等价有界信心过程

Sascha Kurz，拜罗伊特大学数学系，95440 拜罗伊特，德国；电子邮件：sascha.kurz@uni-bayreuth.de

arXiv:2512.18016v1 [physics.soc-ph] 19 Dec 2025

2025年12月19日

摘要

在有界信心模型中，一组智能体的意见随离散时间步不断演化。每一轮中，一个智能体会对所有意见与其自身意见相差不超过某个阈值的智能体的意见取平均。这里假设智能体的意见属于实数线。动力学的细节由智能体的初始意见（即初始配置）以及上述阈值决定，而这两者都存在不可数无穷多种可能性。近期研究发现，对于每个初始配置，阈值集合都可以划分为有限个区间，使得意见的演化不取决于阈值在某一区间内的具体取值。因此，对于给定的初始意见初始配置，有界信心过程只有有限多个等价类（并且存在一种计算这些等价类的算法）。本文系统地研究了不同的等价关系概念。采用最宽泛的等价关系时，我们还可以不再考虑初始配置，从而对于给定的（有限个）智能体数量，得到有限多个等价的有界信心过程。这使我们能够精确研究智能体数量较少时出现的现象，而不必担心数值实验会遗漏有趣的情形。作为示例，我们研究冻结时间（即过程稳定所需的时间步数）和碎片化程度（即过程达到最终状态后仍然存在的不同意见数量）。

关键词： 意见动力学 · 有界置信 · Hegselmann–Krause 模型 · 等价类

我衷心感谢 Rainer Hegselmann 对早期草稿提出意见，并慷慨分享他对有界信心模型及其陷阱的见解；他也是推动我们逐步揭开有界信心模型解析性质之谜的重要力量。

1 引言

Hegselmann–Krause（HK）模型 [8, 9]已成为研究意见动力学的核心框架。在该模型中，智能体逐期通过对足够接近的意见取平均值，反复调整自己的意见。更确切地说，互动仅限于意见差异不超过预设置信界限的智能体，因此这类模型称为有界置信模型。在 HK 模型中，意见是同步更新的。 [3]提出了另一种成对序贯更新过程。在文献中，这两种变体都称为有界置信（BC）模型。虽然区分 Hegselmann–Krause 模型和 Defuant–Weisbuch 模型会更为准确，但下文仍统称为 BC 模型。自问世以来，BC 模型已从动力学和社会学等角度得到广泛分析，并在收敛、聚类以及共识或极化的形成方面取得了基础性成果。简单的有界置信机制这一特征催生了丰富的群体行为和多种多样的长期结果。

这里假设智能体的意见是实数线上的元素。动力学的细节由智能体的初始意见（即初始配置）以及前述阈值决定——二者都允许不可数无穷多种可能。最近有人发现，对于每个初始配置，都可以将阈值集合划分为有限个区间，使得意见的演化不取决于阈值在其中某个区间内的具体取值 [7]。因此，我们可以说，给定一个由初始意见构成的初始配置，有界置信过程只有有限多个等价类（并且存在一种计算这些等价类的算法）。本文系统地研究不同的等价概念。在最宽泛的概念下，我们还可以摆脱初始配置，从而对于给定的（有限个）智能体数量，得到有限多个等价有界信心过程。所谓影响图描述了智能体之间的组合交互，而由一系列影响图组合描述的则是整个 BC过程。这使我们能够精确研究智能体数量较少时出现的现象，而不必担心数值实验会遗漏有趣的情况。我们以冻结时间（即过程稳定所需的时间步数）和碎片化程度（即过程达到最终状态后仍然存在的不同意见数量）为例进行研究。

本文其余部分的结构如下。第 2 节介绍必要的预备知识，随后我们将在第3节深入探讨影响图和线性规划的细节。鉴于 BC过程可以组合性地描述为影响图序列，而线性规划可作为判断是否存在合适初始配置的计算工具，我们便具备了研究相关应用的工具。在第 4 节，我们考察

达到稳定状态所需的最大时间步数；在第5节，我们研究稳定状态中互不相交的意见簇的最大数量。最后，我们以简短的结论和一些开放问题作结。

2 预备知识

首先，我们介绍一些术语，以准确说明有界置信（BC）过程的含义：

(A) 有一个集合 $A := \{1, \dots, n\}$，包含$n \in \mathbb{N}_{>0}$个智能体。(B) 时间是离散的；$t \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$。(C) 每个智能体$i \in A$ 在时间$t = 0$开始时都有一个意见$x_i(0) \in \mathbb{R}$。(D) 时间$t \in \mathbb{N}$时的意见概况 定义为

$$X(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) \in \mathbb{R}^n. \tag{1}$$

我们将 $X(0)$ 称为初始分布或初始配置。

(E) 给定一个置信水平 $\varepsilon \in \mathbb{R}_{\geq 0}$，智能体$i \in A$ 在时间$t \in \mathbb{N}$时的信任区间 定义为

$$V_i(t) = [x_i(t) - \varepsilon, x_i(t) + \varepsilon] \subseteq \mathbb{R}. \tag{2}$$

(F) 智能体$i \in A$ 在时间$t \in \mathbb{N}$时的i-内部个体 集合定义为

$$I_i(t) = \left\{ j \in A : \left| x_j(t) - x_i(t) \right| \leq \varepsilon \right\} = \left\{ j \in A : x_j(t) \in V_i(t) \right\} \subseteq A. \tag{3}$$

我们将其补集称为

$$O_i(t) = A \backslash I_i(t) = \left\{ j \in A : \left| x_j(t) - x_i(t) \right| > \varepsilon \right\} = \left\{ j \in A : x_j(t) \notin V_i(t) \right\} \subsetneq A \tag{4}$$

时间$t \in \mathbb{N}$ 时i-外部个体的集合。

(G) 意见的更新规则 如下：

$$x_i(t+1) = \frac{1}{\#I_i(t)} \cdot \sum_{j \in I_i(t)} x_j(t) \tag{5}$$

对所有$i \in A$以及所有$t \in \mathbb{N}$。

(H) 时间$t \in \mathbb{N}$时的影响图 记为 $G(t) = (A, E(t))$，其中顶点集为智能体集合A，边集定义为

$$E(t) := \left\{ \{i, j\} : i, j \in A, i \neq j, \left| x_i(t) - x_j(t) \right| \leq \varepsilon \right\}. \tag{6}$$

我们指出，有些作者假设初始意见$x_i(0)$，以及一般情况下的$x_i(t)$，都包含在单位区间 $[0,1]$ 内。我们很快就会看到，这两种定义都会导出等价的 BC过程，而我们的选择在某些情况下更灵活一些。置信水平 ε 有时也称为信任半径。如果我们将$x_i(t)$限制为 $[0,1]$,，那么也可以不失一般性地假设 $\varepsilon \in [0,1]$ 。当然，选择 $\varepsilon = 0$ 会导致一个相当无趣的 BC过程，其中对于所有$t \in \mathbb{N}$ 和所有$i \in A$，都有$x_i(t) = x_i(0)$。尽管如此，我们仍会在定义中包含 $\varepsilon = 0$ 这种情况，以便在某些地方让表述更加流畅。注意，我们总有$i \in I_i(t)$，也就是说$I_i(t)$非空且基数至少为一，因此更新规则 (5) 定义良好。虽然大多数关于 BC模型的论文都没有使用影响图，但其用法至少可以追溯到 [11, 12]。在 [20] 中，作者称之为接纳图。我们将看到，影响图这一概念是 BC过程的一个重要组合不变量。我们指出，我们有

$$I_i(t) = \{i\} \cup \{j \in A \backslash \{i\} : \{i, j\} \in E_i(t)\}, \tag{7}$$

因此，更新规则（5）也可以用 $\mathbb{G}(t)$ 来表示。

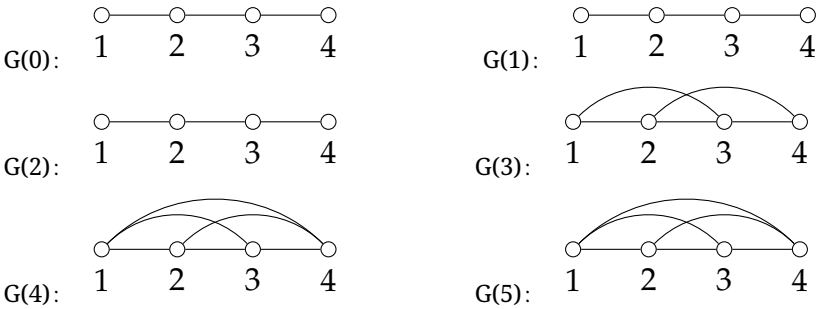
备注 *1.* 本文将范围限定在一维有界信任模型中，其中智能体的意见 $x_i(t)$ 为实数。当然，该模型已推广至更高维度，此时 $x_i(t) \in R^l$ 或其子集 R 中的元素。为了推广信任区间、i-内部个体、i-外部个体和影响图的概念，我们需要在 R^l （或 R）上选取一个度量 d。据此，时刻 $t \in N$ 时智能体 $i \in A$ 的信任区域定义为 $V_i(t) := \left\{y \in R^l : d(y, x_i(t)) \leq \varepsilon\right\} \subseteq R^l$。如果通过信任区间（区域）$V_i(t)$ 定义时刻 t 的 i-内部个体集和 i-外部个体集，那么我们可以沿用原定义。否则，定义 $I_i(t) = \left\{j \in A : d\left(x_j(t), x_i(t)\right) \leq \varepsilon\right\} \subseteq A$，$O_i(t) = \left\{j \in A : d\left(x_j(t), x_i(t)\right) > \varepsilon\right\} \subseteq A$。最后，时刻 t 的影响图边集为 $E(t) = \left\{(i, j) : i, j \in A, i \neq j, d\left(x_i(t), x_j(t)\right) \leq \varepsilon\right\}$，因此方程（7）仍然成立。度量 d 通常取由某个范数 $\|\cdot\|$诱导的度量，即 $d(x, y) := \|x - y\|$。在实数线 R 上，这只剩下 $\|x\| := \alpha \cdot |x|$ 这一种选择（其中 $\alpha > 0$ 为某个值）。通过重新缩放置信水平 ε，不失一般性，我们可以假设 $\alpha = 1$ 。对于 $l \geq 2$，存在无穷多个范数，它们对应的单位球彼此不相似。著名的例子包括欧几里得范数 $\|(x_1, \ldots, x_l)\|_2 := \sqrt{\sum^l i=1 x^2 i}$、*1*-范数$\|(x_1, \ldots, x_l)\|_1 := \sum^l i=1 |x_i|$（它诱导出租车几何，又称曼哈顿几何），以及最大范数（或切比雪夫范数）$\|(x_1, \ldots, x_l)\|_\infty := \max\{|x_i| : 1 \leq i \leq l\}$。我们后文的一些论述在这一更一般的设定下同样成立。下文将给出相关说明，并介绍高维有界信心模型或高维*BC*过程；后一个概念将在下文定义。

根据 (A)-(H)，现在可以定义：如果意见剖面序列 $\left(X(t)\right)_{t \in \mathbb{N}}$ 由更新规则 (5) 生成，那么它就是一个 BC过程。注意到$X(0)$ 的条目数编码了智能体的数量 $n = \#A$ ，我们可以观察到，一个 BC过程是一个n 维动力系统，它由初始配置 $X(0)$ 和

置信水平 ε 唯一确定，因此我们也将 BC过程记作 $\mathrm{P} = (X(0), \varepsilon)$。因此，形式上可以写作 $V_i(t; X(0), \varepsilon)$, $I_i(t; X(0), \varepsilon)$, $O_i(t; X(0), \varepsilon)$, $\mathrm{G}(t; X(0), \varepsilon)$，或 $V_i(t; \mathrm{P})$, $I_i(t; \mathrm{P})$, $O_i(t; \mathrm{P})$, $\mathrm{G}(t; \mathrm{P})$。不过，只要上下文已明确底层的 BC过程 P，我们更倾向于使用更简便的缩写。

BC过程的一项重要性质是，它会在有限个时间步内稳定下来，参见例如 [14]。形式上，冻结时间 $\mathrm{F(P)}$ 是满足 $\mathrm{X(t+1) = X(t)}$ 的最小整数 t；这显然意味着对所有 $\mathrm{t' \geq t}$，都有 $\mathrm{X(t') = X(t)}$。有趣的是，BC过程的冻结时间可以由其智能体数量 n 给出上界。为此，我们将 $\mathrm{F(n)}$ 定义为含有 n 个智能体的 BC过程的最大冻结时间。在 [21] 中构造了一系列冻结时间为二次的例子。因此，我们有 $\mathrm{F(n) \in \Omega(n^2)}$.[1] 在 [1, 16]中给出了三次上界。因此，例如，我们有 $\mathrm{F(n) < 4n(n^2+1) \in O(n^3)}$.[2]。请注意，该上界与初始配置 X(0) 和置信水平 ε无关。对于 R^l 中的高维BC过程，冻结时间的上界为 $\mathrm{O\left(n^{10}l^2\right)}$ [1, 定理 4.4]。

例1. 考虑由 $X(0) =$ 给定的 *BC*过程 $\mathcal{P} = (X(0), \varepsilon)$，其中 $X(2,3,4,5)$ 且 $\varepsilon = 1$。通过计算更新规则（5），我们得到 $X(1) = \left(\frac{5}{2}, 3, 4, \frac{9}{2}\right)$、$X(2) = \left(\frac{11}{4}, \frac{19}{6}, \frac{23}{6}, \frac{17}{4}\right)$、$X(3) = \left(\frac{71}{24}, \frac{13}{4}, \frac{15}{4}, \frac{97}{24}\right)$、$X(4) = \left(\frac{239}{72}, \frac{7}{2}, \frac{7}{2}, \frac{265}{72}\right)$ 和 $X(5) = \left(\frac{7}{2}, \frac{7}{2}, \frac{7}{2}, \frac{7}{2}\right)$，因此 $\varphi(\mathcal{P}) = 5$。相应的影响图序列 $\mathcal{G}(t)$ 如下：



对于所有 $t \geq 5$，我们有 $\mathcal{G}(t) = \mathcal{G}(5)$ 以及 $X(t+1) = X(t)$。

接下来我们总结一些基本的解析性质：

引理 1.

