(D)| \leq 2k$

下一个引理根据|$\mathcal{T}$(*D*)|，界定所有交替面上的局部终端数量。结合上述观察，特别可以得到一个关于 k的界。为了进行归纳，我们对允许存在自环的平面有向图更一般地证明这一点。

引理 15. 对于允许有环的每个平面有向图 D ，有

$$\sum_{F \in \mathcal{AF}(D)} \mathsf{lt}(F) \leq 4|\mathcal{T}(D)| - 8$$

证明。 依次收缩位于强连通分量内的任意（非自环）弧，可得到一个带有自环的平面有向图 D' ，该图是有向无环图。更准确地说，删除该图中的自环后，可得到一个定向有向无环图。回顾一下，局部终端和交替面的定义同样适用于带有自环的有向无环图。

断言 1。 给定一个有向图 D_1，以及通过收缩位于强连通分量 D_1内的单条非自环弧 uv 而从 D_1 得到的有向图 D_2 ，有

$$|\mathcal{T}(D_1)| = |\mathcal{T}(D_2)| \text{ and } \sum_{F \in \mathcal{AF}(D_1)} \mathsf{lt}(F) = \sum_{F \in \mathcal{AF}(D_2)} \mathsf{lt}(F).$$

断言证明。 注意到， D_1 的强连通分量与 D_2的强连通分量之间存在双射，并且 D_1 的终端分量映射为 D_2. 的终端分量。同时， D_1 的面与 D_2. 的面之间也存在双射。这些双射满足：如果 D_1 的一个面 F_1 映射为 D_2的一个面 F_2 ， 则有 lt(F_1) =lt(F_2)。 这意味着， $\mathcal{AF}$(*D*$_1$)的面映射为 $\mathcal{AF}$(*D*$_2$)的面。 因此，断言成立。□

因此，只需对带有自环的平面有向无环图证明该引理。我们对这些自环的数量进行归纳。初始情形是不含自环的 D, 可由引理 8 得出；对于归纳步骤，我们区分两种情况。首先，考虑存在一个面的情形

F 其边界上只有一条弧，即一个环 $e = (u,\ u)$。删除 e，并注意到，对于与 e，相邻的另一个面，其局部终端数量保持不变，其他所有面也同样如此。因此，根据归纳法，该引理中的不等式成立。

否则，我们可以考虑环 $e = (u,\ u)$ 分隔两个非空区域的情形。令 D_1 和 D_2，分别为 D 中由 ℓ内侧和外侧的弧诱导的子有向图。根据定义可以看出，对于任一与其关联的面，ℓ 都包含在一个强区间内。因此，对于 D 中的任一面 F，根据 F 相对于 ℓ的位置，D_1 或 D_2 中对应的面都保持相同数量的局部终端。因此，

$$\sum_{F\in\mathcal{AF}(D)} \mathsf{lt}(F) = \sum_{F\in\mathcal{AF}(D_1)} \mathsf{lt}(F) + \sum_{F\in\mathcal{AF}(D_2)} \mathsf{lt}(F).$$

此外，如果 v 在 D 中的强连通分量 C（其顶点仅有 v）是 D中的终端，那么在 D_1 和 D_2 中，v 的强连通分量 C_1 和 C_2 分别也是各自有向图中的终端；而如果 C 不是终端，则 C_1 或 C_2 至少有一个不是终端。因此，$|\mathcal{T}(D_1)| + |\mathcal{T}(D_2)| \le |\mathcal{T}(D)| + 1$，这意味着：

$$\sum_{F\in\mathcal{AF}(D)} \mathsf{lt}(F) \le 4|\mathcal{T}(D_1)| - 8 + 4|\mathcal{T}(D_2)| - 8 \le 4|\mathcal{T}(D)| - 8.$$

□

4.3 多重补全

为了重配置补全 X，我们放宽了 X 必须诱导出定向图的约束，只要它不会与 D形成二边形即可。

定义 16（多重补全）。给定一个平面有向图 D，D 的多重补全 是定义在 $W(D)^2$ 上的多重集 X，满足：$D + X$ 是平面多重有向图；并且 $D + X$ 的任何二边形、平行弧或自环都完全属于 X。

与补全的情形一样，多重补全中一条弧的嵌入完全由其角决定（固定角周围的平行弧和自环可以重新排列）。

4.3.1 极小强连通多重补全是解

由于我们考虑多重补全，对解 X 的重配置可能会在 X中引入二边形、平行弧或自环。以下引理使我们在大多数应用中可以忽略这一问题：当移位保持强连通性时，移位得到的是一个（适当的）解。

引理 17. 给定一个底层图连通的定向图 D，任何使 $D + X$ 强连通的极小多重补全 X 都满足：

- X 中没有弧位于 D 的单个强连通分量内，
- X 中任意一对强连通分量之间至多有一条弧。

特别地，X 是一个解。

证明。显然， D 同一强连通分量中两个顶点之间的 X 任意弧都可以从 $D+X$中删除。若有两条弧 e， $e' \in X$ 从一个分量 U 指向另一个分量U'，则其中任意一条都可以删除。在这两种情况下，原先通过被删除的弧连接的顶点，总能在所得有向图中由一条有向路径替代。

现在，假设对于 D 的强连通分量 U、U'，存在弧 e、$e' \in X$，其中 e 从 U 指向 U'，而 e' 从 U' 指向 U。我们要说明，可以从 X 中移除 e 或 e'，同时仍保持其为一个解。令 $D' = D + X - \{e, e'\}$，并注意到 D' 的所有终端分量都必须包含 U 或 U'（因为它们在 D 中不是终端分量）。我们分别将包含 U、U' 的分量称为 Y、Y'。由于 D 的底层图是连通的， Y 和 Y' 不可能是孤立的（即同时为源点和汇点），因此不失一般性，可以假设 Y 是唯一的源点，而Y' 是唯一的汇点。在这种情况下，存在一条从 Y（中的任意顶点）到 Y'（中的任意顶点）的有向路径。于是，在 $D+X$ 中任何使用 e 的有向路径上，都可以用一条不相交的有向路径替换 e，这意味着 $D'+e'$ 是强连通的。也就是说， $X-e$ 是一个实现强连通性的多重补全，这与最小性矛盾。

特别是，以上所有条件都禁止了完全位于 X中的任何自环、二边形或平行弧；也就是说，根据定义 16， $D+X$ 中不存在这些结构，因此 X 也是一个解。□

4.3.2 区间有向路径上的反向弧

对于区间 I， X_I 中两个端点都位于 I 上的弧称为的反向弧。根据引理 17，最小解不能包含局部终端内部的反向弧，因此我们只关注区间有向路径内部的反向弧。由平面性和引理 13 得出的以下观察，使我们能够进一步限制区间有向路径上反向弧的出现。

观察 18. 若 X 是一个极小解，则对于区间有向路径 P上的任意反向弧 $e = (w_j, w_i)$ ：

(i) X 中没有弧的两个端点都位于 $[w_i, w_j]$内；也就是说，反向弧不会嵌套；

(ii) $i < j$，也就是说， e 的方向是从右向左。

4.4 补全端点的移位

在本小节中，我们定义移位——这是我们在整个重配置过程中使用的操作；随后展示如何利用移位将端点汇集到同一个角上。

定义 19 （移位）。 设 $I = [w_1, w_r]$ 是某个面 F 的一个区间， X 是一个多重补全，和 $w_i^e \in X_I$。设 $w_m^a \neq w_i^e$ 为 X_I 中满足 $m \leq i$ 的最右端点；若未定义，则令其为 $w_m = w_1$ 。设 $w_M^b \neq w_i^e$ 为 $\mathring{X}_I$ 中满足 $M \geq i$ 的最左端点；若未定义，则令其为 $w_M = w_r$ 。

当 w_j 有定义时，我们定义以下移位：在 e 中用 w_i^e 替换 w_j^e :

- 当 $m < i$ 时， w_i^e 的左移是指用 w_i^e 替换 w_j^e，使 $j \in [m, i[$ 最小，同时保持为多重补全。
- 当 $M > i$ 时， w_i^e 的右移 是指用 w_i^e 替换 w_j^e，使 $j \in]i, M]$ 达到最大值，同时保持多重补全。

定义 20 （移位）。 设 $I = [w_1, w_r]$ 是某个面的区间， X 是一个多重补全，且设 $e \in X_F$ 是一条弧，其端点 w_i^e 位于 I 中。设 w_m^a 和 w_M^b 分别为 $\mathring{X}_I$ 上位于 w_i^e 之前和之后的端点；若未定义，则分别为 $w_m = w_1$ 和 $w_M = w_r$ 。

- w_i^e 的左移 是将该端点替换为最左侧的角 w_j，使 $j \in [m, i[$ 保持多重补全，也就是说，使 $D + e$ 保持平面且定向。
- 右移w_i^e 是将此端点替换为最右侧可能的角 w_j，同时保持 $j \in]i,\ M]$ 仍为多重补全。

请注意，对于 $e = (u,\ w_i)$，将 w_i^e 左移确实可能在X中产生一条平行弧或一个二边形；如果 X 已包含 $(u,\ w_j)$ 或 $(w_j,\ u)$，甚至可能产生一个环（当 $u = w_m$时）。

4.4.1 聚集端点

下面的操作基于移位，使我们能够将一个解中分散开的端点聚集到同一个角中，同时保持多重补全。

引理 21. 考虑一个面 F 的任意区间 $I = [w_1, w_r]$，以及任意一个多重补全 X，它与两个角 w_i、w_j $(i < j)$关联，且 X 不与任何满足 $\ell \in]i,\ j[$的 w_ℓ 关联。那么，要么 w_i 处的所有端点都可以依次右移至w_j，要么w_j 处的所有端点都可以依次左移至 w_i。

证明。下面考虑所有弧而不论其定向如何，并用 uv 表示 $(u,\ v)$ 和 $(v,\ u)$ 两者。回忆定义 20，中的任意端点右移（分别为左移）

。 。X_{w_i}（分别为 X_{w_j}）都会在 $[w_i, w_j]$上产生一个端点。考虑端点的连续右移 。$w_i^e \in X_{w_i}$。如果在某个时刻，某个 w_i^e 的右移不会产生 w_j，我们就停止该过程。否则我们将得到所需结果。

在我们停止该过程的情况下，设停止于某个 $e = uw_i$，则在 D中，u 和w_j（所对应的顶点）之间必定存在一条不包含于 F 内部的弧。因此，在此时，任意$e' = u'w_j \in X_{w_j}$ 均满足：$u' \in]w_j,\ u[$，否则 $u'w_j$ 将与 uw_i相交。因此，没有这样的 u' 能成为 w_i的邻点；否则 $u'w_i$ 将与 uw_j 在 D中相交。现在，我们对称地考虑

。X_{w_j}的连续左移。然后，由于 w_i 不是任何非w_j 端点的邻点，所有这类移位都会得到 w_i，证明完毕。□

4.5 解的栈及其支撑点

现在，我们定义区间上多重补全的左栈和右栈，它们是无法移位的极大端点子集。然后，我们将证明，这些栈只能对应于有限多个称为支撑点的角子集。

定义 22（栈）。设 I 是某个面 F的一个区间，X 是任意一个多重补全，并且 。端点 X_I 按照其对应弧在 I上的关联从左到右排列。

- I上的 X 左栈，记为 $\mathring{X}_I^L$，是 $\mathring{X}_I$ 的极大前缀，其中不包含任何可以向左移位的端点。
- I 上 X 的右栈，记作 $\mathring{X}_I^R$，是 $\mathring{X}_I$ 的极大后缀，其中不含任何可以向右移位的端点。

请注意，这些集合可能会重叠，但这不会造成问题，因为我们的目标只是重新配置端点，使其位于这些集合的并集中。还要注意，根据移位的定义，W（$\mathring{X}_I^L$）必须与 W（$\mathring{X}_I \setminus \mathring{X}_I^L$）不相交。

