arXiv:2512.18058v1 [math.CA] 19 Dec 2025

加博尔变换的 Cheeger 常数与波纹

Rima Alaifari、Ben Pineau、Mitchell A. Taylor 和 Matthias Wellershoff

Abstract. 我们发现了短时傅里叶变换相位恢复的一种新型不稳定机制。该机制表明，对于任意维度 d下任何合理的窗函数 ϕ，通过以下方式定义的局部稳定性常数 $c(f)$

$$\inf_{|\lambda|=1} \|f-\lambda g\|_{M^p(\mathbb{R}^d)} \le c(f)\||V_\phi f|-|V_\phi g|\|_{\mathcal{D}}, \qquad \forall g \in M^p(\mathbb{R}^d),$$

在所有加权分数阶 Sobolev 范数下，除确保问题定义良好的尖锐最大正则性阶数外，该常数在一组稠密向量集上均为无穷大。这尤其回答了 Rathmair 提出的一个开放问题（$LSAA$2024）：加博尔变换在 $\mathbb{R}^2$ 上的指数集中是否能保证局部稳定性常数有限？对于加博尔相位恢复这一特定情形，我们进一步证明，存在与之互补的一个稠密集，使得 $\mathbb{R}^{2d}$ 上的局部稳定性常数有限。特别地，将函数映射到其局部稳定性常数的映射 $f \mapsto c(f)$ 高度不连续。

我们的结果扩展并补充了过去十年间已证明的一系列关于 Gabor 相位恢复的基本稳定性定理。尤其值得注意的是 Grohs 和 Rathmair 的工作（$d=1$ 发表于*Comm. Pure Appl. Math.* 2019 年，$d \ge 1$发表于*J. Eur. Math. Soc.* 2022 年）：他们证明，对于 $\mathbb{R}^{2d}$ 上足够强的加权 Sobolev 范数 $\mathcal{D}$，Gabor 相位恢复的局部稳定性常数由与 $|V_\phi f|$ 共形相乘的平坦度量的 Cheeger 常数的倒数界定。作为我们分析的结果，我们确定了两个稠密的函数族，其中一个的相应 Cheeger 常数为零，另一个的 Cheeger 常数严格为正。我们还重新研究了时频平面有界子集上的短时傅里叶变换相位恢复问题，并将研究推广到更一般的窗函数和受限信号类，从而扩展并简化了文献中的许多重要结果。

1. Introduction

傅里叶相位恢复是信号处理和计算成像中的一个基本问题，其目标是根据图像的傅里叶幅值测量值 $|\mathcal{F}f|$ 重建图像 f。这一问题经常出现在晶体学中：人们希望通过向物体发射一束 X 射线并测量相应的衍射图样来确定样本的结构。从数学上讲，若将我们希望观测的图像记为 f，那么探测器记录的是 $|\mathcal{F}f|^2$，即 f 的傅里叶变换的模平方。因此，我们的任务就是从 $|\mathcal{F}f|$ 中恢复 f，并忽略物理上无关的歧义。

由于傅里叶相位恢复问题通常极度病态，研究者一直在探索不同的实验设置，以减少尝试从测量算子作用于 f 后所得模平方中重建函数 f 时所存在的歧义。在叠层成像中，会在样品前放置一个掩模 ϕ，这样探测器测量的便是 $|\mathcal{F}(f\phi)|^2$。随后平移掩模并重复实验，从而得到一族测量值 $|\mathcal{F}(fT_x\phi)|^2$，其中 T_x 表示平移 x。采用这种改进实验设置的理由是

日期：2025年12月23日。

它引入了额外的冗余，有助于在尝试恢复真实信号 f 时排除可能存在的歧义。从数学上看，这种新设置明确揭示了相位恢复问题与时频分析领域之间的联系，而这正是我们将在下文分析中加以利用的。

给定一个窗函数 $\phi \in L^2(\mathbf{R}^d)$，回顾一下，短时傅里叶变换 $V_\phi: L^2(\mathbf{R}^d) \to L^2(\mathbf{R}^{2d})$ 定义为

$$V_\phi f(x,\omega) = \mathcal{F}(T_x\overline{\phi} f)(\omega) = \int_{\mathbb{R}^d} f(t)\overline{\phi(t-x)}e^{-2\pi i t\cdot\omega}dt, \quad \text{for } x,\omega \in \mathbb{R}^d. \tag{1}$$

容易看出，$\|V_\phi f\|_{L^2(\mathbb{R}^{2d})} = \|\phi\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}$。特别地，对于任意非平凡窗函数 ϕ，都可以从 $V_\phi f$ 稳定地重构 f。短时傅里叶变换相位恢复的核心问题，是如何从无相位测量 $|V_\phi f|^2$中稳定地重构 f。为精确表述这一问题，首先注意，对于任意模为一的标量 λ，都有 $|V_\phi f|^2 = |V_\phi(\lambda f)|^2$。因此，无法根据无相位短时傅里叶变换测量区分$f$ 和 λf。幸运的是，这不会妨碍恢复 f，因为全局相位没有物理意义。因此，我们定义等价关系$f \sim g$：若存在某个模为一的标量 λ使得 $f = \lambda g$，则二者等价。短时傅里叶变换相位恢复的目标，是确定哪些情形下这是唯一的歧义，也就是说，何时可以从 $|V_\phi f|$恢复等价类$[f]$。在 ϕ为高斯函数这一特殊情形下，我们将(1)称为加博尔变换 $\mathcal{G} = V_\phi$，并将从 $|\mathcal{G}f|$ 恢复 $[f]$ 称为加博尔相位恢复。

在代数层面上，有一种标准方法可以判断算子 V_ϕ是否能够实现相位恢复。事实上，回顾一下，平方可积信号 f的模糊函数 $\mathcal{A}f$ 定义为 $\mathcal{A}f(x,\ \omega) := e^{\pi i x\cdot\omega}V_f f(x,\ \omega)$。众所周知，$\mathcal{A}f$是一个连续函数，它可以在全局相位意义下确定 f。此外，我们有如下关系

$$\mathcal{F}\left(|V_\phi f|^2\right)(\omega,-x) = \mathcal{A}f(x,\omega)\overline{\mathcal{A}\phi(x,\omega)}$$

模糊函数与无相位短时傅里叶变换之间。由此恒等式容易看出，只要 $\mathcal{A}\phi$ 不发生过多的零点，我们就可以从 $|V_\phi f|^2$恢复 $\mathcal{A}f$（进而恢复 $[f]$）。特别是，由于 d维高斯函数的模糊函数是 $2d$ 维高斯函数，且每个厄米特函数的模糊函数只在圆周上为零，因此存在许多窗函数，使得短时傅里叶变换相位恢复能够在整个 $L^2(\mathbf{R})$ 上实现。

