arXiv:2512.18030v1 [math.CO] 19 Dec 2025

组装加法链

Leroy Cronin*Juan Carlos MoralesParra†
KeithY. Patarroyo‡格拉斯哥大学，英国格拉斯哥
G11 6EW lee.cronin@glasgow.ac.uk*
juan.moralesparra@glasgow.ac.uk†
keith.patarroyo@glasgow.ac.uk‡

2025年12月23日

摘要

本文将定义在 $\mathbb{Z}^+$ 上的加法链概念扩展到一般集合 S。我们说明，组装多元岩浆在配对（S，$BB \subset S$）上的代数结构如何使我们能够定义 S上的加法链概念，称为由构建块 BB构成的 S 组装加法链。与 $\mathbb{Z}^+$ 情形类似，我们引入 S 上的最优组装加法链概念，并证明其长度的下界和上界，类似于 Schonhage 针对 $\mathbb{Z}^+$ 情形所得到的界。在一般情形下，单位元 $1 \in \mathbb{Z}^+$ 由子集 BB 取代，而 $\mathscr{O} \in S$ 的最优组装加法链长度的上述界，则以 $\mathscr{O}$ 的大小（即构造$\mathscr{O}$所需的构建块数量）来表述。本文讨论的 S 主要例子包括：（i） j-字符串（字母表包含 j 个字母的字符串），（ii）彩色连通图，以及（iii）彩色多格骨牌。

1 引言与动机

加法链是正数的表示，通过在半群（$\mathbb{Z}^+$，$+$）中使用 1 和加法运算构造。形式上，$n \in \mathbb{Z}^+$ 的加法链（AC）是一个有限递增的正整数序列

$$(a_0, a_1, \ldots, a_r)$$

使得 $a_0 = 1, a_r = n$，并且对于每个 $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$，都存在 j，$k \in \{0, 1, \ldots, i-1\}$ 使得

$$a_i = a_j + a_k. \tag{1}$$

如果我们用 $AC(n)$ 表示 n 的所有加法链的集合，那么 $AC(n)$ 中的每个元素都对应于将 n 表示为从 1 开始的正整数递归求和的一种方式。例如，对于 $n = 7$，我们有

$$\begin{aligned} AC(7) = \{&(1,2,3,4,5,6,7),(1,2,3,4,5,7),(1,2,3,4,6,7),(1,2,3,4,7),(1,2,3,5,6,7),\\ &(1,2,3,6,7),(1,2,3,5,7),(1,2,4,5,6,7),(1,2,4,5,7),(1,2,4,6,7)\}, \end{aligned} \tag{2}$$

使得这些有限序列中的每一个都表示如何从 1 出发，并递归地使用二元加法运算构造数字 7。

在集合 $AC(n)$ 中，对于每个 $n \in \mathbb{Z}^+$，都存在一个由长度最短的序列组成的特定子集。这些序列就是所谓的 最优加法链（OAC）；对于任意 $n \in \mathbb{Z}^+$，我们将其记为 $OAC(n)$。因此，它们对应于使用 1 并递归地进行加法来表示正整数的最短表示。例如，对于 $n = 7$，根据（2）可得

$$OAC(7) = \{(1,2,3,4,7),(1,2,3,5,7),(1,2,3,6,7),(1,2,4,5,7),(1,2,4,6,7)\}. \tag{3}$$

给定任意 $n \in \mathbb{Z}^+$，$OAC(n)$ 中任一元素的长度（即序列中的元素个数）记为 $\ell(n)$，例如 $\ell(7) = 5$。

最优加法链长度函数

$$\begin{aligned} \ell : \mathbb{Z}^+ &\to \mathbb{Z}^+ \\ n &\mapsto \ell(n), \end{aligned} \tag{4}$$

除了具有内在的数学意义之外，它在计算机科学和复杂性理论中也发挥着重要作用。例如，加法链用于加法链幂运算，通过使用与指数对应的加法链长度相同数量的乘法运算，即可计算整数指数幂。因此，特别是，最优加法链可用于优化计算机中任意数字的表示（例如其二进制表示）。另一方面，$\ell(n)$量化了整数 n 的复杂度，也就是说，它对应于从基本构建块 1 出发构造数字 n 所需的最少二元步骤（加法）数。$\ell(n)$可视为整数的所谓整数复杂度的一种加法限制（参见例如 [1]）。

建议有兴趣的读者重温 Scholz [2]关于加法链的开创性研究，以及 Brauer [3], Erd¨os [4], Stolarsky [5], Schonhage [6], Clift [7], Clift 和 Thruber [8], 等人随后开展的研究。Schonhage [6] 证明了一个广为人知的结果，表明对于任意 $n \in \mathbb{Z}^+$，其长度 $\ell(n)$ 有如下界：

$$\log_2(n) + \log_2(H(n)) - 2.13 \le \ell(n) \le \log_2(n) + H(n) - 1, \tag{5}$$

其中，$H(n)$ 是 n 的汉明重量（即其二进制表示中 1 的个数）。

加法链的概念只需要两种要素：一组构建块（即 1）和一种二元粘合运算（即对 $\mathbb{Z}^+$ 进行加法）。因此，原则上，自然可以将

加法链（以及由此得到的最优组装加法链）的构造推广到任意集合，只要该集合上明确定义了（i）一组构造块和（ii）一种二元粘合运算。

本文的目标有两个：首先，我们将$\mathbb{Z}^+$ 上的加法链概念扩展为任意集合 S 上的组装加法链（见定义 3），并展示这一推广如何为（有向和无向）字符串、（有色连通）图以及（有色）多连方的集合定义加法链，其中构建块和二元粘合运算的概念都可以得到自然描述。其次，我们证明了最优组装加法链的一个类似于（5）的结果，依据对象的大小（即用于构造该对象的构建块数量）给出下界和上界。

将加法链扩展到字符串、图、多连方等集合具有深远意义，因为与 $\mathbb{Z}^+$中元素的加法链类似，组装加法链提供了对象的表示，即根据它们从固定构建块集合出发的递归可达性来表示对象。特别是，一个对象的最短组装加法链的长度（组装指数），即其最优组装加法链之一，量化了该对象的内在复杂性，且这种复杂性内在地编码于对象之中。

多元岩浆这一概念使我们能够以另一种方式形式化组装空间的概念，而不是像 [9], 中那样通过无环箭图来定义（参见[9]中的定义 11）。这两种方法通过一个从组装加法链集合映射到有向无环图集合的映射，以直接的方式联系起来；因此，对象 $\mathscr{O}$ 的组装指数既可以定义为任意一条最优组装加法链的长度，也可以定义为该对象 $\mathscr{O}$ 任意一条最短组装路径的长度 $\mathscr{O}$。

本文结构如下：第 2 节介绍组装加法链的概念，并给出与字符串、图和多连方相关的示例，同时给出一项简单结果，讨论最优组装加法链长度的粗略下界和上界。第 3 节通过推导标准 最优组装加法链的更优下界，以及基于对象的二分解（见定义 9）和双片分解（见定义 10 ）的更优上界，进一步改进这些界。随后在第 4 节中，我们明确计算字符串、图和多连方的最优组装加法链长度的这些上界。最后，我们在第 5 节展望未来，给出结论并探讨可能的后续研究方向。组装加法链与有向无环图之间的明确映射见附录 A。

致谢。 我们感谢 Anisha K. Yeddanapudi、Amit Kahana、Abhishek Sharma 和 Ian Seet 进行了有益的讨论和启发性的交流。特别感谢 Stuart Marshall 和 Gage Siebert 仔细审阅本文档的初稿，并提出有用的意见。L.C、J.C.M.P 和 K.Y.P 的工作得到英国研究与创新署工程与自然科学研究委员会、美国国家航空航天局、美国国立卫生研究院、坦普尔顿基金会和斯隆基金会的支持。

2 组装加法链

设 S 是一个集合。如上所述，要在 S 上定义加法链的一般化概念，就需要定义一个粘合二元运算。这不能只是 S 上的封闭二元运算，因为粘合两个对象的方式可能不止一种。例如，若 $S = 2$ 是字符串（即二进制字符串），则有两种方式可以粘合有向字符串 01010 和 001011，例如得到 01010001011 和 00101101010。更进一步，若 S 是连通图的集合，则可以通过识别其顶点的不同子集，以多种方式粘合两个图。

能够以形式化方式刻画这一二元粘合运算概念的代数结构，是对岩浆概念的扩展（例如参见 [10]）。

定义 1.（岩浆）。一个岩浆$(S, \circ)$由一个集合 S 和一个二元运算组成 $\circ : S \times S \to S$。

利用这个定义，我们引入多元岩浆这一代数概念。

定义 2.（多元岩浆）。一个多元岩浆$(S, \circ)$由一个集合 S 和一个二元运算 $\circ : 2^S \times 2^S \to 2^S$ 组成，且$(2^S, \circ)$是一个岩浆。

由于我们的目标是在任意集合 S 上形式化定义加法链，因此我们尤其关注这样的多重幺半群结构（S, $\circ$）：其二元运算 $\circ$ 接受 S 的两个子集 S_1 和 S_2，并给出 S 的子集 $S_1 \circ S_2$，其中包含所有可以通过将 S_1 的元素与 S_2 的元素粘合在一起而构造出的对象。更确切地说，由于加法链的每一步都只涉及粘合两个元素，如式（1）所示，我们只关注将 S 上的多重幺半群结构限制到 2^S 的子集上；该子集由 S 中元素对应的单元素集组成。

下面我们介绍整数集、字符串、图和多格骨牌上的多重幺半群结构。如上所述，我们明确展示单元素集上的二元运算，因为这是定义这些集合上的加法链所需的结构中唯一的部分；不过，这些集合上的多重幺半群结构，是通过对任意一对子集 S_1 和 S_2 逐元素扩展得到的。

例 2.1. $(S, \circ)$，满足 $S = \mathbb{Z}^+$ 且 $\circ$ 定义为

$$\{s\} \circ \{t\} \equiv \{s + t\} \tag{6}$$

对任意 $s, t \in \mathbb{Z}^+$。对于任意两个正整数子集，这个多重幺半群结构就是逐元素整数和。

例 2.2. 设 $S = j$-字符串，即 S 是由基数为 j 的字母表构造的字符串集合。在集合 S 上，群 $\mathbb{Z}_2$ 定义了一个自然作用：若 $s \in S$，则

$$0 \cdot s = s, \qquad 1 \cdot s = s^T \tag{7}$$

其中 s^T 是反转字符串，例如，对于 $j = 2$，若 $s = 011101$，则 $s^T = 101110$。根据这一作用，我们定义有向 j-字符串的集合

$$j\text{-Strings}_{\mathrm{d}} \equiv j\text{-Strings} \tag{8}$$

以及无向 j-字符串

$$j\text{-Strings}_{\mathrm{u}} \equiv j\text{-Strings}/\mathbb{Z}_2. \tag{9}$$

换句话说，在有向 j-字符串集合中，每个字符串都被视为不同的对象；而在无向 j-字符串集合中，一个字符串及其反向字符串被视为同一个对象。

在 $S = j$-字符串集合上，可以定义由字符串拼接给出的半群结构，即，如果 $s_1, s_2 \in j$-字符串，那么

$$\begin{aligned} \frown &: j\text{-Strings} \times j\text{-Strings} \to j\text{-Strings} \\ &(s_1, s_2) \mapsto s_1 \frown s_2 = s_1 s_2, \end{aligned} \tag{10}$$

其中，j-字符串的**并置** 是指按给定顺序将两个字符串粘合在一起，例如，对于 $s_1 = 10101011$ 和 $s_2 = 101110$ ，那么

$$s_1 \frown s_2 = 10101011101110, \qquad s_2 \frown s_1 = 10111010101011.$$

根据这种半群结构，我们可以在 j-字符串$_{\mathrm{d}}$上定义如下多重幺半群结构

$$\{s_1\} \circ \{s_2\} \equiv \{s_1 \frown s_2, s_2 \frown s_1\} \tag{11}$$

以及在 j-字符串$_{\mathrm{u}}$ 上定义如下多重幺半群结构

$$\{s_1\} \circ \{s_2\} \equiv \{\underbrace{s_1 \frown s_2}_{\sim s_2^T \frown s_1^T}, \underbrace{s_1^T \frown s_2}_{\sim s_2^T \frown s_1}, \underbrace{s_1 \frown s_2^T}_{\sim s_2 \frown s_1^T}, \underbrace{s_1^T \frown s_2^T}_{\sim s_2 \frown s_1}\}. \tag{12}$$

例如，对于有向 2-字符串，我们有

$$\{0010010\} \circ \{011101101\} = \{0010010011101101, 0111011010010010\}$$

以及在无向 2-字符串的情况下

$$\{01\} \circ \{110\} = \{01110, \underbrace{10110}_{\sim 01101}, \underbrace{01011}_{\sim 11010}, \underbrace{10011}_{\sim 11001}\}.$$

