arXiv:2512.17957v1 [math.AC] 18 Dec 2025

具有最大约化型的几乎对称数值半群的分类

AKIHIRO SUGAWARA

Abstract. 本文完整确定了具有最大约化型的几乎对称数值半群。此外，本文还对具有最大约化型的 MED 半群进行了分类。

1. Introduction

设 k 为零特征的代数闭域，且设 $(R, \mathfrak{m}, k)$ 为等特征约化一维完备局部 k-代数。在 [6], Huneke、Maitra 和 Mukundan 引入了 $s(R)$ 的约化型。约化型$s(R)$ 与 Cohen–Macaulay 类型 type(R) 有关，并且已知 $1 \leq s(R) \leq \text{type}(R)$（见 [2]）。如果 R 满足 $s(R) = \text{type}(R)$，则称其具有最大约化型。Maitra 和 Mukundan 提出了以下问题（见 [7,问题 2.5]）：

问题。当 R 具有最大约化型时，我们能否对其进行分类?

设 S 为一个数值半群。与 S相关联的数值半群环是形如 $k[[S]] = k[[t^s$ 的环: $s \in S]]$。众所周知，数值半群环 $k[[S]]$ 的 Cohen–Macaulay 型等于集合 PF(S) 的基数，其中 PF(S) 是 S的所有伪 Frobenius 数的集合，其中

$$\mathrm{PF}(S) = \{x \in \mathbb{Z} \setminus S \mid x + s \in S \text{ for all } 0 \neq s \in S\}.$$

PF(S) 的基数称为 S 的型，记作 t(S)。若 S 满足 t(S) $= 1$，则称其为对称的。$S \setminus \{0\}$ 的最小元素记作 m(S)，称为 S 的重数。$\mathbb{Z} \setminus S$ 的最大元素 F(S) 称为 S 的 Frobenius 数。在 [7, 定理 2.13], 中，作者证明数值半群环 $k[[S]]$ 的约化型等于集合的基数

$$\mathrm{rPF}(S) := \{x \in \mathbb{Z} \setminus S : \mathrm{F}(S) - \mathrm{m}(S) + 1 \leq x \leq \mathrm{F}(S)\}.$$

2020 数学主题分类。20M14, 20M25。关键词和短语。数值半群、近似对称、最大约化型。

rPF(S) 的基数记作 $s(S)$。注意，F(S) $\in$ rPF(S) $\subset$PF(S)，即 $1 \leq s(S) \leq$ t(S)。若 S 的约化型满足 $s(S) =$ t(S)，则称其具有最大约化型。

Barucci 和 Froberg 引入了几乎对称数值半群[1] ，并已有多篇论文对其进行了研究 [10], [9], [3], [5]。为回答上述问题，本文对具有最大约化型的几乎对称数值半群进行分类。对于任意正整数 m，数值半群 $\Delta(m) = \{x \in \mathbb{N} \mid x \geq m\} \cup \{0\}$ 称为半直线。容易证明，如果 S 是对称的，或者 S是半直线，那么 S 就是具有最大约化型的几乎对称数值半群；因此，除这些情形外，我们将具有最大约化型的几乎对称数值半群确定如下。

定理1。设 S 是一个非对称数值半群，且$\mathrm{m}(S) <\mathrm{F}(S)$。则以下条件等价：

(1) S 是具有最大约化型的几乎对称数值半群；(2) 存在整数 t、 m ，使得 $2 \leq t < m$ 且 $S = \Delta(m) \setminus \{2m - t\}$。

我们注意到， S 是半直线，当且仅当 m(S) $\geq$F(S)。

推论1。 设 S 为数值半群。当且仅当以下条件之一成立时， S 是具有最大约化型的几乎对称数值半群：

(1) S 是半直线；(2) S 是对称的；(3) 存在整数 t、 m ，使得 $2 \leq t < m$ 且 $S = \Delta\ (m)\ \setminus \{2m - t\}$。

本文的组织结构如下。在第2章节中，我们回顾关于数值半群的一些定义和结果。在第3章节中，我们证明定理1，并证明：如果 t 和 e 是满足 $2 \leq t \leq e - 1$ 的整数，那么存在一个具有最大约化型的几乎对称数值半群，使得 t(S) $= t$ 且 e(S) $= e$。在第4章节中，我们对具有最大约化型的 MED 半群进行分类。