尽管模糊函数关系提供了一种从 $|V_\phi f|^2$重建 f 的方法，但这种方法出了名地不稳定，因为它需要除以窗函数的模糊函数，而后者总是在无穷远处衰减，并且可能还有许多其他零点。为了衡量在全局相位意义下从 $|V_\phi f|$ 恢复 f 的局部稳定性，我们作如下非正式定义。

定义 1. 固定一个窗函数 ϕ、两个范数 $\mathcal{M}$ 和 $\mathcal{N}$ 以及一个函数类 E，该函数类满足性质 $\|h\|_{\mathcal{N}}, \||V_\phi h|\|_{\mathcal{M}} < \infty$，对所有 $h \in E$均成立。若存在常数 $C(f) < \infty$，使得对所有 $g \in E$ 均有，我们称 V_ϕ在 $f \in E$ 处实现$(\mathcal{M},\mathcal{N},E)$-局部稳定相位恢复。

$$\inf_{|\lambda|=1} \|f-\lambda g\|_{\mathcal{N}} \le C(f)\||V_\phi f| - |V_\phi g|\|_{\mathcal{M}}.$$

当 E 是所有使上述量有限的函数的集合时，我们将简称为在 f处的 $\mathcal{M} \to \mathcal{N}$ 稳定性。

为使定义 1 更为明确，我们需要指定范数 $\mathcal{M}$和 $\mathcal{N}$，以及 g 所遍历的信号容许类 E。鉴于关系 $\|V_\phi f\|_{L^2(\mathbb{R}^{2d})} = \|\phi\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}$，最自然的范数选择应为 $\mathcal{M} = L^2(\mathbb{R}^{2d})$ 和 $\mathcal{N} = L^2(\mathbb{R}^d)$。然而，近期一项一般性结果 [4] 指出，对于无限维希尔伯特空间上的任意离散或连续框架，具有无限 L^2稳定性常数的函数集合是稠密的。特别地，对于任意无限维闭子空间 $E \subseteq L^2(\mathbb{R}^d)$，具有 无限($L^2(\mathbb{R}^{2d})$，$L^2(\mathbb{R}^d)$，$E$)-局部稳定性常数的函数集合在 E中稠密。

既然不存在可施加的线性先验 E 来避免 L^2-范数中的大量不稳定性，我们便转而沿着 Grohs 和 Rathmair [18, 19],开创的研究方向继续探索。他们指出，若对 $\mathcal{M}$ 使用加权 Sobolev 范数，并对 $\mathcal{N}$ 使用适当的调制范数，就有可能恢复局部稳定性。

1.1. 历史。 无限维空间中的相位恢复稳定性问题，始于 Cahill-Casazza-Daubechies [8] 的一项颇具影响力的研究。他们证明，使用框架进行相位恢复总是不稳定的。为准确表述这一点，设 $T : \mathcal{H} \to L^2(\mu)$ 是一个从希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 到 $L^2(\mu)$ 的算子。如果存在常数$C(f) < \infty$，使得对所有 $g \in \mathcal{H}$，都有.....那么我们称 T 在 $f \in \mathcal{H}$ 处具有稳定相位恢复。

$$\inf_{|\lambda|=1} \|f - \lambda g\|_{\mathcal{H}} \leq C(f)\||Tf| - |Tg|\|_{L^2(\mu)}. \tag{2}$$

Cahill-Casazza-Daubechies [8] 的结果表明，只要 T 是离散框架的分析算子且 dim $\mathcal{H} = \infty$，那么 $\sup_{f\in\mathcal{H}} C(f) = \infty.$。后来，A. 和 Grohs [3], 扩展了这一结果，他们证明，只要离散或连续框架能够实现相位恢复，恢复映射就总是连续的，但不是一致连续的。事实上，最近有研究表明 [4]，对于定义在无限维希尔伯特空间上的任意离散或连续框架 $T : \mathcal{H} \to L^2(\mu)$，我们有 $C(f) = \infty$，对于 $f \in \mathcal{H}$的稠密集合成立。

在上述否定性结果之后，出现了几条彼此不同的研究路线。其中一个由 Calderbank-Daubechies-Freeman-Freeman [9] 开创的重要方向表明，对于许多有趣的算子 T，在无限维空间中实现稳定相位恢复是可能的，而这些算子并非源自某个框架的分析算子。最值得注意的是，通过 Christ-P.-T. [11]和 Freeman-Oikhberg-P.-T. [12], 的共同努力，人们构造出了 $L^2(\mathbb{R}^d)$ 的无限维子空间 E，使得算子 $T := \mathcal{F}|_E : E \to L^2(\mathbb{R}^d)$ 满足 (2)，且 $\sup_{f\in E} C(f) < \infty.$。这促成了一条全新且令人振奋的研究路线，该路线运用调和分析、概率论和 Banach 格的几何中的技术，构造出许多相关情形，使得相位信息能够以稳定的方式得到恢复。

第二条主要研究路线着眼于更深入地理解特定结构化框架（如短时傅里叶变换或小波变换）中框架相位恢复所固有的不稳定性。这促成了定义 1 中稳定相位恢复概念的提出，其中现在可以额外自由选择范数 $\mathcal{M}$ 和 $\mathcal{N}$，以及 g 所遍历的信号类别。该方向上的第一个重大成果归功于 A.、Daubechies、Grohs 和 Yin[2], ，他们证明了限制在有界区域 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ 上的 Gabor 相位恢复是 H^1-稳定的。更具体地说，当 ϕ 为高斯函数时，对于任意函数 $f \in L^2(\mathbb{R})$以及任意一般

bou有界区域 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$，存在有限常数 $C = C(f,\Omega)$，使得 t

$$\inf_{|\lambda|=1} \|\mathcal{G}f - \lambda \mathcal{G}g\|_{L^2(\Omega)} \leq C(f,\Omega) \| |\mathcal{G}f| - |\mathcal{G}g| \|_{H^1(\Omega)} \quad \text{for all } g \in L^2(\mathbb{R}). \tag{3}$$

请注意，用定义 1 的语言来说，上述结果对应于 $\mathcal{M} = H^1(\Omega)$ 的情形，而 $\mathcal{N}$ 是受限调制范数 $\|f\|_{\mathcal{N}} = \|\mathcal{G}f\|_{L^2(\Omega)}$。由于 Gabor 变换像中的函数（除去平凡因子）是全纯的，$\mathcal{N}$ 确实是一个范数。此外，根据 (3)，我们能够从 Ω 上的 $|\mathcal{G}f|$ 恢复 $\mathcal{G}f$；而解析性又能唯一确定 f。然而请注意，不等式 (3) 并不与上述关于 Gabor 相位恢复的不稳定性定理相矛盾，原因有三。首先，我们采用的是 H^1 范数，而非 L^2 范数。其次，解析延拓的不稳定性使我们无法从 $\mathcal{G}f|_\Omega$ 稳定地重构 $\mathcal{G}f$；第三，常数 $C(f,\ \Omega)$ 可能会随着 Ω 增大而趋于零。