为了限制栈在区间上的关联，我们需要以下观察，这源于每个面都会诱导出一个外平面有向图这一事实。

观察 23. 对于任意面 $F=(w_1,\ldots,w_r)$，边界上任意两个相邻的 w_i,w_{i+1} 最多在 $V(F)$ 中有一个公共邻点。

现在定义左支撑集 $Z_I^L(q)$ 和右支撑集 $Z_I^R(q)$。

定义 24（支撑）。考虑 D 的任意一个面 F，以及 F 的任意一个区间 $I=[w_1,w_r]$。我们定义一个集合 $Z_I^L(q)$，其中包含 I 的大小为 q 的子集，称为 I 的左 q-支撑。

首先令 $Z_I^L(1)$ 包含 $\{w_1\}$、$\{w_2\}$。然后，如果 w_1，w_2 在 F 上有一个公共邻点 u，就将 $\{w_h\}$ 加入 $Z_I^L(1)$，其中 w_h 是 u 的最左侧非邻点（若存在）。

对于 $q>1$，我们按如下方式由 $Z_I^L(q-1)$ 定义 $Z_I^L(q)$。遍历所有 $B\in Z_I^L(q-1)$，令 w_i 为 B 中索引最大的元素，并将以下左侧 q-支撑点加入 $Z_I^L(q)$：

- 若 $i<r$，则添加 $B\cup w_{i+1}$。
- 若存在 u，它是 w_i 的公共邻点，w_{i+1}，则添加 $B\cup w_h$，其中 w_h 是 u 最左侧的非邻点（如果存在）。

I 的右侧 q 支撑点集合记为 $Z_I^R(q)$，其定义与左侧对称：将“左”替换为“右”，并从 w_r 到 w_1 反向沿着 I 进行。

观察 25。 $Z_I^L(q)$ 和 $Z_I^R(q)$ 的大小至多为 $3\cdot 2^{q-1}=2^{O(q)}$，且可在 $2^{O(q)}n^{O(1)}$ 时间内构造。

现在我们证明，左（分别为右）栈的角 与某个左（分别为右）支撑点重合，也就是说，与 $Z_I^L(q)$（$Z_I^R(q)$）中的某个元素重合。

引理 26。 考虑一个区间 I 和一个多重补全 X。设 $\mathring{X}_I^L$、$\mathring{X}_I^R$ 分别为 X 在 I 上的左栈和右栈，且 $q_L=|W(\mathring{X}_I^L)|$、$q_R=|W(\mathring{X}_I^R)|$ 分别为它们的角数，则：

- $W(\mathring{X}_I^L)\in Z_I^L(q_L)$。
- $W(\mathring{X}_I^R)\in Z_I^R(q_R)$。

证明。我们对 q 进行归纳，证明对于 X_I 的任意前缀 Ω，若 $|W(\Omega)|=q$ 且 Ω 中没有端点可以向左移位，则 $W(\Omega)\in Z_I^L(q)$。根据定义 22，这便推出左栈的结论；利用对称性，证明也适用于右栈。在整个证明过程中，我们将弧 $(u,\ v)$ 和 $(v,\ u)$ 统称为其对应的边 uv，并在不区分定向的情况下对后者进行论证。

若 $q=1$，则有 $W(\Omega)=\{w_j\}$。若 $j=1$ 或 $j=2$，则根据定义 24，确有 $\{w_j\}\in Z_W^L(1)$。否则，$j\geq 3$，我们令 uw_j 为 X_{w_j} 在 w_j 处最左边的弧。由于 uw_j 不能向左移位，u 必须是 D 中 w_1，w_2 的公共邻点；根据观察 23，这个公共邻点是唯一的。此外，w_j 是 I 上 u 的最左侧非邻点，因此有 $\{w_j\}\in Z_W^L(1)$。

假设归纳法对 $q-1$ 以内的情形成立，并设 Ω 是 X_I 的一个前缀，满足 $|W(X_I)|=q$，且没有端点可以向左移位。令 Ω' 为 Ω 中关于 $q-1$ 角的极大前缀；根据归纳法，它属于 $Z_I^L(q-1)$。令 w_i 为 $W(\Omega')$ 的最右角，令 w_j 为 $W(\Omega)\setminus W(\Omega')$ 的角，因此 $j>i$。若 $j=i+1$，根据定义 24，我们知道 Ω 的角对应于 $Z_I^L(q)$ 的一个支撑。否则，$j\geq i+2$，且我们令 $w_j^e\in\Omega$ 为 w_j 处的最左端点，设为 $e=uw_j$。若 w_j^e 不能向左移位，那么 u 尤其是 w_i 与 w_{i+1} 在 $D[V(F)]$, 中的唯一公共邻点，因此 w_j 是 u 的最左侧非邻点，从而再次保证 $W(\Omega)\in Z_I^L(q)$。归纳至此完成；由于 $\mathring{X}_I^L$ 是一个由无法向左移位的端点构成的前缀，结论得证。□

4.6 受支持解的存在性

我们先定义受支持补全和解，然后证明每个解都可以通过移位重新配置为一个受支持的解。

定义27（受支持补全）。给定一个补全 X、一个区间 I，且满足 $|W(X_I)| = q$，若存在 $B^L \in Z_I^L(q)$ $B^R \in Z_I^R(q)$ 使得 $W(\mathring{X}_I) \subseteq B^L \cup B^R$，则称 X（或 $\mathring{X}_I$）在 I上受到支撑。我们称 $B^L \cup B^R$ 为 X 在 I 上的支撑。

对于任意面 F，若 X在 F的每个局部终端和区间有向路上都受到支撑，则称 X（或 X_F）在 F上受到支撑。于是，若补全 X 在 D的每个面上都受到支撑，则称其为受支持的。

我们将经常使用以下显然条件，以确保移位后仍为一个解。

观察 28. 设 X 是一个解，且对于某个区间 I，有 $w^e \in X_I$。若将 w^e 移位后得到的角与 w^e 位于 $D + X - e$ 的同一个强连通分量中，则 X 仍是一个解。

4.6.1 局部终端

现在我们证明，在区间有向路上，解的端点总能被移位到某个支撑上。

引理 29。对于任意局部终端 I 和任意解 X，存在一个对 X_I 的移位序列，使所得解 I被支撑。

证明。设 X 为这样的解，且 X_I 为其在 $I = [w_1, w_r]$ 上的端点。只要 X_I 包含一个可以沿 I向左移位的端点 w_i^e，我们就执行该移位。在每一步中，w_i^e 被移位到某个 $w_m \in I$上；根据观察 28，这仍保持为一个解。事实上，w_m 在 D中与 w_i 属于同一个强连通分量，因此在 $D + X - e$中也是如此。该过程终止，

因为 I 上端点 X_I 的索引之和在每一步都严格减小。最终，我们得到一个解 X，其中 X_I 的任何端点都不能沿 I向左移位，这意味着 X_I 与其左栈 $\mathring{X}_I^L$重合。然后，根据引理 26，$W(\mathring{X}_I^L)$ 属于 $Z_I^L(|W(X_I)|)$。□

4.6.2 区间有向路径

与局部终端不同，在区间有向路 P 上移动解 X 的端点并不会始终保持强连通性。这意味着我们不能期望将 X_P 重新配置为左栈（或右栈）。事实上，甚至可能无法将 X_P 重新配置为其左栈和右栈的并集。接下来，我们将证明存在一个移位序列，可以将所有端点重新配置到一个支撑上，并最终实现强连通性。

引理30。对于任意区间有向路 P 和任意解 X，都存在一个对 X_P 进行移位的序列，从而得到一个支撑在 P 上的解。

证明。设 $P = [w_1, w_r]$。考虑沿着 P 从左到右排列的 X_P 的端点，并注意到这一顺序在移位过程中保持不变。下文中，令 $\mathring{X}^L = \mathring{X}_P^L$ 和 $\mathring{X}^R = \mathring{X}_P^R$ 分别为 X 在 P 上的左栈和右栈，并定义 $\mathring{X}^M = \mathring{X}_P \setminus (\mathring{X}^L \cup \mathring{X}^R)$。

重配置的第一步是执行移位，以最大化左栈和右栈。只要在保持解的同时，$\mathring{X}^M$ 的最左端点可以向左移位，或最右端点可以向右移位，就执行任意一个这样的移位，并相应地更新 $\mathring{X}^L$，$\mathring{X}^R$，$\mathring{X}^M$。

请回忆，引理 17 使我们能够确保移位产生的多重补全确实是一个解。由于在任意一步 $|\mathring{X}^M|$ 都会严格减少，这一过程显然会终止。如果最终得到
$\mathring{X}^M = \emptyset$，我们有 $\mathring{X}_I = \mathring{X}_I^L \cup \mathring{X}_I^R$。由于 $\mathring{X}_I$ 至多对应 $2|X_P|$ 个角，根据引理 26，它包含于某个 $B^L \cup B^R$ 中，其中 $B^L \in Z_P^L(2|X_P|)$ 和 $B^R Z_P^R(2|X_P|)$，从而得出此情形。

如果上述过程未能成功，我们有 $\mathring{X}^M \neq \emptyset$，下面说明如何利用移位序列将 $\mathring{X}^M$ 重配置到一个公共端点上。令 X^M 为至少有一个端点位于 $\mathring{X}^M$中的弧的集合，并令 $D' = D + X - X^M$。注意到 D' 的任何终端分量都包含 X^M的一个端点，并且得益于我们对 $\mathring{X}^L$ 和 $\mathring{X}^R$的最大化，可得如下结论。

断言 2。 D'的任何终端分量都不与 $W(\mathring{X}^M)$ 相交。

断言的证明。不妨假设并非如此，即弧 $a \in X$ 有一个端点位于角 w_i，而 w_i 包含在汇分量 T' 中。根据引理 13，存在一条从 w_i 到 T 的有向路径，该路径位于 D 中，这意味着 $[w_i, w_r] \subseteq T'$。回到 $D + X$，我们重新考察右端点 w_j^e，它是 $\mathring{X}^M$ 中在第一步无法右移的最右端点。由于 $j \geq i$，我们也有 $[w_j, w_r] \in T'$ 位于 D' 中，因此更进一步，$[w_j, w_r]$ 位于 $D - e$ 的同一个强连通分量中。特别是，无论 e 如何定向，右移 w_j^e 都必然会得到一个强连通补全。这与 $\mathring{X}^R$ 的极大性矛盾，从而证明了该断言。

换言之，断言2表明， D' 的所有终端分量都只与 X^M 中不在 P 上的端点相接。特别地，我们得到以下推论。

断言 3。 将 $\mathring{X}^M$ 中的所有端点替换为任意 $w_g \in P$ 可保持强连通性。

断言的证明。 固定 X^M，令 X_g^M 为从 X^M 中获得的弧集，具体做法是将 $\mathring{X}^M$ 的每个端点替换为 w_g。由于 $D' + X^M$ 是强连通的，对于 D'的任意源点 S' 和汇点 T'， X^M 都包含一条从 T' 到（某个角的） $\mathring{X}^M$ 的弧，以及一条从 $\mathring{X}^M$ 到 S'的弧。在 $D' + X_g^M$中，对于任意 S'，T'，这些弧又被替换为从 T' 到 w_g 以及从 w_g 到 S'的弧。特别地，在 $D' + X_g^M$中， D' 的任意初始汇点都可以通过 w_g到达任意初始源点，这意味着 $D' + X_g^M$是强连通的。

现在，考虑我们在第一步中重新配置的解，使 $\mathring{X}^L$ 和 $\mathring{X}^R$最大化，并寻找一个角 w_g，以便使用断言 3替换 $\mathring{X}^M$ 的所有端点。将 $\mathring{X}^M$的端点从左到右排列，然后依次将它们向左移位，直到全部属于 P 上的 X 的（新）左栈。这保持了一个多重补全；现在，根据定义， $\mathring{X}^L$ 连同（更新后的） $\mathring{X}^M$ 都位于 P 上的 X 的左栈中，这意味着根据引理 26，它们属于某个 $B_q^L \in Z_P^L$ （ q ）。现在，这仍然保持了一个多重补全，但可能会破坏 $D + X$的强连通性。为恢复这一点，我们反复对 $\mathring{X}^M$（ W）中相邻的角应用引理 21，最终将 $\mathring{X}^M$ 的所有端点移位到某个共同的角 w_g上，而该角必定属于 B_q^L。这得到一个多重补全，根据断言 3，该补全是强连通的，因此也是一个解。的所有角

