国际十进分类法
539.3

# 反平面机械载荷与电场作用下一维压电准晶中的界面裂纹

**Altoumaimi M.，Loboda V.V.**

摘要。 本文研究了反平面声子与相位子载荷以及面内电场作用下一维（*1D*）压电准晶中的*III*型界面裂纹。通过复函数方法，将所有所需的机电参数表示为除裂纹区域外在整个复平面内解析的向量函数。

研究考虑了裂纹面上的电不可渗透（绝缘）条件和电有限渗透条件。对于前一种情况，在复平面内建立并精确求解了一个向量希尔伯特问题；对于后一种情况，进一步得到了关于穿过裂纹区域的电通量的二次方程。该方程的解可用于求得材料界面上的声子与相位子应力、位移跳跃（滑移）以及电学特征。此外，还获得了与各场相对应的应力强度因子的解析公式。

对三种选定的载荷条件进行了数值计算，所得
*f*场分布通过可视化展示在裂纹延长线上以及裂纹区域内部。
关键词：界面裂纹、应力、准晶、反平面载荷、有限电渗透性、线性关系问题

## 1　引言

准晶（QCs）以其长程取向有序和准周期平移对称性为特征，因此相较于常规晶体材料具有卓越的力学和功能特性。Shechtman 等人等（1984年）首次发现具有非周期长程有序和高硬度的金属合金，这一开创性发现推动了对这类材料弹性和断裂行为的广泛研究 [1]。

准晶弹性的基础连续介质理论纳入了耦合的声子与相位子位移场。在开创性研究中，Ding等（1993年）提出了准晶的广义弹性本构关系，推导出声子与相位子模态之间完整的电弹耦合关系 [2]。在此框架基础上，Fan（2011）对准晶弹性及其应用进行了全面的数学论述，其中包括基本边值问题的显式解 [3]。 多项研究探讨了准晶在反平面剪切（III 型）载荷下的断裂力学。Shi等（2007年）分析了常规弹性材料与准晶之间的界面裂纹，阐明了相位子场在裂纹尖端应力奇异性中的作用 [4]。Zhou 和 Li（2018年）推导出垂直于一维六方压电准晶边界的两条共线裂纹的精确解，获得了应力强度因子和位移场的闭式表达式 [5]。

在 [6] 中研究了一维压电准晶半空间内受非均匀载荷作用的反平面裂纹；在 [7] 中研究了一维六方压电准晶条带中面上的两条等长共线电渗透反平面裂纹。在论文 [8] 中研究了界面处含有微裂纹的两条薄条带。压电准晶中的压电耦合增加了问题的复杂性。Hu 等人（2019年）通过黎曼–希尔伯特方法，将异质一维六方压电准晶中界面裂纹的混合机电边值问题化为奇异积分方程，得到了沿裂纹面的声子、相位子和电学量的全场解 [9]。Govorukha 和 Kamlah（2024年）通过考虑混合电边界条件——将……结合起来，扩展了这些研究成果

导电渗透裂纹面段——展示了局部电接触如何调控裂纹尖端强度因子 [10]。Loboda 等（2022年）进一步将研究推广至层状压电准晶中的多个共线界面裂纹，揭示了机电耦合载荷下对应力强度因子和能量释放率的相互作用效应 [11]。

Hao和Shen [12] 针对均匀压电材料的平面问题提出了电受限渗透界面裂纹模型。迄今为止，异质压电准晶之间电受限渗透界面裂纹的反平面精确解析解仍未见报道。本研究旨在弥补这一空白，具体包括：（i）建立双材料准晶板的耦合声子–相位子–电场方程；（ii）将界面裂纹边值问题化为向量希尔伯特问题；（iii）推导裂纹面张开位移和电势跳跃的闭式表达式；（iv）获得与各场相关的应力强度因子解析公式。通过数值验证以及对裂纹延伸区域场分布的可视化，最终得到完整解，为基于准晶的机电系统设计与优化提供实用工具。

## 2 基本关系的表述

对于准晶线性弹性理论，无体力和自由电荷作用下，点群为 6 *mm* 的一维压电六方准晶的本构关系、平衡方程和几何方程可表示如下 [13]

$$\sigma_{ij} = c_{ijks}\varepsilon_{ks} - e_{sij}E_s + R_{ij3s}w_{3s}\,, \tag{1}$$

$$D_i = e_{iks}\varepsilon_{ks} + \xi_{is}E_s + \hat{e}_{i3s}w_{3s}\,, \tag{2}$$

$$H_{3i} = R_{ks3i}\varepsilon_{ks} - \hat{e}_{s3i}E_s + K_{3i3s}w_{3s}\,, \tag{3}$$

$$\sigma_{ij,j} = 0\,,\ D_{i,i} = 0\,,\ H_{3i,i} = 0\,, \tag{4}$$

$$\varepsilon_{ij} = \tfrac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})\,,\ E_i = -\phi_{,i}\,,\ w_{3i} = w_{3,i}\,, \tag{5}$$

其中，“”表示对空间变量的求导运算；， 和 分别表示声子位移、相位子位移和电势，且原子排列在 平面内呈周期性，在-轴方向呈准周期性； 和 分别表示声子应力和应变； 和 分别表示相位子应力和应变；

和 分别表示电位移和电场，极化方向沿-轴； 和 分别表示声子场和相位子场中的弹性常数； 表示声子–相位子耦合弹性常数；和分别表示声子场和相位子场中的压电常数； 表示介电常数。下标中的逗号表示对其后空间变量的微分。