例 2.3。 令 $S =$ CCG 为彩色连通图的集合。在 $S \times S \times S$ 上定义如下关系：如果 (G_1, G_2, G) 满足以下条件，则称其为一个**良三元组**：

- G_1 是 G 的子图，其子图补为 G_2。
- G_2 是 G 的子图，其子图补为 G_1。

根据这一关系，可以在 S 上定义一个多重幺半群结构，表示为

$$\{G_1\} \circ \{G_2\} \equiv \{G \in S \mid (G_1, G_2, G) \text{ is good}\}, \tag{13}$$

对每个 $G_1, G_2 \in S$。

例如，CSCPG 中元素和的多重幺半群结构(13)如图1所示。 

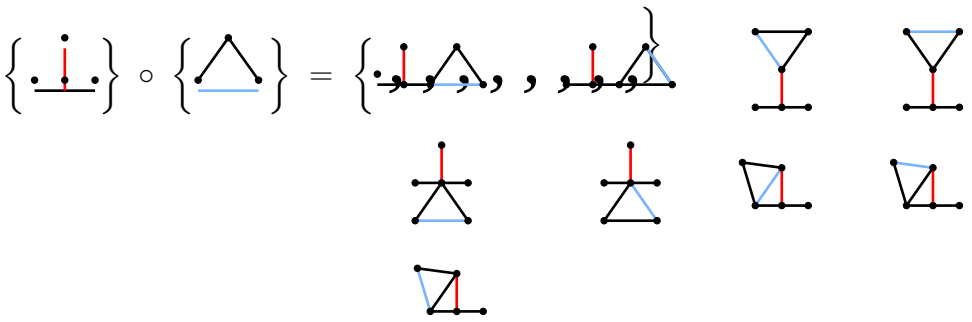


图1：定义在彩色连通图集合上的多元岩浆结构。

例2.4。 我们要讨论的最后一个例子是定义在集合S =CPoly 上的（彩色）多格骨牌的多重幺半群结构，即由全等（彩色）正方形边对边拼接而成的平面几何图形。[1] 图2展示了大小为三（三格骨牌）、四（四格骨牌）、五（五格骨牌）和六（六格骨牌）的所有多格骨牌。

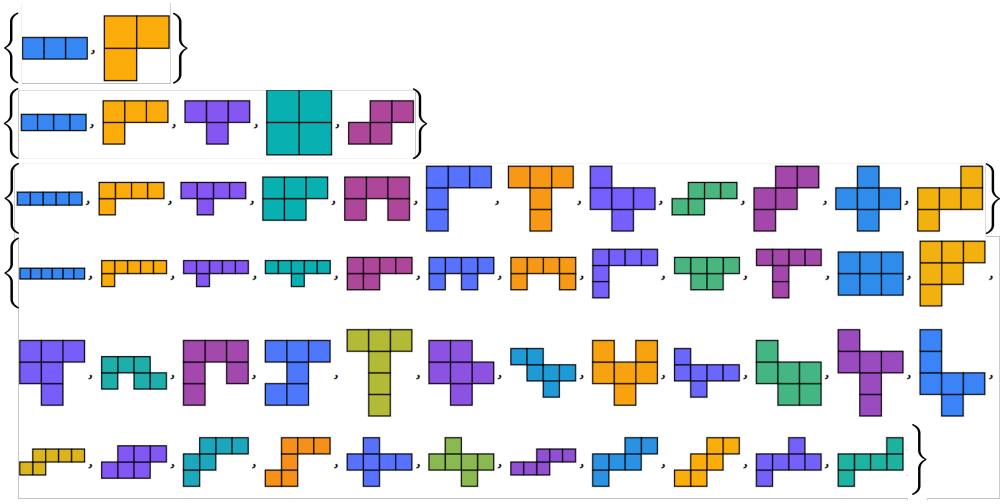


图2：大小为三、四、五和六的所有多格骨牌。

与前一个例子类似，在 Poly×Poly×Poly 上定义如下关系：若满足以下条件，则称 $(P_1,\ P_2,\ P)$ 为一个良三元组：

- P_1 是 P的子多格骨牌，其多格骨牌补集为 P_2。
- P_2 是 P的子多格骨牌，其多格骨牌补集为 P_1。

就这种　　关系而言，可以在 S 上定义一个多重幺半群结构，具体如下：

$$\{P_1\} \circ \{P_2\} \equiv \{P \in S \mid (P_1, P_2, P) \text{ is good}\}, \tag{14}$$

对于每个 $P_1,\ P_2 \in S$。

[1]更准确地说，本文所说的多格骨牌是指自由多格骨牌，也就是说，如果两个多连方可以通过旋转和/或反射相互得到，我们就将它们视为相同，参见例如 [11] 和 [12]。

例如，多连方的多重幺半群结构（14）如图 3 所示。

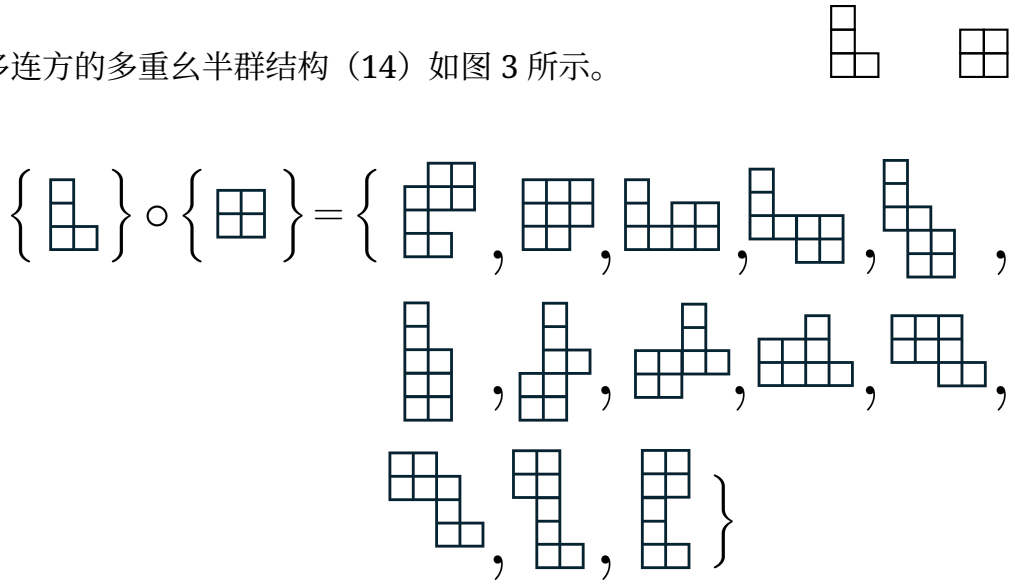


图 3：有色固定多连方集合上的多重幺半群结构。

多元岩浆的代数结构 $(S, \circ)$，类似于半群结构 $(\mathbb{Z}^+, +)$，允许定义集合 S 上的组装加法链概念。不过，加法链的情形下有一个自然的构建块（例如 1），而对于一般的多元岩浆，则需要固定 S 的一个子集，作为组装加法链的构建块集合。

定义 3。（组装加法链）。设 $(S, \circ)$ 为一个多元岩浆，$BB \subset S$（称为构建块集合），且 $\mathscr{O} \in S \setminus BB$ 为任意对象。考虑一个序列

$$(\mathscr{O}_1, \mathscr{O}_2, \ldots, \mathscr{O}_r = \mathscr{O})$$

使得 $\mathscr{O}_1 \in BB \circ BB$，并且对于每个对象 $\mathscr{O}_\rho \in S$，对 $\rho \in \{2, 3, \ldots, r\}$，都存在 $\mathscr{O}_\sigma$, $\mathscr{O}_\tau \in \{\mathscr{O}_1, \ldots, \mathscr{O}_{\rho-1}\} \cup BB$，使得

$$\mathscr{O}_\rho \in \{\mathscr{O}_\sigma\} \circ \{\mathscr{O}_\tau\}. \tag{15}$$

这类序列称为以 BB 上的种子构成的 $\mathscr{O} \in S$ 的组装加法链（AAC），所有此类序列的集合记作 $AAC(\mathscr{O}, BB)$。

这个定义表明，多元岩浆的概念如何自然而然地将加法链的概念推广到一般集合上。不过，半群（$\mathbb{Z}^+, +$）具有一项隐含性质，而任意多元岩浆未必满足该性质：任何$n \in \mathbb{Z}^+$ 都可以用一条加法链表示，例如 $(1, 2, \ldots, n)$；也就是说，n 可以表示为若干个 n 1之和。我们定义一类多重幺半群结构，使其具有类似性质，即保证**每个**对象都由有限个构建块构成。

定义4.（组装多元岩浆）。令 $(S, \circ)$ 为一个多元岩浆，且 $BB \subset S$。如果对每个 $\mathscr{O} \in S \setminus BB$，都存在 $\mathscr{B}_i \in BB$，使得对于 $i = 0$，1，……，r：

1.

$$\Gamma(\mathscr{O}) \equiv (\mathscr{O}_1, \mathscr{O}_2, \cdots, \mathscr{O}_r = \mathscr{O}) \in AAC(\mathscr{O}, BB) \tag{16}$$

with

- $\mathscr{O}_1 \in \{\mathscr{B}_0\} \circ \{\mathscr{B}_1\}$,
- $\mathscr{O}_i \in \{\mathscr{O}_{i-1}\} \circ \{\mathscr{B}_i\}$ 对于 $i = 2, \ldots, r$。

2. 如果存在 $\mathscr{B}_j \overline{\in} BB$ 使得 $j = 0, 1, \ldots, s$

$$\overline{\Gamma}(\mathscr{O}) = (\overline{\mathscr{O}}_1, \overline{\mathscr{O}}_2, \cdots, \overline{\mathscr{O}}_s = \mathscr{O}) \in AAC(\mathscr{O}, BB)$$

with

- $\overline{\mathscr{O}}_1 \in \{\overline{\mathscr{B}}_0\} \circ \{\overline{\mathscr{B}}_1\}$,
- $\overline{\mathscr{O}}_i \in \{\overline{\mathscr{O}}_{i-1}\} \circ \{\overline{\mathscr{B}}_i\}$ for $i = 2, \ldots, r$,

那么 $r = s$，并且存在 $\sigma \in S_r$（r次对称群），使得$\mathscr{B}_i = \mathscr{B}_{\sigma(i)}$ 对于 $i = 0, 1, \ldots, r$,

那么我们称三元组 $(S, \circ, BB)$ 为一个组装多元岩浆 (AMM)。

直观地说，如果我们将二元运算 $\circ$ 视为一种粘合 运算，那么 AMM 结构 $(S, \circ, BB)$ 具有这样的性质：每个对象 $\mathscr{O} \in S$要么是（i）一个构建块，要么是（ii）可以通过递归地粘合（经由 $\circ$）一组唯一的 构建块来构造。换言之，集合 S 上的 AMM 结构意味着，每个对象 $\mathscr{O}$ 都可以表示为有限个构建块，且这些构建块的数量唯一；该对象可以通过递归组装这些构建块构造而成。对于任意 AMM $(S, \circ, BB)$，我们将由 (16) 给出的 $\mathscr{O} \in S$ 的任意特征加法链记为 $\Gamma(\mathscr{O})$。

备注1。如果根据上下文已知某个 AMM（S，$\circ$，BB）的构建块集合（本文所讨论的示例即是如此），那么对于每个 $\mathscr{O} \in S$，我们将集合 $AAC(\mathscr{O}, BB)$ 简记为 $AAC(\mathscr{O})$。例如：

1. 对于 $S = \mathbb{Z}^+$，则 $BB = \{1\}$。2. 对于 $S = j$-字符串，则 $BB = \{0, 1, 2, ..., j-1\}$。3. 对于 $S =$CCG，则 BB 是单色线段的集合。4. 对于 $S =$ CPoly，则 BB 是单色 1×1 方块的集合

s.