2. Preliminaries

首先，我们回顾数值半群的一些基本事实。令 $\mathbb{Z}$ 为整数集，并令 $\mathbb{N} = \{z \in \mathbb{Z} \mid z \geq 0\}$。$(\mathbb{N}, +)$ 的子幺半群是 $\mathbb{N}$ 的一个子集，它对加法封闭且包含元素 0。数值半群是 $(\mathbb{N}, +)$ 的一个子幺半群 S，满足 $\mathbb{N} \setminus S$ 是有限集。令 S 为一个数值半群。

$\mathbb{N} \setminus S$ 称为 S 的间隙集。其基数称为 S 的亏格，记作 g(S)。令 A 为 $\mathbb{N}$ 的非空子集。我们用 $\langle A \rangle$ 表示由 A 生成的 $(\mathbb{N}, +)$ 的子幺半群，即

$$\langle A \rangle = \{\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_n a_n \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{0\},\, a_1, \ldots, a_n \in A \text{ and } \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{N}\}.$$

众所周知，每个数值半群都有唯一的极小生成元系，记作 msg(S)。注意，m(S) = min(msg(S))。极小生成元系的基数 e(S)称为 S的嵌入维数。众所周知，不等式 e(S) $\leq$ m(S)成立。若 e(S) =m(S)，则称 S 具有最大嵌入维数（MED 半群）。一般而言，以下不等式成立（见 [10, 命题2.2]）：

$$\mathrm{g}(S) \geq \frac{\mathrm{F}(S) + \mathrm{t}(S)}{2}.$$

定义 1. 若数值半群 S 满足 g(S) = $\frac{\mathrm{F}(S)+\mathrm{t}(S)}{2}$，则称其为近似对称。

设 $n \in S \setminus \{0\}$。我们定义 n 在 S 中的 Ap´ery 集如下：

$$\mathrm{Ap}(S, n) = \{s \in S \mid s - n \notin S\}.$$

于是得到以下结果（见 [12, 引理2.4]）：

$$\mathrm{Ap}(S, n) = \{0 = w(0), w(1), \ldots, w(n-1)\},$$

其中，$w(i)$ 是与 i 模 n 同余的 S 中最小的元素，对所有 $i \in \{0, \ldots, n-1\}$ 均成立。在 Ap(S, n) 上，我们定义偏序 $x \leq_S y$：若存在某个 $s \in S$，使得 $x + s = y$。我们将关于 $\leq_S$ 的 Ap(S, n) 的极大元记为 Maximals$_{\leq_S}$Ap(S, n)。我们回顾一下，

$$\mathrm{PF}(S) = \{w - n \mid \mathrm{Maximals}_{\leq_S} \mathrm{Ap}(S, n)\}$$

（见 [12, 命题2.20]）。特别地，F(S) = maxAp(S, n) $- n$。此外，若 S 不等于 $\mathbb{N}$，则容易看出

$$1 \leq \mathrm{t}(S) \leq \mathrm{m}(S) - 1.$$

众所周知，当 S 不等于 $\mathbb{N}$时，S 是 MED 半群，当且仅当 t(S) = m(S) $- 1$（见 [12, 推论3.2]）。

3. Almost symmetric numerical semigroups with maximal reduced type

本章节的首要目标是证明定理1。设 t 和 m 为满足 $2 \leq t < m$的整数。显然,

$$\Delta(m) \setminus \{2m - t\}$$

是一个数值半群。我们证明这个数值半群是一个具有最大约化型的几乎对称数值半群。[1]

命题1。 设 t和 m 为满足 $2 \leq t < m$的整数。我们考虑一个数值半群

$$S = \Delta(m) \setminus \{2m - t\}.$$

则以下结论成立:

(1) $\mathrm{F}(S) = 2m - t, \mathrm{m}(S) = \mathrm{g}(S) = m$;
(2) $\mathrm{rPF}(S) = \mathrm{PF}(S) = \{m - t + 1, \ldots, m - 1, 2m - t\}$;
(3) $s(S) = \mathrm{t}(S) = t$;
(4) S *is almost symmetric.*

特别地, S 是一个具有最大约化型的近似对称数值半群。

证明。 (1)显然, (3)由(2)得出。

(2) 由于 $\mathrm{F}(S) - \mathrm{m}(S) + 1 = m - t + 1$, 我们有

$$\{m - t + 1, \ldots, m - 1, 2m - t\} = \mathrm{rPF}(S) \subset \mathrm{PF}(S).$$