$\mathring{X}^L$ 和 $\mathring{X}^M$ 现在属于 B_q^L，并且回顾一下， $\mathring{X}^R$ 的所有角都属于 P上 X 的右栈，因此属于某个 B_q^R，由此得证。□

结合本节的结果，我们可以将搜索范围限制在受支持解之内。

推论 31。 任意正实例（D、k）都存在一个受支持解。

证明。设 D 为一个平面有向图，X 为 D 的任意解。只需遍历 D 的所有面 F，并（独立地）将其重新配置 X_F 为一个受支持的补全。依次考虑所有局部终端和区间有向路径，并对任意这样的 I 应用引理 29 或引理30，从而得到一个支撑在 I 上的解。在处理区间 I 时，唯一的端点

$^\circ$中被重新配置的 X 是 X_I，也就是说，在对 X_F进行的所有重新配置过程中，X 始终受到 I 的支撑。然后，由于 X_F 的端点不会针对其他面重新考量，我们可以对所有面独立地重复这一过程。□

4.7 对受支持补全数量的界定

为了寻找受支持解，我们考察它们在实例各个面上的限制，也就是它们的受支持补全。下面的引理允许我们枚举任意一个面的这些补全。

引理 32. 对于任意一个具有 F 个局部终端的面，其至多含有 ℓ 条弧的 F 的受支持补全数量不超过 $2^{O(\mathsf{lt}+\ell)}$。此外，可以在 $2^{O(\mathsf{lt}+\ell)}n^{O(1)}$时间内枚举这些补全。

证明。令 $\mathsf{lt} = \mathsf{lt}(F)$，并将 F 的边界划分为其局部终端和区间有向路径 $(I_i)_i$，其中 $1 \le i \le 2\mathsf{lt}$。注意，这些区间的角将 $W(F)$ 划分为若干部分。对于所有 $(I_i)_i$，选择补全 X（大小为 ℓ）的（带标签）端点数量 $(p_i)_i$，使得 $\sum_i p_i = 2\ell$，至多有$\binom{2\mathsf{lt}+2\ell}{\mathsf{lt}} \le 2^{O(\ell+\mathsf{lt})}$ 种选法。再考虑至多含有 ℓ 条弧的补全，选法数还需乘以一个 2^ℓ，仍然得到至多 $2^{O(\ell+\mathsf{lt})}$ 种满足 $\sum_i p_i \le 2\ell$的 $(p_i)_i$ 选法。然后，对于每个 $(p_i)_i$，至多有 $3^2 \cdot 2^{2p_i}$ 种方法为 I_i选取大小为 $2p_i$ 的支撑 B_i。事实上，根据定义27，B_i 是 $Z_I^L(p_i)$ 中的一个元素与 $Z_I^R(p_i)$ 中的一个元素的并集；根据观察 25，这两者的大小均至多为 $3 \cdot 2^{p_i-1}$，且可在 $2^{O(p_i)}n^{O(1)}$时间内枚举。因此，对于任意固定的 $(p_i)_i$，所有区间合计至多有 $3^{2\ell}2^{\sum_i 2p_i} = 2^{O(\ell)}$ 种此类选法。综上，在 F 中，受支持补全可能关联到至多 4ℓ 个角的集合共有 $2^{O(\mathsf{lt}+\ell)}$ 个，且可在 $2^{O(\mathsf{lt}+\ell)}n^{O(1)}$时间内枚举。

取任意这样的集合 U，U 上的不同可能补全 X 的数量，至多等于 U上的不同外平面有向图的数量。回顾一下，已知有 4ℓ 个顶点的（带标号）外平面三角剖分的数量为 $C_{4\ell-2} = O(4^{4\ell}) = 2^{O(\ell)}$，这得益于 Walkup [27]。使用 Bespamyatnikh [2] 的算法，可以将这些三角剖分全部枚举出来，延迟时间为 $O(\log\log\ell)$，尤其是用时 $2^{O(\ell)}n^{O(1)}$。然后，为了找出所有带标号的外平面有向图，遍历所有三角剖分，并对其中每条边 uv，任选其一：无邻接关系、弧 (u, v) 或弧 (v, u)。由于每个三角剖分中有 $2\mathsf{lt} - 3$ 条边，因此每条边有 $3^{2\ell} = 2^{O(\ell)}$ 种选择。总计可得到 U上的 $2^{O(\ell)}$ 种不同外平面有向图，且可在 $2^{O(\ell)}n^{O(1)}$ 时间内枚举。总而言之，考虑到所有可能角集合的枚举，至多有 F 的 ℓ 条弧的 $2^{O(\mathsf{lt}+\ell)}$ 个受支持补全。此外，这些补全可以在 $2^{O(\mathsf{lt}+\ell)}n^{O(1)}$ 时间内枚举。

□

由于交替面上的局部终端数量有界，因此我们可以推导出所有这些局部终端的受支持补全数量也有一个上界。

推论 33. 设(D, k) 是一个 *DPSCA* 实例，且 $|\mathcal{T}(D)| \le 2k$，$\mathcal{AF}$ 是 D 的交替面集合。那么，$\mathcal{AF}$ 中大小至多为 k 的受支持补全数量至多为 $2^{O(k)}$，并且可以在 $2^{O(k)}n^{O(1)}$ 时间内枚举出来。

证明。由于对于每个交替面，$\mathsf{lt}(F) \ge 4$，$\sum_{F\in\mathcal{AF}(D)}\mathsf{lt}(F) \le 4|\mathcal{T}(D)| - 8$由引理 15 得出，且 $\mathcal{T}(D) \le 2k$由假设得出，因此交替面的数量至多为 $2k$ 个（F_i）。要枚举所有

受支持补全，我们首先枚举所有可能的弧选择，以补全 k_i F_i，使得 $\sum_i k_i \leq k$，即 $2^{O(k)}$。对于每个这样的 $(k_i)_i$ 选择以及每个 F_i，引理 32 给出 $2^{O(\mathsf{lt}(F_i)+k_i)}$ 个 F_i 的受支持补全，其中包含 k_i 条弧。综合 $\mathcal{AF}$ 中的可能解，可得 $2^{O(\sum_i(\mathsf{lt}(F_i)+k_i))} = 2^{O(k)}$，这是由引理 15 得出的，且因为 $\sum_i k_i \leq k$。根据引理 32，可在 $2^{O(k)}n^{O(1)}$ 时间内枚举这些解。□

对于简单面的情况，$\mathsf{lt} = 2$，这意味着引理 32 的界仅取决于补全的大小。下文将说明，就我们的目的而言，这些也有一个绝对常数界。

引理 34. 设 D 是一个平面有向图，X 是 D 的一个最小解，那么对于任意简单面 F，我们有 $|X_F| \leq 3$。

证明。考虑 $D' = D + X - X_F$，其中 F 必须是一个简单面，且 X_F 是其大小最小的解。我们证明 D' 存在一个至多由三条弧组成的解，这些弧嵌入在 F 中。用此解替换 X_F 中的 X，即可得到所需结果。如果 F 在 D' 中是强连通的，那么 D' 已经强连通，这意味着 $X_F = \emptyset$；因此我们可以假设 F 是简单的。于是，设 S，T 分别为 D' 中 F 的局部源点和汇点，设 P_1，P_2 为从 S 到 T 的区间有向路径。我们将证明，总能在 F 中至多添加三条新弧，形成一条从 T 到 S 的路径，从而使 $V(F)$ 强连通，并因此为 D' 得到一个大小符合要求的解。

首先注意，如果 S 和 T 之间至少有一对顶点在 D中不是弧，我们就可以添加一条从 T 到 S 的弧，得到一个大小为一的解。现在考虑 X_F；根据引理 17，由于其极小性，T内部和 S内部都不含弧。于是我们知道，X_F包含一条弧（t，w），其中 $t \in T$到 $w \in P_i$，以及一条弧（w'，s），其中 $w' \in P_j$和 $s \in S$对于 i，$j \in \{1, 2\}$。

如果将（t，w）、（w'，s）添加到 D'后，V（F）已经是强连通的，特别是当 w和 w'对应同一个顶点时，这就得到一个大小为二的解。如果 $i \neq j$，由于 s和 t在 D'中之间存在一条弧，且 $D'[V$（F）] 是外平面图，因此可以添加弧（w，w'）而不会引入交叉。将其与（t，w）、（w'，s）一同添加，可确保存在一条从 T到 S的路径，从而得到一个大小为三的解。否则，不失一般性地假设 $i = j = 1$，回顾 $w \neq w'$，并且w必须在 w'之后出现，沿着从 S到 T的 P_1。于是，由于 $D'[V$（F）] 是外平面图，D' 中要么在 t 和 w'之间，要么在 s 和 w之间存在一条非弧。第一种情况下，（t，w'）与（w'，s）构成一个大小为二的解；第二种情况下，（t，w）和（w，s）构成一个大小为二的解。□

引理 34与引理 32共同给出了简单面中极小支持完备数量的绝对上界。

推论 35. 存在一个绝对常数 $c_{\mathcal{S}}$，使得对于任意实例 (D, k)以及 D的任意简单面 F，F 的极小受支持补全数量至多为 $c_{\mathcal{S}}$。此外，这些补全可以在多项式时间内枚举。

4.8 在简单面内计算最小解

至此，我们可以对交替面 $\mathcal{AF}$上所有大小至多为 k 的受支持补全进行分支。若要得到一个固定参数可处理算法，现在只需针对每个分支，计算（初始）简单面 $\mathcal{SF}$ 内剩余部分的最小解，也就是说，求解以下问题。

简单 PSCA**输入：** 一个 PSCA 实例 (D, k)，以及 D 的简单面 $\mathcal{F}$ 的一个（子）集**问题：**
对于 (D, k)，是否存在一个解 X，使得 X 的每条弧都嵌入在 $\mathcal{F}$ 中?

正如我们此前所论证的，在简单面内存在多个（极小）受支持补全，这意味着我们的算法应通过在每个面中选取“允许的”补全来进行随机化。最简单的做法是直接归约到加权 SCA，但 [17] 的算法运行时间为 $2^{O(k \log k)} n^{O(1)}$。为了获得一个 $2^{O(k)} n^{O(1)}$ 算法，我们将改为归约到最小二分支问题。对于一个有向图 D $Y \subseteq A$ D $\overleftarrow{Y} =$，以及任意的 ( ), $\{v\ u \quad u\ v \in Y\}$ Y $D + \overleftarrow{Y}$ 我们令 (,) : (,) 。那么，当 强连通时， 就是一个 对偶连接集 。我们将依赖最小二分支问题的判定变体，其定义如下。

对偶连接集**输入：** 一个有向图 D 和一个整数 k **问题：** 是否存在某个 $Y \subseteq A(D)$，满足 $|Y| \leq k$，使得 $D + \overleftarrow{Y}$ 强连通?