类似于 $(\mathbb{Z}^+, +)$ 中 $AC(n)$ 的情形，对于任意多元岩浆（s，$\circ$，BB），在 $AAC(\mathscr{O}, BB)$ 上，我们可以定义一条组装加法链的长度。对于每个 $\mathscr{O} \in S \setminus BB$，我们定义长度函数

$$L : AAC(\mathscr{O}, BB) \to \mathbb{Z}^+$$
$$(\mathscr{O}_1, \mathscr{O}_2, \ldots, \mathscr{O}_r = \mathscr{O}) \mapsto r$$

可自然地扩展到所有

$$AAC(S, BB) \equiv \cup_{\mathscr{O} \in S \setminus BB} AAC(\mathscr{O}, BB).$$

此函数直接对应于 $AAC(S)$ 中序列的长度。从启发式角度看，由于 $AAC(\mathscr{O}, BB)$ 中的序列表示了路径，这些路径说明如何递归地使用 BB 的元素来构造 $\mathscr{O}$ ，因此函数 L 表示这些路径各自包含的步骤数。特别地，若 $(S, \circ, BB)$ 是一个 AMM，那么在 $\Gamma(\mathscr{O}) \in AAC(\mathscr{O}, BB)$ 上计算函数 L，我们就能得到对象 $\mathscr{O} \in S$ 的一个特征数，例如它的大小。

定义 5.（对象的大小）。设 $(S, \circ, BB)$ 是一个 AMM。 S上的大小函数定义为

$$
\begin{aligned}
& s: S \to \mathbb{Z}^{+} \\
& \mathscr{O} \mapsto \begin{cases} 1 & \text{for} \quad \mathscr{O} \in BB, \\ L(\Gamma(\mathscr{O})) + 1 & \text{for} \quad \mathscr{O} \in S \setminus BB. \end{cases}
\end{aligned} \tag{17}
$$

如引言中所述，多元岩浆和组装多元岩浆这两个概念背后的主要动机，分别是形式化对象的粘合和从构建块开始通过递归粘合来组装对象的概念。鉴于大小函数能够确定构造任意对象$\mathscr{O}$所需的构建块数量，多元岩浆二元运算 $\circ$与函数 s之间必须满足相容条件，因为通过粘合两个对象构造出的对象，其大小应为后两者大小之和。

定义 6.（组装空间）。组装空间 $(S, \circ, BB)$ 是一个 AMM，其中大小函数满足可加性条件，即若 $\mathscr{O} \in S \setminus BB$ 且 $\mathscr{O} \in \{\mathscr{O}_\sigma\} \circ \{\mathscr{O}_\tau\}$，则

$$
s(\mathscr{O}) = s(\mathscr{O}_\sigma) + s(\mathscr{O}_\tau). \tag{18}
$$

与 $(\mathbb{Z}^{+}, +)$ 中加法链的情形对应的函数 ℓ 类似，我们定义任意组装空间 $(S, \circ, BB)$ 中 AAC 情形下的组装指数函数 a。

定义 7。（组装指数）。令 $(S, \circ, BB)$ 为一个组装空间，且 $\mathscr{O} \in S$。 $\mathscr{O}$ 的组装指数 （AI）定义为

$$
a(\mathscr{O}) \equiv \begin{cases} 0 & \text{for} \quad \mathscr{O} \in BB \\ \min(L(AAC(\mathscr{O}))) & \text{for} \quad \mathscr{O} \in S \setminus BB. \end{cases} \tag{19}
$$

组装空间中的组装加法链是数学对象，它们以递归方式捕捉粘合构建块以生成对象这一直观概念。组装空间的概念已在 [13]中引入，其主要目标是描述所有可从特定键集合（即所谓的化学组合空间）以递归方式构建的分子的空间。事实上， [13] 中定义对象的性质与组装空间（S， $\circ$， BB）中的对象 $\mathscr{O} \in S$ 所具有的性质相符：对象是有限的 （由 $s(\mathscr{O})$ 给出）、可区分的且可拆分的 ，因此，从基本构建块构造该对象所需满足的约束集合是可量化的（由 $a(\mathscr{O})$给出）。

最后，最优组装加法链的定义与最优加法链的定义完全相同，只需用函数 a替换 ℓ 即可。

定义 8.（最优组装加法链）。设 $(S, \circ, BB)$ 为一个组装空间，且 $\mathscr{O} \in S \setminus BB$。若组装加法链 $C \in AAC(\mathscr{O})$ 满足以下条件，则称其为最优

$$L(C) = a(\mathscr{O}). \tag{20}$$

注 2.与组装空间的概念一同，组装路径的概念最初在 [9], 中提出。正如 [9], 中的数学描述所示，给定构建块的一个子集 BB ，以及一个由 BB 的所有元素构成的对象 $\mathscr{O}$ ，$\mathscr{O}$ 的组装路径是一个有向无环图，其中有 $a(\mathscr{O}) + 1$ 个顶点，满足：(I) 恰有恰好Card(BB) 个顶点的入度为 0（对应构建块的顶点），而所有其他 $a(\mathscr{O})$ 个顶点的入度均为 2（对应为组装 $\mathscr{O}$ 而递归构造的对象的顶点）；(II) 仅有一个顶点的出度为 0（对应 $\mathscr{O}$ 的顶点）。 $AAC(\mathscr{O}, BB)$ 为集合 S 在组装空间 $(S, \circ, BB)$ 中的组装路径提供了代数表示；附录 A 中给出了对这一关系进行形式化的显式映射（投影）。

任何集合空间中对象 $\mathscr{O} \in S$ 的 (i) 组装加法链 $AAC(\mathscr{O})$、(ii) 大小 $s(\mathscr{O})$ 和 (iii) 组装指数 $a(\mathscr{O})$ 的概念，分别是对任意 $n \in \mathbb{Z}^+$ 的 (i) 加法链 $AC(n)$、(ii) 大小 n 和 (iii) $\ell(n)$ 概念的扩展。因此，我们预期前一种情形应存在一种类似（ 5 ）的不等式，用 $s(\mathscr{O})$ 来界定 $a(\mathscr{O})$ 的值。根据 [13], 《数学补充材料》第 4 节中的讨论，可以直接推导出一个为 $a(\mathscr{O})$ 提供粗略估计的不等式。

命题1. 设 $(S, \circ, BB)$ 是一个组装空间。任意对象 $\mathscr{O} \in S$ 的组装指数和大小满足以下不等式

$$\log_2(s(\mathscr{O})) \leq a(\mathscr{O}) \leq s(\mathscr{O}) - 1. \tag{21}$$

证明. 若 $\mathscr{O} \in BB$，则该不等式显然成立，因为 $a(\mathscr{O}) = 0$ 且 $s(\mathscr{O}) = 1$。若$\mathscr{O} \in S \setminus BB$，则由于 $\Gamma(\mathscr{O}) \in AAC(\mathscr{O})$，我们有

$$a(\mathscr{O}) \equiv \min(L(AAC(\mathscr{O}))) \leq L(\Gamma(\mathscr{O})) = s(\mathscr{O}) - 1,$$

得到式 (21) 中的上界。另一方面，令 $(\mathscr{O}_1, \mathscr{O}_2, \cdots, \mathscr{O}_a \equiv \mathscr{O}) \in OAAC(\mathscr{O})$。根据大小函数的可加性条件，我们有

$$s(\mathscr{O}) \leq 2 \max_{i=1,\ldots,a-1} \{s(\mathscr{O}_i)\} \leq 2^{a(\mathscr{O})},$$

从而得到式 (21) 中的下界。 □

对于标准加法链，计算数量 $\ell(n)$问题的一种推广已知是 NP 完全问题，参见例如 [14], [15], [16]。目前尚无该问题的精确解法，尽管有些算法（例如所谓的

M元方法）可在 $polylog(n)$ 时间内运行，并给出 $1+o(1)$ 近似解。最近，这一结果已扩展到组装指数的计算，证明给定一个组装空间（S，$\circ$，BB）和 $\mathscr{O} \in S$，计算 $a(\mathscr{O})$ 是一个 NP 完全问题（参见 [17]的补充信息部分）。

与加法链的情况类似，**并不存在**计算任意对象组装指数的精确解，尽管已经开发并实现了若干算法（参见例如 [18]）。然而，迄今为止，用于计算特定组装空间中组装指数的算法的任何实现，例如字符串和 CCG，在计算大型对象的组装指数时都存在重要局限性（例如满足 $s(S) > 32$的 $S \in$ 2-字符串，以及满足 $s(G) > 20$的 $G \in$ CCG）。因此，对于 ℓ而言，像（5）这样的不等式，以及对于 a 而言，像（21）这样的不等式，都具有计算上的重要意义，因为至少它们能够提供（粗略的）估计。

3 组装指数的界

图4和图5展示了所有长度不超过25的 $\mathscr{O} \in$ 2-字符串，以及所有长度不超过18的 $\mathscr{O} \in$ SCG（简单连通图）的组装指数。界$s(\mathscr{O}) - 1$ 与 $\log_2(s(\mathscr{O}))$ 分别同组装指数的最大值和最小值之间的差距表明，尽管（21）中的界是正确的，但它们并未提供最优估计（尤其是对于大型对象）。

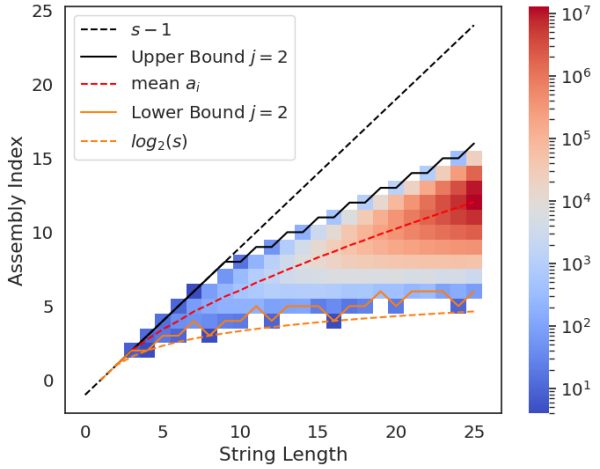


图4：所有长度小于或等于 25 的 2-字符串的组装指数随字符串长度的变化。

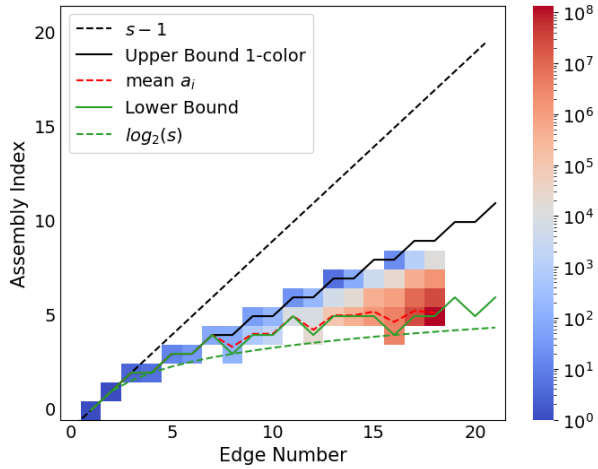


图 5：所有边数小于或等于 18 的单色简单连通图的组装指数随边数的变化。

本节将介绍两种构造方法，它们能根据大小函数 s (17)，为任意组装空间（$S, \circ, BB$）中组装指数函数 a (54) 的取值给出更好的上界和下界。

3.1 普适下界

由于大小函数在组装空间（$S, \circ, BB$）和 $s|_{BB} \equiv 1$ 上具有可加性（18），因此存在一个映射

$$\begin{aligned} F : AAC(\mathscr{O}, BB) &\to AC(s(\mathscr{O})) \\ (\mathscr{O}_1, \mathscr{O}_2, \ldots, \mathscr{O}_r = \mathscr{O}) &\mapsto \mathrm{ord}[(s(\mathscr{O}_1), s(\mathscr{O}_2), \ldots, s(\mathscr{O}))] \end{aligned} \tag{22}$$

其中，ord 是将正整数按升序排列并去除可能重复项的函数。因此，对于任意 $\mathscr{O} \in S$ 和 $C \in AAC(\mathscr{O}, BB)$，映射 F 满足单调性条件

$$L(F(C)) \le L(C). \tag{23}$$

从 $AAC(\mathscr{O}, BB)$ 到 $AC(s(\mathscr{O}))$ 的这个单射，或者更一般地，从 $\cup_{\mathscr{O}\in S} AAC(\mathscr{O}, BB)$ 到 $\cup_{n\in\mathbb{Z}^+} AC(n)$ 的单射，意味着任意对象 $\mathscr{O} \in S$ 的组装指数都有下界 $\ell(s(\mathscr{O}))$。

定理1。设 $(S, \circ, BB)$ 是一个组装空间。对于任意 $\mathscr{O} \in S$，以下不等式成立

$$\lceil \log_2(s(\mathscr{O})) \rceil \le \ell(s(\mathscr{O})) \le a(\mathscr{O}). \tag{24}$$

证明。在 [2] 中，Scholz 证明了若 $2^m + 1 \le n \le 2^{m+1}$，则

$$m + 1 \le \ell(n) \le 2m. \tag{25}$$

因此，若 $\mathscr{O} \in S$ 是满足 $s(\mathscr{O}) = 2^k$ 的某个 $k \in \mathbb{Z}^+$ 对象，则

$$\lceil \log_2(s(\mathscr{O})) \rceil = \log_2(s(\mathscr{O})) = k \le \ell(s(\mathscr{O})).$$