对于相对于-平面的反平面机械载荷和平面内电载荷情形，所有场均与变量无关。因此，所研究的问题属于所谓的反平面剪切问题或 III 型裂纹问题。在这种情况下

$$u_1 = u_2 = 0\,,\ u_3 = u_3(x_1, x_2),\ w_3 = w_3(x_1, x_2),\ \varphi = \varphi(x_1, x_2), \tag{6}$$

且本构关系的形式为：

$$\begin{Bmatrix}\sigma_{j3}\\ H_{j3}\\ D_j\end{Bmatrix}=\mathbf{R}\begin{Bmatrix}u_{3,j}\\ w_{3,j}\\ \varphi_{,j}\end{Bmatrix}\ (j=1,2), \tag{7}$$

其中
$$\mathbf{R}=\begin{bmatrix}c_{44} & R_3 & e_{15}\\ R_3 & K_2 & \hat{e}_{15}\\ e_{15} & \hat{e}_{15} & -\xi_{11}\end{bmatrix}, \tag{8}$$

和 分别表示声子弹性模量、相位子弹性模量和声子-相位子耦合模量；它们采用简化指标记号表示。此外，, 是声子场和相位子场的压电常数，而 是介电常数。引入向量 $e_{15}$ $\hat{e}_{15}$ $\xi_{11}$

$$\boldsymbol{u}=\left[u_3,w_3,\varphi\right]^T,\ \boldsymbol{t}_j=\left[\sigma_{3j},H_{3j},D_j\right]^T, \tag{9}$$

可以写成

$$\boldsymbol{t}_j=\boldsymbol{R}\boldsymbol{u}_{,j}\ (j=1,2). \tag{10}$$

对于所考虑的反平面问题，平衡方程 (4) 可写为

$$\frac{\partial\sigma_{31}}{\partial x_1}+\frac{\partial\sigma_{32}}{\partial x_2}=0,\ \frac{\partial D_1}{\partial x_1}+\frac{\partial D_2}{\partial x_2}=0,\ \frac{\partial H_{31}}{\partial x_1}+\frac{\partial H_{32}}{\partial x_2}=0.$$

将 (7) 代入最后一个方程，可得函数 , 和 满足方程, , , 它们分别是调和函数。因此，将由这些函数组成的向量 表示为某个解析向量函数的实部 $u_3$ $\boldsymbol{u}$

$$\boldsymbol{u}=2\mathrm{Re}\boldsymbol{\Phi}(z)=\boldsymbol{\Phi}(z)+\bar{\boldsymbol{\Phi}}(\bar{z})\ \text{(2 is introduced for convenience)}, \tag{11}$$

其中 是复变量的任意解析函数 $\boldsymbol{\Phi}(z)=\left[\Phi_1(z),\Phi_2(z),\Phi_3(z)\right]^T$

将 (11) 代入 (10)，得

$$\boldsymbol{t}_1=-i\boldsymbol{B}\boldsymbol{\Phi}'(z)+i\bar{\boldsymbol{B}}\bar{\boldsymbol{\Phi}}'(\bar{z}),\ \boldsymbol{t}_2=\boldsymbol{B}\boldsymbol{\Phi}'(z)+\bar{\boldsymbol{B}}\bar{\boldsymbol{\Phi}}'(\bar{z}), \tag{12}$$

其中。

**双材料平面**。设平面 由两个半平面 和组成。轴上可能存在不同的裂纹、夹杂物及其他缺陷。表示式 (11)、(12)可分别用于区域和，在这种情况下其形式为

$$x_2>0 \qquad x_2<0$$

$$\boldsymbol{u}^{(m)}=\boldsymbol{\Phi}^{(m)}(z)+\bar{\boldsymbol{\Phi}}^{(m)}(\bar{z}),\quad \boldsymbol{t}_2^{(m)}=\boldsymbol{B}^{(m)}\boldsymbol{\Phi}'^{(m)}(z)+\bar{\boldsymbol{B}}^{(m)}\bar{\boldsymbol{\Phi}}'^{(m)}(\bar{z}), \tag{13}$$

其中 对于区域 1， 对于区域 2，分别是 区域 1 和区域 2 的矩阵； 分别是在区域 1 和区域 2 内解析的任意向量函数。

接下来要求等式 在整个轴上成立。由(13)可得

$$\boldsymbol{B}^{(1)}\boldsymbol{\Phi}'^{(1)}(x_1+i0)+\bar{\boldsymbol{B}}^{(1)}\bar{\boldsymbol{\Phi}}'^{(1)}(x_1-i0)=\boldsymbol{B}^{(2)}\boldsymbol{\Phi}'^{(2)}(x_1-i0)+\bar{\boldsymbol{B}}^{(2)}\bar{\boldsymbol{\Phi}}'^{(2)}(x_1+i0). \tag{14}$$

此处我们采用第一种表示形式，它指的是函数的极限 在 分别从上方或下方趋近时的值。

方程（14）可写为

$$\boldsymbol{B}^{(1)}\boldsymbol{\Phi}'^{(1)}(x_1+i0)-\bar{\boldsymbol{B}}^{(2)}\bar{\boldsymbol{\Phi}}'^{(2)}(x_1+i0)=\boldsymbol{B}^{(2)}\boldsymbol{\Phi}'^{(2)}(x_1-i0)-\bar{\boldsymbol{B}}^{(1)}\bar{\boldsymbol{\Phi}}'^{(1)}(x_1-i0).$$