受上述结果启发，Grohs 和 Rathmair 发表了两篇备受赞誉的论文 [18, 19]，证明只要允许足够大的正则性损失，Gabor 相位恢复的局部稳定性常数就可以由经 $|V_\phi f|$ 共形缩放后的平坦度量的 Cheeger 常数的倒数界定。更具体地说，他们推导出了如下形式的不等式：

$$\inf_{|\lambda|=1} \|f - \lambda g\|_{\mathcal{M}^1} \lesssim \left(1 + \frac{1}{h(f)}\right) \| |\mathcal{G}f| - |\mathcal{G}g| \|_{\mathcal{M}(f)} \quad \text{for all } g \in \mathcal{M}^1. \tag{4}$$

这里，$\mathcal{M}^1$ 表示基于 L^1 的调制范数，$h(f)$ 表示针对 $|\mathcal{G}f|$ 调整的适当 Cheeger 常数，而 $\mathcal{M}(f)$ 表示一种加权一阶索博列夫范数，它以一种我们将在下文具体说明的方式依赖于 f。(4) 的核心观点是，通过引入更复杂的范数并允许正则性损失，或许能够克服 Gabor 相位恢复中的不稳定性。特别是，[18, 19] 中指出，计算 Cheeger 常数在计算上应该是可行的。事实上，Rathmair 在 2024 年于马德里 ICMAT 举行的研究学期期间讲座中提出了以下猜想（如需查看幻灯片和猜想，请参见 [23]）。

猜想 2. 设 $f \in L^2(\mathbb{R})$ 满足其加博尔变换 $\mathcal{G}f$ 指数集中，即存在 $\epsilon > 0$ 使得 $|\mathcal{G}f|e^{\epsilon|z|} \in L^2(\mathbb{R}^2)$。那么，$f$ 的局部稳定性和 ***Cheeger*** 常数应当有限且非零。

我们指出，尽管上述猜想表明，“大多数”良好局部化的信号应具有有限的稳定性常数，但只有在 f 为高斯函数时，[18, 19] 才给出了 $h(f)$ 的明确估计。

要理解不等式 (4) 的重要性，我们必须回顾相位恢复中的不稳定性的主要来源。相位恢复问题（以及其他各种重要的逆问题，见 [1, 10, 13, 15, 16]）可以在巴拿赫格的一般框架下定义，该框架还对实数 稳定相位恢复给出了完整而简明的刻画。

回想一下，向量格是一个向量空间 X，配备了与线性运算相容的偏序 $\leq$，并且满足以下条件：$|f| := f \vee (-f) := \sup\{f, -f\}$ 对所有$f \in X$均存在。***Banach*** 格是同时也是 Banach空间且满足相容条件的向量格

$$|f| \leq |g| \quad \Longrightarrow \quad \|f\| \leq \|g\|.$$

容易看出，对于任意测度 μ和紧 Hausdorff 空间 K， $L^p(\mu)$和 $C(K)$在逐点（几乎处处）偏序下都是 Banach 格。另一方面，Sobolev 空间 $W^{1,\,p}$ 在此偏序下不是 Banach 格。我们称 Banach 格 X 的子空间 E 在 $f \in E$ 处满足 C-局部稳定相位恢复（*SPR*），如果对所有 $g \in E$ 都有

$$\inf_{|\lambda|=1} \|f - \lambda g\| \le C\||f| - |g|\|.$$

注意，上述定义推广了式 (2) 中的情形，后者是 $E := T(\mathcal{H}) \subseteq L^2(\mu)$ 这一特例。对 [5, 命题 3.4] 的证明稍作修改，即可得到以下定理（注意， $f \wedge g := \inf\{f, g\}$）。

定理 3. 设 E 是实 *Banach* 格 X 的子空间，且 $f \in E$。对于常数 $C < \infty$，以下条件等价。

1. 在 $f \in E$处成立 C-局部稳定相位恢复。 *2.* 不存在满足 $f = g + h$ 和 $\||g| \wedge |h|\| < \frac{1}{C}\|g\| \wedge \|h\|$的函数 g、 $h \in E$。

上述定理表明，在 f 处出现实相位恢复不稳定，当且仅当 f 可划分为两个彼此“几乎不交”的部分，也就是说，信号 f 几乎是不连通的。回到加博尔相位恢复，*Cheeger* 常数 是衡量 $\mathcal{G}f$ “不连通性”的另一种方式，定义如下

$$h(f) := \inf \frac{\|\mathcal{G}f\|_{L^1(\partial C)}}{\|\mathcal{G}f\|_{L^1(C)}},$$

其中，下确界取遍所有满足以下条件且边界光滑的开域 $C \subseteq \mathbb{R}^2$

$$\int_C |\mathcal{G}f| \le \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} |\mathcal{G}f|.$$

结合上述讨论，可以非正式地将 (4) 理解为：加博尔相位恢复中不稳定性的唯一来源是“不连通测量”。注意，(4) 并非定理 3 的直接推论，因为加博尔相位恢复是一个复数 相位恢复问题，而定理 3 仅适用于实数情形（即符号恢复问题）。此外，(4) 涉及的范数并非 Banach 格范数，并且会导致正则性损失。最后，我们指出，尽管 Cheeger 常数也量化了“不连通性”，但它并不能直接给出加博尔变换像中的函数 g, h ，而这些函数是要在定理 3 中得到不稳定性所必需的。具体而言，尽管 (4) 证明 Cheeger 常数是适当局部稳定性常数的上界，但它似乎并未声称 Cheeger 常数也从下方界定该局部稳定性常数。

1.2. **主要结果**。 现在概述我们的主要结果。第一个结果表明，无论施加多少正则性或衰减，都无法克服短时傅里叶变换相位恢复固有的不稳定性。特别地，对于稠密集的 f， $h(f)$ 为无穷大，且猜想 2 是错误的。

定理 4 （短时傅里叶变换相位恢复的稠密不稳定性）。固定 $p, q \in [1, \infty)$，$0 \le s < 1 + \frac{1}{p}$，$r > 0$ 以及一个窗函数 ϕ。假设 $f \neq 0$满足$\|V_\phi f\|_{W^{s',2r}\,^p \cap L^q(\mathbb{R}^{2d})} < \infty$，其中某个 $s' > s$。那么对于任意 $\epsilon > 0$，存在一个函数 f_ϵ，使得$\|V_\phi f - V_\phi f_\epsilon\|_{W^{s',r}\;^p \cap L^q(\mathbb{R}^{2d})} < \epsilon$，且 V_ϕ 不成立

执行 $W^{s,r}{}^{p} \to L^q$ 在 f_ϵ处稳定相位恢复：不存在有限常数 $C(f_\epsilon)$ 使得 t

$$\inf_{|\lambda|=1} \|V_\phi f_\epsilon - \lambda V_\phi g\|_{L^q(\mathbb{R}^{2d})} \leq C(f_\epsilon) \| |V_\phi f_\epsilon| - |V_\phi g| \|_{W_r^{s,p}(\mathbb{R}^{2d})} \tag{5}$$

对所有 g 满足 $\|V_\phi g\|_{W^{s,r}{}^{p} \cap L^q(\mathbb{R}^{2d})} < \infty$.