(1) 若对于某些 $i, j \in A$ 和 $t \in N$，有 $x_i(t) \leq x_j(t)$，则对所有 $t' \geq t$，都有 $x_i(t') \leq x_j(t')$，参见 *[10,* 引理 *2]*。*(2)* 对所有 $t \in N$，都有 $min\{x_i(t) : i \in A\} \leq min\{x_i(t+1) : i \in A\}$，且 $max\{x_i(t) : i \in A\} \geq max\{x_i(t+1) : i \in A\}$。

[1]若存在常数 $\mathrm{n_0 \in N}$ 和 $\mathrm{c \in R_{>0}}$，使得对于所有 $\mathrm{n \geq n_0}$，均有 $\mathrm{f(n) \geq c \cdot g(n)}$，则记 $\mathrm{f(n) \in \Omega(g(n))}$。[2]若存在常数 $\mathrm{n_0 \in N}$ 和 $\mathrm{c \in R_{>0}}$，使得对于所有 $\mathrm{n \geq n_0}$，均有 $\mathrm{f(n) \leq c \cdot g(n)}$，则记 $\mathrm{f(n) \in O(g(n))}$。上界 $\mathrm{O\left(n^5\right)}$ 和 $\mathrm{F(n) \in O\left(n^4\right)}$ 分别在 [15] 和 [19], 中得到了证明。

(3) 对所有 i、$j \in A$ 和 $t \in N$，$j \in I_i(t)$ 等价于 $i \in I_j(t)$。*(4)* 若对所有 $y \leq m$，都有 $\#\{i \in A : x_i(t) = y\} = \#\{i \in A : x_i(t) = 2m - y\}$，则称 $X(t)$ 关于 $m \in R$ 镜像对称。因此，若 $X(t)$ 关于 m 镜像对称，则对所有 $t' \geq t$，$X(t')$ 也关于 m 镜像对称。*(5)* 令 $P = (X(0), \varepsilon)$ 为任意一个 *BC*过程。若对于某些 $\alpha, \beta \in R\backslash\{0\}$，有 $X'(0) = \alpha X(0) + \beta$，即对所有 $i \in A$，都有 $x'i(0) = \alpha x_i(0) + \beta$，且 $\varepsilon' = \alpha\varepsilon$，则对于 *BC*过程 $P' = (X(0)', \varepsilon')$，对所有 t 都有 $X'(t) = \alpha X(t) + \beta$。我们也记 $P' = \alpha P + \beta$。*(6)* 令 $P = (X(0), \varepsilon)$ 和 $P' = (X'(0), \varepsilon')$ 为两个具有相同初始配置的 *BC*过程，即 $X(0) = X'(0)$。若对于所有 $0 \leq i \leq t$，都有 $G(i) = G'(i)$，且 $G(t + 1) \neq G'(t + 1)$，则对于所有 $0 \leq i \leq t$，都有 $X(i) = X'(i)$，且 $X(t + 1) \neq X'(t + 1)$。

我们指出，引理 1 的陈述 (3) 和 (6) 对于 R^l 中的高维BC过程同样成立，若我们选择 $\beta \in \mathrm{R}^l$，则陈述 (5) 也成立。

由于第一条性质，以下我们将始终假设按$x_1(0) \leq x_2(0) \leq \cdots \leq x_n(0)$ 的顺序排列。将给定 BC过程 $\mathrm{P} = (X(0), \varepsilon)$ 的宽度 定义为

$$\omega(t) = \max\{x_i(t) : i \in A\} - \min\{x_i(t) : i \in A\}, \tag{8}$$

第二条性质指出，宽度 ω(t) 关于 t 单调不增。P 的初始宽度和最终宽度分别为 $\omega(0)$ 和 $\omega(\mathrm{f}(\mathrm{P}))$。在例1中，初始宽度为三，最终宽度为零。当最终宽度为零时，我们称之为共识，即所有智能体在最终状态具有相同的意见；否则称为碎片化。进行常数为 α 和 β 的仿射变换后，最终（及初始）宽度将乘以 α。第三条性质说明了我们为何可以考虑无向影响图 G(t)。在例1的BC过程中，X(0) 关于 $\mathrm{m} = \frac{7}{2}$ 镜像对称。由于我们已知该过程会达到共识，第四条性质意味着唯一的最终意见等于 m。X(t) 的镜像对称性也意味着相应的影响图 G(t) 具有一个二阶自同构。不过，G(t) 的对称性可能远多于 X(t)。根据第五条性质，若存在常数 $\beta \in \mathrm{R}$ 和 $\alpha \in \mathrm{R}\backslash\{0\}$，使得 $\mathrm{P}' = \alpha \mathrm{P} + \beta$，我们就称两个BC过程 P 和 P′ 仿射等价。例1中的BC过程与BC过程 $\mathrm{P}' = (\mathrm{X}'(0), \varepsilon')$ 仿射等价，其中 $\mathrm{X}'(0) = \left(0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\right)$和$\epsilon' = \frac{1}{3}$。因此，若只考虑仿射等价意义下的BC过程，我们总可以将意见 x_i(t) 限制在单位区间 [0, 1]内。或者，对于 $\varepsilon \neq 0$，我们总可以假设 $\varepsilon = 1$。我们指出，在引理3的证明中将用到第六条性质。

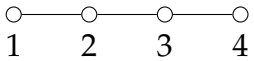
当然，我们不会说两个仿射等价的 BC 过程 P 和 P′ 本质上不同，尽管我们通常有 $\mathrm{P} \neq \mathrm{P}'$。对于两个等价的 BC 过程，我们写作 $\mathrm{P} \cong \mathrm{P}'$。由于我们将介绍更多等价关系的概念，当上下文无法明确判断所指的等价关系时，我们会用 $\mathrm{P} \cong_A \mathrm{P}'$ 表示仿射等价。一般来说，等价关系

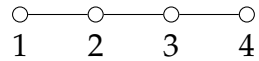
等价类由所有与 P 等价的 BC 过程组成。对于仿射等价，等价类包含无穷多个元素，由常数 α 和 β 参数化；而当 $n > 1$ 时，仍然有无穷多个等价类。

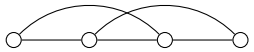
为了引入另一种等价关系，我们注意到，在例1中，可以将置信水平 ε 改为 $\left[1, \frac{13}{12}\right)$ 中的任意值，而不改变任何意见剖面 $X(t)$。对于 $\varepsilon \in [0, 1)$，我们得到一个冻结时间为0的BC过程；在例2中，我们将看到，由此得到的BC过程本质上不同。

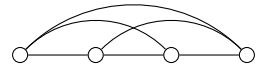
定义1. 给定两个*BC*过程 $\mathcal{P} = (X(0), \varepsilon)$ 和 $\mathcal{P}' = (X'(0), \varepsilon')$，若对所有 $t \in \mathbb{N}$，均有 $\mathcal{P}$ 和 $\mathcal{P}'$ 满足 ε-等价，记作 $\mathcal{P} \cong_\varepsilon \mathcal{P}'$，当且仅当 $X(t) = X'(t)$。

例2. 考虑由 $X(0) = (2, 3, 4, 5)$ 及 $\varepsilon = \frac{13}{2}$ 给出的*BC*过程 $\mathcal{P} = (X(0), \varepsilon)$。根据更新规则(5)计算 $X(1) = \left(\frac{5}{2}, 3, 4, \frac{9}{2}\right)$、$X(2) = \left(\frac{11}{4}, \frac{19}{6}, \frac{23}{6}, \frac{17}{4}\right)$、$X(3) = \left(\frac{13}{4}, \frac{7}{2}, \frac{7}{2}, \frac{15}{4}\right)$ 和 $X(4) = \left(\frac{7}{2}, \frac{7}{2}, \frac{7}{2}, \frac{7}{2}\right)$，从而得到 $\varphi(\mathcal{P}) = 4$。相应的影响图序列 $\mathcal{G}(t)$ 如下：

G(0)：

G(1)：

G(2)：

G(3)：

G(4)：

对所有 $t \geq 4$，我们有 $\mathcal{G}(t) = \mathcal{G}(4)$ 以及 $X(t+1) = X(t)$。

引理2。对于每个初始配置 $X(0) \in \mathbb{R}^n$，关于 $\cong_\varepsilon$ 存在有限个等价类；也就是说，存在 ε_1、……、$\varepsilon_l \in \mathbb{R}_{\geq 0}$，使得对于每个 $\varepsilon' \in \mathbb{R}_{\geq 0}$，都存在一个指标 $1 \leq h \leq l$，使得 $\left(X(0), \varepsilon'\right) \cong_\varepsilon \left(X(0), \varepsilon_h\right)$。

证明。如前所述，更新规则（5）可以仅用影响图 G(*t*) 表示，见方程（7）。由于冻结前的步数有上界，且每一步可能出现的影响图数量有限，因此结论成立。

■

对于 n 个智能体，步数的上界为 $4n(n^2+1)$，图的数量上界为 $2^{\binom{n}{2}}$，因此关于等价关系 $\cong_\varepsilon$、由 n 个智能体构成的等价类数量的一个初步粗略上界为 $\left(2^{\binom{n}{2}}\right)^{4n(n^2+1)}$；这个上界对于 R^l 中的高维 BC过程也成立。

ε等价关系的概念已在 [7]中隐式定义。这里，作者考虑了所谓的 ε切换。粗略地说，ε切换是指某些特定值：当置信水平增加到这些值时，BC过程会发生变化。它们可以精确刻画等价类：

引理3。 对于每个初始配置 $X(0) \in \mathbb{R}^n$，存在有限个实数值$0 < \varepsilon_1 < \cdots < \varepsilon_l < \infty$，使得对于每个 $\varepsilon' \in \left[\varepsilon_j, \varepsilon_{j+1}\right)$，若 $0 \le j \le l$，$\varepsilon_0 = 0$，且 $\varepsilon_{l+1} = \infty$，则有$\left(X(0), \varepsilon'\right) \cong_\varepsilon \left(X(0), \varepsilon_j\right)$以及 $\left(X(0), \varepsilon'\right) \ncong_\varepsilon \left(X(0), \varepsilon''\right)$对所有 $\varepsilon'' \in \mathbb{R}_{\ge 0} \setminus \left[\varepsilon_j, \varepsilon_{j+1}\right)$均成立。

证明。 我们将递归地证明该陈述。开始时，令 $l(0) = 0$, $\varepsilon_0^{(0)} = 0$, $\varepsilon_1^{(0)} = \infty$，以及 $\mathrm{I}^{(0,0)} = [0, \infty)$。对于每一步 $i > 0$，我们从 $\left(\varepsilon_0^{(i)}, \text{。 。 。 ，} \varepsilon^{(i)}{}_{l(i-1)+1}\right) = \left(\varepsilon_0^{(i-1)}, \text{。 。 。 ，} \varepsilon^{(i-1)}{}_{l(i-1)+1}\right)$开始，并按照下面的描述，通过遍历所有区间 $\mathrm{I}^{(i,j)} = \left[\varepsilon^{(i-1)}{}_j \text{、} \varepsilon^{(i-1)}{}_{j+1}\right)$（其中 $0 \le j \le l(i-1)$）插入更多值。给定一个区间 $\mathrm{I}^{(i,j)}$，令

$$\mathcal{N}^{(i,j)} = \left(\{|x_a(i-1) - x_b(i-1)| : a, b, \in A\} \cap \mathcal{I}^{(i.j)}\right) \setminus \left\{\varepsilon_j^{(i-1)}\right\},$$

即，在时间 i，区间 $\mathrm{I}^{(i,j)}$ 内一对智能体的意见之间的不同距离的集合，但不包括其左端点。在 $\varepsilon^{(i-1)}{}_j$ 和 $\varepsilon^{(i-1)}{}_{j+1}$ 之间，我们按递增顺序插入 $\mathrm{N}^{(i,j)}$ 的元素。

我们记 $(\mathrm{X}'(0), \varepsilon') \cong_\varepsilon^t \mathrm{X}''(0), \varepsilon'')$ 当且仅当对所有 $0 \le \mathrm{t}' \le \mathrm{t}$，都有 $\mathrm{X}'(\mathrm{t}') = \mathrm{X}''(\mathrm{t}')$。通过对 i 使用归纳法，我们证明存在实数值 $0 < \varepsilon_1^{(i)} < \cdots < \varepsilon^{(i)}\mathrm{l(i)} < \infty$，使得对于每个 $\varepsilon' \in \left[\varepsilon^{(i)}\mathrm{j}, \varepsilon^{(i)}\mathrm{j}_{+1}\right)$，其中$0 \le \mathrm{j} \le \mathrm{l(i)}$，$\varepsilon_0^{(i)} = 0$，且 $\varepsilon^{(i)}\mathrm{l(i)}_{+1} = \infty$，都有 $\left(\mathrm{X}(0), \varepsilon'\right) \cong_\varepsilon^i \left(\mathrm{X}(0), \varepsilon^{(i)}\mathrm{j}\right)$以及 $\left(\mathrm{X}(0), \varepsilon'\right) \ncong_\varepsilon^i \left(\mathrm{X}(0), \varepsilon''\right)$对所有 $\varepsilon'' \in \mathrm{R}_{\ge 0} \setminus \left[\varepsilon^{(i)}\mathrm{j}, \varepsilon^{(i)}\mathrm{j}_{+1}\right)$ 均成立。