最后一个方程的左右两边可视为函数的边界值

$$\boldsymbol{B}^{(1)}\boldsymbol{\Phi}'^{(1)}(z)-\bar{\boldsymbol{B}}^{(2)}\bar{\boldsymbol{\Phi}}'^{(2)}(z) \text{ and } \boldsymbol{B}^{(2)}\boldsymbol{\Phi}'^{(2)}(z)-\bar{\boldsymbol{B}}^{(1)}\bar{\boldsymbol{\Phi}}'^{(1)}(z), \tag{15}$$

它们分别在上半平面和下半平面内解析。但这意味着存在一个函数，该函数在每个半平面内分别等于上述函数，并且在整个复平面内解析。该函数如下：

$$\mathbf{M}(z)=\begin{cases}\boldsymbol{B}^{(1)}\boldsymbol{\Phi}'^{(1)}(z)-\bar{\boldsymbol{B}}^{(2)}\bar{\boldsymbol{\Phi}}'^{(2)}(z) & for\ x_2>0\\ \boldsymbol{B}^{(2)}\boldsymbol{\Phi}'^{(2)}(z)-\bar{\boldsymbol{B}}^{(1)}\bar{\boldsymbol{\Phi}}'^{(1)}(z) & for\ x_2<0\end{cases}$$

假设，根据刘维尔定理，$\mathbf{M}(z)$ 我们发现（15）中的每个函数对于相应半平面内的每个 $z$ 均等于 0。因此，我们得到

$$\bar{\boldsymbol{\Phi}}'^{(2)}(z)=\left(\bar{\boldsymbol{B}}^{(2)}\right)^{-1}\boldsymbol{B}^{(1)}\boldsymbol{\Phi}'^{(1)}(z) \text{ for } x_2>0, \tag{16}$$

$$\bar{\boldsymbol{\Phi}}'^{(1)}(z)=\left(\bar{\boldsymbol{B}}^{(1)}\right)^{-1}\boldsymbol{B}^{(2)}\boldsymbol{\Phi}'^{(2)}(z) \text{ for } x_2<0. \tag{17}$$

下面我们求以下向量函数的跳跃

$$\left\langle \boldsymbol{u}'(x_1)\right\rangle=\boldsymbol{u}'^{(1)}\left(x_1+i0\right)-\boldsymbol{u}'^{(2)}\left(x_1-i0\right), \tag{18}$$

穿过界面时。由第一个公式 (13) 可得

$$\boldsymbol{u}'^{(m)}\left(z\right)=\boldsymbol{\Phi}'^{(m)}(z)+\bar{\boldsymbol{\Phi}}'^{(m)}(\bar{z})$$

or

$$\boldsymbol{u}'^{(m)}\left(x_1\pm i0\right)=\boldsymbol{\Phi}'^{(m)}\left(x_1\pm i0\right)+\bar{\boldsymbol{\Phi}}'^{(m)}\left(x_1\mp i0\right)$$

并代入 (18)，可得

$$\left\langle \boldsymbol{u}'(x_1)\right\rangle=\boldsymbol{\Phi}'^{(1)}\left(x_1+i0\right)+\bar{\boldsymbol{\Phi}}'^{(1)}\left(x_1-i0\right)-\boldsymbol{\Phi}'^{(2)}\left(x_1-i0\right)-\bar{\boldsymbol{\Phi}}'^{(2)}\left(x_1+i0\right).$$

由 (17) 进一步可得 并将此表达式与 (16) 一同代入最新公式，可得

$$x_2\to+0$$

$$\left\langle \boldsymbol{u}'(x_1)\right\rangle=\boldsymbol{D}\boldsymbol{\Phi}'^{(1)}\left(x_1+i0\right)+\bar{\boldsymbol{D}}\bar{\boldsymbol{\Phi}}'^{(1)}\left(x_1-i0\right),$$

其中，$\boldsymbol{I}$ 单位矩阵 $\boldsymbol{I}=diag[1\ 1\ 1]$，

引入一个新的向量函数

$$\boldsymbol{W}\left(z\right)=\begin{cases}\boldsymbol{D}\boldsymbol{\Phi}'^{(1)}\left(z\right), & x_2>0\\ -\bar{\boldsymbol{D}}\bar{\boldsymbol{\Phi}}'^{(1)}\left(z\right), & x_2<0\end{cases}, \tag{19}$$

位移跳跃的导数表达式可写为

$$\left\langle \mathbf{u}'\left(x_1\right)\right\rangle=\boldsymbol{W}^{+}\left(x_1\right)-\boldsymbol{W}^{-}\left(x_1\right). \tag{20}$$

根据第二个关系式 (13)，我们有

$$\boldsymbol{t}_2^{(1)}\left(x_1,0\right)=\boldsymbol{B}^{(1)}\boldsymbol{\Phi}'^{(1)}\left(x_1+i0\right)+\bar{\boldsymbol{B}}^{(1)}\bar{\boldsymbol{\Phi}}'^{(1)}\left(x_1-i0\right). \tag{21}$$

鉴于基于式 (19)

$$\boldsymbol{\Phi}'^{(1)}\left(x_1+i0\right)=\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{W}\left(x_1+i0\right),$$

$$\bar{\boldsymbol{\Phi}}'^{(1)}\left(x_1-i0\right)=-\left(\bar{\boldsymbol{D}}^{-1}\right)^{-1}\boldsymbol{W}\left(x_1-i0\right)$$

将这些关系代入式 21，可得

$$\boldsymbol{t}_2^{(1)}\left(x_1,0\right)=\boldsymbol{G}\boldsymbol{W}^{+}\left(x_1\right)-\bar{\mathbf{G}}\boldsymbol{W}^{-}\left(x_1\right), \tag{22}$$