Si同样地，如果 $\mathscr{O} \in S$ 满足对于某个 $k \in \mathbb{Z}^+$ 有 $2^m + 1 \le s(\mathscr{O}) < 2^{m+1}$，那么

$$\lceil \log_2(s(\mathscr{O})) \rceil = m + 1 \le \ell(s(\mathscr{O})),$$

即可证明第一个不等式。

另一方面, 利用映射 F (22)，我们可知，对于任意 $S \in OAAC(\mathscr{O})$

$$\ell(s(\mathscr{O})) \le L(F(S)) \le L(S) = a(\mathscr{O}),$$

从而证明最后一个不等式。 □

定理1表明，对于组装空间（$S, \circ, BB$）中的**任意**对象 $\mathscr{O}$，数量 $\ell(s(\mathscr{O}))$ 是 $a(\mathscr{O})$ 的一个比命题1中的下界 $\log_2(s(\mathscr{O}))$ 更好的下界。在图6中，我们绘出了 $\log_2(s(\mathscr{O}))$ 和 $\ell(s(\mathscr{O}))$，由式（24）可知，后者是 $a(\mathscr{O})$ 的更好下界，但 $s(\mathscr{O}) = 2^k$ for $k \in \mathbb{Z}^+$ 的情形除外（在这些取值下，两个界相同）。

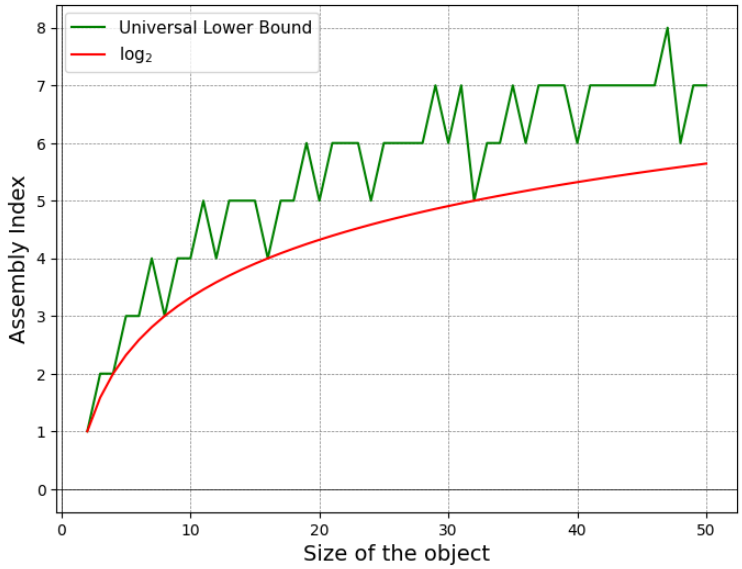


图6：对于大小不超过 50 的对象， $\ell(s(\mathscr{O}))$（绿色曲线）和 $\log_2(s(\mathscr{O}))$（红色曲线）的曲线图。

备注3。对于第 2 节中的组装空间示例，例如 j-字符串、CCG 和 CPoly，可以明确描述一族对象，使得 $a(\mathscr{O}) = \ell(s(\mathscr{O}))$：这一族对应于单色类字符串对象。“单色”是指构造对象时仅使用一种类型的构建块，而类字符串是指通过以“线性方式”粘合构建块来构造对象。

例3.1。 在 $S = j$-字符串的情况下，单色串状对象的族由所有形如以下形式的字符串组成

$$S_{b,n} \equiv \underbrace{bb\cdots b}_{n}$$

对于 $b \in \{0, 1, \ldots, j-1\}$ 和 $n \in \mathbb{Z}^+$。事实上，

$$a(S_{b,n}) = \ell(s(S_{b,n})) = \ell(n).$$

例3.2。 在 S =CCG 的情况下，单色串状对象的族由所有形如以下形式的图组成

$$LG_n \equiv \quad \underset{1}{\bullet}\!\!-\!\!\underset{2}{\bullet} \quad \cdots \quad \underset{n}{\bullet}\!\!-\!\!\bullet \quad .$$

显然，在这种情况下

$$a(LG_n) = \ell(s(LG_n)) = \ell(n).$$

例3.3。 </style}当 S =CPoly 时，单色字符串状对象族由以下形式的所有多格骨牌组成

$$LP_n \equiv \underset{1}{\square}\underset{2}{\square}\cdots\underset{n}{\square}$$

对于这类对象，我们有

$$a(LP_n) = \ell(s(LP_n)) = \ell(n).$$

3.2 上界

如上所述，在组装空间（$S, \circ, BB$）中计算任意对象 $\mathscr{O} \in S$ 的组装指数，在计算上代价高昂（例如参见[17] 和 [18]），目前也尚无通用算法能够对任意集合精确计算该指数。其他作者曾定性地指出，计算出比 $s(\mathscr{O}) - 1$ 更好的 $a(\mathscr{O})$上界是可行的（例如参见 [9]和 [19]），但他们的结果仍停留在猜想层面（另见 [20]中的图4）。本节将为任意组装空间中的两类特定对象（即二进制对象和二片可分解对象，定义见下文）推导出更好的上界，从而为第 2 节中的所有示例得到比式（ 21 ）更好的上界。

备注 4. 我们采用以下记号:

- 设（$S, \circ, BB$）为一个组装空间。我们引入如下记号

$$S(k) \equiv \{\mathscr{O} \in S \mid s(\mathscr{O}) = k\}, \tag{26}$$

  即我们用 $S(k)$ 表示 S 中大小为 $k \in \mathbb{Z}^+$ 的元素集合。

- 对于任意 $k \in \mathbb{Z}^+$，我们用 $B(k) = \{n_1, n_2, \cdots, n_{H(k)}\} \subset \mathbb{Z}_{\geq 0}$ 表示满足 $n_1 > n_2 > \cdots > n_{H(k)}$ 且 $k = 2^{n_1} + 2^{n_2} + \cdots + 2^{n_{H(k)}}$ 的非负整数集合，即 $B(k)$ 是 k 的二进制分解中 2 的幂的集合，其中 $H(k)$ 是 k 的汉明重量。

首先，我们考虑任意组装空间中的一类特定对象。

定义 9。（二进制可分解对象）。组装空间（S， $\circ$， BB）中的对象 $\mathscr{O} \in S$ 被称为二元可分解，如果存在

$$\mathscr{B}_j^{(i)} \in BB \qquad \text{with } n_i \in B(s(\mathscr{O})) \quad \text{and} \quad j \in 1, \ldots, 2^{n_i} \tag{27}$$

使得

$$\mathscr{O} \in (\mathscr{P}_{H(s(\mathscr{O}))} \circ \cdots \circ (\mathscr{P}_3 \circ (\mathscr{P}_2 \circ \mathscr{P}_1 \underbrace{))\cdots)}_{H(s(\mathscr{O}))-1} \tag{28}$$

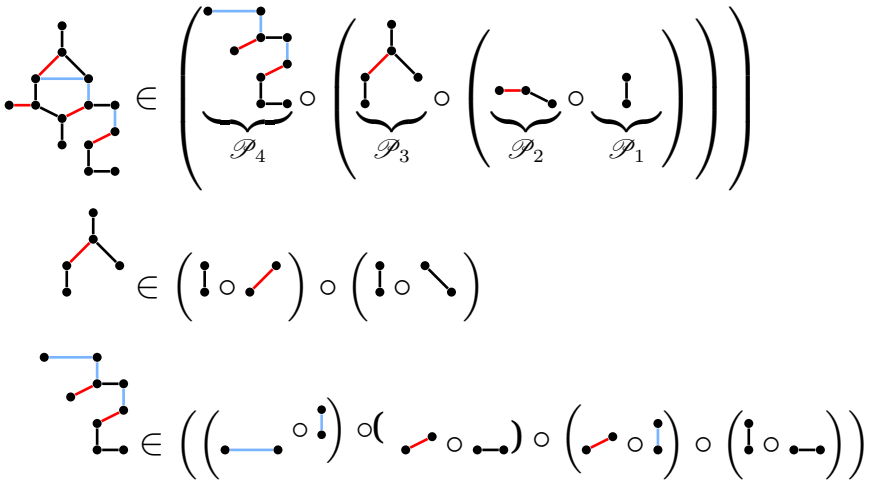
其中

$$\mathscr{P}_i \in \underbrace{\big(\cdots\big(\big(}_{i} \mathscr{B}_1^{(i)} \circ \mathscr{B}_2^{(i)}\big) \circ \big(\mathscr{B}_3^{(i)} \circ \mathscr{B}_4^{(i)}\big)\big) \circ \cdots \circ \big(\big(\mathscr{B}_{2^{n_i}-3}^{(i)} \circ \mathscr{B}_{2^{n_i}-2}^{(i)}\big) \circ \big(\mathscr{B}_{2^{n_i}-1}^{(i)} \circ \mathscr{B}_{2^{n_i}}^{(i)}\big)\underbrace{\big)\big)\cdots\big)}_{i}. \tag{29}$$

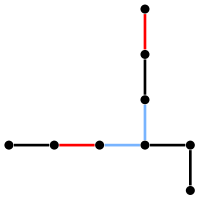
我们用 $BD(S)$ 表示组装空间（S, $\circ$, BB）中的二进制可分解对象集合。从直观上来说，二进制可分解对象是指能够通过粘合大小为 2 的幂次的子对象递归构造出来的对象。

例3.4. 对于 $S = j$字符串, $S = BD(S)$，因为任何大小为 $a + b$ 的字符串都可以通过并置长度为 a 的子字符串（字符串的前 a 个字符）和 b （字符串的后 b 个字符）构造出来。

例3.5. 对于 S =CCG，我们有 $BD(S) \neq \emptyset$，但包含关系 $BD(S) \subset S$ 是严格的。图 7 (a) 展示了 BD(S) 中一个元素的例子，而 (b) 展示了一个对象 $\mathscr{O} \in S$，使得 $\mathscr{O} \notin BD(S)$。



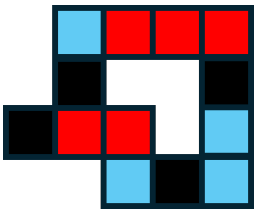
(a) 大小为 15 的二元可分解彩色连通图。



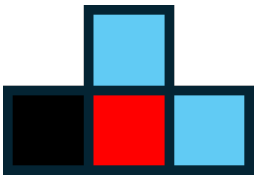
(b) 大小为 8 的彩色连通图，不能二元可分解。

图 7：一个二元可分解彩色连通图的（a）示例和（b）反例。

例3.6。 与前一种情况类似，对于 S =CPoly，我们有 $BD(S) \neq \emptyset$和$BD(S) \neq \emptyset$。图 8（a）展示了 $\mathscr{O} \in BD(S)$，而（b）展示了一个满足$\mathscr{O} \notin BD(S)$的对象。



（a）大小为 13 的二元可分解彩色多格骨牌。



（b）大小为 4 的非二元可分解彩色多格骨牌。

图 8：二元可分解彩色多连方的 (a) 示例和 (b) 非示例。

引理 2. 设 $(S, \circ, BB)$ 是一个组装空间，且 $\mathscr{O} \in BD(S)$ 满足 $s(\mathscr{O}) = 2^n$。那么

$$a(\mathscr{O}) \leq \sum_{i=1}^{n} \min\{2^{n-i}, \mathrm{Card}(S(2^i))\}. \tag{30}$$

证明。由于 $\mathscr{O} \in BD(S)$ 和 $s(\mathscr{O}) = 2^n$，因此存在 $\mathscr{B}_i \in BB$，对应于 $i = 1,\ldots, 2^n$，使得

$$\mathscr{O} \in \underbrace{\big(\cdots\big(\big(}_{n} \mathscr{B}_1 \circ \mathscr{B}_2\big) \circ \big(\mathscr{B}_3 \circ \mathscr{B}_4\big)\big) \circ \cdots \circ \big(\big(\mathscr{B}_{2^n-3} \circ \mathscr{B}_{2^n-2}\big) \circ \big(\mathscr{B}_{2^n-1} \circ \mathscr{B}_{2^n}\underbrace{\big)\big)\cdots\big)}_{n}.$$

He因此存在 $C \in AAC(\mathscr{O})$，使得 $L(C) = 2^n - 1$ 由以下公式明确给出

$$C = (\mathscr{B}_1 \circ \mathscr{B}_2, \mathscr{B}_3 \circ \mathscr{B}_4, \cdots, \mathscr{B}_{2^n-1} \circ \mathscr{B}_{2^n}, (\mathscr{B}_1 \circ \mathscr{B}_2) \circ (\mathscr{B}_3 \circ \mathscr{B}_4), \cdots, \mathscr{O}), \tag{31}$$

也就是说，前 2^{n-1} 个对象分别属于 $\mathscr{B}_i \circ \mathscr{B}_{i+1}$，对应于 $i = 1, 3, \cdots, 2^n - 1$；接下来的 2^{n-2} 个对象分别属于 $(\mathscr{B}_i \circ \mathscr{B}_{i+1}) \circ (\mathscr{B}_{i+2} \circ \mathscr{B}_{i+3})$，对应于 $i = 1,5, \cdots, 2^n - 3$；依此类推，直到最后一个对象为 $\mathscr{O}$。因此，C 中前 2^{n-1} 个对象的大小为 2，接下来的 2^{n-2} 个对象的大小为 4，依此类推，直到最后一个对象 $(\mathscr{O})$ 的大小为 2^n。由于 S 中大小为 k 的元素的最大数量由 $\mathrm{Card}(S(k))$ 给出，因此存在 $C' \in AAC(\mathscr{O})$（由 C 移除可能重复的对象后得到），使得

$$a(\mathscr{O}) \leq L(C') = \sum_{i=1}^{n} \min\{2^{n-i}, \mathrm{Card}(S(2^i))\},$$