注 5. 稳定相位恢复的定义要求存在利普希茨型恢复。然而，我们的证明将排除恢复映射具有任何形式的局部连续模。

注 *6.* 对于一般的窗函数 ϕ，目前尚不清楚 V_ϕ 像中的函数具有什么正则性。当然，如果 $\phi \in L^2(R^d)$，那么 $V_\phi : L^2(R^d) \to L^2(R^{2d})$，并且可以构造一个稠密集，其中的函数具有无限的 L^2-稳定性常数。此外，如果 ϕ 是 *Schwartz* 函数，那么短时傅里叶变换 V_ϕ将 *Schwartz* 函数映射为 *Schwartz* 函数，因此定理 *4* 将给出一个稠密的函数集，即使存在正则性损失，这些函数也不具有局部稳定相位恢复。此外，在加博尔相位恢复的情形下，我们的证明将构造一个 *Cheeger* 常数为零的稠密函数族。另一方面，如果 ϕ 较为粗糙，那么原则上没有理由期待 $V_\phi f$具有任何光滑性；因此，我们将定理 *4* 表述为：只要 $V_\phi f$ 具有某种正则性，我们就能在该正则性层级上构造不稳定性，并使 V_ϕ 像中的向量任意接近 $V_\phi f$。由于我们对 V_ϕ像中包含哪些函数所知甚少，这个证明利用短时傅里叶变换的对称性来产生不稳定性；特别是，我们必须选择在短时傅里叶变换的对称性下不变的 E 。不过，这并非绝对必要。例如，我们将概述如何证明：对于任意无限维闭子空间 $E \subseteq L^2(R)$，总存在一个稠密集，其中的函数在加博尔相位恢复下具有无限的 $(H^1(R^2), L^2(R) E)$-稳定性常数。特别是，无论是正则性损失，还是对信号类 E 施加任何先验限制（只要它是无限维向量空间），都无法消除 R^2上的加博尔相位恢复中的不稳定性。

定理 4 与 Grohs 和 Rathmair 在 [18, 19], 中的主要结果一致，因为后者是有条件的：如果 $|\mathcal{G}f|$连通性良好，那么 f便能在某些范数下实现局部稳定相位恢复。然而，据我们所知，文献中唯一一个非平凡的例子是高斯函数，它满足 $h(f) \in (0, \infty)$；因此，人们并不清楚形如 $|\mathcal{G}f|$ 的函数在多大程度上确实“连通性良好”。另一方面，定理 3 及其变体已成功应用于短时傅里叶变换相位恢复领域之外，构造出能够实现稳定相位恢复的无限维 Banach 格子子空间，且其稳定性常数与 f [9, 11, 12]无关。也就是说，在短时傅里叶变换相位恢复领域之外，实际上可以构造实子空间和复子空间，使得其中所有归一化函数都“显著重叠”，并且事实上 $\sup_{f \in E} C(f) < \infty$。

我们的下一个主要结果表明，对于 Gabor 相位恢复这一特定情形，我们实际上在稠密集上也具有稳定性！

定理 7。 存在一个 f 的稠密集，使得 *Gabor* 相位恢复在 H^1-范数下的局部稳定性常数以及与 f 相关的 *Cheeger* 常数均为有限且非零。更具体地，令 $E = \{f \in L^2(\mathbb{R}) : \mathcal{G}f \in H^1(\mathbb{R}^2)\}$. 那么对于 $f \in E$ 的一个稠密集，存在常数 $C(f) < \infty$，使得对所有 $g \in E$，我们都有

$$\inf_{|\lambda|=1} \|f - \lambda g\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq C(f) \| |\mathcal{G}f| - |\mathcal{G}g| \|_{H^1(\mathbb{R}^2)}.$$

注 8. *Gabor* 相位恢复的稳定性也可以部分推广到其他窗函数；我们将在下文对此作更详细的说明。

我们为短时傅里叶变换相位恢复引入的不稳定性构造机制，是在 f 上附加一列“无穷远处”的波纹，同时确保仍处于短时傅里叶变换的像空间内。这会导致局部稳定性常数趋于无穷大，进而使 Cheeger 常数趋于零。我们指出，从某种意义上说，这种不稳定性的根源在于数学模型，而非物理学。更准确地说，上文定义的 Cheeger 常数对整个时频平面一视同仁，而实际应用者只能在时频平面的某个紧子集上进行测量。特别是，“无穷远处”的不稳定性与物理实验无关。作为本文的结尾，我们回到这样一个问题：“无穷远处”的不稳定性是否是唯一的 不稳定性来源；我们将证明确实如此，即使不存在正则性损失也是如此。具体而言，我们将重新考察不等式 (3)，该不等式在有界区域上建立了 $H^1(\Omega)$ 到 $L^2(\Omega)$ 的稳定性，并引入一个额外的思路来消除导数损失。

2. Instability: A dense set with infinite local stability constant

本节的目标是证明，短时傅里叶变换相位恢复中的不稳定性不可避免，即使施加正则性和衰减损失也是如此。我们将首先证明，对信号施加任何程度的定性集中假设都无法恢复稳定性；随后，我们将进一步加强这一结果，使其同时涉及正则性和衰减损失。

我们通过以下方式在 $(\mathbb{R}^n,\ d\mu)$ 上定义加权 Sobolev 范数

$$\|f\|_{W^{s,p}_r(\mathbb{R}^n,d\mu)} := \|\langle x\rangle^r f\|_{L^p(\mathbb{R}^n,d\mu)} + \|\langle D_x\rangle^s f\|_{L^p(\mathbb{R}^n,d\mu)}. \tag{6}$$

当测度为勒贝格测度时，我们将在记号中省略它。我们回顾一个非平凡事实：[6, 7, 20, 21] 映射 $f \mapsto |f|$ 在 $W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ 上有界（即$\||f|\|_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)} \lesssim \|f\|_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)}$），当且仅当 $s < 1+\frac{1}{p}$。这将作为下文自然的正则性阈值。

为陈述我们的第一个结果，我们固定一个特定的 $\sigma \geq 0$。我们用 $X^p_\sigma \subseteq L^p_\sigma$ 表示 L^p_σ 的一个闭子空间，它在平移下封闭，并赋有诱导范数

$$\|f\|_{X^p_\sigma} := \|\langle x\rangle^\sigma f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}.$$

采用这一记号，我们可以陈述以下一般性不稳定性结果 .