其中 。简单计算表明

$$\boldsymbol{G}=\left[\left(\boldsymbol{B}^{(1)}\right)^{-1}+\left(\boldsymbol{B}^{(2)}\right)^{-1}\right]^{-1}, \tag{23}$$

此外， 。于是，方程（22）可写为

$$\boldsymbol{t}_2^{(1)}\left(x_1,0\right)=\boldsymbol{G}\left(\boldsymbol{W}^{+}\left(x_1\right)+\boldsymbol{W}^{-}\left(x_1\right)\right). \tag{24}$$

式（20）和（24）对于求解界面处存在裂纹和夹杂物的双材料压电准晶反平面问题非常方便。

### 3. 两种压电准晶之间的电绝缘裂纹

假设存在一条裂纹， 其表面在力学上自由且电绝缘，位于界面处 （图1）。

剪切声子 和相位子应力及电通量在无穷远处给定，并由向量表示。

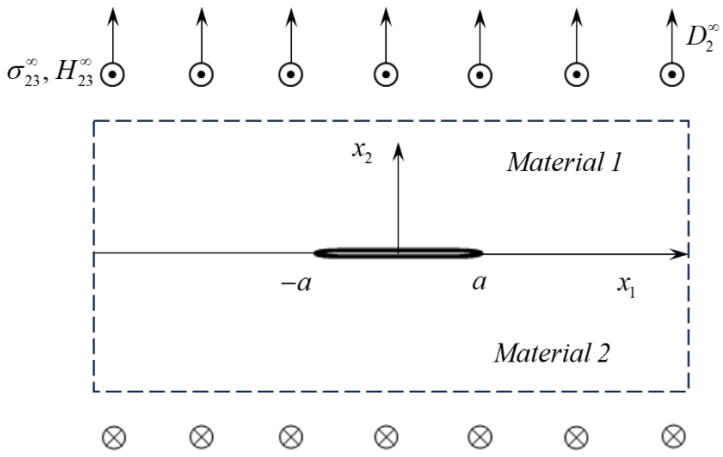


**图 1.** 两个压电准晶之间的裂纹

界面处的边界条件形式如下：

$$\sigma_{32}^{(1)}=\sigma_{32}^{(2)}=0, D_2^{(1)}=D_2^{(2)}=0,\ H_{32}^{(1)}=H_{32}^{(2)}=0 \ \text{ for } |x_1|<a\ , \tag{25}$$

$$\langle\sigma_{32}\rangle=0,\langle D_2\rangle=0,\langle H_{32}\rangle=0,\langle\varepsilon_{31}\rangle=0,\langle E_1\rangle=0,\ \langle w_{31}\rangle=0 \ \text{ for } |x_1|>a\ , \tag{26}$$

其中 表示相应函数穿过该轴时的跳跃。

根据式（14），前三个条件（26）得以满足。由式（20）可知，满足后三个条件（26）后，向量函数 在整个平面上除裂纹区域外具有解析性。此外，利用式（24）满足条件（25），可得到线性关系问题的向量希尔伯特问题

$$\boldsymbol{W}^{+}\left(x_1\right)+\boldsymbol{W}^{-}\left(x_1\right)=0 \ \text{ for } \ x_1\in(-a,a) \quad . \tag{27}$$

考虑到 当 一个 $\boldsymbol{W}^{+}\left(x_1\right)=\boldsymbol{W}^{-}\left(x_1\right)=\boldsymbol{W}\left(x_1\right)$ 利用公式（24），可得到以下无穷远处条件

$$\boldsymbol{W}\left(x_1\right)\big|_{x_1\to\infty}=\boldsymbol{W}\left(z\right)\big|_{z\to\infty}$$

$$\boldsymbol{W}\left(z\right)\big|_{z\to\infty}=\frac{1}{2}\boldsymbol{G}^{-1}\boldsymbol{t}_2^{\infty}. \tag{28}$$

问题（27）在无穷远处条件（28）下的解具有以下形式：[14]

$$\boldsymbol{W}(z)=\frac{1}{2}\boldsymbol{G}^{-1}\boldsymbol{t}_2^{\infty}\frac{z}{\sqrt{z^2-a^2}}. \tag{29}$$

将（29）代入（24），得到：

$$\boldsymbol{t}_2^{(1)}(x_1,0)=\boldsymbol{t}_2^{\infty}\frac{x_1}{\sqrt{x_1^{\,2}-a^2}}\ \text{ for }\ x_1\notin[-a,a]. \tag{30}$$

考虑到 对于，由关系式（20）可得， $x_1\in(-a,a)$ (29)

$$\langle\mathbf{u}'(x_1)\rangle=\boldsymbol{G}^{-1}\boldsymbol{t}_2^{\infty}\frac{x_1}{i\sqrt{a^2-x_1^2}}\ \text{ for }\ x_1\in(-a,a). \tag{31}$$

对最后一个关系式积分，可得裂纹面位移跳跃的公式

$$\langle\mathbf{u}(x_1)\rangle=i\boldsymbol{G}^{-1}\boldsymbol{t}_2^{\infty}\sqrt{a^2-x_1^2}. \tag{32}$$

**4. 裂纹面给定电位移的情形**

假设裂纹面上给定了非零电位移 。此时，在裂纹区域内有：

$$\boldsymbol{t}_2^{(1)}(x_1,0)=\boldsymbol{t}_2^{(0)}\ \text{ for } x_1\in(-a,a)$$