由此得到大小为 2 的幂的任意对象 $\mathscr{O} \in BD(S)$的组装指数上界。

□

对于本文讨论的组装空间 S，即 j-字符串、CCG 和 CPoly，层集 $S(k)$ 的基数随 k 单调递增。因此，对于每个 $n \in \mathbb{Z}^+$，都存在一个临界整数

$$c(n) = \min\{\mu_n^{-1}(\mathbb{Z}_{\geq 0})\}, \tag{32}$$

根据函数 μ_n：由 $\{0, 1, 2, \cdots, n-1\} \to \mathbb{Z}$ 给出

$$\mu_n(j) = 2^j - \mathrm{Card}(S(2^{n-j})), \tag{33}$$

使得若 $j > c(n)$，则 $2^j - \mathrm{Card}(S(2^{n-j}))$ 个大小为 2^{n-j} 的对象在（31）中重复，因此在所有这些情况下，不等式（30）变为

$$a(\mathscr{O}) \leq 2^{c(n)} - 1 + \sum_{i=1}^{n-c(n)} \mathrm{Card}(S(2^i)). \tag{34}$$

注 5。 与不等式 (34) 右端相对应的计数如图 9 所示，它对应于 (31) 中 $C \in AAC(\mathscr{O})$ 的图形表示：对象的最大

数量为 C 且大小大于 $2^{n-c(n)}$ （即 **红色** 方框位于该层级之上 c（n）的数量）为

$$2^0 + 2^1 + \cdots + 2^{c(n)-1} = \sum_{j=0}^{c(n)-1} 2^j = 2^{c(n)} - 1.$$

另一方面， C 中大小小于或等于 $2^{n-c(n)}$ 的其余对象总数（即**蓝色**方框的数量）有如下上界：

$$\sum_{i=1}^{n-c(n)} \mathrm{Card}(S(2^i)).$$

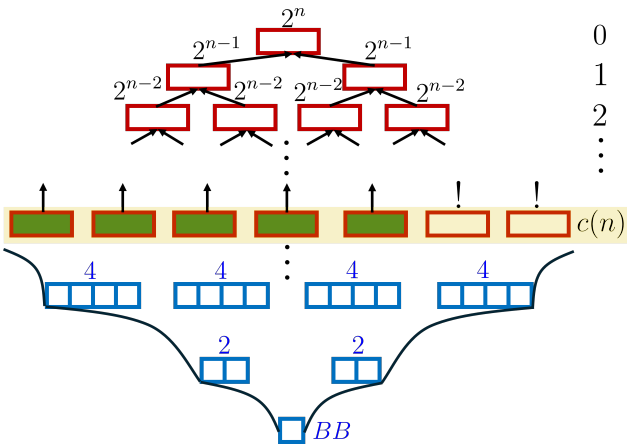


图 9：二进制可分解对象 $\mathscr{O}$ （大小为 $s = 2^n$）的极大组装路径构造示意图。

引理 2 中的上界可以推广到任意对象 $\mathscr{O} \in BD$（S）。

T定理 3。设 $(S, \circ, BB)$ 是一个组装空间，且 $\mathscr{O} \in BD$（S）。那么

$$a(\mathscr{O}) \leq (H(s(\mathscr{O})) - 1) + \sum_{i=1}^{n_1} \min \left\{ \sum_{j=1}^{H(s(\mathscr{O}))} \lfloor 2^{n_j - i} \rfloor, \mathrm{Card}(S(2^i)) \right\}. \tag{35}$$

证明。与引理 2 的证明类似，不等式（35）可通过构造 $C \in AAC$（$\mathscr{O}$）得到，使得 L（C）小于或等于（35）的右端。由于 $\mathscr{O} \in BD$（S），存在 $\mathscr{P}_i$，对于 $i = 1$，……，H（s（$\mathscr{O}$））， 使得

$$\mathscr{O} \in (\mathscr{P}_{H(s(\mathscr{O}))} \circ \cdots \circ (\mathscr{P}_3 \circ (\mathscr{P}_2 \circ \mathscr{P}_1 \underbrace{))\cdots)}_{H(s(\mathscr{O}))-1}$$

其中每个 $\mathscr{P}_i$ 满足 $s(\mathscr{P}_i) = 2^{n_i}$，并且可按式 (29) 进行分解。根据引理 2 的证明，对于每个 $\mathscr{P}_i$，我们可以利用分解 (29) 构造一个 $C_i \in AAC(\mathscr{P}_i)$，如下所示：

由式 (31) 给出。利用每个 $\mathscr{P}_i$ 对应的这些组装加法链，我们构造 $C \in AAC(\mathscr{O})$，其具体形式为:

$$C \equiv (C_1, C_2, \ldots, C_{H(s(\mathscr{O}))}, (\mathscr{P}_2 \circ \mathscr{P}_1), (\mathscr{P}_3 \circ (\mathscr{P}_2 \circ \mathscr{P}_1)), \ldots, (\mathscr{P}_{H(s(\mathscr{O}))} \circ \cdots \circ (\mathscr{P}_3 \circ (\mathscr{P}_2 \circ \mathscr{P}_1 \underbrace{))\cdots)}_{H(s(\mathscr{O}))-1}).$$

由于 C_j 中大小为 2^i 的对象数量由 $\lfloor 2^{n_j - i} \rfloor$ 给出，而 S 中大小为 k 的元素的最大数量由 $\mathrm{Card}(S(k))$ 给出，因此存在 $C' \in AAC(\mathscr{O})$（由 C 删除可能重复的对象后得到），使得

$$a(\mathscr{O}) \leq L(C') \leq (H(s(\mathscr{O})) - 1) + \sum_{i=1}^{n_1} \min \left\{ \sum_{j=1}^{H(s(\mathscr{O}))} \lfloor 2^{n_j - i} \rfloor, \mathrm{Card}(S(2^i)) \right\},$$

由此完成证明。 □

注释6. 当 $s(\mathscr{O}) = 2^n$ 时，不等式（35）右端会化简为不等式（30）的右端，因为此时 $H(s(\mathscr{O})) = 1$，其中 $n_1 = n$。

注释7. 对于满足 $S = BD(S)$ 且对 $k \in \mathbb{Z}^+$ 有 $\mathrm{Card}(S(k)) = 1$ 的组装空间 S（即每种大小只有一个对象），例如 1-字符串，则（35）化简为（5）。

对于层集 $S(k)$ 的基数随 k 单调递增的情况，例如 j-字符串、CCG 和 CPoly，（35）的右端第二项

$$\sum_{i=1}^{n_1 - c(n_1)} \min \left\{ \sum_{j=1}^{H(s(\mathscr{O}))} \lfloor 2^{n_j - i} \rfloor, \mathrm{Card}(S(2^i)) \right\} + \sum_{i=n_1-(c(n_1)-1)}^{n_1} \min \left\{ \sum_{j=1}^{H(s(\mathscr{O}))} \lfloor 2^{n_j - i} \rfloor, \mathrm{Card}(S(2^i)) \right\}$$

归结为

$$\sum_{i=1}^{n_1 - c(n_1)} \mathrm{Card}(S(2^i)) + \sum_{i=n_1-(c(n_1)-1)}^{n_1} \min \left\{ \sum_{j=1}^{H(s(\mathscr{O}))} \lfloor 2^{n_j - i} \rfloor, \mathrm{Card}(S(2^i)) \right\},$$

因为根据定义，对于 $k = c(n_1) \ldots, n_1 - 1,$， $2^k \geq \mathrm{Card}(S(2^{n_1 - k}))$，因此对于这类组装空间，不等式（35）可写为

$$\begin{aligned} a(\mathscr{O}) \leq (H(s(\mathscr{O})) - 1) + & \sum_{i=1}^{n_1 - c(n_1)} \mathrm{Card}(S(2^i)) \\ & + \sum_{k=1}^{c(n_1)} \min \left\{ \sum_{j=1}^{H(s(\mathscr{O}))} 2^{n_j - (n_1 - c(n_1) + k)}, \mathrm{Card}(S(2^{n_1 - c(n_1) + k})) \right\}. \end{aligned} \tag{36}$$

注释8。 公式（36）的直观思路如图10所示：按照注 5 中介绍的构造方法，构造大小为 2^{n_1}、2^{n_2}、.....、2^{n_H} 的对象。由于 $c(n_1) > c(n_2) > \cdots > c(n_H)$，在

大小为 2^{n_1} 的对象的组装序列中，直到层级 $c(n_1)$ 的所有对象（从下到上）都包含在大小为 2^{n_k} 的对象的组装序列中，直到层级 $c(n_k)$ 的所有对象（从下到上）之中，其中 $k = 2$、……、H。因此，公式（36）中的第二项统计了大小为 2^{n_1}、……、2^{n_H} 的对象的最长组装加法链中（从下到上）截至层级 $c(n_1)$、……、$c(n_H)$ 所涉及的步数。

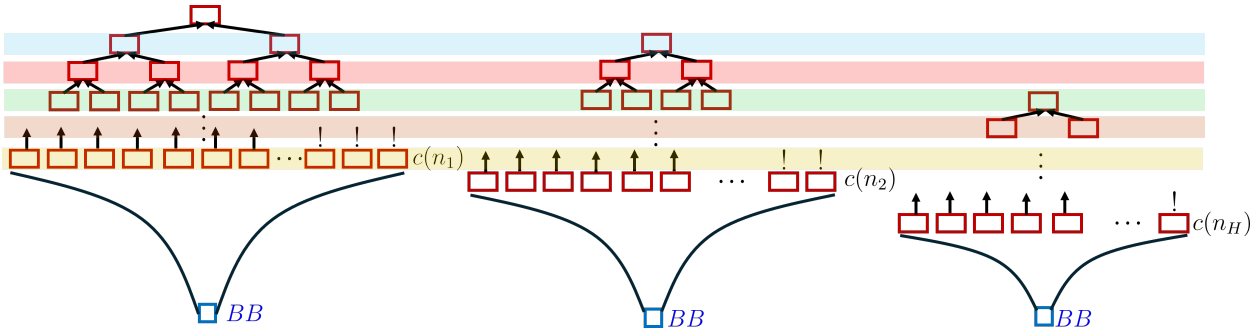


图10：对于大小为 $s = 2^{n_1} + \cdots + 2^{n_H}$ 且满足 $n_1 > \cdots > n_H$ 的对象 $\mathscr{O}$，构造极大组装路径的图示说明。

(36) 中的最后一项统计了所有其他极大组装路径中剩余的二元步骤（即对于大小为 2^{n_k} 的对象，在 $c(n_k)$ 层级之上），同时避免重复计数（因为大小为 2^k 的对象不可能多于 Card($S(2^k)$) 个）；第一项则仅统计将所有 $n_H(s)$ 个对象组装并粘合在一起所需的额外 $n_H(s) - 1$ 步骤。

注9。 正如预期，当 $s(\mathscr{O}) = 2^n$ 时，不等式（36）的右端会化简为不等式的右端，因为 (34) 在这种情况下， $H(s(\mathscr{O})) = 1$，其中 $n_1 = n$。

我们将不等式（35）的右端记为 $G(s(\mathscr{O}))$，并定义函数

$$\begin{aligned} Ma_{BD} : S &\to \mathbb{Z}^+ \\ \mathscr{O} &\mapsto \min\{s(\mathscr{O}) - 1, G(s(\mathscr{O}))\}. \end{aligned} \tag{37}$$

那么，对于任意组装空间中的二进制可分解对象的组装指数，我们有如下结果。

推论1. 设 $(S, \circ, BB)$ 为一个组装空间。对于任意 $\mathscr{O} \in BD(S)$，以下不等式成立

$$a(\mathscr{O}) \leq Ma_{BD}(\mathscr{O}) \leq s(\mathscr{O}) - 1. \tag{38}$$

特别地，对于满足 $S = BD(S)$ 的组装空间，例如任意 $j \in \mathbb{Z}^+$ 对应的 $S = j$-字符串，式 (37) 为任意对象 $\mathscr{O} \in S$ 的组装指数提供了比式 (21) 更好的上界。在下一节中，我们将明确说明， Ma_{BD} 给出的上界确实遵循图4中显示的最大值所体现的预期行为。

如上所述，存在一些组装空间，使得 $BD(S) \subsetneq S$，因此不等式 (38) 对任意组装空间 S 中的一般元素 $\mathscr{O}$ 并不成立。特别是，对于 $S =$CCG（见例3.5）和 $S =$ CPoly（见例3.6）， $BD(S)$ 的包含关系