我们现在回顾 Frank 的结果 [6]。

定理 36 (Frank'81)。 对偶连接集可在多项式时间内求解。

下面说明如何通过将简单 PSCA 随机化归约到对偶连接集，在 $2^{O(k)} n^{O(1)}$ 时间内求解简单 PSCA。

引理 37。 简单 *PSCA* 存在一个 $2^{O(k)} n^{O(1)}$ 算法。

证明。 设 (D, k) 和 $\mathcal{F}$ 构成一个简单 PSCA 实例。我们描述一种随机蒙特卡洛算法，将该问题归约到对偶连接集，然后说明如何对其进行去随机化。首先注意，将引理 29 和引理30 应用于 (D, k) 在 $\mathcal{F}$ 内的一个解，也可推出 (D, k) 在 $\mathcal{F}$ 内存在一个受支持解，因此我们只需寻找此类解。令 $c_{\mathcal{S}}$ 为推论 35 给出的最大受支持补全数量。根据同一推论，对于每个面 $F \in \mathcal{F}$，我们可以在多项式时间内生成集合 $\mathcal{X}(F)$，其中包含 D 的一个最小受支持解在 F 上的所有可能限制。然后，对于每个这样的面 F，我们以 $1/c_{\mathcal{S}}$ 的概率均匀随机选取一个补全$Y^F \in \mathcal{X}(F)$。

现在，我们在辅助有向图 D'上构造一个 Dijoin 实例，使其等价于（D, k）存在一个仅使用这些“允许”弧的解。 D' 的构造始于 D的平面 $k+1$细分，并遵循 D的嵌入。接着，考虑每个 $F \in \mathcal{F}$、任意$s \in S$和 $t \in T$，并取 D'中的相应面 F'。现在，对每个 $e =$（u, v） $\in Y^F$，我们添加一个顶点$x_{(u,v)}$，以及：弧（$x_{(u,v)}$, u）、一条从 s 到$x_{(u,v)}$、长度为 $k+1$ 的有向路径$P_{s,\ x_e}$，以及一条从$x_{(u,v)}$ 到 v、长度为 $k+1$ 的有向路径$P_{x_{(u,v)},\ v}$。由此完成了 D'的构造；需要强调的是，它不一定是平面的。

断言4：（D', k）对 Dijoin 为正，当且仅当（D, k）存在一个包含于$\bigcup_{F \in \mathcal{F}} Y^F$中的简单 PSCA 解。

该断言的证明。首先，假设给定一个受支持解 X，其对应于 (D, k)，且所有弧都在 $\bigcup_{F \in \mathcal{F}} Y^F$ 中。考虑 D'，并定义 $X' = \{(x_{(u,v)}, u) : (u, v) \in X\} \subseteq A(D')$。我们通过证明对于任意 $x, y \in V(D)$，都存在一条从 x 到 y、位于 D' 中的有向路径，来说明 $D' + \overleftarrow{X'}$ 是强连通的。这就足够了，因为根据构造， $V(D') \setminus V(D)$ 的所有顶点都存在一条从 $V(D)$ 出发的路径，以及一条通往 $V(D)$ 的路径。于是，任取这样的 $x, y \in V(D)$，令 P 为 $D + X$ 中从 x 到 y 的路径。我们通过替换 P 中的以下弧，在 $D' + \overleftarrow{X'}$ 中定义一条从 x 到 y 的路径 P'：

$P \cap A(D)$ 中的每条弧都替换为其在 D' 中的 $k+1$-细分，

- 每条弧 (u, v) $\in P \cap X$ 被替换为由 (u, $x_{(u,v)}$) $\in$构成的路径 $\overleftarrow{P_{x_{(u,v)},v}}$ X' 和 .

这表明 $D + \overleftarrow{X'}$ 是强连通的，并完成了这一方向的证明。

反过来，假设 D' 有一个大小至多为 k 的对偶连接集 X'，并定义 $X = \{(u, v) \mid x_{(u,v)} u \in X'\}$。考虑任意 $x, y \in V(D)$，以及一条从 x 到 y 的有向路径（位于 P' 中），我们通过将 P' 拆分为从 $V(D)$ 到 $V(D)$ 的极小子路径，并将每条子路径替换为 $D + X$ 中的一条有向路径，构造一条从 x 到 y 的有向路径 P。考虑 P' 中任意一条位于 $V(D)$ 两个顶点之间的此类极小（有向）子路径 P''，令 P'' 为其底层无向路径；我们注意到，它必定已经是 D' 的一条底层路径。

如果 P'' 对应于 (a, b) 的 $k + 1$ 细分，我们只需将其替换为 (a, b)。注意，P'' 不可能对应于 (b, a) 的 $k + 1$ 细分，否则这条路径上的每条弧都将属于该对偶连接集，这与 $|X'| \leq k$ 矛盾。否则，我们可以假设存在某个面 $F \in \mathcal{F}$，其对应的 $s \in S$ 和 $t \in T$ 由构造选定，且 $(u, v) \in Y^F$，使得 P'' 位于以下某两者之间：s 与 v、s 与 u，或 u 与 v。我们先同时处理前两种情况。若 P'' 从 s 指向 u 或 v，注意，引理 13 已给出一条在 D 中从 s 到 u 或 v 的有向路径，我们用它替换 P''。此外，P'' 不可能从 u 或 v 指向 s，否则 P'' 的所有弧都将属于该对偶连接集，这与其大小矛盾。剩下的情况是 P'' 位于 u 与 v 之间。此时再次注意，P'' 不可能从 v 指向 u，否则 $P_{(x_{(u,v)},v}$ 的所有 $k + 1$ 条弧都会属于该对偶连接集。因此，P'' 从 u 指向 v，这特别意味着 $(x_{(u,v)}, u) \in X'$，进而 $(u, v) \in X$，于是我们可以用 (u, v) 替换 P''。由此可知，$D' + \overleftarrow{X'}$ 中任何位于 $V(D)$ 的顶点之间的子路径 P''，都可以替换为 $D + X$ 中连接同一对顶点的一条有向路径，这也说明 $D + X$ 是强连通的。$D + X$ 是平面的，这是因为我们选择每个 Y^F 时都将其作为平面支撑补全；它是定向的，则源于引理 17。

然后，我们在（D'，k）上运行 Frank 算法 [6] 以求解对偶连接集。根据上述内容，该算法可在多项式时间内判定（D，k）是否存在位于 $\bigcup_{F \in SF} Y^F$ 内的解。我们声称，如果（D，k）在 $\mathcal{F}$ 内存在任意解，则该算法以至少 $1/c_{\mathcal{S}}^k$ 的概率输出 yes。事实上，假设情况确实如此，并令 X 为（D，k）在 $\mathcal{F}$ 内的任意一个最小受支持解。令 $\mathcal{F}(X) \subseteq \mathcal{F}$ 表示 X 嵌入一条弧时所处的面，并注意到 $|\mathcal{F}(X)| \leq k$。以 $1/{c_{\mathcal{S}}}^k$ 的概率，对于每个 $F \in \mathcal{F}(X)$，我们恰好选中了 $Y^F = X_F$。由于 X 确实是（D，k）在 $\bigcup_{F \in SF} Y^F$ 中的一个解，对偶连接集算法必然会输出 yes。由此得到一个多项式时间的（真偏置）蒙特卡洛算法，用于求解简单 PSCA：当（D，k）不存在解时，该算法总是输出 no；而当其存在解时，算法以至少 ${1/c_{\mathcal{S}}}^k$ 的概率输出 yes。

上述过程可以使用通用集进行去随机化。我们采用 Ullrich 和 Vybíral 的术语 [26]。这里，我们的通用集将是一族 H 函数，每个函数都将一个简单面 $F \in \mathcal{F}$ 映射到 $\mathcal{X}(F)$ 中的一个元素。形式化地说，我们取 H 为一个 $(n, k, c_{\mathcal{S}})$-通用集。也就是说，对于（至多）n 个面 D 中的任意（至多）k 个面 $F_1, \ldots, F_k \in \mathcal{F}$，以及任意选择的 $Y_i \in \mathcal{X}(F_i)$（对应于 $i \in [k]$），都存在一个函数 $h \in H$，使得对于每个 i，均有 $h(F_i) = Y_i$。特别地，对于这样的一个 h，由于 $|\mathcal{SF}| \leq k$，对于每个 $F \in \mathcal{F}$，都有 $h(F) = X_F$。这类函数族 H 存在大小为 $2^{O(k \log c_{\mathcal{S}})} \log n = 2^{O(k)} n^{O(1)}$ 的显式构造，且可在与其大小成线性时间内计算，参见 [26] 中的定理 2.5（该定理依赖于 [20]）。遍历整个通用集会为去随机化带来一个 $2^{O(k)} n^{O(1)}$ 因子，因此 (D, k) 可以在时间 $2^{O(k)} n^{O(1)}$ 内判定。注意，Frank 算法 [6] 是构造性的，因此我们也可以利用我们的归约来恢复简单 PSCA 的解。□

4.9 固定参数可处理性

现在，我们将对交替面的分支与引理 37 给出的简单 PSCA 算法相结合，以证明 PSCA 是固定参数可处理的。

定理 2. 平面强连通性增强关于解的大小 k 是固定参数可处理的，并且存在一个 $2^{O(k)}n^{O(1)}$ 算法。

证明。 给定一个实例 (D, k)，我们首先在多项式时间内将 D 划分为强连通分量，见 Tarjan [24]。然后，我们计算局部终端，以及交替面 $\mathcal{AF}$和简单面 $\mathcal{SF}$的集合，这同样可以在多项式时间内完成。如果交替面上的局部终端数量之和大于 $8(k-1)$，我们就直接输出 No。事实上，根据观察 14 和引理 15，(D, k) 必定是一个否实例。因此，从现在起我们可以假设 $\sum_{F\in\mathcal{AF}} lt(F) \leq 8(k-1)$。

利用推论 33，我们枚举交替面内所有大小至多为 k 的受支持补全 $Y^{\mathcal{AF}}$。这至多产生 $2^{O(k)}$ 个分支，而遍历所有这些补全只会使运行时间增加一个 $2^{O(k)}n^{O(1)}$ 因子。在每个分支中，我们计算 $D' = D + Y^{\mathcal{AF}}$ 和$k' = k - |Y^{AF}|$。然后，我们通过运行引理 37 中的简单 PSCA 算法，并令 $\mathcal{F} = \mathcal{SF}$，来判断 (D', k') 是否存在一个位于（初始）简单面 $\mathcal{SF}$ 内的受支持解。如果对应于 $Y^{\mathcal{AF}}$ 的分支对 (D', k') 输出 yes，令 Y' 为一个解，则显然 $Y^{\mathcal{AF}} + Y'$ 是 D的一个（受支持）解。反过来，假设 (D, k) 存在一个最小解 X，并令其为受支持解。在我们的某个分支中，我们会恰好选择$Y^{\mathcal{AF}} = X_{\mathcal{AF}} = \cup_{F\in\mathcal{AF}} X_F$。此时注意到， $X_{\mathcal{SF}} = \cup_{F\in\mathcal{SF}} X_F$是 (D', k') 的一个受支持解，这意味着我们的简单 PSCA 算法 (D', k') 会找到一个大小至多为 $|X_{\mathcal{SF}}|$的（受支持）解，因此输出 yes。结合分支过程和该算法，我们得到一个求解 PSCA 的算法，其运行时间为 $2^{O(k)}n^{O(1)}$。

□

5 NP 完全性

本节将证明定理 1，即 PSCA 的可增广性变体（称为 PSCA′）是 NP 困难的；这一结论也适用于 PSCA。

平面强连通可增广性（PSCA’）**输入：**一个三连通平面有向图 D**问题：**是否存在一个子集 $X \in V(D)^2$，使得 $D + X$ 是强连通的、定向的且平面的?