其中 $\{0,0,\}$ $_2$ $_0$ $_T$ $D$ $\boldsymbol{t}^{(0)}$

由最后一个方程和（24）式可得

$$\boldsymbol{W}^{+}(x_1)+\boldsymbol{W}^{-}(x_1)=\boldsymbol{G}^{-1}\mathbf{t}_2^{(0)}\ \text{ for } x_1\in(-a,a) \tag{33}$$

引入新函数其定义公式为 $\mathbf{Y}$ $(\ )$

$$\boldsymbol{W}(z)=\mathbf{Y}(z)+\frac{1}{2}\boldsymbol{G}^{-1}\mathbf{t}_2^{(0)}, \tag{34}$$

由（33）可得：

$$\mathbf{Y}^{+}(x_1)+\mathbf{Y}^{-}(x_1)=0\ \text{ for }\ x_1\in(-a,a). \tag{35}$$

无穷远处条件（28）变为

$$\mathbf{Y}(z)\big|_{z\to\infty}=\frac{1}{2}\boldsymbol{G}^{-1}\left(\boldsymbol{t}_2^{\infty}-\mathbf{t}_2^{(0)}\right). \tag{36}$$

问题（35）、（36）的解为：

$$\mathbf{Y}(z)=\frac{1}{2}\boldsymbol{G}^{-1}\left(\boldsymbol{t}_2^{\infty}-\boldsymbol{t}_2^{(0)}\right)\frac{z}{\sqrt{z^2-a^2}} \tag{37}$$

进一步利用（24）、（34）和（37），可得

$$\boldsymbol{t}_2^{(1)}(x_1,0)=\boldsymbol{G}\left(\mathbf{Y}^{+}(x_1)+\mathbf{Y}^{-}(x_1)\right)+\mathbf{t}_2^{(0)},$$

考虑到 对于 可得 $x_1\notin(-a,a)$

$$\boldsymbol{t}_2^{(1)}(x_1,0)=2\boldsymbol{G}\,\mathbf{Y}(x_1)+\mathbf{t}_2^{(0)}=\left(\boldsymbol{t}_2^{\infty}-\boldsymbol{t}_2^{(0)}\right)\frac{z}{\sqrt{z^2-a^2}}+\mathbf{t}_2^{(0)}\ \text{ for }\ x_1\notin(-a,a). \tag{38}$$

方程（38）的完整形式可写为

$$\sigma_{23}(x_1,0)=\sigma_{32}^{\infty}\frac{z}{\sqrt{z^2-a^2}},\ H_{23}(x_1,0)=H_{32}^{\infty}\frac{z}{\sqrt{z^2-a^2}},\ D_2(x_1,0)=\left(D_2^{\infty}-D_0\right)\frac{z}{\sqrt{z^2-a^2}}+D_0 \tag{39}$$

点$a$ 处的应力和电位移强度因子（SIF）可表示为以下向量形式:

$$\mathbf{K}=\lim_{x_1\to a-0}\sqrt{2\pi(x_1-a)}\,\boldsymbol{t}_2^{(1)}(x_1,0), \tag{40}$$

其中 [ 3 3 ] , , T DKK K= σK

将表达式（38）、（39）代入（40），得到

$$K_{3\sigma}=\sqrt{\pi a}\sigma_{32}^{\infty},\ K_{3H}=\sqrt{\pi a}H_{32}^{\infty},\ K_D=\sqrt{\pi a}\left(D_2^{\infty}-D_0\right) \tag{41}$$

根据（20）、（34）和（35），可得公式

$$\left\langle \mathbf{u}'(x_1)\right\rangle=\boldsymbol{G}^{-1}\left(\boldsymbol{t}_2^{\infty}-\boldsymbol{t}_2^{(0)}\right)\frac{x_1}{i\sqrt{a^2-x_1^2}}\ \text{ for }\ x_1\in(-a,a), \tag{42}$$

积分后可得

$$\left\langle \mathbf{u}(x_1)\right\rangle=i\boldsymbol{G}^{-1}\left(\boldsymbol{t}_2^{\infty}-\boldsymbol{t}_2^{(0)}\right)\sqrt{a^2-x_1^2}\ \text{ for }\ x_1\in(-a,a). \tag{43}$$

式（43）的完整形式如下

$$\begin{Bmatrix}\langle u_3\rangle\\ \langle w_3\rangle\\ \langle\varphi\rangle\end{Bmatrix}=\mathbf{M}\begin{Bmatrix}\sigma_{32}^{\infty}\\ H_{32}^{\infty}\\ D_2^{\infty}-D_0\end{Bmatrix}\sqrt{a^2-x_1^2} \tag{44}$$

其中 。 l斜体 M G

## 5. 电学受限渗透裂纹

现在考虑另一种裂纹模型，其中考虑裂纹区域内电势与位移跳跃之间的关系。现在假设裂纹填充物的介电常数为

$$\varepsilon_a=\varepsilon_r\varepsilon_0,$$

其中 为相对介电常数， 为真空介电常数。我们还假设裂纹面上没有规定的机械载荷和电荷。此外，与 [12] 类似，我们认为裂纹内部的电场可表示为

$$E_a=-\frac{\varphi^+-\varphi^-}{u_3^+-u_3^-}\ \text{ for }\ x_1\in(-a,a).$$

其中 上标“+”和“ ”分别表示界面的上表面和下表面。

考虑到 并将 裂纹面处的指定为 ，可得到以下电学条件

$$D_0=-\varepsilon_a\frac{\varphi^+-\varphi^-}{u_3^+-u_3^-}=-\varepsilon_a\frac{\langle\varphi\rangle}{\langle u_3\rangle}\ \text{ for }\ x_1\in(-a,a) \tag{45}$$