设 $x \in \mathrm{PF}(S)$。不妨假设 $x \geq 0$。若 $x \in \{1, \ldots, m - t\}$, 则

$$\mathrm{F}(S) - x = 2m - (t + x) \in \{m, \ldots, 2m - t - 1\} \subset S \setminus \{0\}.$$

根据 $x \in \mathrm{PF}(S)$ 的极大性, 这与假设矛盾。因此 $x \geq m - t + 1$, 即

$$\mathrm{rPF}(S) = \mathrm{PF}(S) = \{m - t + 1, \ldots, m - 1, 2m - t\}.$$

(4) 由 (1)、(3) 可得

$$\mathrm{g}(S) = \frac{\mathrm{F}(S) + \mathrm{t}(S)}{2}.$$

[1]与命题1类似的结果由Kriti Goel、Nil S¸ahin、Srishti Singh和Hema Srinivasan独立地在[4]中得出。

这意味着 S 是近似对称的。 □

例1. 在命题1中取 $m = 7, t = 4$，可得 $\mathrm{rPF}(S) = \mathrm{PF}(S) = \{4, 5, 6, 10\}$。

引理1. 设 S 是一个数值半群，且满足 $\mathrm{m}(S) < \mathrm{F}(S) < 2\mathrm{m}(S)$。则

$$\{g \in \mathbb{N} \setminus S \mid \mathrm{m}(S) < g \leq \mathrm{F}(S)\} \subset \mathrm{rPF}(S).$$

证明。设 $g \in \mathbb{N} \setminus S$ 满足 $\mathrm{m}(S) < g \leq \mathrm{F}(S)$。由于 $\mathrm{F}(S) < 2\mathrm{m}(S)$，我们得到 $\mathrm{F}(S) - \mathrm{m}(S) + 1 \leq g$。因此，$g \in \mathrm{rPF}(S)$。□

定理*1*的证明。(2) ⇒ (1)。由命题1可得。

(1) ⇒ (2)。由于 S 不是对称的，存在一个伪弗罗贝尼乌斯数 $f \in \mathrm{PF}(S)$，使得 $f \neq \mathrm{F}(S)$。根据 [10, 定理 2.4],，我们得到 $\mathrm{F}(S) - f \in \mathrm{PF}(S)$。因此我们可以假设 $f \leq \frac{\mathrm{F}(S)}{2}$。由于 S 具有最大约化型，我们得到 $\mathrm{F}(S) - \mathrm{m}(S) + 1 \leq \frac{\mathrm{F}(S)}{2}$。然后

$$\frac{\mathrm{F}(S)}{2} \leq \mathrm{m}(S) - 1.$$

据此可知，若 x 是满足 $x \geq 2\mathrm{m}(S)$ 的整数，则 $x \in S$。我们证明，若 $x \in \mathbb{Z} \setminus \{\mathrm{F}(S)\}$ 且 $\mathrm{m}(S) < x < 2\mathrm{m}(S)$，则 $x \in S$。反设存在 $x \in \mathbb{Z} \setminus \{\mathrm{F}(S)\}$，使得 $\mathrm{m}(S) < x < 2\mathrm{m}(S)$ 且 $x \notin S$。由引理1可知，$x \in \mathrm{rPF}(S) \setminus \{\mathrm{F}(S)\}$。由于 S 是最大约化型的几乎对称数值半群，利用 [10, 定理 2.4], 可得 $\mathrm{F}(S) - x \in \mathrm{rPF}(S)$。因此，$\mathrm{F}(S) - \mathrm{m}(S) + 1 \leq \mathrm{F}(S) - x$。这意味着 $x \leq \mathrm{m}(S) - 1$，矛盾。于是

$$S = \Delta(\mathrm{m}(S)) \setminus \{\mathrm{F}(S)\}.$$

注意，$\mathrm{g}(S) = \mathrm{m}(S)$。由于 S 是近似对称的，因此 $\mathrm{m}(S) = \frac{\mathrm{F}(S)+\mathrm{t}(S)}{2}$。因此，

$$S = \Delta(\mathrm{m}(S)) \setminus \{2\mathrm{m}(S) - \mathrm{t}(S)\}.$$

□

注1. 定理1证明中的不等式 $\frac{\mathrm{F}(S)}{2} \leq \mathrm{m}(S) - 1$ 已在[7,命题 3.16(1)]中得到证明。

我们的下一个目标是证明，对于任意满足 $2 \leq t \leq e - 1$ 的整数 t, e，存在一个最大约化型的几乎对称数值半群，使得 $\mathrm{t}(S) = t$ 且 $\mathrm{e}(S) = e$。以下事实众所周知，见于 [12]。