在 S 中是严格的。尽管如此，这些组装空间中的对象呈现出另一种分解方式，据此还可以推导出一个优于 $s(\mathscr{O})-1$ 的上界。此外，它们的行为也将符合图 5。

定义 10。（二片可分解对象）。令 $(S,\circ,BB)$ 为一个组装空间。若对象 $\mathscr{O}\in S$ 满足以下两个条件，则称其为二片可分解：

(i) 若存在 $\mathscr{B}_i\in BB$，使得 $i=1,\cdots,2k$，且满足

$$\mathscr{O}\in(\mathscr{B}_1\circ(\mathscr{B}_2\circ(\cdots\circ(\mathscr{B}_{2k-1}\circ\mathscr{B}_{2k}\underbrace{)\cdots)))}_{2k-1}), \tag{39}$$

则存在 $\sigma\in S_{2k}$，使得

$$\mathscr{O}\in((\mathscr{B}_{\sigma(1)}\circ\mathscr{B}_{\sigma(2)})\circ\cdots\circ((\mathscr{B}_{\sigma(2k-3)}\circ\mathscr{B}_{\sigma(2k-2)})\circ(\mathscr{B}_{\sigma(2k-1)}\circ\mathscr{B}_{\sigma(2k)}\underbrace{))\cdots)}_{k}. \tag{40}$$

(ii) 若存在 $\mathscr{B}_i\in BB$，使得 $i=1,\cdots,2k+1$，且满足

$$\mathscr{O}\in(\mathscr{B}_1\circ(\mathscr{B}_2\circ(\cdots\circ(\mathscr{B}_{2k}\circ\mathscr{B}_{2k+1}\underbrace{)\cdots)))}_{2k}), \tag{41}$$

则存在 $\sigma\in S_{2k+1}$，使得

$$\mathscr{O}\in((\mathscr{B}_{\sigma(1)}\circ\mathscr{B}_{\sigma(2)})\circ\cdots\circ((\mathscr{B}_{\sigma(2k-3)}\circ\mathscr{B}_{\sigma(2k-2)})\circ(\mathscr{B}_{\sigma(2k-1)}\circ\mathscr{B}_{\sigma(2k)}\underbrace{))\cdots)}_{k}\circ\mathscr{B}_{\sigma(2k+1)}. \tag{42}$$

我们用 $2PD(S)$ 表示组装空间 S 中二片可分解对象的集合。

定义函数

$$\begin{aligned} Ma_{2PD}:S&\to\mathbb{Z}^+\\ \mathscr{O}&\mapsto\min\left\{\left\lfloor\frac{s(\mathscr{O})}{2}\right\rfloor,\mathrm{Card}(S(2))\right\}+\left\lceil\frac{s(\mathscr{O})}{2}\right\rceil-1. \end{aligned} \tag{43}$$

那么，对于任意组装空间中的二片可分解对象，我们有以下关于组装指数的结果。

定理 4. 设 $(S,\circ,BB)$ 是一个组装空间。对于任意 $\mathscr{O}\in 2PD(S)$，我们有

$$a(\mathscr{O})\le Ma_{2PD}(\mathscr{O})\le s(\mathscr{O})-1. \tag{44}$$

证明。设 $\mathscr{O}\in 2PD(S)$。如果 $s(\mathscr{O})=2k$ 对于 $k\in\mathbb{Z}^+$，那么根据定义，存在 $C\in AAC(\mathscr{O},BB)$，由 (40) 给出为

$$\begin{aligned} C=&(\mathscr{B}_{\sigma(1)}\circ\mathscr{B}_{\sigma(2)},\ldots,\mathscr{B}_{\sigma(2k-1)}\circ\mathscr{B}_{\sigma(2k)},(\mathscr{B}_{\sigma(2k-3)}\circ\mathscr{B}_{\sigma(2k-2)})\circ(\mathscr{B}_{\sigma(2k-1)}\circ\mathscr{B}_{\sigma(2k)}),\ldots,\\ &((\mathscr{B}_{\sigma(1)}\circ\mathscr{B}_{\sigma(2)})\circ\cdots\circ((\mathscr{B}_{\sigma(2k-3)}\circ\mathscr{B}_{\sigma(2k-2)})\circ(\mathscr{B}_{\sigma(2k-1)}\circ\mathscr{B}_{\sigma(2k)}\underbrace{))\cdots)}_{k}). \end{aligned}$$

由于序列中的前 k 个对象的大小为二，而 S 中大小为二的对象数量为 Card($S(2)$)，因此存在 $C' \in AAC(\mathscr{O}, BB)$（通过从 C 中移除可能重复的大小为二的对象得到），使得

$$L(C') = \min\{k, \mathrm{Card}(S(2))\} + k - 1.$$

类似地，如果对于某个 $k \in \mathbb{Z}^+$，$s(\mathscr{O}) = 2k+1$，那么存在由 (42) 隐式定义的 $C \in AAC(\mathscr{O}, BB)$

$$\begin{aligned} C =& (\mathscr{B}_{\sigma(1)} \circ \mathscr{B}_{\sigma(2)}, \ldots, \mathscr{B}_{\sigma(2k-1)} \circ \mathscr{B}_{\sigma(2k)}, (\mathscr{B}_{\sigma(2k-3)} \circ \mathscr{B}_{\sigma(2k-2)}) \circ (\mathscr{B}_{\sigma(2k-1)} \circ \mathscr{B}_{\sigma(2k)}), \ldots, \\ & ((\mathscr{B}_{\sigma(1)} \circ \mathscr{B}_{\sigma(2)}) \circ \cdots \circ ((\mathscr{B}_{\sigma(2k-3)} \circ \mathscr{B}_{\sigma(2k-2)}) \circ (\mathscr{B}_{\sigma(2k-1)} \circ \mathscr{B}_{\sigma(2k)}) \underbrace{)) \cdots)}_{k}, \\ & ((\mathscr{B}_{\sigma(1)} \circ \mathscr{B}_{\sigma(2)}) \circ \cdots \circ ((\mathscr{B}_{\sigma(2k-3)} \circ \mathscr{B}_{\sigma(2k-2)}) \circ (\mathscr{B}_{\sigma(2k-1)} \circ \mathscr{B}_{\sigma(2k)}) \underbrace{)) \cdots)}_{k} \circ \mathscr{B}_{2k+1}) \end{aligned}$$

因此，存在 $C' \in AAC(\mathscr{O}, BB)$（通过从 C 中移除可能重复的大小为二的对象得到），使得

$$L(C') = \min\{k, \mathrm{Card}(S(2))\} + k.$$

(44) 中的最后一个不等式直接由下式得出

$$\left\lfloor \frac{s(\mathscr{O}}{2} \right\rfloor + \left\lceil \frac{s(\mathscr{O})}{2} \right\rceil = s(\mathscr{O}).$$

□

特别是，对于满足 $2PD(S) = S$ 的组装空间，(43) 为任意对象 $\mathscr{O} \in S$ 的组装指数提供了比 (21) 更好的上界。在下一节中，我们将具体展示如何计算 $S =$CCG 和 $S =$CPoly 的这些上界。

4 个示例

上一节中，我们引入了函数 Ma_{BD}(37) 和 Ma_{2PD}(43)，并证明对于二元可分解对象和二片可分解对象，它们分别为组装指数提供了比 $s(\mathscr{O}) - 1$ 更好的上界。本节将具体展示，Ma_{BD} 如何为 $S = j$-字符串中的任意字符串（对任意 $j \in \mathbb{Z}^+$）的组装指数提供上界，以及 Ma_{2PD} 如何为 $S =$CCG 中任意图和 $S =$CPoly 中任意多连方的组装指数提供上界。

4.1 j-字符串的加法链

由于任何大小为 L 的 j-字符串都可以自然地拆分为大小分别为 k 和 $L-k$ 的子字符串（对任意 $1 \le k < L$ 均成立），而本文考虑的多重幺半群结构是串接（见例 2.2），因此对于这个组装空间，$BD(S) = S$。因此，正如上一节所述，式 (37) 给出了任意 $j \in \mathbb{Z}^+$ 的 j-字符串的组装指数上界。由于集合 $S(2^i)$ 的基数在有向字符串和无向字符串的情况下有所不同，我们分别讨论这两种情况。

4.1.1 有向字符串

令 $j \in \mathbb{Z}^+$。由于

$$\mathrm{Card}(j\text{-String}_d(2^i)) = j^{2^i} \tag{45}$$

对于任意 $i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$，根据 (38)，大小为 $2^{n_1} + 2^{n_2} + \cdots + 2^{n_H}$ 的有向 j-字符串 $\mathscr{O}$（其中 $n_1 > n_2 > \cdots > n_H$）的组装指数上界为

$$Ma^{j\text{-Strings}_d}(\mathscr{O}) = \min\left\{ s-1, (H(s)-1) + \sum_{i=1}^{n_1-c(n_1)} j^{2^i} + \sum_{k=1}^{c(n_1)} \min\left(\sum_{i=1}^{H} 2^{n_i-(n_1-c(n_1)+k)}, j^{(2^{(n_1-c(n_1)+k)})} \right) \right\} \tag{46}$$

其中 (32) 中的 $c(n)$ 用以下函数表示

$$\mu_n^{j\text{-Strings}_d}(i) = 2^i - j^{2^{n-i}}. \tag{47}$$

图11展示了有向 j-字符串 (46) 的最大组装指数函数在 $j = 1$、2、3、5 和 26 这些情况下的取值。从图中可以看出，在达到某个大小之前（该大小随 j 单调变化），最大组装指数与上界$s(\mathscr{O}) - 1$相一致；之后，$Ma^{j\text{-Strings}_d}$严格小于该上界，呈现准线性（锯齿形曲线）的单调递增趋势，这与图4中最大组装指数所呈现的趋势完全相同。

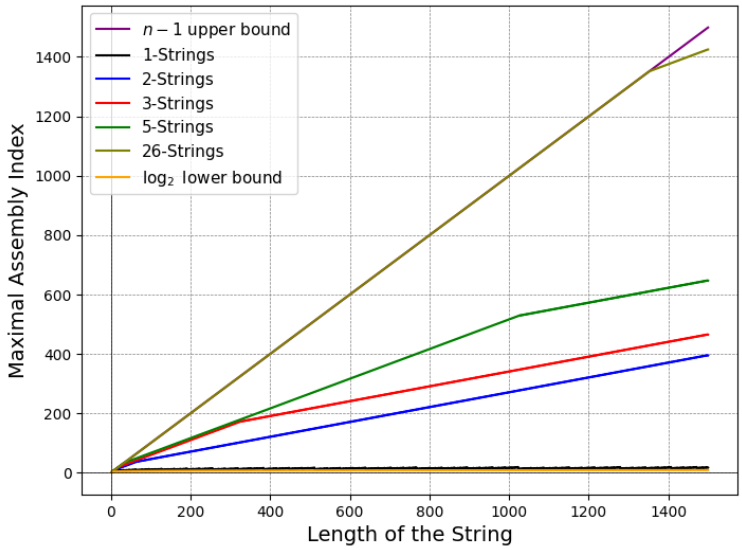


图11： $j = 1$、2、3、5、26 的 j-字符串最大组装指数。

4.1.2 无向

另一方面，由于长度为 2^i 的无向 j-字符串的数量 is

$$\mathrm{Card}(j\text{-String}_u(2^i)) = \underbrace{\frac{j^{2^i} - j^{2^{i-1}}}{2}}_{\text{non-palindromes}} + \underbrace{j^{2^{i-1}}}_{\text{palindromes}} = \frac{j^{2^i} + j^{2^{i-1}}}{2} \tag{48}$$

对于任意 $i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$，在这种情况下，对于大小为 $s = 2^{n_1} + 2^{n_2} + \cdots + 2^{n_H}$（满足 $n_1 > n_2 > \cdots > n_H$）的无向 j-字符串 $\mathscr{O}$，函数 (37) 的形式为

$$Ma^{j\text{-Strings}_u}(\mathscr{O}) = \min\left\{ s-1, (H(s)-1) + \sum_{i=1}^{n_1-c(n_1)} \frac{j^{2^{n-i}} + j^{2^{n-i-1}}}{2} + \sum_{k=1}^{c(n_1)} \min\left(\sum_{i=1}^{H} 2^{n_i-(n_1-c(n_1)+k)}, \frac{j^{(2^{(n_1-c(n_1)+k)})} + j^{(2^{(n_1-c(n_1)+k-1)})}}{2} \right) \right\}, \tag{49}$$

其中，(32) 中的函数现在给出为 $c(n)$

$$\mu_n^{j\text{-Strings}_u}(i) = 2^i - \frac{j^{2^{n-i}} + j^{2^{n-i-1}}}{2} = \frac{2^{i+1} - (j^{2^{n-i}} + j^{2^{n-i-1}})}{2}. \tag{50}$$