沿裂纹区域。值得一提的是，我们对裂纹面上的电位移采用了与上一节相同的记号，但在此情形下它是未知的，应由方程（45）求得。

考虑到方程（44）在这种情况下仍然成立，方程（45）可写成如下形式

$$D_0 = -\varepsilon_a \frac{M_{31}\sigma_{32}^{\infty} + M_{32}H_{32}^{\infty} + M_{33}\left(D_2^{\infty} - D_0\right)}{M_{11}\sigma_{32}^{\infty} + M_{12}H_{32}^{\infty} + M_{13}\left(D_2^{\infty} - D_0\right)} \tag{46}$$

方程（46）表示关于电位移的二次方程。化简后可写为 $D_0$

$$D_0^2 - \chi_1 D_0 - \chi_2 = 0 \tag{47}$$

其中

$\chi_1 = \left(M_{11}\sigma_{32}^{\infty} + M_{12}H_{32}^{\infty} + M_{13}D_2^{\infty} - \varepsilon_a\right)/M_{13}$，$\chi_2 = \varepsilon_a\left(M_{31}\sigma_{32}^{\infty} + M_{32}H_{32}^{\infty} + M_{33}D_2^{\infty}\right)/M_{13}$

对方程（47）的解进行分析后发现，其两个根中有一个在物理上不可接受，因此下文将只关注该方程在物理上可接受的根。

## 6. 数值示例与讨论

本节将重点讨论电学受限渗透裂纹模型，该模型最能反映裂纹变形的物理特性。为进行分析，考虑具有以下所需参数值的压电准晶[15, 16]: 、、、、、对于上层材料，、、、、

( 1 44 = 5 0×10 10 ) .c Pa ( 1 15 = −0 318 2 ) ./ e C 千帕 ( 1 = 0 3×10 9 ) · R Pa ( 1 3 = 1 2×10 9 ) · e C m ( 1 15 = −0 16 2 ) ˆ

( ξ 1 11 = 8 25×10 −11 2 2 ) . /( )C 牛顿米

( 2 44 = 3 55×10 10 ) ◦ c 帕 ( 2 15 = 17 2 ) /e 厘 千帕 ( 2 = 0 15×10 9 ) R Pa ( 2 3 = 1 765×10 9 ) · /e 厘米 ( 2 15 = 17 2 ) ,

( ξ 2 11 = 15 1×10 −9 2 2 ) . /( )C 牛顿米 对于下层材料。

值得一提的是，在这种情况下，矩阵 **M** 如下

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 5.3090\times10^{-11} & -9.8852\times10^{-11} & 0.03892 \\ -9.8852\times10^{-11} & -1.9204\times10^{-9} & -3.2408 \\ 0.03892 & -3.2408 & -5.8781\times10^{9} \end{bmatrix}.$$

作为示例，我们将选择$m$以及表1中给出的外部载荷情况。该表最后一列列出了由方程（47）得出的相应电通量值，其数值由方程（47）给出。 $D_0$

**表1**。 载荷工况及相应电通量 $D_0$

| Case | $10^{-6}\sigma_{32}^{\infty}$ [Pa] | $10^{-6}\ {}^{\infty}_{32}H$ [Pa] | $100\ {}_{2}D^{\infty}$ [C/m$^2$] | $100\ {}_{0}D$ [C/m$^2$] |
|---|---|---|---|---|
| 情况1 | 6.0 | 7.0 | 0.5 | 0.9506 |
| 情况2 | 8.0 | 9.0 | 0.75 | 1.1982 |
| 情况3 | 10.0 | 11.0 | 1.0 | 1.5651 |

从表1可以看出，外部载荷的数值相近，却会导致穿过裂纹区域的电通量大小截然不同。

图2–4给出了沿材料界面的声子、相位子和电学量曲线。具体而言，裂纹右侧延伸处的声子剪切应力 Pa] 以及声子裂纹面跳跃（裂纹滑移） [m] 见图2(a)和(b),