对于归纳法的起始情形 $\mathrm{i} = 0$，命题显然成立。对于归纳步骤，我们注意到已构造出序列 $0 < \varepsilon_1^{(i)} < \cdots < \varepsilon^{(i)}\mathrm{l(i)} < \infty$。如果 $\varepsilon' \in \mathrm{I}^{(i,j)} \text{and} \varepsilon'' \in \mathrm{I}^{(i,j')} \text{with j} \ne \mathrm{j}'$，那么根据归纳假设 $(\mathrm{X}(0), \varepsilon') \ncong_\varepsilon^{i-1} (\mathrm{X}(0), \varepsilon'')$，有 $(\mathrm{X}(0), \varepsilon') \ncong_\varepsilon^i (\mathrm{X}(0), \varepsilon'')$。如果 $\mathrm{j} = \mathrm{j}'$，那么归纳假设给出 $(\mathrm{X}(0), \varepsilon') \cong_\varepsilon^{i-1} (\mathrm{X}(0), \varepsilon'')$。根据构造，$\mathrm{G}'(\mathrm{i}) = \mathrm{G}''(\mathrm{i})$（分别表示 $(\mathrm{X}(0), \varepsilon')$ 和 $(\mathrm{X}(0), \varepsilon'')$ 的影响图）成立，当且仅当存在一个指标 $0 \le \mathrm{h} \le \mathrm{l(i)}$，使得 $\varepsilon', \varepsilon'' \in \left[\varepsilon^{(i)}\mathrm{h}, \varepsilon^{(i)}\mathrm{h}_{+1}\right)$，这就证明了归纳步骤。

还需注意，至多经过 $F(n)$ 步后，BC过程便会稳定，且对于所有 $i \ge F(n)$，都有 $\mathrm{N}^{(i,j)} = \emptyset$。因此，令 $t = F(n) + 1$，并令 $(\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{l+1}) = \left(\varepsilon_0^{(t)}, \varepsilon_1^{(t)}, \ldots, \varepsilon^{(t)}{}_{l(t)+1}\right)$，即可得到所述结果，因为我们有 $\mathrm{P} \cong_\varepsilon \mathrm{P}'$ 当且仅当 $\mathrm{P} \cong_\varepsilon^t \mathrm{P}'$。 ■

用文字来说，引理3指出，ε等价类由$\left[0, \varepsilon_1\right)$、$\left[\varepsilon_1, \varepsilon_2\right)$、……、$\left[\varepsilon_{l-1}, \varepsilon_l\right)$、$\left[\varepsilon_l, \infty\right)$给出，也就是说，同一区间内的置信水平对应等价的BC过程，而不同区间内的置信水平对应不等价的BC过程。满足 $1 \le i \le l$ 的那些值 ε_i 在 [7]中称为 ε切换点。这里给出的证明描述了一种显式计算这些 ε 切换点的算法。我们指出，该算法是 [7]中所述深度优先型算法的广度优先版本。引理2证明了 [7, 分析注记]中的猜想。引理3完全刻画了关于 $\cong_\varepsilon$的等价集结构。我们指出，引理3的证明还意味着，当$X(0) \in \mathrm{Q}^n$时，ε切换点是有理数。否则，证明仍然成立，但在算法方面，我们必须处理如何表示和计算非有理实数的问题。尽管

我们没有给出区间 $\left[\varepsilon_j, \varepsilon_{j+1}\right)$ 最小长度的任何下界（以输入数据X(0)为依据），但要指出的是，这些区间的长度至少都不为零。因此，原则上，可以通过每次以足够小的常数 $\Delta > 0$逐步增大 ε，找出所有不同的BC过程。对于例1中的BC过程， ε切换点为1、$13\,12$、$3\,2$、2、3。显然，仿射变换 $\alpha X(0) + \beta$会将 ε切换点乘以 α。实际上，引理3中的最后一个区间长度为无穷大。不过，初始宽度是我们实际需要考虑的 ε 最大值。因此，如果 $X(0) \subseteq [0,1]$，那么我们无需考虑大于1的置信水平，并且可以将 ε_{l+1} 替换为任意大于1的数。上述结论，尤其是引理3，对R^l中的高维BC过程仍然成立。

引理2的证明表明了一种更粗略的等价关系。

定义2。 两个*BC*过程 $\mathcal{P}' = (X'(0), \varepsilon')$ 和 $\mathcal{P}'' = (X''(0), \varepsilon'')$ 称为图等价，记作 $\mathcal{P}' \cong_{\mathcal{G}} \mathcal{P}''$ *iff*，当且仅当它们的影响图相同，即对所有 $t \in \mathbb{N}$，都有 $\mathcal{G}'(t) = \mathcal{G}''(t)$。

例*3*。令我们将置信水平固定为 $\varepsilon = 1$，并描述初始配置 $X(0) \in R^4$,的集合，假设采用仿射归一化 $x_1(0) = 0$，该配置与例*1*中的*BC*过程图等价。作为参数化表示，我们选择 $X(0) = (0, x, x + y, x + y + z)$，其中 x、y、$z \in R_{\geq 0}$。给定的影响图 $G(0)$ 给出约束 $x \leq 1$、$y \leq 1$、$z \leq 1$、$x + y > 1$以及 $y + z > 1$。注意，缺失边连接智能体*1*和智能体*4*，对应的约束 $x + y + z > 1$ 可由其他约束推出。利用 $G(0)$，我们计算得到 $X(1) = \left(\frac{x}{2}, \frac{2x+y}{3}, \frac{x+2y+z}{3}, \frac{x+y+z}{2}\right)$。由此，给定的影响图 $G(1)$ 产生附加约束 $3x + 4y + 2z > 6$ 和 ~~$2x + 4y + 3z > 6$~~。利用 $G(1)$，我们计算得到 $X(2) = \left(\frac{7x+2y}{12}, \frac{13x+6y+2z}{18}, \frac{16z\,x+12y+5z}{18}, \frac{x+10y+5z}{12}\right)$，因此 $G(2)$ 蕴含附加约束 $11x + 18y + 10z > 36$ 和 ~~$10x + 18y + 11z > 36$~~。~~利用 $G(2)$~~，我们计算得到 $X(3) = \left(\frac{47x+18y+4z}{72}, \frac{79x+42y+14}{108}, \frac{94z\,x+66y+29}{108}, \frac{68z\,x+54y+25}{72}\right)z$，因此 $G(3)$ 蕴含约束 $47x + 78y + 46z \geq 216$和 ~~$46x + 78y + 47z \leq 216$~~，~~这些~~约束会自动满足；此外还蕴含附加约束 $7x + 12y + 7z > 24$。利用 $G(3)$，我们计算得到 $X(4) = \left(\frac{487x+270y+98z}{648}, \frac{79x+42y+14}{108}, \frac{94z\,x+66y+29}{108}, \frac{612z\,x+486y+225}{648}\right)z$，因此 $G(4)$ 蕴含约束 ~~$125x + 216y + 127z \leq 648$~~，~~该约束会自动满足。最后，$G(5)$~~ 给出 $X(5) = \left(\frac{4147x+2592y+1037z}{5184}, \frac{4147x+2592y+1037}{5184}, \frac{4147z\,x+2592y+1037}{5184}, \frac{4147z\,x+2592y+1037}{5184}\right)z$。

为了绘制参数 x、y、z 的可行区域图，我们还假设 $x = y$，即仅考虑镜面对称初始配置。代入并去除冗余约束 $x+y > 1$、$6x+4y > 6$ 后，我们得到 $\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2_{\geq 0} : x \leq 1, y \leq 1, 7x + 6y > 12\right\}$。在图*1*中，我们用蓝色填充了可行区域，并用较粗的线标出了不属于该区域的边。可以看出，条件 x、$y \geq 0$ 也可以去除。

引理4。对于每个 $h\ n \in \mathbb{N}_{>0}$ 相对于 $\cong_{\mathcal{G}}$，存在有限多个等价类 .

[3]例如，在投票的背景下，情况有所不同：某些评分规则仅在参数取值为奇异的非有理数时才存在，且选项数大于二。有关应用背景的说明，请参见 [13]。

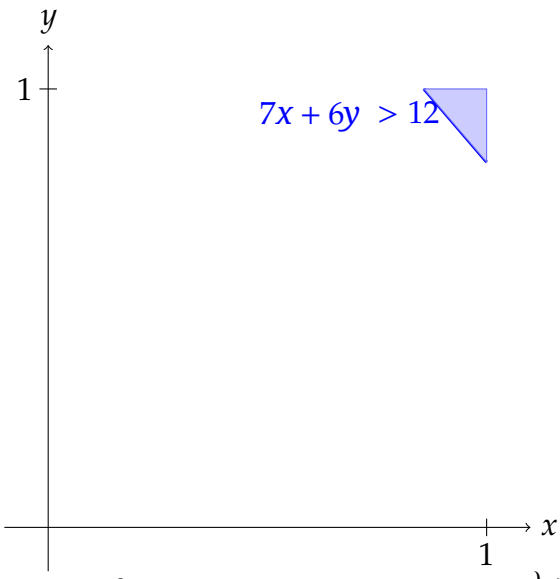


图1：可行区域 $\left\{(x, y) \in \mathrm{R}_{\geq 0}^2 : x \leq 1, y \leq 1, 7x + 6y > 12\right\}$ 例3。

证明。 与引理2的证明类似，我们考虑长度为$F(n)$的可能影响图序列。现在将初始配置$X(0)$的各项视为变量，并用线性约束对 $\mathrm{G}(t)$ 中边的存在与否进行建模，详情参见例4和第3节。对于每种可能性，要么至少存在一个可行解，要么可行区域为空（这不会影响上界）。

■

我们还认为该结论对高维BC过程仍然成立。

例4。对于 $n = 1$ 个智能体，关于 $\cong_{\mathcal{G}}$存在唯一的等价类。这里 $x_1(0) \in R$ 且 $\varepsilon \in R_{\geq 0}$ 任意，并且对于所有 $t \in N$，都有 $X(t) = X(0)$，即冻结时间为零。对于两个智能体，我们假设排序为 $x_1(0) \leq x_2(0)$。若 $x_2(0) - x_1(0) > \varepsilon$，则冻结时间为零且不存在共识。若 $x_1(0) = x_2(0)$，则冻结时间也为零，但存在共识。若 $x_1(0) < x_2(0)$ 且 $x_2(0) - x_1(0) \leq \varepsilon$，则冻结时间为一，并在 $x_1(0)+x_2(0)\,2$ 处达成共识。注意，后两种情况图等价，因此我们将在第3节细化影响图的概念，~~以使冻结~~时间成为等价类的不变量。一般而言，对于所有满足 $\varepsilon = 0$ 的情况，冻结时间都为零，因此以下假设 $\varepsilon > 0$。对于 $n \geq 3$ 个智能体，情况会变得越来越复杂，因此我们使用仿射变换，将其标准化为 $\varepsilon = 1$，$x_1(0) = 0$，并采用参数化表示 $X(0) = (0, x, x + y)$。

- 如果 $x = 0$ 且 $y = 0$，那么冻结时间为零，并达成共识。
- 如果 $x = 0$ 且 $0 < y \leq 1$，那么冻结时间为一，并在 $y\,3$处达成共识。
- 如果 $x = 0$ 且 $y > 1$，那么冻结时间为零，并发生碎片化。
- 如果 $0 < x \leq 1$ 且 $y = 0$，那么冻结时间为一，并在 $^2x\,3$ 处达成共识。
- 如果 $x > 1$ 且 $y = 0$，那么冻结时间为零，并发生碎片化。

- 如果 $x > 1$ 且 $y > 1$，那么冻结时间为零，并发生碎片化。
- 若 $0 < x \leq 1$ 和 $y > 1$，那么冻结时间为 1，且发生碎片化。
- 若 $x > 1$ 和 $0 < y \leq 1$，那么冻结时间为 1，且发生碎片化。
- 若 $0 < x \leq 1, 0 < y \leq 1$，且 $x + y \leq 1$，那么冻结时间为 1，并在 $2x+y\ 3$ 处达成共识。
- 若 $0 < x \leq 1, 0 < y \leq 1$，且 $x + y > 1$，那么有 $X(1) = \left(x\ 2, 2x+y\ 3, x+y\ 2\right)$。由于 $x+y\ 2 \leq 1$，我们得出冻结时间为 2，并在 $^{13}x+5y\ 18$ 处达成共识。这段简短的讨论展示了 $F(1) = 0$、$F(2) = 1$和 $F(3) = 2$。

在第3节中，我们将针对是否存在某个初始配置$X(0)$能够实现给定的影响图序列，给出精确的线性规划表述。在后续各节中，我们将运用这些方法，深入了解BC过程的性质及其反直觉现象。

除了上述研究之外，我们对图等价感兴趣还有另一个原因。许多研究指出，BC过程极易受到微小数值偏差的影响。在实际应用中，初始配置的取值$x_i(0)$以及置信水平 ε 可能需要通过实验或估算来确定，因此更合理的做法似乎是：我们无法精确知道所需的数据点，但可以给出区间。

例5. 考虑一个有四个智能体的*BC*过程，其中我们只知道 $x_i(0) \in [i + 0.9, i + 1.1]$ *for* $1 \leq i \leq 4$ *and* $\varepsilon \in [0.9, 1.1]$。会发生什么？我们能否对冻结时间、最终宽度或碎片化程度作出有意义的判断？使用后续各节中介绍的计算方法，我们可以得出：冻结时间可以是0 到5之间的任意值；连通分量的数量可以是1 到4之间的任意值；最小最终宽度可以为零（对应共识），最大最终宽度可以为3.2 （对应初始分布中的完全分离）。因此，基本上几乎任何情况都有可能发生。智能体数量更多或参数约束更严格时，情况则*ff*有所不同。