命题 9。设 $\sigma \geq 0$，并设 $1 \leq p < \infty$ 和 $1 \leq q \leq \infty$。设 X^p_σ 是上述定义的 L^p_σ 的一个非空闭子空间。固定一个非零的 $h \in X^p_\sigma$，并满足衰减假设 $h \in L^p_{2\sigma} \cap L^q_\sigma$。那么，对每个 $\delta > 0$，都存在 $k \in X^p_\sigma \cap L^q$，使得

$$\|h-k\|_{X^p_\sigma \cap L^q} < \delta \tag{7}$$

且 $X^p_\sigma \to L^q$ k 的 ***SPR*** 常数为无穷大。更确切地说，存在一个函数序列$k_n \in X^p_\sigma \cap L^q$ 和一个实数递增序列 $a_n \to \infty$，使得 $k_n \to k$ 属于 $X^p_\sigma \cap L^q$，并且对于足够大的 n，

$$\inf_{|\lambda|=1} \|k - \lambda k_n\|_{L^q} > a_n \||k| - |k_n|\|_{X^p_\sigma}. \tag{8}$$

证明。 在下面的证明中，我们假设 h 在原点处有一些质量，即

$$\min(\|h\|_{L^p(B)}, \|h\|_{L^q(B)}) = 1, \tag{9}$$

其中， B 是 R^d 中的单位球。如果情况并非如此，可以围绕h 具有质量的某个点调整证明。我们定义一族互不相交的环域 $A_n := \{j_n \le |x| \le 2j_n\}$，其中 $j_n \ge 1$ 是一个待选取的递增整数序列。我们采用以下记号：

$$\|f\|_{X(A_n)} := \|\chi_{A_n} f\|_{X^p_\sigma},\ n \in \mathbb{N}, \quad \|f\|_{X_{\ge n}} := \|\chi_{|x|\ge \frac{j_n}{2}} f\|_{X^p_\sigma},$$

其中 χ_S 表示 S的示性函数。我们还将使用记号 $\|\cdot\|_{L^q(A_n)}$ 以及 $\|\cdot\|_{L^q_{\ge n}}$，它们的定义与上述类似。于是，我们可以将 j_n 取足够大，使得环域A_n 两两不相交，并且有

$$\|h\|_{X(A_n)\cap L^q(A_n)} \le \|h\|_{X_{\ge n}\cap L^q_{\ge n}} \le 2^{-3n}\langle j_n\rangle^{-\sigma}. \tag{10}$$

上文中， $\langle j_n\rangle^\sigma$ 表示 ⟨(j_n<style id='4', 0<style id='6', …, 0)⟩$^\sigma$。注意，(10)保证h 的大部分 $X^p_\sigma \cap L^q$ 质量都位于球 $B(0, \frac{j_n}{2})$内。上界 (10) 中出现因子 $\langle j_n\rangle^{-\sigma}$，是因为假设 $h \in X^p_{2\sigma}\cap L^q_\sigma$。因子 2^{-3n} 则来自将 j_n 取足够大，以确保

$$\|h\chi_{|x|\ge \frac{j_n}{2}}\|_{X^p_{2\sigma}\cap L^q_\sigma} \le 2^{-3n}.$$

因此，特别是， j_n 相对于 2^{3n}可能会非常大。

现在我们定义函数序列 ϵ_n 如下：

$$\epsilon_n = \frac{2^{-n}}{\langle j_n\rangle^\sigma}\tau_{\frac{3}{2}j_n} h$$

其中， τ_n 表示沿 x_1 方向平移 n 。证明不稳定性所需的 ϵ_n 的主要界由下述引理给出。

L引理 10. 通过使 j_n 增长得足够快，序列 ϵ_n 满足界（*1*）（全局上界）。我们有

$$\|\epsilon_n\|_{X^p_\sigma\cap L^q} \lesssim_\sigma 2^{-n}\|h\|_{X^p_\sigma\cap L^q}, \quad \|\epsilon_n\|_{L^q\cap L^p} = 2^{-n}\langle j_n\rangle^{-\sigma}\|h\|_{L^q\cap L^p}. \tag{11}$$

（*2*）（ A_n上的质量集中界）。我们有

$$\|\epsilon_n\|_{L^q(A_n)} \ge 2^{-n}\langle j_n\rangle^{-\sigma}. \tag{12}$$

(3) (*M* 在 A_n 外的尾部界）。令A_n^c 表示 A_n的补集。于是

$$\|\epsilon_n\|_{X(A_n^c)} \lesssim_\sigma 2^{-4n}\langle j_n\rangle^{-\sigma}. \tag{13}$$

(4)（小重叠界）。我们有

$$\sup_{1\le j<n} \|\epsilon_j\|_{X(A_n)} \lesssim_\sigma 2^{-3n}\langle j_n\rangle^{-\sigma}. \tag{14}$$

上述隐式常数是普适的（即它们不依赖于 n、 h 或 ϵ_n）。

注 11。 上述引理实质上说明， ϵ_n 在 $X^p_\sigma\cap L^q$ 中的大小为 2^{-n}，并且几乎不交（即它们的 X 质量中除去 $\langle j_n\rangle^{-\sigma}2^{-3n}$ 这一因子之外，全部集中在 A_n中）。此外， ϵ_n 与 h也几乎不交。

我们将此引理的证明推迟到最后，先说明命题 9 如何推出。

引理 *10* 推出命题 *9* 的证明。固定 $0<\delta<1$。我们将证明，在式 (8) 中可以取 $a_n=2^n$（但这并非关键）。定义 $k:=c_n+b_n$ 和 $k_n:=c_n-b_n$ 会更方便，其中 c_n 和 b_n 是由下式给出的一列函数：

$$c_n=h+\delta\sum_{j\le n}\epsilon_j$$

and

$$b_n=\delta\sum_{j>n}\epsilon_j.$$

若 δ 足够小，则由 (11) 及几何级数求和可得

$$\|h-k\|_{X^p_\sigma\cap L^q}\lesssim_{\|h\|_{X^p_\sigma\cap L^q}}\delta.$$

此外，显然当 $n\to\infty$时， $k_n\to k$ 属于 $X^p_\sigma\cap L^q$。还需证明 (8)。为此，我们令 $\lambda\in\mathbb{C}$，且 $|\lambda|=1$。首先断言，当 n足够大时，关于 λ 有如下统一界

$$\|k-\lambda k_n\|_{L^q}=\|(1-\lambda)c_n+(1+\lambda)b_n\|_{L^q}\gtrsim_\sigma\delta 2^{-n}\langle j_{n+1}\rangle^{-\sigma}. \tag{15}$$