$\left\langle \ {}^{3}_{1}()_{\mu x} \ \right\rangle$

分别。在本文及以下各图中，实线、虚线和点线分别绘制对应于情况1、2和3。

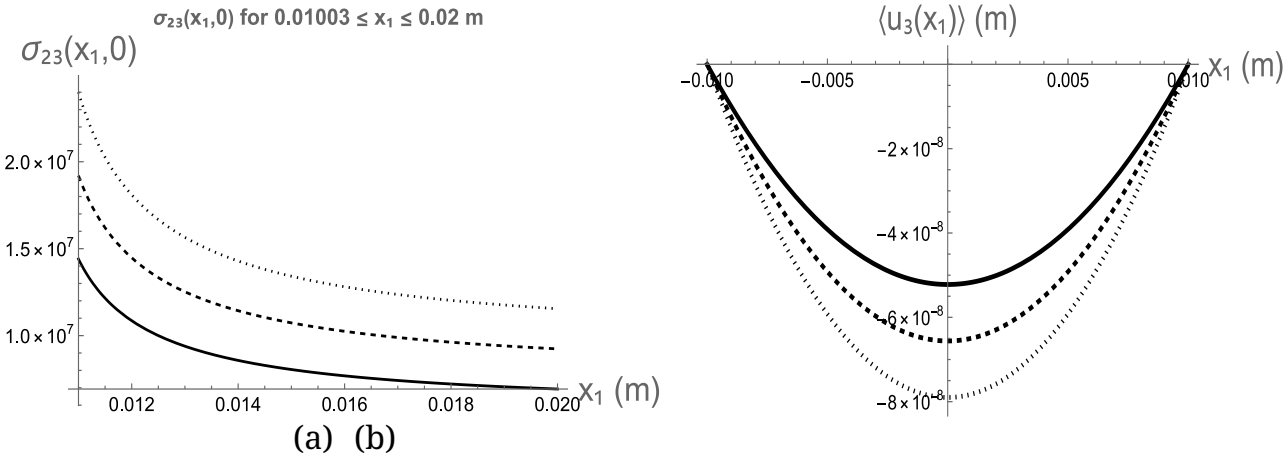


**图2**。三种载荷情况下裂纹右侧延伸处的声子剪切应力（a）以及声子裂纹面跳跃（b）

相位子应力 [Pa] 在裂纹右侧延伸处以及相位子裂纹面跳跃[m] 分别如图3 (a)和(b)所示。

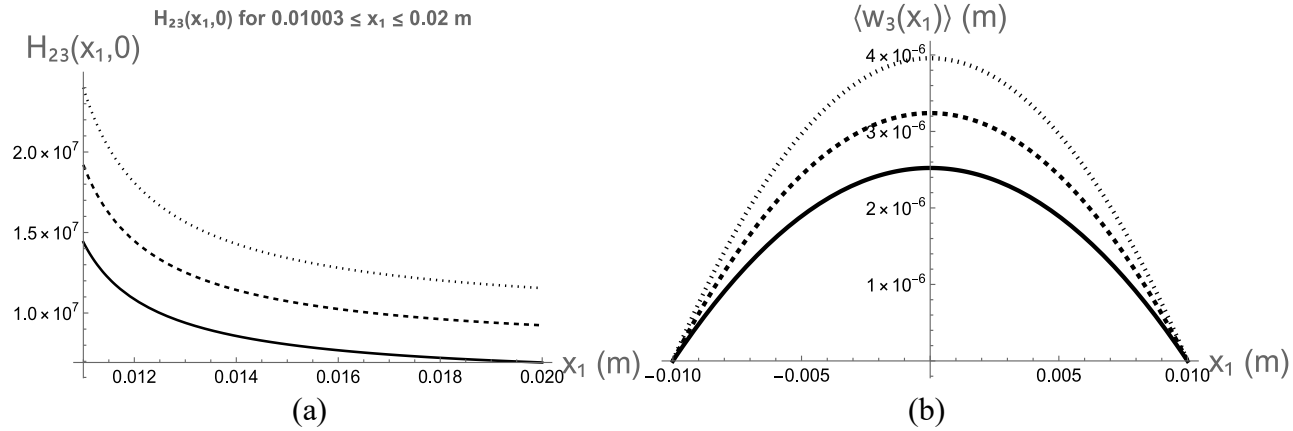


**图3**。裂纹右侧延伸处的相位子应力（a）以及声子裂纹面跳跃（b）

电位移 [C/m$^2$] 在裂纹右侧延伸处的电位移以及裂纹面上的电场跃变 [V] 分别如图4(a)和(b)所示。

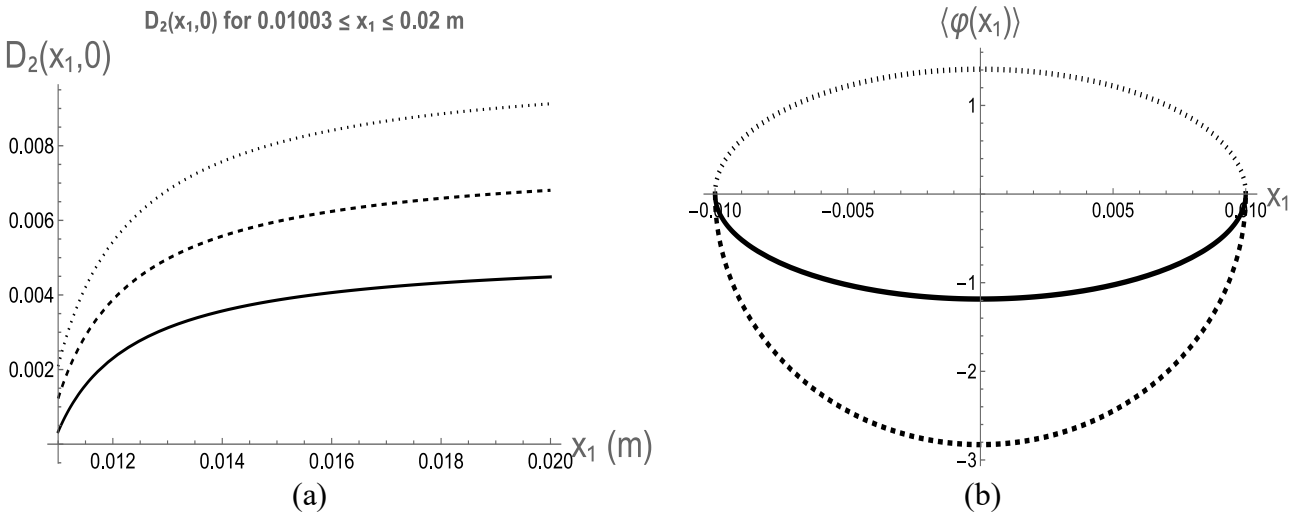


**图4**。裂纹右侧延伸处的电位移及裂纹面间的电场跃变

由公式(38)、(39)可知，声子与相位子应力以及电位移在裂纹尖端处具有平方根奇异性。因此，图2(a)、3(a)和4(a)中的曲线仅绘制在区间(0.01003 m $<x_1<$ 0.02 m)内，即距裂纹尖端一定距离处。