显然，该问题属于 NP：给定一个图 G和一组弧 X，可以在多项式时间内验证 $G + X$ 是否强连通且为平面图。我们通过从平面 3-SAT 归约来证明其困难性。平面 3-SAT 是可满足性问题的一种限制，其中每个子句恰好包含三个文字，且公式的关联图是平面的。Lichtenstein [18]已证明该问题是 NP 完全的。在 Lichtenstein 从 3-SAT 出发的归约中，实例规模仅呈二次增长。这意味着，在 ETH 成立的前提下，平面 3-SAT 不存在 $2^{o(\sqrt{n})}$时间算法。为了在 ETH 成立的前提下得到相同的下界，我们必须证明从平面 3-SAT 到 PSCA’ 的归约是线性的，也就是说，一个含有 n 个变量的平面 3-SAT 实例会产生一个含有 $O(n)$个顶点的实例。定理 41 将证明这一点，不过我们先介绍一些术语并描述该归约。

考虑一个平面 3-SAT 实例 $\Phi = \bigwedge_{j=1}^{m} \phi_j$，其变量为 x_1、.....、 x_n，并为其选定任意一个固定的平面嵌入。不失一般性，我们假设Φ 的关联图是连通的。我们构造一个平面有向图 D ，使得 Φ 可满足，当且仅当 D对于 PSCA′是正的。我们的构件均为平面且有向的，并且最终不会有任何构件嵌入另一个构件的内面。因此，尽管任何构件的外面都可能与实例的其余部分“交互”，归约中的逻辑选择对应于内面中的补全。接下来，我们将这些“内部”补全形式化，并引入一些概念，以便对 PSCA′ 的正约化实例所允许的可能补全施加限制。

内部补全。 下文中，我们考虑某个 PSCA 实例 D 的一个平面子有向图 H ，它之后将对应于一个构件，并介绍一些关于 H. 内部补全的术语。 H 的内部补全是指所有弧都嵌入在 H. 内面中的补全。若 H 的终端 x 不与外面相邻，则称其为内部终端。于是， D 的任何有效解都必须添加一条与 x相关联的弧：若 x 是源点，则弧指向 x ；若 x 是汇点，则弧从 x 出发。注意，这样的弧必然嵌入在 H. 的某个内面中。若 H 的补全X 是内部补全，且 $H + X$ 的所有终端分量都位于外面，则称其为有效补全。

给定 H的两个补全 Y， X ，若 Y的强连通分量划分是 $H + Y$. 的强连通分量划分的（严格）细化，则称 Y（严格）支配 X 。彼此支配的两个补全称为等价，且具有相同的划分。若一个补全不受其他补全支配，则称其为极大补全；但请注意，极大补全可能不止一个。我们将在整个归约过程中使用以下观察，从而可以假设每个构件内的补全都是极大补全。

观察 38. 设 D 是 *PSCA* 的一个正实例，且存在一个解 Y；设 H 是 D. 的一个（平面）子图。那么，Y 在 H 上的限制 Y_H 是有效的，并且用一个支配性有效补全替换 Y 中的 Y_H 仍可得到一个解。

归约概要。 我们首先在第 5.1 小节中定义归约所用的文字构件、变量构件和子句构件。文字构件有两种极大有效补全，分别对应正赋值和负赋值。变量 x 的构件由若干文字构件组合而成，其数量等于 x 在 Φ. 中出现的次数 n_x 。我们证明，变量构件的任何极大有效补全，要么是其所有文字的正补全，要么是其所有文字的负补全。因此，在正实例中，变量构件的补全由一个汇分量组成，该汇分量包含除 n_x 个“顶部”源点之外的所有顶点；这些源点位于外面。子句构件是内部三角剖分，不存在内部补全。我们在第 5.2 小节中描述的构造展示了如何利用这些子句构件，将所涉变量（文字）的源点连接到同一个源分量中。我们在第 5.3 小节中证明归约的正确性，从而证明定理 1。

5.1 构件

考虑一个在 Φ. 中出现 n_x 次的变量 x 。我们将通过组合 n_x 个文字构件来构建 x 的变量构件，每个文字构件都与其对应子句的构件相识别并连接。

5.1.1 文字

要构造文字构件 L（如图 5 所示），我们从一个长度为 8 的交替环开始，并将其平面嵌入。任意选择一个汇点作为底部汇点，并将其标记为 b，然后按顺时针顺序将其余左侧、顶部和右侧的汇点分别标记为 l、 t、 r. 。我们将两个汇点之间的源点标记为

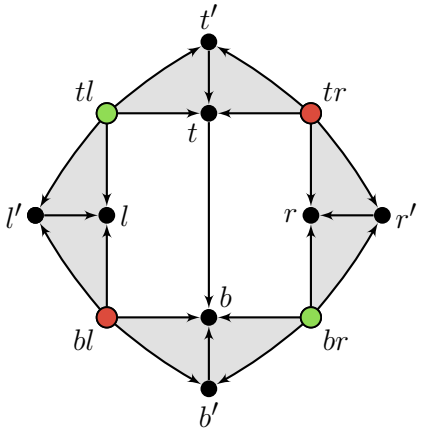

图 5：文字构件 L，其内部汇点为 b、l、r，底部源点为 bl、br，顶部源点为 tl、tr.

bl （左下）、 tl （左上）、 tr （右上）和 br （右下），并根据它们相邻的汇点进行标记。为每个汇点创建一个孪点 b'、l'、t'、r'，并将它们嵌入八边形的外面，然后从孪点向原汇点添加一条弧。接着，在八边形内添加弧 $(t,\ b)$，只留下 b、l、r 作为汇点。由此得到两个五边形面，它们是仅有的可以完成的面。

我们称构件的补全 X 命中 源点 s，若其包含一条指向 s 的弧；若其包含一条从 $t.$ 出发的弧，则称其X 命中汇点 t。文字构件的汇点均位于构件内部，在变量构件中也将保持在内部，因此有效补全必须命中所有这些汇点。在变量构件中，每个文字的底部源点也将位于内部，这将迫使至少命中其中一个。以下引理表明，这两个约束足以将补全限制为恰好两个极大补全。

引理39。 命中 br 的文字构件 L的任何有效补全，要么是：

- 正补全 $Y = \{(r,t)$、(t,br)、(l,b)、$(b,tl)\}$，产生源点 bl、tr，并且在 $L+Y$ 中仅有另一个（汇点）强连通分量；或者
- 被正补全支配的补全 $Y = \{(r,t),(t,br),(b,l),(l,t)\}$。

任一命中 bl 的有效补全要么是：

- 负补全 $Y = \{(l,t),\ (t,bl),\ (r,b),\ (b,tr)\}$，产生源点 br, tl，且仅在 $L+Y$中的另一个（汇点）强连通分量，或者 e
- 被负补全支配的补全 $Y = \{(l,t),\ (t,bl),\ (b,r),\ (r,t)\}$。

在所有情况下，所有非源点顶点构成一个汇分量。

证明。 令 Y 为命中至少一个底部源点 bl 的有效补全，$br.$ 由于 l、b 和 r 是内部汇点，它们必须被 Y 命中；注意，不能向 bl 或 $br.$ 添加任何命中这些汇点的弧。这意味着，命中 l、b、r 以及 bl 和 br 中一个的弧彼此不同。由于每个 5-面中至多可以添加两条弧，$|Y| = 4$ 并且 Y 恰有两条弧嵌入左面和右面中的每一个。

首先假设 Y 命中 $br.$。命中 br 的弧恰好是 $(t,br) \in Y$，否则内部汇点 r 就无法被命中。因此，要命中 r，Y 在右侧五边形面中的另一个（唯一）弧必须是 (r,t)。如果命中 b的 Y的弧是 (b,tl)，则得到正补全 $\{(r,t),\ (t,br),\ (l,b),\ (b,tl)\}$

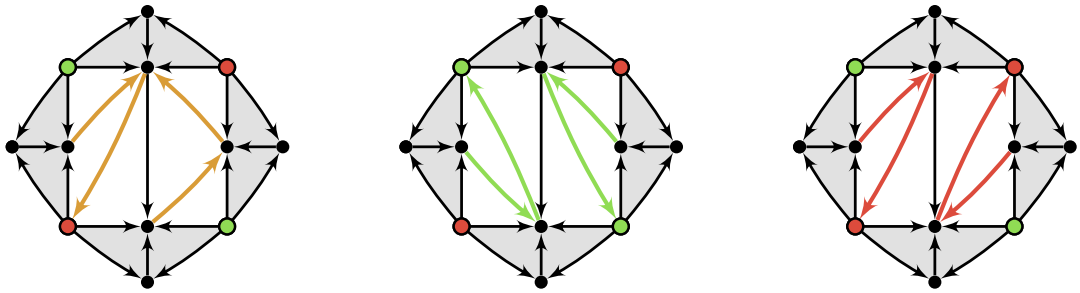

图6：文字构件 L 及其三个补全。第一个补全有效，并命中了一个底部源点，但被第三个补全支配。第二个和第三个补全分别对应正补全和负补全（均有效）。它们恰好命中一个底部源点，并形成一个汇分量，其中包含除两个未被命中的对跖源点以外的所有顶点。

（见图6中的第二个补全）。否则，它必定是 (b,l)，由此得到补全$\{(r,t),\ (t,br),\ (b,l),\ (l,t)\}$. 在这两种情况下，由于 bl, tr 未被命中，它们是 $L+Y$的源点；而在第二种情况下， tl 也必须是源点。

若 Y 命中 bl，情况则是对称的，这会迫使左侧情形中添加的 Y 的弧为 (t,bl) 和 (l,t)。然后，根据左侧情形中命中 b 的弧，我们要么得到负补全$Y=\{(l,t),(t,bl),(r,b),(b,tr)\}$，从而得到源点 br, tl（图6中的第三个补全）；要么得到$Y=\{(l,t),(t,bl),(b,r),(r,t)\}$，从而得到源点 br, tl, tr（图6中的第一个补全）。□

正约化实例只能保证文字之间的补全是有效的，而下面的变量构件则确保它们的补全也必须是极大的，从而迫使补全为正补全或负补全。

5.1.2 变量

下面正式描述变量 x 的构件 G_x。变量 x 在 ϕ. 中出现 n_x 次。注意，我们可以假设 $n_x \geq 2$，否则可以通过移除 x 及其对应的子句来约化该 3-SAT 实例。取 n_x 个文字构件的副本， L_1、...、L_{n_x}，并将相应的顶点标记为带下标 $i \in [1, n_x]$. 的形式。令下标 i 以 n_x 为模，构造变量 x 的变量构件如下：

- 对于 $i \in [1, n_x]$，将源点 $br_i \in V(L_i)$ 和 $bl_{i+1} \in V(L_{i+1})$ 识别为同一个顶点，
- 对于 $i \in [1, n_x]$，将 r'_i 与 l'_{i+1} 识别为同一个顶点，
- 最后，将所有 $(b'_i)_i$ 识别为一个公共顶点 b'.

我们以规范方式嵌入所得构件，使由 $(b_i)_i$ 和 $(br_i)_i$ 构成的（反向有向）环为平面，并保留任意 L_i 的嵌入。最终构造如图7所示，其中的补全对应于一个正赋值。

引理 40. 变量构件 G_x 恰好有两种极大有效补全：

- 正补全，其源点为$(tr_i)_i$，汇分量为 $Y_x = V(G_x) \setminus \{tr_i :\ i\}$.
- 带有源点 $(tl_i)_i$和汇分量 $Y_x = V$（G_x）$\setminus \{tl_i$的负补全： $i\}$.