事实1. 设 S 是一个满足 $S \neq \mathbb{N}$ 的数值半群。那么以下结论成立：

(1) $\mathsf{msg}(S) = (S \setminus \{0\}) \setminus \{s+t \mid s,t \in S \setminus \{0\}\}$；(2) 若 s，$t \in S$ 且 $s+t \in \mathsf{Ap}(S, \mathsf{m}(S))$，则 s，$t \in \mathsf{Ap}(S, \mathsf{m}(S))$；
(3) $\mathsf{msg}(S) \subset (\mathsf{Ap}(S, \mathsf{m}(S)) \setminus \{0\}) \cup \{\mathsf{m}(S)\}$。

引理2. 设 S 是一个数值半群，满足 $S \neq \mathbb{N}$，令 $n \in S \setminus \{0\}$ 并令$\mathrm{msg}(S) = \{\mathrm{m}(S) = n_1 < \cdots < n_e\}$。若 $n \in \mathrm{Ap}(S,\mathrm{m}(S)) \setminus \{0\}$ 且 $n \leq 2n_2 - 1$，则 $n \in \mathrm{msg}(S)$。

证明。令 $n \in \mathsf{Ap}(S, \mathsf{m}(S)) \setminus \{0\}$ 满足 $n \leq 2n_2 - 1$。假设 $n \notin \mathsf{msg}(S)$。根据事实1(1)，$n = s + t$ 对于某个 s，$t \in S \setminus \{0\}$。由于 $n \in \mathsf{Ap}(S, \mathsf{m}(S))$，利用事实1(2)，可得 s，$t \in \mathsf{Ap}(S, \mathsf{m}(S)) \setminus \{0\}$。由于$\mathsf{min}\ \mathsf{Ap}(S, \mathsf{m}(S)) \setminus \{0\} = n_2$，我们有 $n_2 \leq s$，$n_2 \leq t$。这意味着

$$n = s + t \geq 2n_2,$$

这与假设矛盾。因此，$n \in \mathsf{msg}(S)$。 □

命题2。 设 t 和 m 为整数，使得 $2 \leq t < m$，并设

$$S = \Delta(m) \setminus \{2m - t\}.$$

于是，

$$\mathrm{Ap}(S,m) = \begin{cases} \{0, m+2, \ldots, 2m-1, 2m+1\} & (t = m-1); \\ (\{0, m+1, \ldots, 2m-1\} \setminus \{2m-t\}) \cup \{3m-t\} & (t \leq m-2). \end{cases}$$

此外，

$$\mathrm{msg}(S) = \begin{cases} \{m, m+2, \ldots, 2m-1, 2m+1\} & (t = m-1); \\ \{m, m+1, \ldots, 2m-1\} \setminus \{2m-t\} & (t \leq m-2). \end{cases}$$

特别地，

$$\mathrm{e}(S) = \begin{cases} m & (t = m-1); \\ m-1 & (t \leq m-2). \end{cases}$$

证明。设$\mathsf{msg}(S) = \{m = n_1 < \cdots < n_e\}$。

（$t = m-1$）。根据假设，我们有 $S = \Delta(m) \setminus \{m+1\}$。那么，$n_2 = m+2$ 和

$$\mathrm{Ap}(S,m) = \{0, m+2, \ldots, 2m-1, 2m+1\}.$$

由事实1(3)和引理2可得

$$\mathrm{msg}(S) = \{m, m+2, \ldots, 2m-1, 2m+1\},$$

即，$\mathrm{e}(S) = m$。

$(t \leq m-2)$。根据 $2 \leq t \leq m-2$，我们有 $m+2 \leq 2m-t \leq 2m-2$。由此可得

$$\mathrm{Ap}(S, m) = (\{0, m+1, \ldots, 2m-1\} \setminus \{2m-t\}) \cup \{3m-t\}.$$

根据事实1(1)，我们有 $3m-t = (m+1) + (2m-t-1) \notin \mathrm{msg}(S)$。与 $t = m-1$ 的情形类似，我们得到

$$\mathrm{msg}(S) = \{m, m+1, \ldots, 2m-1\} \setminus \{2m-t\},$$

即，$\mathrm{e}(S) = m-1$。 □

由推论1和命题1、命题2，我们得到以下推论。

推论2. 设 S 是一个数值半群，使得 $S \neq \mathbb{N}$。如果 S 是一个具有最大约化型的几乎对称数值半群，那么

$$\mathrm{t}(S) \leq \mathrm{e}(S) - 1.$$

推论3. 设 t 和 e 是整数，使得 $2 \leq t \leq e-1$。那么，存在一个具有最大约化型的几乎对称数值半群，使得$\mathrm{t}(S) = t$且$\mathrm{e}(S) = e$。