根据公式（41）求得了三种选定载荷情况下的应力强度因子，并列于表2。

**表2：** 三种选定情况下的应力强度因子（SIF）

| Case | $K_{3\sigma}$ [帕√米] | $K_{3H}$ [帕√米] | $K_D$ [C $m^{3/2}$ ] |
|---|---|---|---|
| 情况1 | $1.504\times10^7$ | $1.755\times10^7$ | 0.02211 |
| 情况2 | $2.005\times10^7$ | $2.256\times10^7$ | 0.03110 |
| 情况3 | $2.507\times10^7$ | $2.757\times10^7$ | 0.04010 |

## 7. 结论

本文研究了压电效应作用下，一维准晶体中承受反平面机械载荷和面内电载荷的III型界面裂纹。采用复函数方法，通过方程（20）、（24），将所有机电参数表示为除裂纹区域外在整个复平面上解析的向量函数。分析中假设裂纹满足电学绝缘和电学受限渗透裂纹模型。第一种情况导出带有无穷远处条件（28）的向量希尔伯特问题（27）；第二种情况还要求求解关于穿过裂纹区域的电通量的二次方程（47）。第4节还讨论了裂纹面上电位移非零且给定的情况。针对所考虑的各种电学条件，求得了声子与相位子应力、位移跳跃、沿材料界面的电场分量，以及相应的裂纹尖端应力强度因子的解析公式。

为进行数值示例，选择了表1中给出的三种载荷变体。相应的电通量值也为 $D_0$ 见本表。其他数值结果汇总于图2–4和表2中。尤其是声子剪切应力、相位子应力 $_{32}{}^{1}(,$ $0)x\sigma$

以及裂纹右侧延伸处沿线的电位移分别如图 2（a）–4（a）所示。声子和相位子裂纹面的位移跳跃分别见图 2（b）和图 3（b），电势跳跃见图 4（b）。由所得结果可知，在裂纹外的裂纹延伸区域，声子和相位子的剪应力随距裂纹尖端距离的平方根倒数成比例衰减，而电位移则更缓慢地趋近其远场值。此外，外部载荷的数值即使十分接近，也会导致电通量大小差异显著；两种裂纹面的位移跳跃和电势跳跃在裂纹区域内均保持平方根抛物线行为。

**参考文献**


1. Shechtman D., Blech I., Gratias D., Cahn J. W. 具有长程取向有序且无平移对称性的金属相。物理评论快报 1984年, 53 pp. 1951–1953. 2. Ding D. H., Yang W., Hu C. Z., Wang R. 准晶的广义弹性理论。物理评论B辑 1993年, 48 pp. 7003–7010. 3. Fan T. Y. 《准晶弹性数学理论及其应用》。施普林格, 2011年。4. Shi W. C., Li H. H., Gao Q. H. 常规弹性材料与准晶之间反平面滑动模式的界面裂纹。关键工程材料 2007年, 340–341 pp. 453–458. 5. Zhou Y.-B., Li X.-F. 一维层状六方压电准晶中垂直于边界的两条共线裂纹的精确解。哲学杂志 2018年, 98 pp. 1780–1798. 6. Zhou Y. B.; Li X. F. 一维六方压电准晶条带中的两条共线III型裂纹。工程断裂力学 2018年, 189 pp. 133–147. DOI: 10.1016/j.engfracmech.2017.10.030. 7. Tupholme G. E. 一维压电准晶半空间中嵌入的非均匀载荷反平面裂纹。力学 2018年, 53 pp. 973–983. DOI: 10.1007/S11012-017-0759-1. 8. Kletskov O. M., Silich-Balhabaieva V. B., Sheveleva A. E., Loboda V. V. 关于界面处带微裂纹的两条薄条带的变形特性。TNTU科学期刊 2025年, 118 (2) pp. 153–167. 9. Hu K. Q., Jin H., Yang Z., Chen X. 具有压电效应的异质一维六方准晶之间的界面裂纹。力学学报 2019年, 230 pp. 2455–2474. 10. Govorukha V., Kamlah M. 准晶中具有混合电边界条件的界面裂纹。应用力学档案 2024年, 94 pp. 589–607. 11. Loboda V., Sheveleva A., Komarov O., Chapelle F., Lapusta Y. 具有压电效应的两种一维压电准晶界面上的任意数量电渗透裂纹。工程断裂力学 2022年, 276 pp. 108878. 12. Hao T. H., Shen Z. Y. 电断裂力学的一种新型电边界条件及其应用。工程断裂力学 1994年, 47 pp. 793–802. 13. Yang J.; Li X. 一维六方压电准晶中由椭圆孔引出的两条对称裂纹的反平面剪切问题。先进材料研究 2014年, 936 pp. 127–135. DOI: 10.4028/www.scientific.net/AMR.936.127. 14. Muskhelishvili N. I. 《弹性数学理论的一些基本问题》。Noordhoff, 格罗宁根, 1975年。15. Zhou Y.-B.; Li X.-F. 一维层状六方压电准晶中垂直于边界的两条共线裂纹的精确解。哲学杂志 2018年, 98 pp. 1780–1798. DOI: 10.1080/14786435.2018.1459057. 16. Li X. Y.; Li P. D.; Wu T. H. 具有压电效应的一维六方准晶的三维基本解。物理快报A辑 2014年, 378 pp. 826–834. DOI: 10.1016/j.physleta.2014.01.016.