为说明这一点，我们分别考虑 $|\lambda-1|\ge\frac{1}{2}$ 和 $|\lambda-1|<\frac{1}{2}$ 的情形。在第一种情形下，当 δ 足够小时，有

$$\|k-\lambda k_n\|_{L^q}\ge\frac{1}{2}\|h\|_{L^q}-2\delta\sum_{j\ge1}\|\epsilon_j\|_{L^q}\gtrsim\|h\|_{L^q},$$

这里用到了三角不等式和 (11)。对于较大的 n，这已足够。若$|\lambda-1|<\frac{1}{2}$，则有

$$\|k-\lambda k_n\|_{L^q(\mathbb{R}^d)}\ge\|k-\lambda k_n\|_{L^q(A_{n+1})}\ge\delta\|\epsilon_{n+1}\|_{L^q(A_{n+1})}-2\|h\|_{L^q(A_{n+1})}-2\delta\sum_{j\ne n+1}\|\epsilon_j\|_{L^q(A_{n+1})}$$

由 (10)、(12)、(13) 和 (14)，其下界为 $\delta 2^{-n}\langle j_{n+1}\rangle^{-\sigma}$ （若 n足够大）。这就得到了 (15)。另一方面，我们有

$$\||k|-|k_n|\|_{X^p_\sigma}=\||c_n+b_n|-|c_n-b_n|\|_{X^p_\sigma}\le 2\|b_n\|_{X(\cap_{j>n}A_j^c)}+2\sum_{j>n}\|c_n\|_{X(A_j)}.$$

通过几何级数求和 2^{-3n} 并利用 (13)，不难看出第一项满足

$$\|b_n\|_{X(\cap_{j>n}A_j^c)}\lesssim_\sigma\langle j_{n+1}\rangle^{-\sigma}2^{-4n},$$

而第二项满足

$$2\sum_{j>n}\|c_n\|_{X(A_j)}\le 2\sum_{j>n}\|h\|_{X(A_j)}+2\sum_{j>n}\sum_{k\le n}\|\epsilon_k\|_{X(A_j)}.$$

利用 (10)，上式中的第一项可估计为

$$2\sum_{j>n}\|h\|_{X(A_j)}\lesssim 2^{-3n}\langle j_{n+1}\rangle^{-\sigma}.$$

利用小重叠界 (14)，第二项满足以下界：

$$2\sum_{j>n}\sum_{k\le n}\|\epsilon_k\|_{X(A_j)}\lesssim_\sigma\langle j_{n+1}\rangle^{-\sigma}\sum_{j>n}2^{-2j}\le\langle j_{n+1}\rangle^{-\sigma}2^{-2n}.$$

By 将此界与 (15) 结合，我们得到 (8)。证明至此完成。 □

接下来只需证明引理 10。

证明。 下面，我们将在整个证明中使用 $\langle x+y\rangle \lesssim \langle x\rangle\langle y\rangle$ 对于 x， $y \in \mathbf{R}^d$。首先注意到

$$\|\epsilon_n\|_{X^p_\sigma} = 2^{-n}\langle j_n\rangle^{-\sigma}\|\langle x+3j_n/2\rangle^\sigma \cdot h\|_{L^p} \lesssim_\sigma 2^{-n}\left(\frac{\langle 3j_n/2\rangle}{\langle j_n\rangle}\right)^\sigma \cdot \|h\|_{X^p_\sigma} \lesssim_\sigma 2^{-n}\|h\|_{X^p_\sigma}.$$

因此，等式 (11) 由 Lebesgue 范数的平移不变性得出。现在继续讨论界 (12)。为此，只需注意到，通过平移进行变量代换并利用 (9)，我们有

$$\|\epsilon_n\|_{L^q(A_n)} = \frac{2^{-n}}{\langle j_n\rangle^\sigma}\|\tau_{\frac{3}{2}j_n}h\|_{L^q(A_n)} \geq \frac{2^{-n}}{\langle j_n\rangle^\sigma}\|h\|_{L^q(B)} \geq \frac{2^{-n}}{\langle j_n\rangle^\sigma},$$

其中，在倒数第二个不等式中，我们使用了 $A_n + \frac{3}{2}j_n e_1$ 包含单位球这一事实。对于等式 (13) 和 (14)，我们只需将上述关于等式 (11) 的论证重新应用于包含关系 $A_n^c - 3j_n/2 \subset B(0, j_n/2)^c$ 和 $A_n - 3j_\ell/2 \subset B(0, j_n/2)^c$ 对于 $\ell < n$ （以及等式 (10)）。□

固定一个窗函数 $\phi \neq 0$。短时傅里叶变换的基本协变性 指出，对于所有 x、u、ω、$\eta \in \mathbf{R}^d$，我们有

$$V_\phi(T_u M_\eta f)(x,\omega) = e^{-2\pi i u\cdot\omega} V_\phi f(x-u, \omega-\eta), \tag{16}$$

其中， T_u 表示平移 u， M_η 表示调制 η。这为应用命题 9 提供了所需的不变性。为了证明定理 4，我们现在必须纳入导数损失。

定理 *4* 的证明。 鉴于命题 9，接下来只需处理正则性损失，我们将借助拟微分演算中的技巧来克服这一问题。事实上，下面的论证将使我们能够以相对简单的方式，从最高阶导数范数过渡到低阶范数。

固定定理 4 中的 $V_\phi f$，并取 $\varepsilon > 0$。利用短时傅里叶变换的协变性以及命题 9 中的构造，我们可以构造出定理 4 中的函数 $V_\phi f_\epsilon$，以及一列函数 $V_\phi f_{\epsilon,k}$，它们在 $V_\phi f_\epsilon$ 处见证了不稳定性。粗略地说， $V_\phi f_\epsilon$ 将具有如下形式

$$V_\phi f_\epsilon = V_\phi f + \sum_{n=1}^\infty \epsilon_n T_{a_n} V_\phi f, \tag{17}$$

其中 (ϵ_n) 是一列较小的正数，(a_n) 是一列经过精心选取的正数，而对于 $a > 0$, $T_a V_\phi f(x,\omega) = V_\phi f(x, \omega_1 - a, \omega_2, \ldots, \omega_d)$ 是由第一坐标上的调制所诱导的平移对称性。$V_\phi f_{\epsilon,k}$ 则通过在第 k 个凸起之后翻转符号得到。