图 12 展示了无向（**红色**）和有向（**蓝色**） j-字符串（49）的上界数值比较，涵盖 $j = 2$、3、5 和 10 这几种情况。从图中可以明显看出，两个上界的变化趋势相同，但无向字符串的上界始终小于或等于有向字符串的上界，这是因为基数（45）和（48）满足不等式

$$\mathrm{Card}(j\text{-String}_d(2^k)) \geq \mathrm{Card}(j\text{-String}_u(2^k)),$$

对每个 j，$k \in \mathbb{Z}^+$ 均成立。

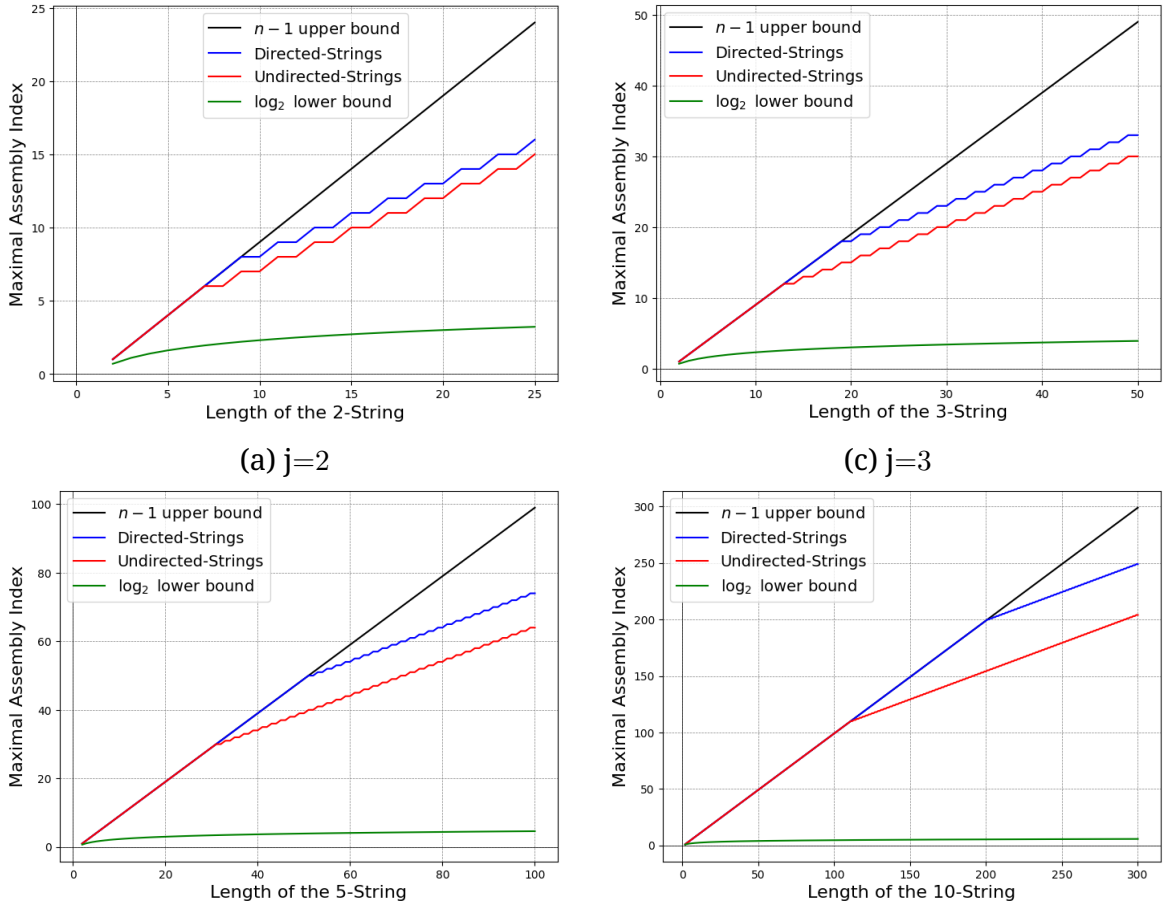
4.2 有色连通图的加法链

对于任意（有色）连通图，始终可以（i）移除一条边，使所得图仍然连通；并且（ii）若其边数为偶数，则可以将其分解为长度为二的路径（这是 Kotzig 的一个著名结果，参见例如 [21]以及原始论文 [22]）。因此，配备了例 2.3 中的多重幺半群结构后，组装空间 $S = \mathsf{CCG}$ 满足 $S = 2PD(S)$。由此，函数（43）为 $S =$CCG 中所有对象的组装指数提供了一个上界。

对于 CCG，函数 43 定义如下：

$$Ma^{\mathrm{CCG};colors}(\mathscr{O}) = \min\left\{ \left\lfloor \frac{s(\mathscr{O})}{2} \right\rfloor, \binom{colors}{2} \right\} + \left\lceil \frac{s(\mathscr{O})}{2} \right\rceil - 1. \tag{51}$$

图 13 展示了在 $colors = 1$、2、3 和 5 种情形下，CSCPG 的最大组装指数函数值。与 j-字符串的情形类似，从图中可以清楚地看出，在达到某个大小之前（该大小随 $colors$ 单调变化），最大组装指数与上界 $s(\mathscr{O}) - 1$ 相同；之后，最大组装指数严格小于该上界，并呈现准线性（锯齿状曲线）的单调递增趋势。这与图 5 中的趋势完全相同。



(a) j=2 (c) j=3

(b) j=5 (d) j=10

图 12：无向（**红色**）和有向（**蓝色**） j-字符串的 MAI 对比，其中$j = 2$，3、5、**10**。此外，还展示了 AI 的通用上 $\ell(\mathscr{O}) - 1$（**黑色**）界和下 $\lfloor \log_2(s(\mathscr{O})) \rfloor$（**绿色**）界。

4.3 彩色多格骨牌的加法链

对于任意彩色多格骨牌，我们都可以为其关联一个唯一的顶点着色平面图：彩色正方形对应一个着色顶点，两个正方形之间的共用边对应一条连接相应顶点的边。从彩色多格骨牌集合到顶点着色连通图集合的这一良定义映射是双射，它将大小为 n （使用 m 种颜色）的任意彩色多格骨牌表示为具有 $n-1$ 或 n 条边（使用 m 种颜色）的顶点着色连通图，我们称之为该多格骨牌的骨架 。

由于构造骨架就相当于构造多连方，我们根据骨架为彩色多格骨牌的集合定义一种多元岩浆结构（不同于例2.4）：构建块对应于（a）着色顶点，以及（b）具有两条边和着色顶点的钩图。彩色多格骨牌的骨架集合上的多元岩浆结构见图14。

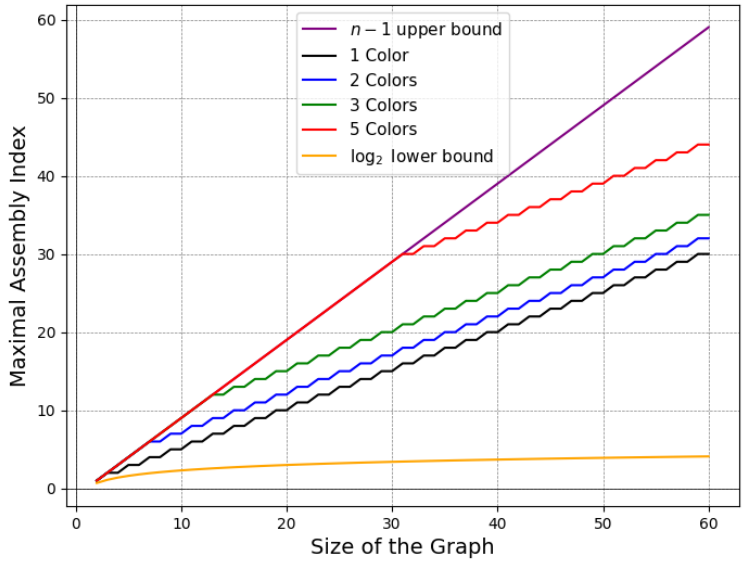
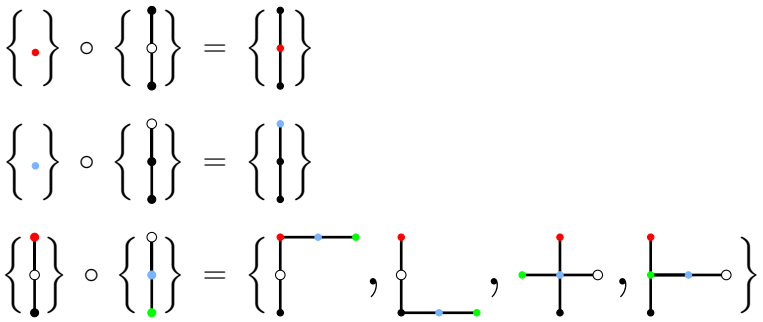


图 13：1、2、3 种和 5 种颜色的 CCG 最大组装指数。



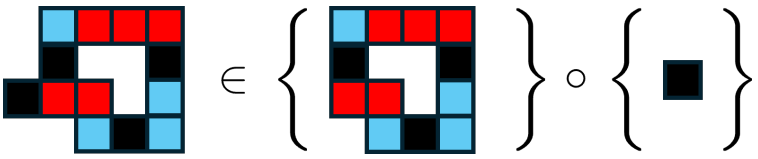
多连方骨架集合上的多重幺半群结构。

作为如何利用这种多元岩浆结构为彩色多格骨牌生成组装加法链的示例，我们在图15中给出了图8（a）中的多连方的一条组装加法链。

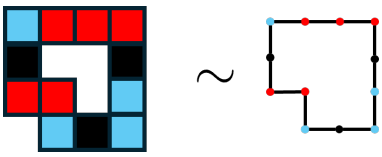
利用这种多重幺半群结构以及连通图的长度为二的路径分解，我们推导出任意 $\mathscr{O} \in$CPoly 的组装指数有如下上界：

$$Ma^{\mathrm{Poly};colors}(\mathscr{O}) = \min\left\{\left\lfloor\frac{s(\mathscr{O})-1}{2}\right\rfloor, 2\left(colors + \binom{colors}{2}\right)\right\} + \left\lceil\frac{s(\mathscr{O})-1}{2}\right\rceil - 1 + \underbrace{1}_{\text{First color fixed}}, \tag{52}$$

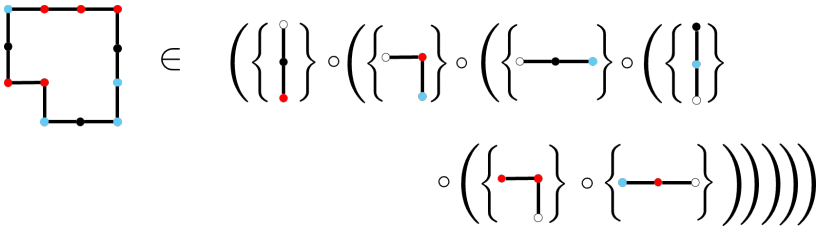
其中 $s(\mathscr{O}) - 1$ 是多连方 $\mathscr{O}$ 骨架的边数；min 函数中的第二个参数是根据以下事实得出的：有 $color + \binom{color}{2}$ 种着色方式适用于具有两条同类型边的钩图，而有 $color + color(color - 1)$ 种着色方式适用于具有两条同类型边的钩图； $+1$ 对应于固定第一个用于构造骨架的、具有两条边的钩图中与无色顶点相关联的方格的颜色（即图14中展示的前两个粘合操作之一）。



(a) 对于具有奇数个方块的任意多连方，我们可以移除一个方块，使所得多连方保持连通，并包含偶数个方块。



(b) 任意多连方都有一种骨架图表示，可以使用彩色顶点和钩状图构建。



(c) 多连方骨架图表示的双片分解。

图15：获得任意彩色多连方双片分解的过程。a）转换为偶数个方块，b）骨架表示，c）骨架的双片分解。

图16展示了颜色数为 $= 1$、2、3 和 4 时，多连方 $S =$ 的最大组装指数函数值。与 j-字符串和 CSCG 的情况类似，从图中可以清楚地看出，在达到某个大小之前（该大小随 $colors$ 单调变化），最大组装指数与上界 $s(\mathscr{O}) - 1$ 一致；此后，最大组装指数严格小于该上界，并呈现准线性（锯齿状曲线）的单调递增趋势。

5 展望与结论

本文引入了任意集合 S 上的组装加法链概念，扩展了 $\mathbb{Z}^+$ 上加法链的标准概念。这一扩展的核心代数结构是多元岩浆，它形式化了将一个集合中的对象进行粘合/组装这一直观概念，从而以组装多元岩浆结构 $(S, \circ, BB)$ 替代标准半群结构 $(\mathbb{Z}^+, +, 1)$。当 (i) 每个对象 $\mathscr{O} \in S$ 都能保证通过 $\circ$ 由子集 BB 构造得到，并且 (ii) $\circ$ 与大小函数 (18) 兼容时，$(S, \circ, BB)$ 就成为一个组装空间。