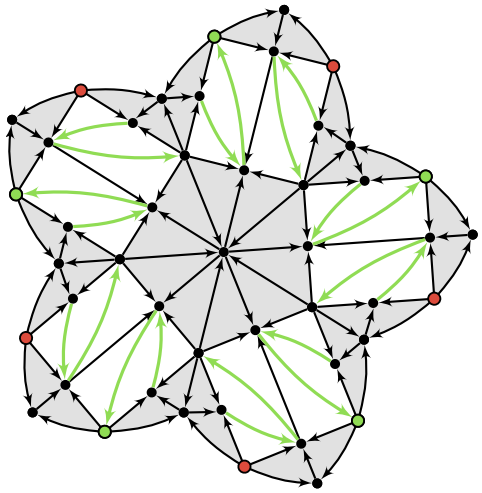

图7：变量 x的构件 G_x ，出现在 5 个子句中；图中绿色部分表示与正赋值对应的极大补全。这会产生一个有效补全，其中每个文字的右上顶点都是源点，而所有其他顶点构成一个汇分量。

证明。 考虑一个变量构件 G_x，它由文字构件（L_i）$_i$ 组成。令 Y 为 G_x 的极大有效补全， $Y_i = Y \cap V$（L_i）^{2} 为其在文字构件 L_i.上的限制

G_x 的内部汇点恰好是 $(l_i, b_i, r_i)_i$，对于 $i \in [n_x]$，这意味着每个 Y_i 都是 L_i. 的有效补全。 G_x 的内部源点恰好是 $(br_i)_i$，根据构造，它们都必须由文字构件中的弧覆盖。于是，根据引理39，我们知道这样的弧至多有一条可以属于同一个 Y_i. 。因此，每个 Y_i 都恰好包含一条与 br_i 或 $bl_i = br_{i-1}$. 关联的弧。我们声称Y_i 对于 L_i. 也必须是极大的。假设并非如此，那么根据引理39，它必定是被正补全和负补全支配的两个补全之一。在这两种情况下， tl_i 和 tr_i 都是 $L_i + Y_i$中的源点，因而也是 $G_x + Y$. 中的源点。于是，用支配它的补全替换 Y_i ，就会得到一个支配 Y的 G_x 补全，这与其极大性矛盾。因此，每个 Y_i都是 L_i.的正补全或负补全。

现在，假设对于某个 i， Y_i 是 L_i 的正补全，也就是说，是命中 br_i. 的（唯一）有效解。由于 bl_i 和 br_{i-1} 已被识别， bl_i 现在必须由 Y_{i-1} 命中，这意味着 Y_{i-1} 也是 L_{i-1} 的正补全。对上述过程进行归纳应用可得，对于所有 $j \in [n_x]$. ，每个 Y_j 都恰好是 L_j 的正补全。反之，如果对于某个 i， Y_i 是 L_i 的负补全，那么对于所有 i. 也都是如此。

因此， Y 必定是这两种补全之一，我们分别称为正补全和负补全。在这两种情况下， Y 都包含一个经过所有内部源点的有向环。如果 Y 为正补全，则可通过按“顺时针”方向拼接有向路径（bl_i、 b_i、 tl_i、 t_i、 bl_{i+1}）得到该环。如果 Y 为负补全，则可通过按“逆时针”方向拼接有向路径（br_i、 b_i、 tr_i、 t_i、 bl_{i-1}）找到该环。应用引理39， $L_i + Y_i$ 由一个汇分量构成，该分量包含除源点 $\{bl_i, tr_i\}$ （正补全情形）或 $\{br_i, tl_i\}$ （负补全情形）以外的所有顶点。结合这两点观察， $G_x + Y$包含源点 $\{tr_i : i\}$，以及一个（唯一的）汇分量 $Y_x = V$（G_x） $\setminus \{tr_i : i\}$ （正补全情形）。在负补全情形下，它包含源点 $\{tl_i : i\}$ ，以及一个（唯一的）汇分量 $Y_x = V$（G_x） $\setminus \{tl_i : i\}$. 。这表明这两种补全确实都有效，而且是唯一的极大补全。□

5.1.3 子句

现在我们介绍子句构件，并将在第 5.2 小节中用它们连接相应变量构件的顶部源点。考虑 Φ中的一个子句 $\phi = l(x) \vee l(y) \vee l(z)$，我们构造构件 C_ϕ，其顶点分别分配给 x、y、z，与对应的文字无关。子句构件由 15 个顶点组成，是一个内三角剖分平面有向图，如图 8 所示，定义如下。首先取顶点 v_x、v_y、v_z，构成一个面有向三角形 $\overrightarrow{C}_\phi$.。然后，对每一对 v_x、v_y、v_z，添加一个公共出邻点，使所得三角形也为面，称这些顶点为m_{xy}、m_{yz}、m_{zx}.。接着，向 v_x添加出邻点 u_x、w_x；向v_y添加u_y、w_y；向 v_z.添加 u_z、w_z。然后，构造有向 4-圈 $\overrightarrow{C}_{xy} = (u_x、m_{xy}、w_y、m_{yx})$、$\overrightarrow{C}_{yz} = (u_y、m_{yz}、w_z、m_{zy})$ 和 $\overrightarrow{C}_{zx} = (u_z、m_{zx}、w_x、m_{xz})$，并将它们嵌入，使外边界为 $(u_x、v_x、w_x、m_{xy}、u_y、v_y、w_y、m_{yz}、u_z、v_z、w_z、m_{zx})$。最后，添加弧 $(m_{xz}、m_{zx})$、$(m_{yx}、m_{xy})$ 和 $(m_{zy}、m_{yz})$。注意，所得构件由源分量 $\overrightarrow{C}_\phi$构成，其中包含 $\{v_x, v_y, v_z\}$；其汇分量为 $\overrightarrow{C}_{xy}$、$\overrightarrow{C}_{yz}$、$\overrightarrow{C}_{zx}$.。

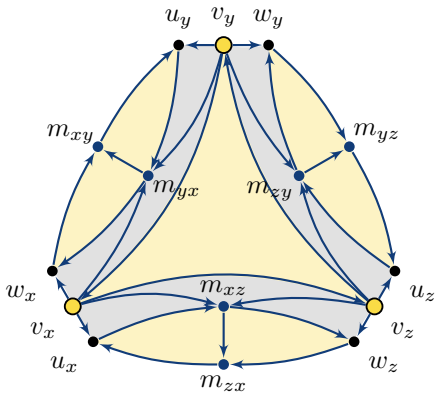

图8：一个子句构件 C_ϕ，适用于某个 $\phi = l(x) \vee l(y) \vee l(z)$。中央源分量以黄色突出显示，由顶点 $\{v_x, v_y, v_z\}$ 构成。随后，这些顶点将与相应文字构件的源点合并，这意味着至少有一个文字必须得到满足。其余三个汇分量也以黄色显示，它们将与文字构件合并，从而不再是终端。

5.2 构造

现在我们可以描述如何构造一个实例 D，将其映射到 PSCA′，并使其等价于变量为 $(x_i)_{i\in n}$. 的平面 3-SAT公式 $\Phi = \bigwedge_{j\in[m]} \phi_j$。首先，我们按照 Φ. 的嵌入，为变量 $(x_i)_i$ 嵌入构件 G_{x_i}，。对于每个变量 x，，回想一下，G_x 由 n_x 个文字构件组成，我们将它们重新标记为 $L_{x,\ \phi}$，适用于任何包含 x. 的 $\phi = \phi_j$。也就是说，G_x 内文字构件的（顺时针）顺序遵循 Φ. 中相应子句里 x （文字）的关联顺序。同样，在写作 $\phi = a \vee b \vee c$，时，我们假定 a，b，c 按照它们在 Φ. 中与相应变量的关联关系顺时针排列。

现在，我们说明如何将变量构件与相应的子句构件连接起来，如图9所示。考虑任意子句 $\phi = l(x) \vee l(y) \vee l(z)$，其中 x，y，z 按顺时针顺序出现在 Φ，中，并令 C_ϕ 为 ϕ.的子句构件。令 $L_{x,\ \phi}$，$L_{y,\ \phi}$ 和 $L_{z,\ \phi}$ 为相应的文字构件

G_x， G_y， G_z. 对于任意变量 $q \in \{x, y, z\}$，我们从 $L_{q,\ \phi}$中选取一个顶部源点和两个外部顶点，并按照 $l(q)$ 将它们分别与 C_ϕ 的顶点 u_q， v_q， w_q 对应起来，如下所示。

- 如果 $l(q) = q$，我们将左上方源点 $tl_{w,\ \phi}$ 与 v_q、连接，然后将 $t'_{q,\ \phi}$ 与 u_q、连接，并将 $l'_{q,\ \phi}$ 与 w_q.连接
- 如果 $l(q) = \bar{q}$，我们将右上方源点 $tr_{w,\ \phi}$ 与 v_q、连接，然后将 $r'_{q,\ \phi}$ 与 u_q、连接，并将 $t'_{q,\ \phi}$ 与 w_q.连接

然后，我们保留由子句构件的构造所给出的 m_{xy}、m_{yz}、 m_{zx} 和 m_{yx}、m_{zy}、 m_{xz} 的（相对）嵌入。最后，我们添加进入每个文字构件中其余顶部源点的弧。我们的添加方式确保无论变量构件的极大有效补全如何，每个变量构件的汇分量最终都属于同一个强连通分量。在此，我们假设 Φ 的关联图是连通的，否则我们将分别处理每个连通分量。为了连接这些顶部源点，我们沿着 C_ϕ周围顺时针考虑变量构件；对于 $\{x, y, z\}$中的任意两个相邻变量 p、 q，我们添加如下内容。

- 若 $l(p) = \bar{p}$ 和 $l(q) = q$，我们添加从 $r'_{q,\ \phi} \in V(L_{q,\ \phi})$ 指向顶部源点 $tl_{p,\ \phi} \in V(L_{p,\ \phi})$ 的弧。参见图9中 $y = p$ 与 $z = q$ 的构件之间的邻接关系。
- 若 $l(p) = p$ 和 $l(q) = q$，我们添加从 $l'_{p,\ \phi} \in V(L_{p,\ \phi})$ 指向顶部源点 $tr_{q,\ \phi} \in V(L_{q,\ \phi})$ 的弧，与上述情形对称。
- 若 $l(p) = \bar{p}$ 和 $l(q) = q$，我们添加从 $t'_{p,\ \phi} \in V(L_{p,\ \phi})$ 指向顶部源点 $tr_{q,\ \phi} \in V(L_{q,\ \phi})$ 的弧，以及从 $tr_{q,\ \phi}$ 指向 $tl_{p,\ \phi}$. 的弧。参见图9中 $z = p$ 与 $x = q$ 的构件之间的邻接关系。
- 若 $l(p) = p$ 和 $l(q) = \bar{q}$，则不添加任何弧。参见图9中 $x = p$ 和$y = q$ 的构件之间的邻接关系。

我们将上述构造应用于任意变量/子句关联。由于 Φ 是平面图，这些操作可以在保持平面有向图的同时完成。此外，该实例仍然是定向的，因为如上所述，直接添加在变量构件之间的弧不会因其他子句而被再次处理。

5.3 正确性

现在我们可以通过以下定理证明 PSCA′ 的困难性。回顾一下，该定理还蕴含 ETH 下的 $2^{O(\sqrt{k})}n^{O(1)}$ 下界，从而得到定理 1。

定理 41. *PSCA′ 存在一个从平面3-SAT 到该问题的线性规模归约。*

证明。 考虑一个平面 3-SAT 实例 Φ，其变量为 $(x_i)_i$ ，子句为 $(\phi_j)j$，我们可以假设该实例是连通的。令 D 为在第 5.2 小节中根据 Φ 构造的平面有向图，它是 PSCA′的一个实例。根据构造，显然 D 在 Φ中具有线性规模。

初始实例为正实例，则约化后的实例也是正实例。首先假设 Φ 是 3-SAT 的正实例，并证明 D 存在一种保持平面性的强连通增广（同样不含二边形）。该增广通过根据任意一个满足 Φ.的赋值，使用正向和负向补全来补全 $(x_i)_i$ 中的变量构件而得到。令 X 为此补全，如引理 40 中所定义，并考虑所得的（嵌入的）图$D + X$. 。根据构造， $D + X$ 是平面且定向的，下面证明它是强连通的