固定 j，并令 P_j 表示频率 2^j 处的标准 Littlewood-Paley 投影（关于下文所用的基本 Littlewood-Paley 理论，参见附录 A] ）。采用上述记号，我们写作

$$|V_\phi f_{\epsilon,k}| - |V_\phi f_\epsilon| = P_{<j}\left(|V_\phi f_{\epsilon,k}| - |V_\phi f_\epsilon|\right) + P_{\geq j}\left(|V_\phi f_{\epsilon,k}| - |V_\phi f_\epsilon|\right).$$

由此我们得到估计

$$\||V_\phi f_{\epsilon,k}| - |V_\phi f_\epsilon|\|_{W^{s,p}} \lesssim 2^{js}\||V_\phi f_{\epsilon,k}| - |V_\phi f_\epsilon|\|_{L^p} + 2^{-j\delta}\left(\||V_\phi f_{\epsilon,k}|\|_{W^{s+\delta,p}} + \||V_\phi f_\epsilon|\|_{W^{s+\delta,p}}\right),$$

对任意 $0 < \delta \ll 1$。在第二项中，只要 $s + \delta < 1 + \frac{1}{p}$，我们就可以去掉绝对值。根据三角不等式以及式（17）中级数的绝对收敛性，我们进而得到

$$2^{-j\delta}\left(\||V_\phi f_{\epsilon,k}|\|_{W^{s+\delta,p}} + \||V_\phi f_\epsilon|\|_{W^{s+\delta,p}}\right) \lesssim 2^{-j\delta}\left(\|V_\phi f\|_{W_r^{s+\delta,p}} + \epsilon\right).$$

根据我们的假设 $\|V_\phi f\|_{W^{s',\ _r\ ^p}} < \infty$，只需令 j 足够大，就能使它变小。因此，只需控制加权低阶范数；我们在命题 9 中证明了该范数可以快速趋于零。□

备注 12。鉴于上述证明，读者应当很容易看出，如果用小波变换替代短时傅里叶变换，也会得到类似的不稳定性结果。

备注 13。注意，我们对范数 (6) 的定义只在 L^p这一层引入了权重。这对于上述论证并非关键。例如，如果我们想证明关于该范数的不稳定性

$$\|f\|_{W_r^{s,p}} + \sum_i \|\langle x\rangle^N \partial_{x_i} f\|_{L^p}$$

而不是 $\|f\|_{W^{s,\ _r\ ^p}}$，我们只需假设满足定理 *4* 中条件的更高正则性版本。事实上，作此修改后，我们仍可重复上述论证的大部分内容，因为微分具有平移不变性。另一方面，为了证明从加权 *Sobole*夫范数到加权 L^p 范数的约化，我们注意到，根据链式法则，有如下范数等价关系

$$\|f\|_{W_r^{s,p}} + \sum_i \|\langle x\rangle^N \partial_{x_i} f\|_{L^p} \sim_N \|f\|_{W_r^{s,p}} + \sum_i \|\partial_{x_i}\left(\langle x\rangle^N f\right)\|_{L^p}.$$

如果采用范数的后一种表达式，只要将 $|V_\phi f_{\epsilon,\ k}| - |V_\phi f_\epsilon|$ 替换为 $\langle x\rangle^N$ $(|V_\phi f_{\epsilon,\ k}| - |V_\phi f_\epsilon|)$ ，并对级数 （17）作出适当的绝对收敛假设，利特尔伍德–佩利论证几乎可以原样进行；而这一假设可由定理 *4* 中条件的更高正则性版本推出。

到目前为止，我们只讨论了 $W^{s,\ _r\ ^p} \to L^q$ 稳定性，其定义是对所有满足 $V_\phi g \in W^{s,\ _r\ ^p} \cap L^q(\mathbf{R}^{2d})$ 的 g 进行量化。如果我们事先知道 $V_\phi f \in E \subseteq W^{s,\ _r\ ^p} \cap L^q(\mathbf{R}^{2d})$，并且只想在定义 f 处的稳定性时，对具有相同性质的 g 进行量化，该怎么办？这使我们回到了定义 1 所提供的完整一般性。由于 E 可能不对短时傅里叶变换的任何对称性封闭，上述构造不稳定性的论证便不再成立。不过，由于短时傅里叶变换是一个框架，我们仍然可以在稠密集 [4] 上得到 ($L^2(\mathbf{R}^d)$ $L^2(\mathbf{R}^{2d})$ E) 不稳定性。此外，对于加博尔变换，我们可以将 [4] 中的论证（该论证利用分析算子在有限测度集上的紧性来构造一个 L^2-几乎不交序列）与标准椭圆正则性理论结合起来，从而得到一个相对于更高正则性（例如 H^1）范数几乎不交的序列。根据上述论证，这随后可用于在 $\mathcal{G} f_\epsilon \in E$ 处为加博尔变换构造更高正则性范数（例如 $H^1 \to L^2$）下的不稳定性，其中 $\mathcal{G} f_\epsilon \in E$ 可以任意接近 $\mathcal{G} f \in E$，同时在稳定性的定义中只需对 $\mathcal{G} g \in E$ 进行量化。因此，只要 E 是一个无限维闭子空间，不稳定性就会无处不在。

另一方面，也存在一些非常有趣的例子，其中 E 并非子空间，并且可以证明框架相位恢复具有稳定性。特别是，我们请读者参阅 [8, 14] ，其中给出了适用于无限维希尔伯特空间的框架示例；这些框架能在一类相关的非线性子集上实现稳定相位恢复。通过对

每个频率尺度施加 Besov 型条件，对可容许信号作定量<style id='5'>衰减 </style>假设，从而构造出这类子集。该条件禁止将鼓包移至无穷远处，除非其范数显著减小。这个条件排除了我们上文观察到的不稳定机制，并且在许多情况下恢复了稳定性。

3. Stability: Bounded domains and polynomials

现在，我们回到确立 Gabor 相位恢复稳定性 的问题上。根据上述结果，我们知道，在 $\mathbb{R}^{2d}$ 上不稳定性无处不在。然而，我们将证明，也有许多函数能够在 $\mathbb{R}^{2d}$ 上实现稳定恢复，并且在时频平面的有界子集上，所有 函数都能够实现稳定恢复。

本节中的结果大多针对 Gabor 变换（即高斯窗），但我们也将讨论向其他窗函数进行扩展的可能性。

3.1. 有界区域。 对于一般的有界区域 $\Omega \subseteq \mathbb{C}$，我们现在给出一个简单的证明，说明对所有 f，$H^1(\Omega) \to H^1(\Omega)$ 具有局部稳定性。在下一小节中，我们将证明，当 $\Omega = \mathbb{C}$ 时，稠密集中的 f 也有类似结果。为此，直接在 Fock 空间中工作更为方便，也就是说，将高斯函数视为测度的一部分，而非所研究函数的一部分。