3 影响图与线性规划

BC过程的许多性质都可以从其影响图序列 $(G(t))_{t\in\mathbb{N}}$ 中直接看出。因此，我们先介绍一些基本的图论概念；如需了解更多详情，读者可参阅任何一本图论教材。首先，图 $G = (V, E)$ 由集合 V 和集合 $E \subseteq \left\{\{a, b\} : a, b \in V, a \neq v\right\}$构成，其中 V 的元素称为顶点或节点，E 的元素称为边。对于我们的影响图 G(t)，顶点集合就是智能体集合 A。在时间 t，当智能体 $i \in A$ 与智能体 $j \in A\backslash\{i\}$ 的意见处于置信水平范围内时，两者之间存在一条边，即当且仅当 $\left|x_i(t) - x_j(t)\right| \leq \varepsilon$。由于一个含 n 个顶点的图 $G = (V, E)$ 中，每一对不同顶点都可以属于 E，也可以不属于 E，因此共有 $2^{\binom{n}{2}}$ 个可能的（有标号）图。图2展示了所有可能的（有标号）图

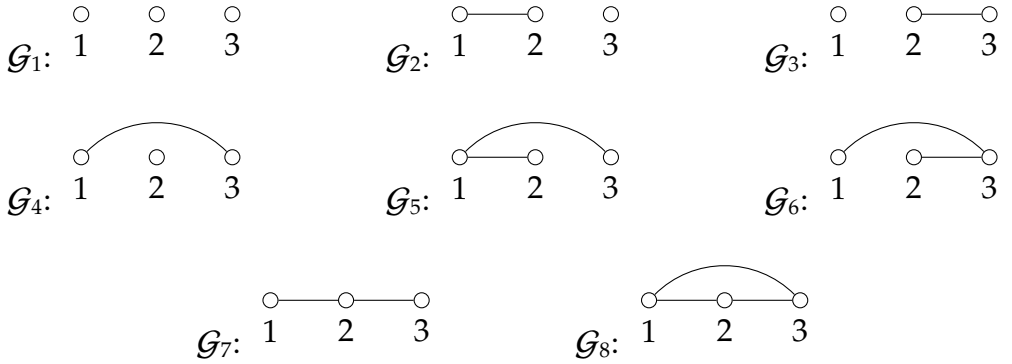


图2：三顶点有标号图。

去掉标号，也就是顶点的名称后，我们称之为无标号图。如果存在一个双射 $\pi: V \to V'$，使得对于所有 $a, b \in A$ 且 $a \neq b$，$\{a, b\} \in E$ 当且仅当 $\{\pi(a), \pi(b)\} \in E$，则称两个图 $G = (V, E)$ 和 $G' = (V', E')$ 同构。因此，图 G_2, G_3, G_4 彼此同构，图 G_5, G_6, G_7 也彼此同构；也就是说，三顶点图恰有四种非同构的（无标号）图。这里我们要指出，无标号图有助于减少可能情况的数量，但在我们的研究背景下使用它们也存在一些细微之处。例如，在例4中讨论三个智能体的 BC 过程时，图 G_4 并未出现，因为它被我们特定的参数化方式排除了。更准确地说，边 $\{1, 3\}$ 对应于 $x + y \leq \varepsilon = 1$，非边 $\{1, 2\}$ 对应于 $x > \varepsilon = 1$，而非边 $\{2, 3\}$ 对应于 $y > \varepsilon = 1$；这构成了一个不一致的线性不等式组，也就是说，它不存在可行解。′当然，我们也可以始终采用有标号图，以避免参数化方式或诸如 $x_1(0) \leq x_2(0) \leq \cdots \leq x_n(0)$ 这类假定排序带来的困难。

完全图 $G = (V, E)$ 是一种图，其中 E 包含 V 的所有 2-子集，即三个顶点的完全图为 G。我们指出，如果对于给定的 BC过程 P，G(t) 在某个时刻是完全图，那么要么 X(t) 的所有条目都相等，即达成共识；要么这一性质对 X(t + 1) 成立。因此，我们可以通过影响图或多或少直接地检测共识。为了描述碎片化，我们引入更多图论记号。给定图 $G = (V, E)$，$U_0 \in V$ 与 $U_l \in V$ 之间的路径是顶点序列 $(U_0, U_1, \ldots, U_l)$，其中 $U_i \in V$，且对于所有 $0 \leq i \leq l$，都有 $\{U_i, U_{i+1}\} \in E$。换言之，如果存在连接两个顶点的边序列，则这两个顶点之间存在路径。顶点 $U \in V$ 的连通分量 C(U) 是这样一组顶点 $U' \in V$：它们与 U 之间存在路径（包括 U 本身），即 U'。属于同一个连通分量是一种等价关系，即顶点集被划分为互不相交的连通分量。例如，图 G_4 由两个连通分量 $\{1, 3\}$ 和 $\{2\}$ 组成。在我们的语境中，对于智能体 $i \in A$ 和时间 $t \in N$，我们将其连通分量写作 $C_i(t)$。连通分量的数量是衡量碎片化程度的指标。显然，连通分量最多有 n 个；在我们的语境中，当初始意见$x + 1(0)$ 两两不同时，只要置信水平 $= $足够小（例如 $_0 \in$），就始终可以达到这一最大值；

对于$n = 3$，图 G_3 有三个连通分量。如果给定的图 $G = (V,E)$ 只有一个连通分量，而该分量必然等于 V，那么我们称该图是连通 的；否则称其为不连通 。对于三个顶点，连通图为 G_5, G_6, G_7, 和 G_8。在 [7] 中，作者将影响图 $G(t)$ 为连通图的情况称为一个 ε-profile。

现在让我们面对这样的问题：判断给定的图是否可以作为给定 BC过程的影响图。相应的解析描述可以简单地表述如下：

引理*5*。设 $P = (X(0), \varepsilon)$ 是一个包含 n 个智能体的 *BC*过程，$G = (V, E)$ 是一个顶点集为 $\{1, \ldots, n\}$ 的图。那么，当且仅当 $|x_i(t) - x_j(t)| \leq \varepsilon$ 对所有 $\{i, j\} \in E$ 成立，并且 $|x_i(t) - x_j(t)| > \varepsilon$ 对所有满足 $1 \leq i < j \leq n$ 的 $\{i, j\} \notin E$ 成立时，G 才是 P 在时间 $t \in N$ 的影响图。

当然，我们所做的无非是根据时间 t 的影响图定义，逐一列出 $G = G(t)$ 所需满足的条件。不过，如果我们引入变量，并假设 $x_1(0) \leq x_2(0) \leq \ldots x_n(0)$，这仍然是有用的。

引理6。 对于 n 个智能体，如果存在 $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ 和 $\varepsilon \in \mathbb{R}_{\geq 0}$，满足 $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n$，且对于所有满足 $i > j$ 的 $\{i,j\} \in E$，都有 $x_i - x_j \leq \varepsilon$，并且对于所有满足 $n \geq i > j \geq 1$ 的 $\{i,j\} \notin E$，都有 $x_i - x_j > \varepsilon$，则图 $G(V,E)$ 可以是一个 *BC*过程的影响图 $\mathcal{G}(0)$。

因此，我们已将问题转化为一个问题：线性不等式组是否存在可行解，也就是说，是否能为所有变量选择一组值，使所有约束都得到满足。严格不等式无论对数值计算还是对数学性质而言都很棘手，因此我们进一步将其改写为一个优化问题，更确切地说，是一个线性规划（LP）。

引理7。 一个（经过适当标记的）图 $G(V,E)$ 可以是 n 个智能体的 *BC*过程的影响图 $\mathcal{G}(0)$，当且仅当该线性规划

$$
\begin{aligned}
&\textit{maximize} \quad \Delta \\
&\textit{subject to} \\
x_i - x_j - \varepsilon &\leq 0 \quad \forall \{i,j\} \in E \textit{ with } i > j \\
x_i - x_j - \varepsilon - \Delta &\geq 0 \quad \forall \{i,j\} \notin E \textit{ with } 1 \leq j < i \leq n \\
x_i - x_{i+1} &\leq 0 \quad \forall 1 \leq i \leq n-1 \\
\varepsilon &\geq 0
\end{aligned}
$$

存在一个解，其目标值严格大于 0。

我们注意到，该线性规划是可行的，因为$x_1 = \ldots$、$x_n = \varepsilon = \Delta = 0$ 满足所有约束。若要确保该线性规划无界，我们可以利用

仿射变换，并额外要求$x_1 = 0$、 $\varepsilon = 1$、$x_n \le n$。这里，例如，$x_1 = \cdots = x_n = 0$、$\varepsilon = 1$、*Delta* $= -1$ 是一个可行解。由于所有系数都是有理数，例如，单纯形算法可以用精确算术进行计算，并求得一个有理数解（$x^\star$、 $\Delta^\star$）$\in \mathbb{Q}^{n+1}_{\ge 0}$，或者判定不存在这样的解。显然，我们可以精确判定所计算出的$\Delta^\star \in \mathbb{Q}$是否大于零。

例 *6*。令 G_1 为由路径 *(1, 2, 3, 4)* 给出的四顶点图，即例*2*中的 G_1 等于 *G(0) = G(1)*。我们选择一个有四个顶点的完全图作为 G_2，即例*2*中的 G_2 等于 *G(3) = G(4)*。现在，我们想通过计算检验一个 *BC*过程能否以 G_1 为影响图开始，并在下一步转移到以 G_2 为影响图的状态。这里可以如下利用引理*7*。首先，对带有变量 $\left(x_1^1, \ldots, x1\ 4, \varepsilon, \Delta\right)$ 的 G_1 应用引理*7*，并对带有变量 $\left(x_1^2, \ldots, x2\ 4, \varepsilon, \Delta\right)$ 的 G_2 应用引理 *7*，同时加入归一化条件 $x_1^1 = 0, x_4^1 \le 1, \varepsilon = 1$。然后通过更新规则 *(5)* 将 $X^1 = \left(x_1^1, x_2^1, x_3^1, x_4^1\right)$ 与 $X^2 = \left(x_1^2, x_2^2, x_3^2, x_4^2\right)$ 联系起来：

$$\textit{maximize} \quad \Delta \tag{9}$$

$$\textit{subject to}$$

$$x_2^1 - x_1^1 - \varepsilon \le 0 \tag{10}$$

$$x_3^1 - x_2^1 - \varepsilon \le 0 \tag{11}$$

$$x_4^1 - x_3^1 - \varepsilon \le 0 \tag{12}$$

$$x_3^1 - x_1^1 - \varepsilon - \Delta \ge 0 \tag{13}$$

$$x_4^1 - x_1^1 - \varepsilon - \Delta \ge 0 \tag{14}$$

$$x_4^1 - x_2^1 - \varepsilon - \Delta \ge 0 \tag{15}$$

$$x_1^1 - x_2^1 \le 0 \tag{16}$$

$$x_2^1 - x_3^1 \le 0 \tag{17}$$

$$x_3^1 - x_4^1 \le 0 \tag{18}$$

$$x_1^1 = 0 \tag{19}$$

$$x_4^1 \le 4 \tag{20}$$

$$\varepsilon = 1 \tag{21}$$

$$\tag{22}$$

$$x_2^2 - x_1^2 - \varepsilon \leq 0 \tag{23}$$
$$x_3^2 - x_1^2 - \varepsilon \leq 0 \tag{24}$$
$$x_4^2 - x_1^2 - \varepsilon \leq 0 \tag{25}$$
$$x_3^2 - x_2^2 - \varepsilon \leq 0 \tag{26}$$
$$x_4^2 - x_2^2 - \varepsilon \leq 0 \tag{27}$$
$$x_4^2 - x_3^2 - \varepsilon \leq 0 \tag{28}$$
$$x_1^2 - x_2^2 \leq 0 \tag{29}$$
$$x_2^2 - x_3^2 \leq 0 \tag{30}$$
$$x_3^2 - x_4^2 \leq 0 \tag{31}$$
$$\tfrac{1}{2}x_1^1 + \tfrac{1}{2}x_2^1 - x_1^2 = 0 \tag{32}$$
$$\tfrac{1}{3}x_1^1 + \tfrac{1}{3}x_2^1 + \tfrac{1}{3}x_3^1 - x_2^2 = 0 \tag{33}$$
$$\tfrac{1}{3}x_2^1 + \tfrac{1}{3}x_3^1 + \tfrac{1}{3}x_4^1 - x_3^2 = 0 \tag{34}$$
$$\tfrac{1}{2}x_3^1 + \tfrac{1}{2}x_4^1 - x_4^2 = 0 \tag{35}$$
$$\varepsilon \geq 0 \tag{36}$$

使用线性规划求解器，我们可以计算出最优解 $X^1 = (0,1,1,2)$, $X^2 = \left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{2}{3}, \tfrac{4}{3}, \tfrac{3}{2}\right)$, $\varepsilon = 1$ 和 $\Delta = 0$，因此从 $\mathcal{G}_1$ 直接转移到 $\mathcal{G}_2$ （作为后续影响图）是不可能的。我们得到相同的中间影响图：例 *2*中的 $\mathcal{G}(2)$ 和例*1*中的 $\mathcal{G}(3)$ 。

当然，我们可以像例 6 中所示，利用引理7通过计算检验任意给定的图序列 $G_1, \ldots, G_l$ 能否作为某个 BC过程的后续影响图实现。正如例 6 所示，这会生成相当多的约束。不过，其中一些约束是冗余的，可以删除而不改变可行域。我们已经按照引理7的要求，只写了一次 G_1 和 G_2，的约束 $\varepsilon \geq 0$。既然无论如何都要使用归一化 $\varepsilon = 1$，我们就可以将其删去。由于意见的初始排序具有继承性（见引理 1.(1)），将更新规则 (5) 纳入后，除了第一个图之外，我们可以删除所有图的排序约束 $x_i - x_{i+1}$。此外还存在另一种隐藏的支配关系。例如，在例 6 的线性规划中，我们可以只用不等式 (25) 替代不等式 (23)-(28)。为了描述这一普遍现象，我们引入更多记号。