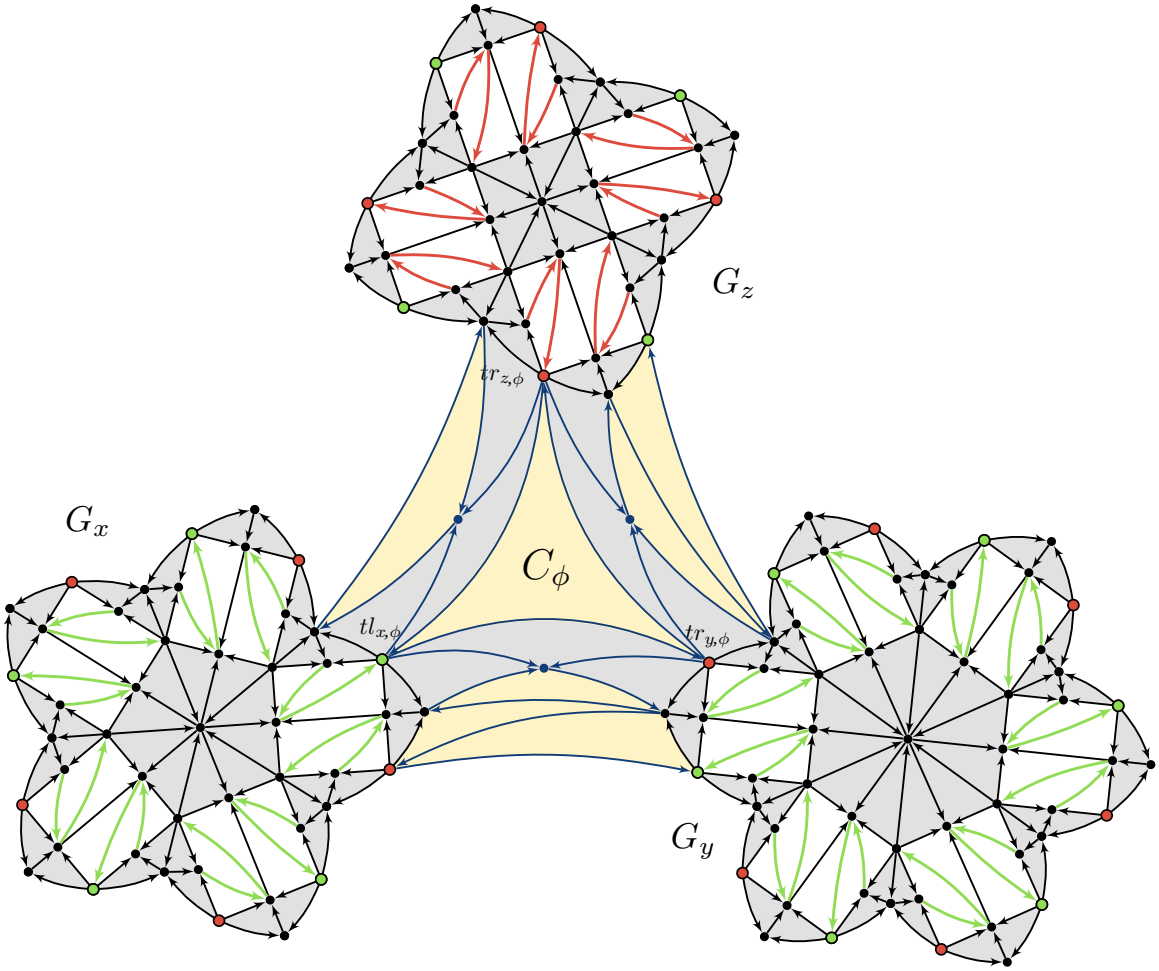

图9：对应于 $\phi = x \vee y \vee z$, 的子句构件，其中包含变量构件 x, y 和 z（在 Φ中分别出现 5, 4 次和 6 次）。文字构件的顶部源点现在与子句的（中央）源分量合并。在这里， x 和 y 分别以正向和负向完成，从而满足ϕ, ；这意味着子句的（初始）源点现在与 x 和 y.的汇分量处于同一个强连通分量中

通过逐步构建集合 $Y \subseteq V$，最终得到 $Y = V$，并论证每一步中 Y 的强连通性。

根据引理 40，对于 $D + X$，任意变量 x，其对应的构件 G_x 有一个汇分量 Y_x。该分量包含除以下顶点之外的所有顶点：如果 x 已以正向完成，则为 $(tr_{x,\ \phi})_\phi$；如果已以负向完成，则为 $(tl_{x,\ \phi})_\phi$；其中 ϕ 遍历涉及 $x.$ 的子句

对于出现在子句 ϕ，中的任意三个变量 x，y，z，它们在 $D + X.$ 中属于同一个强连通分量。这是因为在 Y_x 的顶点 (t'，l' 或 r') 与 Y_y，Y_y 以及 Y_z，之间添加了 4-圈，同时还有 Y_z 和 $Y_x.$。由于 Φ 的关联图是连通的，令 $Y = \bigcup_i Y_{x_i}$，并将子句中所有有向 4-圈的顶点加入其中，可得 Y 是强连通的。

注意，$D+X$ 的任何汇分量（分别为源分量）都必须包含 $D.$ 的一个汇分量（分别为源分量）。首先，变量构件的所有汇点都属于 Y，并且请记住，子句构件的汇分量（有向 4-圈）也满足这一点 $C_\phi.$ 因此，如果 $D + X$ 不是强连通的，它就有唯一的汇分量，其中包含 Y，而Y 之外的任何顶点都存在一条通向 $Y.$的有向路径

接着，将上述观察应用于源点（分量），可得 $D + X$ 中的任何源点都必须包含一个属于文字构件的顶部源点，因为子句源点 $\overrightarrow{C}_\phi$的所有顶点都已与这些顶点合并。现在，对于由 x、y、z构成的任意子句 ϕ，我们的构造都会添加从$Y_x \cup Y_y \cup Y_z$ 到L_x、ϕ、L_y、ϕ、L_z、ϕ 的顶部源点的弧，这些源点尚未与 $\phi.$ 的源分量$\overrightarrow{C}_\phi$ 合并。反过来，这些（初始）顶部源点与 Y属于同一连通分量，我们将它们加入 $Y.$。因此，L_x、ϕ、L_y、ϕ、L_z、ϕ 中可能包含在 $D + X$某个源点中的顶点，只有对应于 ϕ 中出现的文字的三个（初始）顶部源点；它们现在已连接成一个有向三角形 $\overrightarrow{C}_\phi.$。不失一般性地假设，在我们对 Φ的赋值中，子句ϕ 由变量 $x.$ 满足。如果 $l\ (x) = x$ 在 ϕ、$\overrightarrow{C}_\phi$ 中包含tl_x、ϕ，那么它属于 Y，因为 x 已被正向完成。反之，如果 $l\ (x) = x$、$\overrightarrow{C}_\phi$ 包含tr_x、ϕ，那么它属于 $Y.$。无论哪种情况，C_ϕ都与 $Y.$属于同一个强连通分量。对 Φ的所有子句应用这一推理，可得 $D + X$ 是强连通的，从而证明了这一蕴含。

约化后的实例为正实例，则初始实例也为正实例。反之，假设 D 是 PSCA′的一个正实例，并令 X 为一个解。根据观察 38，我们可以假设 X 在每个变量构件 G_x 上的限制都是该构件的极大有效补全。因此，我们可以应用引理 40，得出 X 在每个变量构件 G_x上的限制要么是其正补全，要么是其负补全。我们根据各构件的补全，为 $(x_i)_i$ 赋予布尔值，并证明这满足 $\Phi.$

为此，考虑任意一个子句 $\phi = l(x) \vee l(y) \vee l(z)$，并证明它是满足的。令 C_ϕ 为其对应的构件，并考虑其（初始）源分量 $\overrightarrow{C}_\phi.$ 由于 $D + X$ 是强连通的，X 必定包含一条弧 e，指向 $\overrightarrow{C}_\phi = (v_x, v_y, v_z)$中的一个顶点。不失一般性，假设 e 指向 $v_x.$ 如果 $l(x) = x$ 在 ϕ中，我们的构造就将 v_x 与 $L_{x,\phi}.$ 的顶部源点 tl_x 识别为同一顶点。回想引理 40，这意味着 X 在 G_x 上的限制是其正补全。进而，在我们为 Φ所作的赋值中，x 被设为真，因此 ϕ 得到满足。反之，如果$l(x) = x$，那么 X在 G_x 上的限制是其负补全，x 被设为假，ϕ 也得到满足。由此可知，我们的赋值满足 Φ，归约也就完成了。 □

参考文献

[1] Jorgen Bang-Jensen、Harold N. Gabow、Tibor Jordán 和 Zoltán Szigeti。带分割约束的边连通度增广。*SIAM* 离散数学杂志，12(2):160– 207，1999年1月。doi:10.1137/S0895480197324700。[2] Sergei Bespamyatnikh。三角剖分枚举的高效算法。计算几何，23(3):271–279，2002年11月。doi:10.1016/S0925-7721(02)00111-6。[3] Kristóf Bérczi 和 András Frank。无权图优化中的超模性 III：高度连通有向图。运筹学数学，43(3):第 763–780 页，2018年。URL：https://www.jstor.org/stable/48748543。[4] Kapali P. Es waran 和 R. Endre Tarjan。增广问题。*SIAM* 计算杂志，5(4):653–665，1976年12月。doi:10.1137/0205044。[5] A. Frank 和 T. Jordan。集合对的极小边覆盖。组合理论杂志 *B*辑，65(1):73–110，1995年9月。doi:10.1006/jctb.1995.1044。[6] András Frank。如何使有向图强连通。组合数学，1(2):145–153，1981年6月。doi:10.1007/BF02579270。[7] András Frank。增广图以满足边连通度要求。*SIAM* 离散数学杂志，5(1):25–53，1992年2月。doi:10.1137/0405003。[8] András Frank 和 Tibor Jordán。图连通性增广。图论、组合优化与算法手册，第 313–346 页，2015年。[9]Greg N. Frederickson 和 Joseph Ja'Ja'。若干图增广问题的近似算法。*SIAM* 计算杂志，10(2):270–283，1981年5月。doi: 10.1137/0210019。[10] Harold N. Gabow 和 Tibor Jordán。如何用缆索构建刚性方格框架。*SIAM* 计算杂志，30(2):649–680，2000年1月。doi:10.1137/ S0097539798347189。[11] Stephen Guattery 和 Gary L. Miller。平面有向图的收缩过程。载于第四届 *ACM* 并行算法与体系结构年度研讨会论文集，第 431–441 页，美国加利福尼亚州圣迭戈，1992年6月。ACM。doi:10.1145/140901.141935。[12] Carsten Gutwenger、Petra Mutzel 和 Bernd Zey。固定嵌入下的平面双连通性增广。载于 Jiří Fiala、Jan Kratochvíl 和 Mirka Miller 编，组合算法，计算机科学讲义，第 289–300 页，柏林、海德堡，2009年。施普林格。doi:10.1007/978-3-642-10217-2_29。[13] Bill Jackson 和 Tibor Jordán。无独立性的图与顶点连通度增广。组合理论杂志 *B*辑，94(1):31–77，2005年5月。doi:10.1016/j. jctb.2004.01.004。[14] Kasper Skov Johansen、Eva Rotenberg 和 Carsten Thomassen。简单图的边连通度增广。*SIAM* 离散数学杂志，39(1):163–169，2025年3月。doi:10.1137/23M1574245。