证明. 设 $m = e+1$。注意到 $2 \leq t \leq m-2$。令 $S = \Delta(m) \setminus \{2m-t\}$。由命题1和命题2可知， S 是一个具有最大约化型的几乎对称数值半群，使得$\mathrm{t}(S) = t$ 且 $\mathrm{e}(S) = e$。 □

这个推论推广了 [11, 定理 2.10]。

注 2. 设 t 和 m 为满足 $1 \leq t < m$ 的整数。自然可以考虑数值半群 $S = \Delta(m) \setminus \{2m-t\}$，其中 $t = 1$。如果 $t = m-1$，那么$S = \langle 2, 5 \rangle$。因此，只需关注情形 $1 = t \leq m-2$。运用命题1证明中的相同论证可知， S 是 Frobenius 数为 $2m-1$ 的对称数值半群。 [11,引理28]中已指出这一结果。此外，运用命题2证明中的相同论证，可得以下结论：

(1) $\mathrm{Ap}(S, m) = \{0, m+1, \ldots, 2m-2, 3m-1\}$;
(2) $\mathrm{msg}(S) = \{m, m+1, \ldots, 2m-2\}$;

(3) $\mathrm{e}(S) = m - 1$.

由命题1和注 2 可得以下结果。

推论 4. 对于任意整数 m, F，使得 $2 \leq m < F < 2m$, $\Delta(m) \setminus \{F\}$是具有最大约化型的几乎对称数值半群，且$\mathrm{t}(S) = 2m - F$。

4. MED-semigroups with maximal reduced type

本节对具有最大约化型的 MED 半群进行分类。

引理 3. 设 S 是一个满足 $S \neq \mathbb{N}$ 的数值半群。那么，

$$1 \leq s(S) \leq \mathrm{t}(S) \leq \mathrm{m}(S) - 1.$$

证明。 我们回顾不等式

$$1 \leq \mathrm{t}(S) \leq \mathrm{m}(S) - 1.$$

由于 $1 \leq s(S) \leq \mathrm{t}(S)$，因此

$$1 \leq s(S) \leq \mathrm{t}(S) \leq \mathrm{m}(S) - 1.$$

□

引理 4. 设 S 是一个数值半群。那么，

$$\{w \in \mathrm{Ap}(S, \mathrm{m}(S)) \mid w \geq \mathrm{F}(S) + 1\} = \{h + \mathrm{m}(S) \mid h \in \mathrm{rPF}(S)\}.$$

特别是，

$$\{w \in \mathrm{Ap}(S, \mathrm{m}(S)) \mid w \geq \mathrm{F}(S) + 1\} \subset \mathrm{Maximals}_{\leq_S}\mathrm{Ap}(S, \mathrm{m}(S)).$$

证明. 设 $w \in \mathrm{Ap}(S, \mathrm{m}(S))$，其中 $w \geq \mathrm{F}(S) + 1$。则 $w - \mathrm{m}(S) \notin S$ 且 $w - \mathrm{m}(S) \geq \mathrm{F}(S) - \mathrm{m}(S) + 1$，这意味着 $w - \mathrm{m}(S) \in \mathrm{rPF}(S)$。反过来，设$h \in \mathrm{rPF}(S)$。由于 $h + \mathrm{m}(S) \geq \mathrm{F}(S) + 1$，因此 $h + \mathrm{m}(S) \in S$。由此可得，$h + \mathrm{m}(S) \in \mathrm{Ap}(S, \mathrm{m}(S))$。□

命题 3. 设 S 是一个满足 $S \neq \mathbb{N}$的数值半群，并设 $\mathrm{msg}(S) = \{\mathrm{m}(S) = n_1 < \cdots < n_e\}$。那么以下条件等价：

(1) $s(S) = \mathrm{m}(S) - 1$; (2) S 是一个具有最大约化型的 *MED* 半群; (3) $\mathrm{F}(S) + 1 \leq n_2$。