定义 *3.* 设 $P = (X(0), \varepsilon)$ 是一个包含 n 个智能体且满足 $x_1(0) \leq \cdots \leq x_n(0)$ 的 *BC*过程。记 $l_i(t)$ 为满足 $x_i(t) - x_j(t) \leq \varepsilon$ 的最小整数 $j \geq 1$，记 $r_i(t)$ 为满足 $x_h(t) - x_i(t) \leq \varepsilon$ 的最大整数 $h \leq n$，其中 $t \in N$ 且 $1 \leq i \leq n$。

换言之，$l_i(t)$ 是在时间t仍会影响智能体i 的最左侧智能体（若出现相等，则取可能索引最小者）。类似地，$r_i(t)$ 是最右侧智能体（若出现相等，则取

可能索引最大者），且在时间 t仍会影响智能体i。假设排序$x_1(0) \le \cdots \le x_n(0)$，由引理 1.(1)可直接推出：

引理 8. 若$\mathcal{P} = (X(0), \varepsilon)$ 是一个包含 n 个智能体且满足 $x_1(0) \le \cdots \le x_n(0)$的 BC过程，则有

$$I_i(t) = \{l_i(t), l_{i+1}(t), \ldots, r_i(t)\} \tag{37}$$

对所有 $i \in A$ 和 $t \in \mathbb{N}$均成立。

定义 4. 设$\mathcal{G} = (V,E)$ 是一个顶点集为$\{1, \ldots, n\}$的图。用 $l(i)$ 表示满足$\{j, i\} \in E$ 的最小整数$1 \le j < i$；如果不存在这样的 j，则令 $l(i) = i + 1$。其中 $1 \le i \le n$。类似地，用 $r(i)$ 表示满足$\{i,h\} \in E$ 的最大整数 $i < h \le n$；如果不存在这样的整数 h，则令 $r(i) = i - 1$。其中 $1 \le i \le n$。

由此可直接得出引理 8：

引理 9. 设$\mathcal{G} = (V, E)$ 是一个顶点集为 $V = \{1,\ldots, n\}$的图。若存在一个包含 n 个智能体且满足 $x_1(0) \le \cdots \le x_n(0)$ 的 BC过程$\mathcal{P} = (X(0), \varepsilon)$，并且对于某个 $t \in \mathbb{N}$有$\mathcal{G} = \mathcal{G}(t)$，则有

$$E = \bigcup_{1 \le i \le n} \left\{\{i, j\} : l(i) \le j \le r(i), j \ne i\right\}. \tag{38}$$

引理 10. 在引理7中，我们可以将约束 $x_i - x_j - \varepsilon \le 0$ 对所有满足 $i > j$ 的$\{i, j\} \in E$，替换为 $x_i - x_j - \varepsilon \le 0$ 对所有$\{i, j\} \in E'$，其中

$$E' = \left(\left\{1, r(i)\right\} \cup \left\{\{i, r(i)\} : 2 \le i \le n, r(i) > r(i-1), r(i) > i\right\}\right) \setminus \left\{\{0, 1\}\right\}. \tag{39}$$

引理 11. 在引理7中，我们可以将约束 $x_i - x_j - \varepsilon - \Delta \ge 0$ 对所有$\{i,j\} \notin E$，其中$\widetilde{n} \ge i > j \ge 1$，替换为 $x_i - x_j - \varepsilon \le 0$ 对所有$\{i, j\} \in E$，其中 $i > j$，

$$\widetilde{E} = \left\{\{l(i) - 1, i\} : 2 \le i \le n, 1 < l(i) < i, l(i) > l(i-1)\right\}. \tag{40}$$

例 7. 如果按照上文所述，从例 6 的线性规划中去掉多余的约束，我们

得到以下线性规划。

$$\text{最大化} \quad \Delta \tag{41}$$

约束条件为

$$x_2^1 - x_1^1 - \varepsilon \le 0 \tag{42}$$
$$x_3^1 - x_2^1 - \varepsilon \le 0 \tag{43}$$
$$x_4^1 - x_3^1 - \varepsilon \le 0 \tag{44}$$
$$x_3^1 - x_1^1 - \varepsilon - \Delta \ge 0 \tag{45}$$
$$x_4^1 - x_2^1 - \varepsilon - \Delta \ge 0 \tag{46}$$
$$x_1^1 - x_2^1 \le 0 \tag{47}$$
$$x_2^1 - x_3^1 \le 0 \tag{48}$$
$$x_3^1 - x_4^1 \le 0 \tag{49}$$
$$x_1^1 = 0 \tag{50}$$
$$x_4^1 \le 4 \tag{51}$$
$$\varepsilon = 1 \tag{52}$$
$$x_4^2 - x_1^2 - \varepsilon \le 0 \tag{53}$$
$$\tfrac{1}{2}x_1^1 + \tfrac{1}{2}x_2^1 - x_1^2 = 0 \tag{54}$$
$$\tfrac{1}{3}x_1^1 + \tfrac{1}{3}x_2^1 + \tfrac{1}{3}x_3^1 - x_2^2 = 0 \tag{55}$$
$$\tfrac{1}{3}x_2^1 + \tfrac{1}{3}x_3^1 + \tfrac{1}{3}x_4^1 - x_3^2 = 0 \tag{56}$$
$$\tfrac{1}{2}x_3^1 + \tfrac{1}{2}x_4^1 - x_4^2 = 0 \tag{57}$$

一个最优解仍为 $X^1 = (0,1,1,2)$、$X^2 = \left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{2}{3}, \tfrac{4}{3}, \tfrac{3}{2}\right)$、 $\varepsilon = 1$ 和 $\Delta = 0$。将不等式（*45*）乘以$-\tfrac{1}{2}$、不等式（*46*）乘以 $-\tfrac{1}{2}$、不等式（*53*）乘以1、不等式（*54*）乘以 -1，以及不等式（*57*）乘以1后求和，得到 $\Delta \ge 0$，这证明了 Δ 的最优目标值确实为0。我们指出，只要线性规划可行且有界，这样的乘子就总是存在；采用所述归一化时，线性规划确实满足这一条件。这可由线性优化的强对偶定理推出（任何线性优化教材中都有介绍）。

因此，我们现在有了一套工具，可以计算给定有限数量智能体时 BC过程可能影响图的转移图；也就是说，这是一个带自环[5]的有向图[4]，其顶点是可能的影响图，并且只要两个对应影响图之间原则上可能发生转移，就在二者之间连一条有向边。利用我们在图2中对三顶点图的枚举，我们绘制出相应的转移

[4]有向图 $G = (V,E)$由顶点集合V)和边集合$E \subseteq V \times V$构成。对于元素 $(i, j) \in E$，我们称其为一条从i指向j的边。
[5]有向图$G = (V, E)$中的环是一条边$E \ni e = (i,i)$，它从顶点$i \in V$ 指向自身。

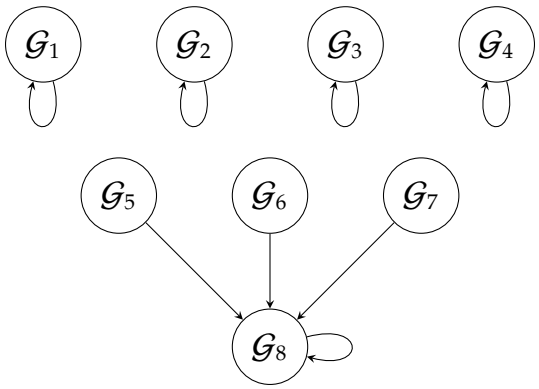


图3：三顶点图的转移图，标号见图2。

图，如图3所示。对于这些小规模情况，实际上不需要一般性的工具；关于实际计算和分类讨论的细节，请参见例4。不过，对于更多智能体的情况，这套工具就不可或缺了。从图3可以直接看出，3个智能体的最大冻结时间 $F(3)$ 至多为2。这里，转移图中的所有可能路径确实都可以实现；而对于$n \geq 4$ 个智能体，情况则有所不同。

我们注意到，在冻结时间及之后，BC过程的影响图必须是转移图中带有自环的图。对于$n = 3$ 个顶点，所有可能的图都可以由 BC过程实现，并且转移图中所有带有自环的顶点确实都能在稳定状态下达到。我们将看到，对于$n = 4$ 个智能体，这两种性质都不成立。

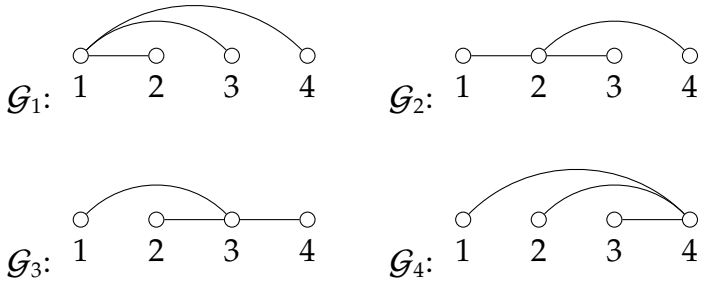


图4：四个顶点的星形图。

星图是一种图，其中一个中心顶点与所有其他顶点之间都有一条边，且不存在其他边。图4展示了所有带有四个顶点的带标记星形图。我们指出，可以直接使用引理7通过计算验证，它们都不能成为aBC过程的影响图。[6]

[6]当然，对于每个$n \geq 3$，都存在一个唯一的无标记星图，其顶点数为n，并且可以绘制得更加对称：中心位于单位圆的正中央，其余顶点均匀分布在单位圆的边界上。由于四个顶点的星图都无法作为 BC 过程的影响图实现，因此，任何具有$n \geq 4$ 个顶点的星图都无法作为 BC 过程的影响图实现。

定义5。一个顶点集为$V = \{1, \ldots, n\}$的图$G = (V, E)$称为区间图，如果存在区间$I_1, \ldots, I_n \subseteq \mathbb{R}$使得$\{i, j\} \in E \text{ iff } I_i \cap I_j \neq \emptyset$。此外，如果所有区间都可以选为等长，则称$G$为单位区间图。

n	$A000088(n)$	$A005975(n)$	$A005217(n)$	$A001349(n)$	$A005976(n)$	$A007123(n)$
1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	1	1	1
3	4	4	4	2	2	2
4	11	10	9	6	5	4
5	34	27	21	21	15	10
6	156	92	55	112	56	26
7	1044	369	151	853	250	76
8	12346	1807	447	11117	1328	232
9	274668	10344	1389	261080	8069	750
10	12005168	67659	4502	11716571	54962	2494
11	1018997864	491347	15046	1006700565	410330	8524
12	165091172592	3894446	51505	164059830476	3317302	29624
13	50502031367952	33278992	179463	50335907869219	28774874	104468
14	29054155657235488	304256984	634086	29003487462848061	266242936	372308
15	31426485969804308768	2960093835	2265014	31397381142761241960	2616100423	1338936

表1：不同图类的无标号图数量。标题说明请参见表2。

对于影响图 $G_i(t)$，定义 5 中的那些区间自然可表示为 $[x_i(t) - \varepsilon,\ x_i(t) + \varepsilon]$——它们的长度都相同 2ε。区间图的刻画例如可参见 [4]。引理 9 中的观察与 [17, 定理4]对区间图的刻画很接近：图 $G = (V, E)$ 是区间图，当且仅当存在 V 上的一个线性序 $\prec$，使得对于任意顶点 u、v、w，若 $u \prec v \prec w$，且 $\{u, w\} \in E$，则 $\{u, v\}$、$\{v, w\} \in E$。由此，可以在 $O(\#V + \#E)$ 时间内检验某个图是否为区间图 [17]。区间图是单位区间图，当且仅当它不含有以四个顶点构成的星图作为诱导子图 [18]。区间图和单位区间图都很容易计数，生成函数例如参见 [5] 。[7]

$A000088(n)$	具有n 个顶点的图
$A005975(n)$	具有n 个顶点的区间图
$A005217(n)$	具有n个顶点的单位区间图
$A001349(n)$	个顶点的连通图
$A005976(n)$	个顶点的连通区间图
$A007123(n)$	个顶点的连通单位区间图

表2：表1中的标题——OEIS中的序列。

[7]生成函数是一种形式幂级数，它将一个数的无限序列 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 编码为级数 $a(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$ 的系数。

表1列出了最多含十五个顶点的无标号图数量，以及具有区间图或单位区间图这一附加性质的无标号图数量，同时还列出了连通这一性质。我们采用《整数序列在线百科全书》（OEIS）中的 A 数作为表注[8]，；文字描述见表2。相应的无标号图数量大得多，也可以在 OEIS 中找到。对于例如$n \geq 8$ 个智能体而言，将一般图限制为单位区间图，作为影响图的候选图，其影响相当显著。在某些情况下，我们还可以将范围限制为连通区间图。

引理 12。 *([2,命题 2])*
设 $P = (X(0), \varepsilon)$ 是一个包含 n 个智能体的 *BC*过程。如果在时间 $t \in N$，且对于某个智能体 $1 \leq i < n$ 有 $|x_i(t) - x_{i+1}(t)| > \varepsilon$，那么对于所有 $t' \geq t$，都有 $|x_i(t') - x_{i+1}(t')| > \varepsilon$ 。因此，*BC*过程可以分解为两个子过程：一个由智能体 $\{1, \cdots, i\}$ 组成，另一个由智能体 $\{i+1, \ldots, n\}$ 组成；在时间 t 之后，二者各自独立演化。

我们注意到，引理 12 中的分解仅对一维 BC过程有效，本文将限定于这种情形。在更高维度中，即使是二维情形，动力学也复杂得多。

如果影响图 G(0) 是连通的，那么与区间图关联的线性序 $\prec$ 使我们能够考虑无标号图。更准确地说，假设 $x_1(0) \leq \cdots \leq x_n(0)$ 几乎唯一地确定了给定区间图的标号。剩下的唯一自由度是反转该线性序 $\prec$，即在任意点处对 BC 过程进行镜像，这是一种仿射变换。让我们再次考虑图2中的三顶点有标号图。假设线性序 $x_1(0) \leq x_2(0) \leq x_3(0)$，图 G_4, G_5，和 G_6 无法实现为 BC过程，因此剩下五个图 G_1, G_2, G_3, G_7，和 G_8。与表1一致，图 G_2 和 G_3 同构。相应的 BC过程确实可以通过镜像得到。其余三个图允许镜像对称的 BC过程。对于至少包含四个顶点的连通单位区间图，也会出现这一现象，见图5；这些图作为图是同构的。