[15] Tibor Jordan. 两个NP完全增广问题。技术报告，南丹麦大学，1997年2月。[16]Goos Kant 和 Hans L. Bodlaender。平面图增广问题。载于 Frank Dehne、Jörg-Rüdiger Sack 和 Nicola Santoro 编，《算法与数据结构》，计算机科学讲义，第286–298页，柏林、海德堡，1991年。施普林格。doi: 10.1007/BFb0028270。[17] Kristine Vitting Klinkby、Pranabendu Misra 和 Saket Saurabh。强连通性增广是固定参数可处理的。载于*2021*年*ACM-SIAM*离散算法研讨会（*SODA*）论文集，会议论文集，第219–234页。工业与应用数学学会，2021年1月。doi:10.1137/1.9781611976465.15。[18] David Lichtenstein。平面公式及其用途。*SIAM* 计算杂志，11(2):329–343，1982年。arXiv:https://doi.org/10.1137/0211025，doi:10.1137/0211025。[19] C. L. Lucchesi 和 D. H. Younger。有向图的极小极大定理。伦敦数学学会杂志，s2-17(3):369–374，1978年。doi:10.1112/jlms/s2-17.3.369。[20] M. Naor、L.J. Schulman 和 A. Srinivasan。分割器与近最优去随机化。载于*IEEE*第*36*届计算机科学基础年会论文集，第182–191页，1995年。doi:10.1109/SFCS.1995.492475。[21] Zeev Nutov。节点连通性增广问题的参数化算法。载于 Timothy Chan、Johannes Fischer、John Iacono 和 Grzegorz Herman 编，《第*32*届欧洲算法年会（*ESA 2024*）》，第308卷，《莱布尼茨国际信息学论文集（*LIPIcs*）》，第92:1–92:12页，德国达格施图尔，2024年。达格施图尔城堡——莱布尼茨信息学中心。URL: https://drops.dagstuhl.de/entities/document/ 10.4230/LIPIcs.ESA.2024.92, doi:10.4230/LIPIcs.ESA.2024.92。[22] David Rappaport。从线段集合中计算简单回路是NP完全的。*SIAM* 计算杂志，18(6):1128–1139，1989年12月。doi:10.1137/0218075。[23] Ignaz Rutter 和 Alexander Wolff。增强平面图和几何图的连通性。图算法与应用杂志，16(2):599–628，2012年。doi:10.7155/ jgaa.00275。[24] Robert Tarjan。深度优先搜索与线性图算法。*SIAM* 计算杂志，1(2):146–160，1972年6月。doi:10.1137/0201010。[25] Vera Traub 和 Rico Zenklusen。一种用于加权连通性增广的（$1.5+\varepsilon$）近似算法。载于第*55*届*ACM*计算理论研讨会论文集，第1820–1833页，2023年。doi:10.1145/3564246.3585122。[26]Mario Ullrich 和 Jan Vybíral。具有小离散度的高维集合的确定性构造。*Algorithmica*，84(7):1897–1915，2022年7月。doi:10.1007/ s00453-022-00943-x。[27]David W. Walkup。平面树的数量。*Mathematika*：纯粹与应用数学杂志，19(2):200–204，1972年。arXiv:https://londmathsoc.onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1112/S0025579300005659，doi:10.1112/s0025579300005659。

[28] Toshimasa Watanabe 和 Akira Nakamura。边连通性增强问题。《计算机与系统科学杂志》，35(1):96–144，1987年8月。doi:10.1016/0022-0000(87) 90038-9。

A 第 3 节的证明

A.1 归约为有向无环图

在本小节中，我们将第 3 节中的所有概念放宽为适用于多重有向图，而非有向图，尤其是 Directed-PSCA 的实例。此外，我们将凝缩视为 D、 D^c，即通过迭代收缩属于 D 的强连通分量的每条非自环弧（保留多重弧和自环）得到的平面无环多重有向图。注意， D^c 的嵌入可能随收缩顺序而变化，但其底层多重有向图不会改变。

引理 42。 对于任意凝缩 $D^c.$ ，*Directed-PSCA* 的实例(D, k) 有解，当且仅当(D^c, k) 有解。此外，任何针对 D^c 的解都可以在多项式时间内转换为针对(D, k) 的解。

引理 *42* 的证明。 考虑一个平面多重有向图 D，令 D' 由 D 收缩一条包含在 $D.$ 的强连通分量 C 中的非自环弧（u， v）得到。令 w 为D' 中由合并 u 和 $v.$ 而成的顶点。只需说明如何将 D的一个解 X 转换为 D'的一个解 X'，，其中 $|X| = |X'|$，反之亦然。

给定 D 的一个解 X，我们通过保留每条不与 u 或 v 关联的弧，并将其他弧的 u 或 v 端点替换为 $w.$，从 X 构造出 X'。显然， $D' + X'$ 是强连通的，而且我们还可以将其嵌入为平面图。

给定 D' 的一个解 X'，我们按如下方式构造 X。首先区分 $D.$ 的一些面。令 $\widehat{u}_1$、$\widehat{u}_2$、$\widehat{v}_1$、$\widehat{v}_2$ 为 u 或 v 处与 (u, v) 关联的角 [1]。令 F_u（D）和 F_v（D）分别表示 D 中在不同于 $\widehat{u}_1$、$\widehat{u}_2$、$\widehat{v}_1$、$\widehat{v}_2.$ 的角处与 u 或 v 关联的面。注意，由于 D 和 D' 的面之间存在自然双射， F_u（D）和 F_v（D）也表示 $D'.$ 中的面集。构造 X 时，保留所有不与 w 关联的弧；对于其他弧 e，若 e 绘制在 F_u（D）中，则将其端点 w 替换为 u（分别为 v）；若 e 未绘制在 F_u（D）中，也作相应替换。 $D + X$ 的平面性显然成立。至于强连通性，注意到 u 和 v 在 D 中双向连通，因此在 $D + X.$ 中也双向连通。事实上，存在一条从 u 到 v 的弧；由于它们都属于 C，因此存在一条从 v 到 $u.$ 的有向路径。这意味着，在 $D' + X'$ 中经过 w 的任意有向路径都可以改道经过 u 和
$v.$ □。

现在让我们回顾并证明引理 5。

引理 5。 *Directed-PSCA* 可以在多项式时间内图灵归约到无环实例上的同一问题。

引理 *5* 的证明。 为了进行多项式时间图灵归约，我们来看看如何在多项式时间内，利用多项式多个规模相近的无环实例 (D_i, k_i) 的解，求解任意实例 (D, k)。

由引理 42 可知，任意 Directed-PSCA 实例都能在多项式时间内归约为一个实例 (D, k)，该实例是带有（可能存在的）自环的平面有向无环图。因此，我们只需处理如何去除自环。继续之前，请注意，解中没有必要包含自环 X,因此，仅与一个顶点关联的面不应包含最小解中的任何弧 $X.$

对于 D 的任意环 $\ell = (v, v)$，设 V_{in}，V_{out} 分别为绘制在 ℓ，内部和外部的顶点集合，这些集合可能为空。显然， D 的任意解 X 可划分为两个解 X_{in}，X_{out} （根据弧相对于 ℓ 的位置），分别对应于子图 $D_{in} = D[V_{in} \cup \{v\}]$ 和 $D_{out} = D[V_{out} \cup \{v\}].$。事实上，两个端点均位于 D_{in} （分别为 D_{out}）的任意有向路径都不能经过 V_{out} （分别为 V_{in}）中的顶点。反过来，取两个解的并集

[1]角的定义见第 4.1 小节

X_{in}，X_{out} 对于 D_{in} 和 D_{out}，可得到 $D.$ 的一个解。事实上，这是因为 V_{in}（分别为 V_{out}）中的每个顶点都有一条从 v 出发的有向路径，以及一条通向 v 的有向路径，且位于 D_{in}（分别为 D_{out}）中。

最后，请注意，弧集使 $D'_{in} = D_{in} - \{\ell\}$（分别为 $D'_{out} = D_{out} - \{\ell\}$）成为平面且强连通，当且仅当它使 D_{in}（分别为 D_{out}）成为平面且强连通。因此，$(D,\ k)$ 是正实例，当且仅当存在 $k_{in},\ k_{out}$ 使得 $k = k_{in} + k_{out}$，并且 $(D'_{in},\ k_{in})$ 和 $(D'_{out},\ k_{out})$ 都是正实例。实际上，我们的算法并不考虑这些 $k+1$ 对实例，而是递归地沿着它们的环拆分 D'_{in} 和 D'_{out}，直到得到无环子图。对于每次这样的拆分，我们都有 $|A(D)| = |A(D'_{in})| + |A(D'_{in})| + 1$，因此上述递归过程至多产生 $|A(D)|$ 个无环输入。对于这些无环实例中的每一个，我们尝试 $[0, k].$ 中的所有 $k+1$ 值。然后，我们只需检查，组合这些无环实例所需的最少弧数之和是否至多为 k。□

A.2 交替面中局部终端的界

现在，我们希望根据 $|\mathcal{T}(D)|$，来控制每个面内以及整个实例中的局部终端数量。全局局部终端数量不可能有上界。事实上，任意取多个有向路径，将所有源点和所有汇点分别识别为同一点，就能得到一个只有两个终端、解的大小为 1，但简单面的数量却可以任意大的实例。我们将在此证明，尽管如此，交替面中的局部终端数量仍然可以有界。首先，我们需要以下引理，该引理也可以由 Guattery 和 Miller [11] 的一个结果推导得出。

定理 43（ [11]中的定理 2.1）。对于任意平面无环有向图 D，有

$$\sum_{F \in F(D)} (\mathsf{lt}(F) - 2) \leq 2|\mathcal{T}(D)| - 4,$$

其中 $\mathcal{T}(D)$ 是终端集合，*he* 集合，*lt(F)* 表示 F 周围的局部终端数量 .

证明。给定一个平面有向无环图 D 和一个顶点 $v \in V(D)$，令 $\overline{\mathsf{lt}}(v)$ 表示 v 处不是局部终端的角的数量。由于 D 的 $2|A(D)|$ 个角中的每一个，要么是某个 F 的局部终端，要么是某个 v 处的非局部终端，因此有：

$$\sum_{v \in V(D)} \overline{\mathsf{lt}}(v) + \sum_{F \in F(D)} \mathsf{lt}(F) = 2|A(D)|.$$

注意，$\overline{\mathsf{lt}(v)} = 0$ 当且仅当 v 是一个终端（即 $v \in \mathcal{T}(D)$）。否则，$\overline{\mathsf{lt}(v)} \geq 2.$

$$\begin{aligned}
\sum_{F \in F(D)} (\mathsf{lt}(F) - 2) &\leq \sum_{F \in F(D)} (\mathsf{lt}(F) - 2) + \sum_{v \in V(D)} \max(0, (\overline{\mathsf{lt}}(v) - 2)) \\
&\leq \left(\sum_{F \in F(D)} \mathsf{lt}(F) \right) - 2|F(D)| + \left(\sum_{v \in V(D)} \overline{\mathsf{lt}}(v) \right) - 2|V(D)| + 2|\mathcal{T}(D)| \\
&\leq 2(|A(D)| - |F(D)| - |V(D)|) + 2|\mathcal{T}(D)| \\
&\leq 2|\mathcal{T}(D)| - 4
\end{aligned}$$

最后一行由欧拉公式得出。 □

由此可知，交替面的数量受 $|\mathcal{T}(D)|.$ 控制。定理 43 还有一个更强的推论：所有交替面上的局部终端数量都有上界。

引理 8. *Directed-PSCA* 的每个无环实例 (D, k) 要么是一个否实例，要么满足：

$$\sum_{F \in \mathcal{AF}(D)} \mathsf{lt}(F) < 8k,$$

其中 $\mathcal{AF}(D)$ 是 D 的交替面集合。

证明。 首先注意，对于任意解 X 以及任意终端 $t \in \mathcal{T}(D)$，都有一条弧$e \in X$ 与 t. 关联。否则，t 仍会是一个终端，而 $D + X$ 将不会强连通。这意味着，如果 $k < \frac{1}{2}|\mathcal{T}(D)|$，那么 (D, k) 就是一个否实例。因此，接下来我们假设 $k \geq \frac{1}{2}|\mathcal{T}(D)|$.

现在，由于对于任意面 $F \in \mathcal{AF}(D)$，$\mathsf{lt}(F) \geq 4$，定理 43 得出 $|\mathcal{AF}(D)| \leq |\mathcal{T}(D)| - 2$.。于是，$\sum_{F \in F(D)} \mathsf{lt}(F) - 2 = \sum_{F \in F(D)} \mathsf{lt}(F) - 2 + 2|\mathcal{AF}(D)|$. 43 $|\mathcal{AF}(D)|$ 中与简单面对应的所有项均为零，因此 $\sum_{\mathcal{AF} \in F()} \mathsf{lt}(F) \leq 4|\mathcal{T}(D)| - 8 < 8k$. □