类似于如何针对任意 $n \in \mathbb{Z}^+$ 在 $(\mathbb{Z}^+, +, 1)$ 上定义 $AC(n)$，对象 $\mathscr{O} \in S$ 在任意组装空间 $(S, \circ, BB)$ 上的组装加法链集合 $AAC(\mathscr{O}, BB)$ 定义为 S 中对象序列 C 的集合，满足：(i) C 中的最后一个对象是 $\mathscr{O}$；(ii) 序列中的每个对象都是以下对象的粘合：(a) 序列中两个前置对象，或 (b) 两个构建块，或 (c) 一个构建块和一个前置对象

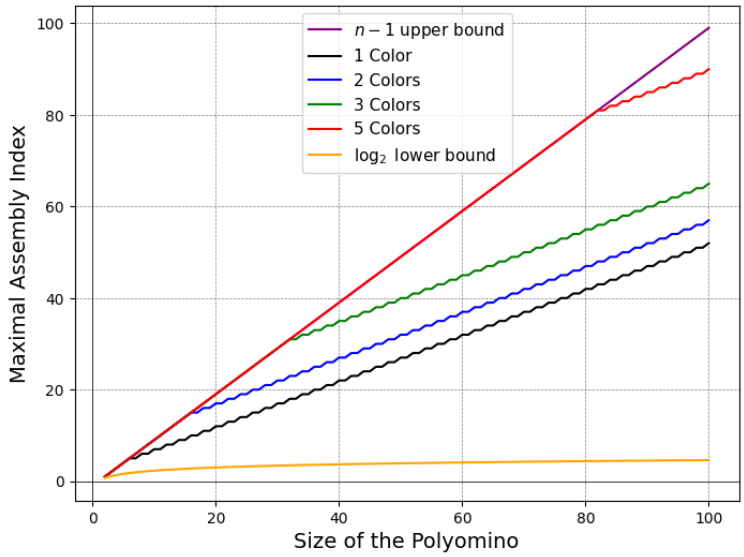


图16：1、2、3、4 种颜色的多格骨牌的最大组装指数 .

此外，对象 $\mathscr{O} \in S$ 在 $OAAC(\mathscr{O},\ BB)$ 下的最优组装加法链集合，对应于 $\mathscr{O}$ 的最短组装加法链集合，其长度即该对象的所谓组装指数 $a(\mathscr{O})$ $\mathscr{O} \in S$。

对于任意 $n \in \mathbb{Z}^+$，集合 $AC(n)$ 和数值 $\ell(n)$ 分别对应于 n 的最短加法表示集合，以及 n 的加法整数复杂度。同理，对于组装空间 $(S, \circ, BB)$ 中的任意对象 $\mathscr{O} \in S$，集合 $OAAC(\mathscr{O})$ 对应于 $\mathscr{O}$ 的最短组装路径/表示集合，而数值 $a(\mathscr{O})$ 定义为该对象的组装复杂度。

组装加法链拓展了研究成熟的标准加法链领域，提供了一种形式化方法，将任意对象 $\mathscr{O}$ 表示为一系列递归粘合运算 $C \in AAC(\mathscr{O}, BB)$；组装指数 $a(\mathscr{O})$ 则定义了对 $\mathscr{O}$ 进行最优递归表示所涉及的复杂度。由于 $OAC(n)$ 所给出的表示对于最优计算机代数至关重要，因此可以预期，$OAAC(\mathscr{O})$ 中的元素将在对象 $\mathscr{O} \in S$ 的可压缩性和最优计算机表示方面发挥重要作用。

对于任意对象 $\mathscr{O} \in S$，计算 $a(\mathscr{O})$ 是一个 NP 完全问题，因此推导界对于估算具有根本性的优势。本文证明，对于任意 $\mathscr{O} \in S = j$字符串，$\ell(s(\mathscr{O})) \leq a(\mathscr{O}) \leq Ma_{BD}(\mathscr{O})$，其中 Ma_{BD}由（37）给出；对于任意 $\mathscr{O} \in S =$CCG 或 $\mathscr{O} \in S =$CPoly，$\ell(s(\mathscr{O})) \leq a(\mathscr{O}) \leq Ma_{2PD}(\mathscr{O})$，其中 Ma_{2PD}由（43）给出。由此得到了彩色字符串、图和多格骨牌的组装复杂度估计。此外，当 $j = 1$ 时，j字符串的上界可化为 Schonhage 在 [6] 中推导出的著名界（5）。

任意组装空间的组装指数下界和上界（S，$\circ$，BB）可用于

分别推导组装空间复杂度层集的上界和下界（即具有相同组装指数的对象集合）。本文给出的结果可用于推导数值证据，说明组合组装宇宙的增长情况，正如 [13], 所猜想的那样，至少适用于字符串、图、多连方和分子集合。目前这项工作仍在进行中 [23]。

由于通过最优组装加法链刻画的对象中，每个对象都是通过将前驱对象与自身粘合而得到的，例如单色类字符串对象，直观上比大小相同、通过每个对象均由两个不同前驱对象粘合而成的最优组装加法链刻画的对象更具对称性，因此自然可以推测，对象的组装指数 $\mathscr{O}$ 与其对称性 [24], [25] （例如最长重复子串的长度、自同构群的阶等）之间必然存在某种相关性，值得进一步研究。

附录 A

设 $(S,\ \circ,\ BB)$ 为一个组装空间，且 $\mathscr{O} \in S$。对于每个 $C \in AAC(\mathscr{O},\ BB)$，我们可以定义一个有向无环图 $G(C)$，其满足：

（1.）至多有 $s(\mathscr{O})$ 个源点（即入度为零的顶点），每个源点分别对应于集合 $\mathscr{O}$ 中的元素 BB 。

(2.) 一个汇点（即出度为零的顶点只有一个），对应于 $\mathscr{O}$。

(3.) $L(C)$ 个入度为 2 且出度至少为 1 的顶点，它们对应于 C 的元素。

使得当且仅当存在 $\mathscr{U} \in C \cup BB$ 满足以下条件时，从对应对象 $\mathscr{P} \in C \cup BB$ 的顶点到对应对象 $\mathscr{Q} \in C$ 的顶点存在一条有向边

$$\mathscr{Q} \in \{\mathscr{P}\} \circ \{\mathscr{U}\}.$$

对于任意 $\mathscr{O} \in S$，映射 $G:\ AAC(\mathscr{O}, BB) \to DAG$ 都是定义良好的；若记

$$e_+ : DAG(\mathcal{S}; BB) \to \mathbb{Z}^+ \tag{53}$$

将每个有向无环图映射为其正入度顶点数（即不计源点）的函数，则对象 $\mathscr{O} \in S$ 的组装指数为

$$a(\mathscr{O}) = \min(e_+(G(AAC(\mathscr{O}, BB)))). \tag{54}$$

这是数学 在 [9] 中引入的组装指数定义的数学形式化 .

参考文献

[1] H. Altman, 《整数复杂度与良序》，《密歇根数学杂志》，第64卷第3期，第509–538页，2015年。

[2] A. Scholz, 《题目253》, 德国数学家协会年报, 第4卷 7,
第41–42页, 1937年。[3] A. Brauer, 《论加法链》, 《美国数学会通报》, 第45卷, 第10期, 第736–739页, 1939年。[4] P. Erd¨os, 《数论札记iii: 论加法链》, 《算术学报》, 第6卷, 第77–81页, 1960年。[5] K. B. Stolarsky, 《Scholz-Brauer问题的一个下界》, 《加拿大数学杂志》, 第21卷, 第675–683页, 1969年。 DOI: 10.4153/CJM-1969-077-x[6] A. Sch¨onhage, 《加法链长度的一个下界》, 《理论计算机科学》, 第1卷, 第1期, 第1–12页, 1975年, ISSN: 0304-3975。 DOI: https://doi.org/10.1016/0304-3975(75)90008-0 [在线]。可访问: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0304397575900080[7] N. M. Clift, 《计算最优加法链》, 《计算》, 第91卷, 第3期, 第265–284页, 2011年3月, ISSN: 0010-485X。 DOI: 10.1007/s00607-010-0118-8 [在线]。可访问: https://doi.org/10.1007/s00607-010-0118-8[8] E. G. Thurber和N. M. Clift, 《加法链、向量链与高效计算》, 《离散数学》, 第344卷, 第2期, 第112200页, 2021年, ISSN: 0012-365X。DOI: https://doi.org/10.1016/j.disc.2020.112200 [在线]。可访问: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0012365X20303861[9] S. M. Marshall、D. G. Moore、A. R. G. Murray、S. I. Walker和L. Cronin, 《使用组装空间形式化生命路径》, 《熵》, 第24卷, 2022年。 [在线]。可访问: https://api.semanticscholar.org/CorpusID:250132473[10] C. Bergman, 《泛代数: 基础与精选主题》。2011年1月, 第1–299页。[11] S. W. Golomb, 《多格骨牌: 谜题、图案、问题与拼接》, 第2版。普林斯顿大学出版社, 1995年。[12] D. Redelmeier, 《多格骨牌计数: 又一种方法》, 《离散数学》, 第36卷, 第2期, 第191–203页, 1981年, ISSN: 0012-365X。 DOI: https://doi.org/10.1016/0012-365X(81)90237-5 [在线]。可访问: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0012365X81902375[13] A. Sharma、D. Cz´egel、M. Lachmann、C. P. Kempes、S. I. Walker和L. Cronin, 《组装理论解释并量化选择与演化》, 《自然》, 第622卷, 第321–328页, 2023年。 [在线]。可访问: https://api.semanticscholar.org/CorpusID

:

263669990

[14] P. Downey、B. Leong 和 R. Sethi，《用加法链计算序列》，《SIAM计算杂志》，第 10 卷，第 3 期，第 638–646 页，1981 年。 DOI： 10.1137/0210047电子预印本： https://doi.org/10.1137/0210047。 [在线]。可查阅： https://doi.org/10.1137/0210047[15] E. Lehman 和 A. Shelat，《基于语法的数据压缩近似算法》，载于第十三届年度 ACM-SIAM离散算法研讨会论文集，丛书 SODA '02，加利福尼亚州旧金山：工业与应用数学学会，2002 年，第 205–212 页， ISBN：089871513X。[16] E. Lehman，《基于语法的数据压缩近似算法》，麻省理工学院电气工程与计算机科学系，博士论文，2002 年 3 月。[17] C. P. Kempes 等，《组装理论及其与计算复杂性的关系》，npj Complexity，第 2 卷，第 27 期，2025 年 9 月。 [在线]。可查阅： https://doi.org/10.1038/s44260-025-00049-9[18] I. Seet、K. Y. Patarroyo、G. Siebert、S. I. Walker 和 L. Cronin，《分子图组装化学空间的快速探索》，《化学信息与建模杂志》，2025 年，PMID：41353721。 DOI： 10.1021/acs.jcim.5c01964 电子预印本： https://doi.org/10.1021/acs.jcim.5c01964。 [在线]。可查阅： https://doi.org/10.1021/acs.jcim.5c01964[19] S. Lukaszyk 和 W. Bieniawski，《二进制消息的组装理论》，《数学》，第 12 卷，第 10 期，2024 年， ISSN：2227-7390。 DOI： 10.3390/math12101600 [在线]。可查阅： https://www.mdpi.com/2227-7390/12/10/1600[20] S. M. Marshall、A. R. G. Murray 和 L. Cronin，《基于通路复杂性的生物特征识别概率框架》，《英国皇家学会哲学汇刊A辑：数学、物理与工程科学》，第 375 卷，第 2109 期，第 20 160 342 页，2017 年 11 月， ISSN：1364-503X。 DOI： 10.1098/rsta.2016.0342电子预印本： https://royalsocietypublishing.org/rsta/article-pdf/doi/10.1098/rsta.2016.0342/389700/rsta.2016.0342.pdf。 [在线]。可查阅： https://doi.org/10.1098/rsta.2016.0342[21] J. A. Bondy，《图的完美路径双重覆盖》，《图论杂志》，第 14 卷，第 2 期，第 259–272 页，1990 年。[22] A. Kotzig，《三次和四次有限正则图理论札记》，Casopis Pest. Mat，第 82 卷，第 76–92 页，1957 年。[23] J. C. Morales、K. Y. Patarroyo、A. Sharma、D. O. Alobo 和 L. Cronin，《组装理论的界限与化学空间的增长率》，准备中，2025 年。

[24] I. G. Johnston 等人，“对称性和简单性从演化的算法本质中自发涌现”，美国国家科学院院刊，第 119 卷，第 11 期，e2113883119，2022年。

[25] D. Vimal 等人，“组装指数的开放且可复现的计算”，*arXiv* 预印本 *arXiv:2507.08852*，2025年。