图5：两个同构的、具有四个顶点的连通单位区间图。

如果有多个连通分量，根据具体应用，我们可能需要考虑连通分量的排序及其取向。因此，如果

[8]OEIS基金会（2025），在线整数数列百科全书，在线发布于 https://oeis.org。

例如，我们有图5所示的两个连通分量，那么问题在于它们朝同一方向还是不同方向取向是否会造成差异。根据引理 12 中的分解，我们在此不考虑连通分量的排序或取向，也就是说，我们考虑无标号单位区间图。因此，例如，我们不区分图2中的图 G_2 和 G_3 。对于$n = 4$ 个智能体，我们考虑图6所示的九个单位区间图。相应的转移图见图 7。

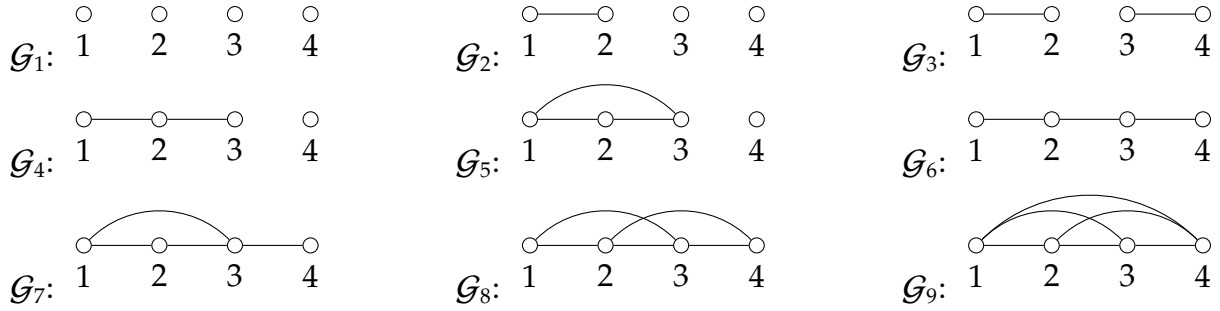


图6：具有四个顶点的单位区间图。

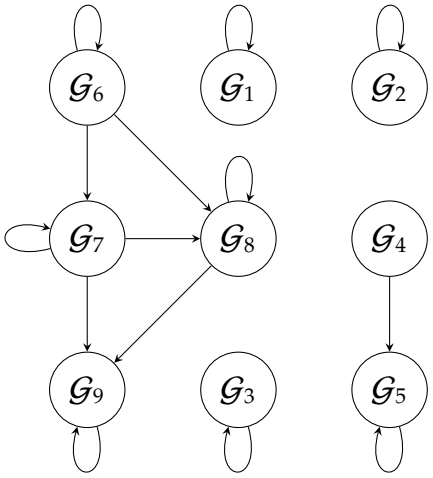


图 7：具有四个顶点的影响图的转移图，标号见图6。

在例4中，我们区分的情形比具有三个顶点的单位区间图还要多，即使去除对称情形也是如此。此外，在冻结时间的背景下，我们需要比影响图所提供的信息更为详细一些的信息，因此引入如下细化。

定义*6*。令 $P = (X(0), \varepsilon)$ 为 n 个智能体的 *BC*过程，且 $t \in N$ 为任意时间步。时间 t 的一个簇是由智能体组成的群组 $C \subseteq \{1, \ldots, n\}$，满足对于所有 $i, j \in C$，$x_i(t) = x_j(t)$，且对于所有 $i \in C$ 和 $h \notin C$，$x_i(t) \neq x_h(t)$。将智能体集合划分为簇 $C_1(t), \ldots, C_l(t)$，且对于所有 $i < j$、$i \in C_h(h)$ 及所有 $j \in C_{h'}(t)$ 均成立，这样的划分称为有序簇分解。有了这一概念，加权影响图

$\widetilde{G}(t)$ 在时间 t 是一个图，其顶点集为 $C_1(t), \ldots, C_l(t)$，其中顶点 $C_i(t)$ 的权重为 $\#C_i(t) \in N$。若 $1 \le i < j \le j$，则每一对 $\{C_i(t), C_j(t)\}$ 都是一条边，当且仅当普通影响图 $G(t)$ 中存在边 $\{a, b\}$，其中 $a \in C_i(t)$ 和 $b \in C_j(t)$ 任意取值。

当且仅当存在共识时，才会出现大小为n 的簇。有序簇分解中各簇的权重之和等于n。每个影响图都可以对应多个加权影响图，而每个加权影响图都唯一对应一个影响图。图8展示了三顶点图对应的所有可能加权影响图。我们用写在每个顶点下方的权重代替标签（后文有时会省略权重为1的标注）。相应的转移图见图9。如果相应的加权影响图 $G(t)$ 不包含任何边，那么 BC 过程在时间$t \in \mathbb{N}$已到达最终稳定状态。在图8和图9中，图 G_1, G_2, 和 G_3符合这一情况。我们观察到，对于$n = 3$个智能体，不稳定状态下没有自环；而对于$n \ge 4$，情况则有所不同。从图9可以直接读出最大冻结时间$F(3) = 2$。

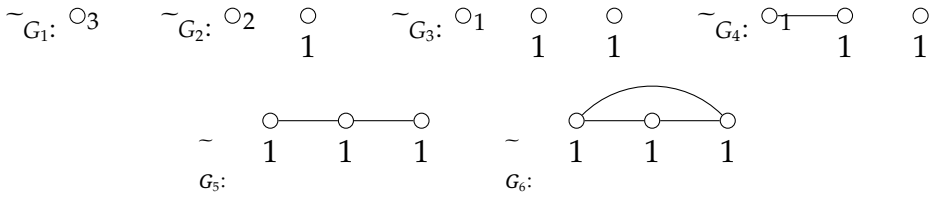


图8：三个智能体的加权影响图。

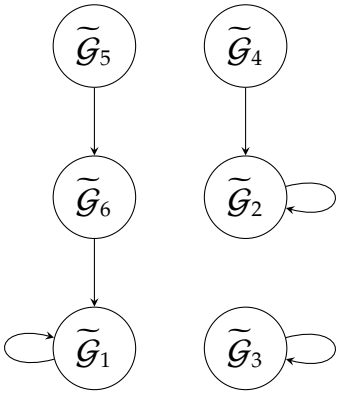


图9：三顶点加权影响图的转移图，标号参见图8。

注2。 本节所述技术也可应用于$\mathbb{R}^l$ 中的高维 *BC*过程，前提是我们选择由 $\|\cdot\|_1$ 或 $\|\cdot\|_\infty$诱导的度量 d。例如，对于由 $\|\cdot\|_2$诱导的欧几里得度量，我们需要将线性规划替换为半定规划。无论如何，能够实现为 *BC*过程的图类这一问题很有趣。

4 最大冻结时间

如第 2 节所述，具有 n 个智能体的 BC过程的最大冻结时间 F(n) 上界为 $4n\,(n^2+1)$。由于引理12中的分解以及线性下界 $F(n) \in \Omega(n)$（例如参见 [11, 引理2。1], ），为了确定 F(n)，只需考虑连通 BC 过程。根据定义，我们有 $F(1) = 0$。例4中对各种可能情形的讨论直接推出 $F(2) = 1$ 以及 $F(3) = 2$。例2给出了一个满足 $F(4) \geq 5$ 的配置。后一个例子是所谓等距配置的一个实例，即初始配置由 $x_i(0) = \alpha i + \beta$ 给出，其中 $\alpha, \beta \in R$。在例 2 α 中等于 ε。事实上，对于所有 $n \leq 4$，这些配置都能达到 F(n)，而当智能体数量更多时则无法达到。[9] $F(4) = 5$、$F(5) = 7$、$F(6) = 9$的精确值，以及 $F(7) \geq 12$ 的下界，已在 [11]中给出。

接下来，我们要对具有最大冻结时间的四个智能体的所有 BC过程进行参数化。作为初始参数化，我们采用 $x_1(0) = 0$，$x_2(0) = x$，$x_3(0) = x + y$，$x_4(0) = x + y + z$，以及 $\varepsilon = 1$，其中 x、y、$z \geq 0$。根据例2，我们只关注冻结时间至少为 5 的配置。由于 $F(n) \leq n - 1$ for $n \leq 3$，图 7 中的转移图表明，唯一相关的影响图包含于 $\{G_6, G_7, G_8, G_9\}$。首先，我们检查状态 G_i 中可能出现多少个环。对于 G_9，我们观察到，至少经过一次迭代后，系统就会达到共识。经过两次 G_7，我们得到 $x_1(2) = {}^{25}x_{+14}y_{+3}z$ 36 和 $x_4(2) = {}^{7}x_{+6}y_{+3}z$ 8，因此

$$d(x_1(2), x_4(2)) = \frac{-x + 14y + 15z}{72} < 1 = \varepsilon$$

且 $x_1(3) = x_2(3) = x_3(3) = x_4(3)$。经过两次 G_8 后，我们得到 $x_1(2) = {}^{13}x_{+8}y_{+3}z$ 18 以及 $x_4(2) = {}^{15x+10y+5z}$ 18，因此

$$d(x_1(2), x_4(2)) = \frac{x + y + z}{9} < 1 = \varepsilon$$

且 $x_1(3) = x_2(3) = x_3(3) = x_4(3)$。经过两次 G_6 后，我们得到 $x_1(2) = {}^{5}x_{+6}y_{+2}z$ 18 和 $x_3(2) = 19x_{+12}y_{+5}z$ 24，因此 $d(x_1(2), x_3(2)) < \varepsilon$。根据对称性，我们也有 $d(x_2(2), x_4(2)) < \varepsilon$。所以，要么 $G(2) = G_8$，要么 $G(2) = G_9$。由此，我们有 $F(4) \leq 5$，而影响图序列的唯一候选是 $(G_6, G_7, G_8, G_8, G_9)$ 和 $(G_6, G_6, G_8, G_8, G_9)$。然而，对于第一条链，我们有 $x_1(2) = x_2(2)$，因此 $G(2) \neq G_8$。所以，只有第二条链是可能的，正如例2和例3中所得到的那样。

例8。令$\mathcal{P}$ = (X (0)，1）是五个智能体的 *BC*过程，其中 $X(0) = \left(0, 1, 2, 3, 3 + x\right)$，当 *re*

[9]更准确地说，我们指出，文献 [6]证明了冻结时间为 $^{5}{}_{n}+O(1)$的情形。此外，对于 $\alpha \approx 0.81$，可以描述一种周期模式，并得出上界$n + O(1)$；文献 [6] 的作者推测，这是等距配置中冻结时间最长的例子。文献 [21]给出了构造性二次下界。据文献 [11], 报道，通过计算可以验证，对于5至14个智能体，等距配置并不能达到最大冻结时间。因此，据我们所知，我们的这一说法尚无正式证明，但很可能存在一个反例。

$\frac{19}{28} < x \leq \frac{38}{47}$。我们递归地计算

$$X(1) = \left(\frac{1}{2}, 1, 2, \frac{8+x}{3}, \frac{6+x}{2}\right),$$

$$X(2) = \left(\frac{3}{4}, \frac{7}{6}, \frac{17+x}{9}, \frac{46+5x}{18}, \frac{34+5x}{12}\right), \text{ and}$$

$$X(3) = \left(\frac{23}{24}, \frac{137+4x}{108}, \frac{101+7x}{54}\right),$$

其中$\mathcal{G}(0) = \mathcal{G}(1) = \mathcal{G}(2)$ 是一条路径 $1-2-3-4-5$。对于$\mathcal{G}(3) = \mathcal{G}(4)$，智能体3 和5之间还有一条额外的边，因此

$$X(4) = \left(\frac{481+8x}{432}, \frac{295+12x}{216}, \frac{1784+169x}{864}, \frac{1510+161x}{648}, \frac{1510+161x}{648}\right) \text{ and}$$

$$X(5) = \left(\frac{1071+32x}{864}, \frac{3926+233x}{2592}, \frac{20972+1939x}{10368}, \frac{17432+1795x}{7776}, \frac{17432+1795x}{7776}\right).$$

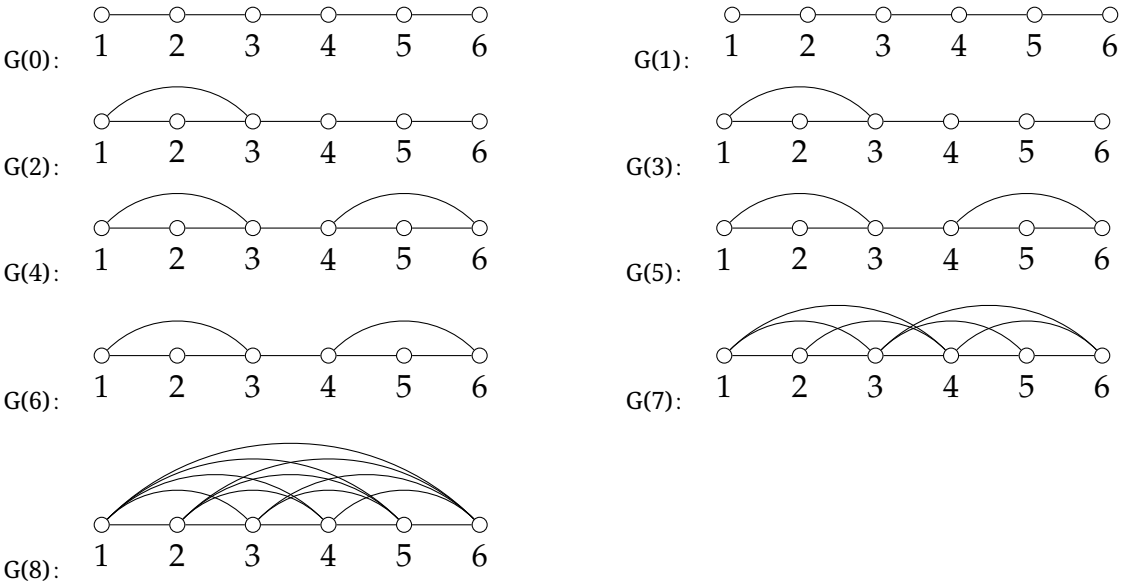
在$\mathcal{G}(5)$中，唯一缺失的边是智能体1 与智能体5之间的边。由此我们计算得

$$x_1(6) = \frac{49528+3255x}{31104} \quad \text{and} \quad x_5(6) = \frac{390820+31361x}{124416}.$$