特别是，如果 S 是一条半直线，那么 S 是一个具有最大约化型的 *MED* 半群。

证明。 (1) ⇒ (2)。由引理 3 可得。

(2) ⇒(3)。见 [7, 推论310]。

(3) ⇒ (1)。注意，min(Ap(S,m(S)) \ $\{0\}$) = n_2。根据假设，我们得到

$$\mathrm{Ap}(S,\mathrm{m}(S)) \setminus \{0\} \subset \{w \in \mathrm{Ap}(S,\mathrm{m}(S)) \mid w \geq \mathrm{F}(S)+1\}.$$

由引理 4，我们有 m(S) − 1 ≤ s(S)，即 s(S) = m(S) − 1。 □

设 m 和 F 为整数，使得 $2 \leq m < F$ 且 m 不整除 F。我们定义

$$\Delta(F,m) := \langle m \rangle \cup \{x \in \mathbb{N} \mid x \geq F+1\}.$$

已知 Δ(F, m) 是一个 Frobenius 数为 F、重数为 m 的 MED 半群（见 [8,引理2.1]）。

定理 2. 设 S 是一个数值半群，满足 $\mathrm{m}(S) <$F(S)，并且 $\mathrm{msg}(S) =$$\{\mathrm{m}(S) = n_1 < \cdots < n_e\}$。则以下条件等价：

(1) S 是最大约化型的 *MED* 半群；(2) 存在整数 F、m，使得 $2 \leq m < F$、m 不整除 F，且$S = \Delta(F, m)$。

证明。 (2) ⇒ (1)。注意，F(S) + 1 ≤ n_2。由命题 3 可得，Δ(F, m) 是一个最大约化型的 MED 半群。

(1) ⇒(2)。由于 m(S) < F(S)，我们得到 m(S) ≥ 2。注意，m(S) 不整除 F(S)。显然， Δ(F(S), m(S)) ⊂ S。由命题 3， $n_2 \geq$ F(S) + 1。此不等式意味着 {m(S) = $n_1 < \cdots < n_e$} ⊂ Δ(F(S), m(S))。于是，$S \subset$ Δ(F(S), m(S))，即 $S =$ Δ(F(S), m(S)). □

推论 5。 设 S 为一个数值半群。当且仅当以下条件之一成立时， S 是具有最大约化型的 *MED* 半群：

(1) S 是一个半直线；(2) 存在整数 F、m，使得 $2 \leq m < F$、 m 不能整除 F，且$S = \Delta(F$、 $m)$。

Acknowledgments

我谨向深沢悟教授致谢，感谢他提出宝贵的意见和建议。

References

[1] V. Barucci 和 R. Fr¨oberg。一维几乎戈伦斯坦环。《代数学杂志》，188(2):418– 442，1997年。[2]O. P. Bhardwaj。某些数值半群环的约化型。预印本，arXiv:2406.15923 [math.AC] (2024)，2024年。[3] K. Eto。四维仿射空间中的几乎戈伦斯坦单项式曲线。《代数学杂志》，488:362–387，2017年。[4] K. Goel、N. S¸ahin、S. Singh 和 H. Srinivasan。Sally 二型数值半群，2025年。[5] J. Herzog 和 K.-i. Watanabe。几乎对称数值半群。《半群论坛》，98(3):589–630，2019年。[6] C. Huneke、S. Maitra 和 V. Mukundan。微分中的挠与 Berger 猜想。《数学科学研究》，8(4):15，2021年。编号/第60号。[7] S. Maitra 和 V. Mukundan。一维环约化型的极端行为。预印本，arXiv:2306.17069 [math.AC] (2023)，2023年。[8] M. A. Moreno-Frias 和 J. C. Rosales。具有最大嵌入维数、固定重数和 Frobenius 数的数值半群的比率余簇。《国际电子代数学杂志》，38:12–28，2025年。[9] A. Moscariello。关于几乎戈伦斯坦单项式曲线的型。《代数学杂志》，456:266–277，2016年。[10]H. Nari。几乎对称数值半群的对称性。《半群论坛》，86(1):140–154，2013年。[11] J. C. Rosales。与一个对称数值半群仅相差一个元素的数值半群。《代数学汇刊》，15(1):23–32，2008年。[12] J. C. Rosales 和 P. A. Garc´ıa-S´anchez。《数值半群》。《数学发展丛书》第20卷。Dordrecht：Springer，2009年。

Graduate School of Science and Engineering, Yamagata University, Kojirakawa-machi 1-4-12, Yamagata 990-8560, Japan电子邮箱地址: s251436d@st.yamagata-u.ac.jp