由于 $0 < x_5(6) - x_1(6) \leq 1$，我们在时间 $t = 7$ 读出一个共识。

除镜像对称外，对于五个智能体，存在唯一一个可由最大冻结时间为$F(5) = 7$ 的 aBC过程实现的影响图序列。

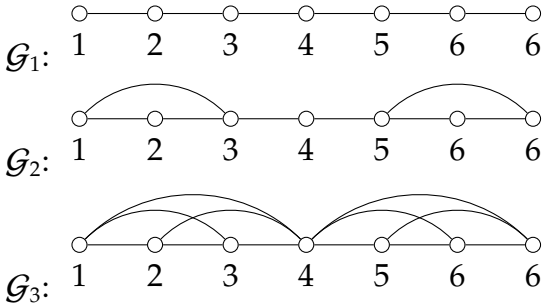
例9。以下影响图序列$\mathcal{G}(t)$ 可由 BC过程实现，这表明 $S(6) \geq 9$。



在镜像对称意义下，六个智能体的影响图序列恰好有两种

可以由最大冻结时间为 $F(6) = 9$ 的 BC过程实现。

我们可以利用含n 个智能体的转移图，通过算法确定$F(n)$。首先，我们确定每个状态 G′ 下 BC过程能够保持在同一状态中的最大迭代次数。[10] 含有有界环的转移图中的最长路径是$F(n)$的一个上界。为了验证$F(n) < k$，我们只需检查是否不存在长度为k 的路径能够作为 BC过程实现。我们还可以列出一些不可实现的子路径，以加快搜索。我们对 7 个智能体进行了这项工作，得到$S(7) = 12$。恰好有两个相应的、可实现的影响图序列，分别为 $G_1^4\ G_2^4\ G_3^3\ G_4^1$ 和 $G_1^4\ G_2^5\ G_3^2\ G_4^1$，，其中 G_4 是七个顶点上的完全图，而 G_1,G_2,G_3 如下所示。



5 最大碎片化

给定一个含n 个智能体的 BC过程 $\mathrm{P} = (X(0), \varepsilon)$，我们用$S(\mathrm{P})$表示 $\mathrm{G}(F(n))$的连通分量数，即配置冻结后影响图的连通分量数。用$S(n)$表示$S(\mathrm{P})$在所有含n 个智能体的连通 BC 过程中的最大值，也就是说，这些 BC 过程满足 G(0) 连通。[11] 因此，$S(\mathrm{P})$衡量最终的隔离程度，即稳定状态偏离共识的程度，其中共识对应$S(\mathrm{P}) = 1$。显然，$S(n) \leq n$，且当$n = 1$时确实可以达到该值。例 4中的讨论表明$S(1) = S(2) = S(3) = 1$。根据图 7中的转移图，我们还可得出$S(4) = 1$。

例 10. 考虑 BC过程 P(X(0), 1)，其初始配置为 $x_1(0) = x_2(0) = 0$，$x_3(0) = 1$，$x_4(0) = 2$，以及 $x_5(0) = 3$。注意，G(0) 是连通的。经过一次迭代后，我们得到 $x_1(1) = x_2(1) = \frac{1}{3}$，$x_3(1) = \frac{3}{4}$，$x_4(1) = 2$，以及-$x_5(1) = \frac{5}{2}$，因此 P 在两次迭代后冻结，此时 $x_1(2) = x_2(2) = x_3(2) = \frac{17}{36}$，且 $x_4(2) = x_5(2) = \frac{9}{4}$。因此，我们有 $S(5) \geq 2$。-

通过考察五个和六个智能体的转移图，我们可以验证$S(5) = S(6) = 2$，这里不加证明地说明，对于所有$n \in \mathrm{N}$，均有$S(n + 1) \geq S(\mathrm{n}</style>)$。

[10]通过检查所有连通分量是否都是完全图（即包含所有可能边的图），我们可以轻松识别稳定状态。[11]如果对于 $1 \leq i \leq n$，$x_i(0)$ 两两不同，且 ε 足够小，那么 G(0) 中没有边，并且有 n 个连通分量。此外，在更一般的情形下，即并非所有连通分量都只包含一个顶点时，我们可以使用引理 12 将构型分解为若干个连通构型。

引理 13. 设$\mathcal{P} = (X(0),1)$是一个BC过程，$s = \#I_1(0) - 1$，且$t = \#I_2(0) - 1$。若$x_2(1) - x_1(1) > 1$，则有

$$t > 2(s+1) + \frac{1}{s} \geq 6. \tag{58}$$

证明。 利用参数化$x_i(0) = \sum_{=1}^{i-1} {}_j x_j$，对于非负的$x_j$，我们计算得

$$x_1(1) = \frac{\sum_{i=1}^{s}(s+1-i)x_i}{s+1} \tag{59}$$

and

$$x_2(1) = \frac{\sum_{i=1}^{t}(t+1-i)x_i}{t+1}, \tag{60}$$

因此

$$\begin{aligned} x_2(1) - x_1(1) &= \frac{t-s}{(s+1)(t+1)} \sum_{i=1}^{s} i x_i + \frac{\sum_{i=s+1}^{t}(t+1-i)x_i}{t+1} \\ &\leq \frac{(t-s)s}{(s+1)(t+1)} \cdot \underbrace{\sum_{i=1}^{s} x_i}_{x_{s+1}(0)-x_1(0)} + \frac{t-s}{t+1} \cdot \underbrace{\sum_{i=s+1}^{t} x_i}_{x_{t+1}(0)-x_{s+1}(0)} \\ &\leq \frac{(t-s)s}{(s+1)(t+1)} + \frac{t-s}{t+1} = \frac{(t-s)(2s+1)}{(s+1)(t+1)}. \end{aligned}$$

由于$x_2(1) - x_1(1) > 1$且$s \in \mathrm{N}_{>0}$，结论成立。 ■

引理 *14.* 设 $P = (X(0), 1)$ 是一个 BC过程，包含 $n \geq 3$ 个智能体 $2 \leq i \leq n-1$，$s_1, s_2 \in N$，且 $I_i(0) = \{i - s_1, \ldots, i, \ldots, i + s_2\}$；$a_1, a_2 \in N$，且 $I_{i-1}(0) = \{i - a_1, \ldots, i, \ldots, i + a_2\}$；以及 $b_1, b_2 \in N$，且 $I_{i+1}(0) = \{i - b_1, \ldots, i, \ldots i + b_2\}$。若 $x_i(1) - x_{i-1}(1) > 1$ 且 $x_{i+1}(1) - x_i(1) > 1$，则有 $a_1 + b_2 \geq 6$。

证明。 我们使用如下参数化：$x_i(0) = 0$、$x_{i-j} = -\sum^{j}{}_{h=1} x_h$，以及$x_{i+j} = \sum^{j}{}_{h=1} y_h$，其中$j \in \mathrm{N}$，且$x_h$、$y_h$均为非负数。由此，我们计算得到

$$x_i(1) = \frac{-\sum_{h=1}^{s_1}(s_1+1-h)x_h + \sum_{h=1}^{s_2}(s_2+1-h)y_h}{s_1+s_2+1}. \tag{61}$$

$$x_{i-1}(1) = \frac{-\sum_{h=1}^{a_1}(a_1+1-h)x_h + \sum_{h=1}^{a_2}(a_2+1-h)y_h}{a_1+a_2+1}, \tag{62}$$

and

$$x_{i+1}(1) = \frac{-\sum_{h=1}^{b_1}(b_1+1-h)x_h + \sum_{h=1}^{b_2}(b_2+1-h)y_h}{b_1+b_2+1}. \tag{63}$$

我们的目标是利用以下假设来给出参数 s_1,s_2,a_1,a_2,b_1,b_2 的约束：$d_1 := x_i(1) - x_{i-1}(1) > 1$ 以及 $d_2 := x_{i+1}(1) - x_i(1) > 1$。我们有 $a_1 \geq s_1 \geq b_1 \geq 0$、 $0 \leq a_2 \leq s_2 \leq b_2$, 和 $s_1,s_2 \geq 1$。现在我们考察智能体 $i - a_1 \leq j \leq i + b_2$ 如何影响三个中心智能体 $i-1$、i 和 $i+1$。所有满足 $i - a_1 \leq j < i - s_1$ 的智能体只影响 $i-1$，因此，将它们尽可能向左移动会增大 d_1，同时保持 d_2 以及我们的参数不变。因此，不失一般性地假设 $x_j(0) = x_{i-1}(0) - 1$。类似地，对于所有满足 $i + s_2 < j \leq i + b_2$ 的智能体，不失一般性地假设 $x_j(0) = x_{i+1}(0) + 1$。接下来我们注意到，智能体 $i - b_1 \leq j \leq i + a_2$ 会影响三个智能体 $i-1$、i 和 $i+1$，因此，移动它们的初始意见不会对 d_1 和 d_2产生影响。不失一般性地，对于所有 $i - b_1 \leq j \leq i - 1$ 以及所有 $i + 1 \leq j \leq i + a_2$，我们假设 $x_j(0) = x_i(0) = 0$。满足 $i - s_1 \leq j < i - b_1$ 的智能体只影响智能体 $i-1$ 和 i，因此移动它们不会对 d_1 产生影响。为了使 d_2 最大，我们可以将它们的初始意见尽可能向左移动。因此，我们假设 $x_j(0) = -1$。类似地，对于所有 $a_2 < j \leq s_2$，我们假设 $x_j(0) = 1$。现在，将 $x_{i-1}(0)$ 尽可能向左移动会同时增大 d_1 和 d_2, ，因此我们假设 $x_{i-1}(0) = -1$。类似地，我们假设 $x_{i+1}(0) = 1$，这同样会影响在时间 0 受到智能体 $i-1$ 或智能体 $i+1$影响的最左侧和最右侧智能体。也就是说，对于所有 $i - a_1 \leq j \leq i + b_2$，有 $x_j(0) \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$。由此，我们计算得到

$$x_i(1) = \frac{-(s_1 - b_1) + (s_2 - a_2)}{s_1 + s_2 + 1}, \tag{64}$$

$$x_{i-1}(1) = \frac{-2(a_1 - s_1) - (s_1 - b_1)}{a_1 + a_2 + 1}, \tag{65}$$

and

$$x_{i+1}(1) = \frac{2(b_2 - s_2) + (s_2 - a_2)}{b_1 + b_2 + 1}. \tag{66}$$

现在，我们只需枚举满足$x_i(1) - x_{-1}i(1) > 1$ 和$x_{i+1}(1) - x_i(1) > 1$的参数可行元组。

■

对于$n \leq 6$ 个智能体，引理 13 和引理 14 的情况都不会发生。因此，如果最终出现三个簇，那么它们的大小都必须为 2，且$n = 6$。由于$S(4) = 1$，我们可以假设冻结时间为 1，即所有簇都在同一时间创建。影响图至多可能是一条长度为 5 的路径。不过，我们也可以通过简单计算排除这种可能性，从而得到$S(5) = S(6) = 2$的理论证明。

接下来，我们给出两种构造，使稳定状态中连通分量的数量呈线性增长。

引理 15. 对于所有 $k \geq 1$，都有 $S(5k + 2) \geq 2k + 2$。

证明。 我们考虑一个 BC过程 $P = (X(0), 1)$，其中$x_i(0) \in \{0, 1, \ldots, 4k\}$。更确切地说，对于所有 $0 \leq j \leq k$，恰有两个智能体满足$x_i = 4j$；对于所有……，恰有一个智能体满足$x_i = h$

$0 \le h \le 4k$ 且不能被 4 整除。令$K := 4k$，我们计算

$$\begin{aligned}
X(1) &= \Big(\tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{3}{4}, \underbrace{2, 3+\tfrac{1}{4}, 4, 4, 5-\tfrac{1}{4}}_{1}, \underbrace{6, 7+\tfrac{1}{4}, 8, 8, 9-\tfrac{1}{4}}_{2}, \dots, \underbrace{4k-6, 4k-5+\tfrac{1}{4}, K-4, K-4, K-3-\tfrac{1}{4}}_{k-1}, \\
&\quad K-2, K-\tfrac{3}{4}, K-\tfrac{1}{3}, K-\tfrac{1}{3}\Big) \\
X(2) &= \Big(\tfrac{17}{36}, \tfrac{17}{36}, \tfrac{17}{36}, \underbrace{2, 3+\tfrac{3}{4}, 4, 4, 5-\tfrac{3}{4}}_{1}, \dots, \underbrace{K-6, K-5+\tfrac{3}{4}, K-4, K-4, K-3-\tfrac{3}{4}}_{k-1}, K-2, K-\tfrac{17}{36}, K-\tfrac{17}{36}, K-\tfrac{17}{36}\Big) \\
X(3) &= \Big(\tfrac{17}{36}, \tfrac{17}{36}, \tfrac{17}{36}, \underbrace{2, 4, 4, 4, 4}_{1}, \dots, \underbrace{K-6, K-4, K-4, K-4, K-4}_{k-1}, K-2, K-\tfrac{17}{36}, K-\tfrac{17}{36}, K-\tfrac{17}{36}\Big),
\end{aligned}$$

因此，冻结时间为三，且 G(3) 中有 $2k + 2$ 个连通分量。连通分量的大小由下式给出

$$\Big(3, \underbrace{1, 4}_{1}, \dots, \underbrace{1, 4}_{k-1}, 3\Big).$$

■

引理 16. 对于所有 $k \ge 0$，我们有 $S(4k + 9) \ge 2k + 3$。

证明. 我们考虑一个 BC过程 $\mathrm{P} = (X(0), 1)$，其中

$$X(0) = \Big(0, 1, 1+\tfrac{1}{2}, 2, \underbrace{3, 4, 4+\tfrac{1}{2}, 5}_{1}, \dots, \underbrace{K, K+1, K+1+\tfrac{1}{2}, K+2}_{k}, K+3, K+4, K+4+\tfrac{1}{2}, K+5, K+6\Big),$$

其中$K := 3k$。据此，我们计算

$$\begin{aligned}
X(1) &= \Big(\tfrac{1}{2}, 1+\tfrac{1}{8}, 1+\tfrac{1}{2}, 2-\tfrac{1}{8}, \underbrace{3, 4+\tfrac{1}{8}, 4+\tfrac{1}{2}, 5-\tfrac{1}{8}}_{1}, \dots, \underbrace{K, K+1+\tfrac{1}{8}, K+1+\tfrac{1}{2}, K+2-\tfrac{1}{8}}_{k}, \\
&\quad K+3, K+4+\tfrac{1}{8}, K+4+\tfrac{1}{2}, K+5-\tfrac{1}{8}, K+5+\tfrac{1}{2}\Big) \\
X(2) &= \Big(1+\tfrac{1}{24}, 1+\tfrac{1}{4}, 1+\tfrac{1}{4}, 1+\tfrac{1}{2}, \underbrace{3, 4+\tfrac{1}{2}, 4+\tfrac{1}{2}, 4+\tfrac{1}{2}}_{1}, \dots, \underbrace{K, K+1+\tfrac{1}{2}, K+1+\tfrac{1}{2}, K+1+\tfrac{1}{2}}_{k}, \\
&\quad K+3, K+5-\tfrac{1}{2}, K+5-\tfrac{1}{4}, K+5-\tfrac{1}{4}, K+5-\tfrac{1}{24}\Big) \\
X(3) &= \Big(1+\tfrac{25}{96}, 1+\tfrac{25}{96}, 1+\tfrac{25}{96}, 1+\tfrac{25}{96}, \underbrace{3, 4+\tfrac{1}{2}, 4+\tfrac{1}{2}, 4+\tfrac{1}{2}}_{1}, \dots, \underbrace{K, K+1+\tfrac{1}{2}, K+1+\tfrac{1}{2}, K+1+\tfrac{1}{2}}_{k}, \\
&\quad K+3, K+5-\tfrac{25}{96}, K+5-\tfrac{25}{96}, K+5-\tfrac{25}{96}, K+5-\tfrac{25}{96}\Big),
\end{aligned}$$

因此，冻结时间为三，且 G(3) 中有 $2k + 3$ 个连通分量。这些连通分量的大小为

连通分量的大小由下式给出

$$\left(4, \underbrace{1,3}_{1}, \ldots, \underbrace{1,3}_{k}, 1, 4\right).$$

■

作为一个有趣的事实，我们指出，ChatGPT 证明 $S(n) = \lceil \frac{n}{2} \rceil$时，基于一个错误的假设：在一个初始连通的初始配置中间不会出现大小为 1 的簇（而且其下界构造也有误）。

例*11.* 设 $P = (X(0), 1)$ 是一个含有 *13* 个智能体的 *BC*过程，其中 $X(0) = (0, 0, 0, 1, 1, 2, 3, 4, 5, 5, 6, 6, 6)$。我们计算得 $X(1) = \left(\frac{2}{5}, \frac{2}{5}, \frac{2}{5}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{7}{4}, 3, \frac{17}{4}, \frac{16}{3}, \frac{16}{3}, \frac{28}{5}, \frac{28}{5}, \frac{28}{5}\right)$ 以及 $\left(\frac{38}{75}, \frac{38}{75}, \frac{38}{75}, \frac{7}{4}, 3\frac{17}{4}, 6 = \frac{38}{75}, 6 = \frac{38}{75}, 6 = \frac{38}{75}, 6 - \frac{38}{75}, 6 - \frac{38}{75}\right)$。因此，冻结时间为 *2*，簇大小为 *(5, 1, 1, 1, 5)*。

引理 13 和引理 14 的要点是，如果一次分裂产生了一个较小的连通分量，那么在另一侧（或唯一的另一侧）会有相当多聚集的智能体，且它们位于一个较小的区间内。原则上，这可以用来给连通分量的数量设定上界。

引理 17. 设$\mathcal{P} = (X(0),1)$ 是一个连通*BC*过程，则有

$$S(\mathcal{P}) < \omega(0) + 1. \tag{67}$$

不过，还有一些技术障碍需要克服。例如，在引理 14 中，可行参数为 $(s_1, s_2, a_1, a_2, b_1, b_2) = (1,1, 2, 0,0, 2)$，因此长度为 4 的区间内有七个智能体。如例16所示，我们可以有大小为 3 的连通分量紧邻一个大小为 1 的连通分量。然而，左侧和右侧的三个智能体不一定会聚合成同一个连通分量，见例11。因此，如果较小的连通分量发生分裂，那么就会出现一些密集区域，其中的智能体只能被更加密集的智能体区域分开。

例12. 考虑一个 *BC*过程，其中对于所有 i，$x_i(0) \in \mathbb{Z}$，且有一个初始意见为0的智能体，若干初始意见为 ±1 的智能体，两个初始意见为 ±2的智能体，三个初始意见为 ±3 的智能体，六个初始意见为 ±4 的智能体，十个初始意见为 ±5 的智能体，以及19 个初始意见为 ±6的智能体。经过一个时间步后，我们达成共识，此时连通分量大小为 (29，6，3，2，1，1，1，2，3，6，29)。

当然，我们可以将前面的例子扩展为簇大小呈指数增长的情形。事实上，我们可以推测，这或许是某种最坏情况示例。

猜想 1. 设$(c_1, \ldots, c_l)$ 是 *BC*过程的簇大小序列。那么，其中不可能存在连通子序列(1, 1, 1, 1) 或(2, 2, 1, 1,1, 2, 2)。

因此，尽管可能有许多小规模情形需要检验（例如见引理 13 和引理 14），确定$S(n)$的精确公式或至少确定其分数极限 $\lim_{n\to\infty} S(n)/n$，或许是一个有限的问题。

猜想 2。

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S(n)}{n} = \frac{1}{2}$$

例 13。令$\mathcal{P} = (X(0), 1)$ 为一个 BC过程，满足

$$X(0) = \left(0, 1, 2, 2.5, 3, 4, 5\right),$$

因此

$$X(1) = (0.5, 1, 2.125, 2.5, 2.875, 4, 4.5)$$

and

$$X(2) = (0.75, 0.75, 2.5, 2.5, 2.5, 4.25, 4.25).$$

因此，我们有 $S(7) \geq 3$ 以及簇大小向量(2，3，2)。对于

$$X(0) = \left(0, 0, 1, 2, 3, 4, 4\right)$$

我们计算得

$$X(1) = \left(\tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{3}{4}, 2, \tfrac{13}{4}, \tfrac{11}{3}, \tfrac{11}{3}\right)$$

最终得到簇大小(3，1，3)。

事实上，我们可以通过计算验证$S(7) = S(8) = 3$。

例 14. 设$\mathcal{P} = (X(0),1)$ 是一个 BC过程，满足

$$X(0) = \left(0, 1, 2, 2.5, 3, 4, 5, 5.5, 6\right),$$

使得

$$X(1) = (0.5, 1, 2.125, 2.5, 2.875, 4, 5.125, 5.5, 5.5)$$

and

$$X(2) = (0.75, 0.75, 2.5, 2.5, 2.5, 4, 5.375, 5.375, 5.375).$$

因此，我们有 $S(9) \geq 4$ 以及一个(2，3，1，3) 簇大小向量。

事实上，我们可以通过计算验证，$S(9) = 4$ 以及簇大小向量 (2, 3, 1, 3) 和它的镜像版本 (3, 1, 3, 2)，是四个簇时仅有的可能性。对于10个智能体和四个簇，在镜像对称意义下，可能出现以下簇大小向量：(2, 1, 5, 2)、(2, 3, 1, 4)、(2, 3, 2, 3)、(2, 3, 3, 2)、(2, 4, 1, 3)、(3, 1, 1, 5) 和 (3, 1, 3, 3)。此外，我们确实有 $S(10) = 4$。

6 结论与展望

本文研究了 BC 模型中等价类的不同概念。我们主要关注将 BC过程组合描述为影响图序列。我们提出将线性规划作为计算工具，用于判定是否存在合适的初始配置；这提供了一套完整的方法，通过将基本上无限多个 BC过程限制为有限个等价类，来研究其性质。本文考察了动态过程达到稳定状态所需的最大时间步数，以及最大碎片化。文献中，最终配置的宽度也是一项关键特征。然而，这一数值确实取决于具体的初始配置，因此本文未对此进行研究。

对于最大冻结时间 $F(n)$，如果能计算出智能体数量更大时的精确值，或者至少得到界，将会很有意思。我们提出的一般框架仍需要进一步研究算法细节并加以改进。或许可以对 [21] 中的哑铃构造稍作改进，从而在智能体数量中等时也能得到相对较大的冻结时间。对于最大隔离$S(n)$，最终目标是找到一个精确公式，这似乎并非遥不可及。

迄今为止，我们只研究了给定智能体数量下的极端情形。下一步或许可以研究文献中所描述的非单调性及反直觉行为的不同变体。众所周知，略微提高置信水平 ε 可能会增加冻结时间和簇的数量；而当 ε 较大时，它们分别为零和一。但这种非单调性究竟能有多极端？在 [7] 中，作者报告了若干实例：略微提高置信水平 ε，就会使共识变成三个不同的意见簇。迄今为止，还没有人发现从共识跃迁到四个或更多不同意见簇的例子。这种情况是否可能存在？

当然，对于高维BC过程也可以研究类似的问题，其中可能影响图的刻画本身就是一个有趣的问题。

参考文献

[1] A. Bhattacharyya、M. Braverman、B. Chazelle 和 H. L. Nguyen。关于 Hegselmann–Krause系统的收敛。载于第*4*届理论计算机科学创新会议论文集，第61–66页，2013年。

[2] V. D. Blondel、J. M. Hendrickx 和 J. N. Tsitsiklis。关于具有状态依赖连通性的 Krause 多智能体共识模型。《*IEEE*自动控制汇刊》，54(11):2586–2597，2009。

[3] G. Deffuant、D. Neau、F. Amblard 和 G. Weisbuch。交互智能体之间的信念混合。《复杂系统进展》，3(01n04):87–98，2000。[4] M. C. Golumbic。算法图论与完美图，第57卷。学术出版社，纽约，1980。[5] P. Hanlon。区间图计数。《美国数学学会汇刊》，272(2):383–426，1982。[6] P. Hegarty 和 E. Wedin。等间距智能体的 Hegselmann–Krause 动力学。差分方程ff与应用，22(11):1621–1645，2016。[7] R. Hegselmann。重新审视有界置信：我们忽视了什么、低估了什么，又弄错了什么。《人工社会与社会模拟杂志》，26(4)，2023。[8] R. Hegselmann 和 U. Krause。意见动力学与有界置信：模型、分析与模拟。《人工社会与社会模拟杂志》，5(3):(2)1–33，2002。[9] U. Krause。多智能体社会动力学。问题概述。载于 U. Krause 和 M. St¨ockler 编，多智能体交互动力学的建模与模拟，第37–51页。不来梅大学，1997。[10] U. Krause。共识形成的离散非线性非自治模型。载于差分方程会议论文集ff，第227–236页，2000。[11] S. Kurz。Hegselmann–Krause 模型中达成共识需要多久？《应用数学与力学论文集》，14(1):803–804，2014。[12] S. Kurz。Hegselmann–Krause 动力学中冻结时间的最优控制。《差分方程ff与应用》，21(8):633–648，2015。[13] S. Kurz、A. Mayer 和 S. Napel。投票权力的艺术与魅力。载于《权力与责任：*21*世纪的跨学科视角，献给 *Manfred J. Holler*》，第125–141页。施普林格，2023。[14] J. Lorenz。连续意见动力学的稳定化定理。《物理学*A*：统计力学及其应用》，355(1):217–223，2005。[15] S. Mart´ınez、F. Bullo、J. Cort´es 和 E. Frazzoli。关于同步机器人网络——第二部分：会合与部署算法的时间复杂度。《*IEEE*自动控制汇刊》，52(12):2214–2226，2007。

[16] S. Mohajer 和 B. Touri. 标量 Hegselmann–Krause 动力学的收敛速率. 载于*2013*年美国控制会议，第 206–210 页. IEEE，2013.[17] S. Olariu. 一种为区间图着色的最优贪心启发式算法. 《信息处理快报》，37(1):21–25，1991.[18] F. S. Roberts. 无差异图. 载于《图论证明技术》（第二届安娜堡图论会议论文集，密歇根州安娜堡，*1968*），第 139–146 页. 学术出版社，1969.[19] B. Touri 和 A. Nedi´c. 离散时间意见动力学. 载于*2011*年第*45*届阿西洛马会议：信号、系统与计算机会议录（*ASILOMAR*），第 1172–1176 页. IEEE，2011.[20] E. Wedin 和 P. Hegarty. 连续主体模型中的 Hegselmann–Krause 动力学与正则意见函数并不总能达成共识. 《*IEEE*自动控制汇刊》，60(9):2416–2421，2015.[21] E. Wedin 和 P. Hegarty. 一维 Hegselmann–Krause 有界置信动力学收敛速率的二次下界. 《离散与计算几何》，53(2):478–486，2015。