我们从 [2, 18, 19] 中借用一个标准而初等的论证开始。我们将用到的关于全纯函数的关键事实是恒等式

$$|\nabla |F|| = \frac{1}{\sqrt{2}} |\nabla F| = |F'|. \tag{18}$$

注 14。 注意，模的梯度总可以用梯度的模来界定，但这在相位恢复中并无用处。对于实值函数和全纯函数，反向的不等式成立。这个结果非常有用，因为它使我们能够在论证中引入模。

论证的第一个基础步骤是注意到，对于任意区域 $\Omega \subseteq \mathbb{C}$（有界或无界），都有

$$\inf_{|\lambda|=1} \|F_2 - \lambda F_1\|_{L^p(\Omega)} \lesssim \inf_{\lambda \in \mathbb{C}} \|F_2 - \lambda F_1\|_{L^p(\Omega)} + \||F_1| - |F_2|\|_{L^p(\Omega)}.$$

这个不等式不涉及函数的任何特殊性质。现在我们记（其中 $d\gamma$ 表示高斯测度）

$$\begin{aligned}\inf_{\lambda \in \mathbb{C}} \|F_2 - \lambda F_1\|_{L^p(\Omega)} = \|\frac{F_2}{F_1} - \lambda\|_{L^p(\Omega, |F_1|^p d\gamma)} &\leq C_{poinc}(\Omega, |F_1|^p d\gamma) \|\nabla \left(\frac{F_2}{F_1} - \lambda\right)\|_{L^p(\Omega, |F_1|^p d\gamma)} \\ &= C_{poinc}(\Omega, |F_1|^p d\gamma) \|\nabla \left(\frac{F_2}{F_1}\right)\|_{L^p(\Omega, |F_1|^p d\gamma)},\end{aligned}$$

也就是说，我们通过转到导数层面来消除相位。现在可以应用 (18)，将上式界定为一个只涉及模的量。具体来说，代入 (18)，并利用商法则

和三角不等式，我们可以得到以下上界

$$\inf_{|\lambda|=1} \|F_2 - \lambda F_1\|_{L^p(\Omega)}$$
$$\lesssim C_{poinc}(\Omega, |F_1|^p d\gamma) \left(\| |F_1| - |F_2| \|_{L^p(\Omega)} + \|\nabla|F_1| - \nabla|F_2|\|_{L^p(\Omega)} + \left\| \frac{\nabla|F_1|}{|F_1|} (|F_1| - |F_2|) \right\|_{L^p(\Omega)} \right).$$

上面的前两项无关紧要。最后一项的导数平衡不佳，需要针对不同情况分别处理。首先注意，对于高斯函数的情形，即 $F_1 =$constant，这一项完全无关紧要。

由上可知，若要证明 Ω 上 Gabor 相位恢复的稳定性，还有三件事要做：

(1) 证明 $C_{poinc}(\Omega, |F_1|^p d\gamma) < \infty$。(2) 处理上面的第三项，即控制 $\left\| \frac{\nabla|F_1|}{|F_1|} (|F_1| - |F_2|) \right\|_{L^p(\Omega)}$。(3) 尽量减少导数损失——$\lambda F_1\|_{W^{1,p}(\Omega)}$。我们先考虑 [2] 中研究过的情况：$\Omega$ 是一个有界区域，$F_2 F_1$ 在 Ω 上有 n 个零点，在边界上没有零点。如果 $n = 0$，那么显然 $|F_1|^p d\gamma \sim d\gamma$，因此庞加莱不等式成立。为了处理上面的第三项，我们只需将 $\frac{\nabla|F_1|}{|F_1|}$ 放入 L^∞。通过一个简单的归纳策略，现在只需考虑只有一个零点的情况，并证明该零点不会造成影响。设这个零点位于 z_0，并考虑一个小球 $B_\epsilon(z_0)$。我们有

$$\inf_{|\lambda|=1} \|F_2 - \lambda F_1\|_{L^p(\Omega)} \leq \inf_{|\lambda|=1} \left(\|F_2 - \lambda F_1\|_{L^p(B_\epsilon(z_0))} + \|F_2 - \lambda F_1\|_{L^p(\Omega \setminus B_\epsilon(z_0))} \right). \tag{19}$$

对于第一项，我们使用以下标准命题。

命题 15。 假设 $D \subseteq \mathbb{C}$ 是单连通的，并且 F 在 D 的某个邻域上全纯且有界。那么

$$\|F\|_{L^p(D)} \lesssim \|F\|_{L^p(\partial D)}.$$

这个命题使我们能够将 (19) 中的第一项放到 $B_\epsilon(z_0)$ 的边界上。接下来有几种选择。一种选择是利用迹不等式，在内半径为 $\partial B_\epsilon(z_0)$ 的小环域上得到 $W^{1,p}$。以往的研究采用过这种做法，但这相当浪费，因为它忽略了我们的函数是全纯函数这一事实。更好的做法是应用卡乔波利论证，以免损失正则性。由此可推得

$$\inf_{|\lambda|=1} \|F_2 - \lambda F_1\|_{L^p(\Omega)} \lesssim \inf_{|\lambda|=1} \|F_2 - \lambda F_1\|_{L^p(\Omega \setminus B_{\frac{\epsilon}{2}}(z_0))}, \tag{20}$$

这就将问题化归为没有零点的情形。类似地，也可以用它来提高不等式左端的正则性。事实上，可以写成

$$\|\nabla F_2 - \lambda \nabla F_1\|_{L^p(\Omega)} = \|F_2' - \lambda F_1'\|_{L^p(\Omega)} \lesssim \|F_2' - \lambda F_1'\|_{L^p(\Omega \setminus B_{\frac{\epsilon}{2}}(z_0))} \approx \|\nabla F_2 - \lambda \nabla F_1\|_{L^p(\Omega \setminus B_{\frac{\epsilon}{2}}(z_0))}$$

将问题化归为 F_1 不消失的情形。于是，可以写成

$$\|\nabla F_2 - \lambda \nabla F_1\|_{L^p(\Omega \setminus B_{\frac{\epsilon}{2}}(z_0))} = \|\nabla \left(\left(\frac{F_2}{F_1} - \lambda \right) F_1 \right) \|_{L^p(\Omega \setminus B_{\frac{\epsilon}{2}}(z_0))}.$$

如果导数作用在第一项上，我们便化归到上面研究过的情形。否则，导数作用在第二项上，此时我们可以写成

$$\left(\frac{F_2}{F_1}-\lambda\right)\nabla F_1=\left(\frac{F_2}{F_1}-\lambda\right)\frac{\nabla F_1}{F_1}F_1$$

并像之前一样将 $\frac{\nabla F_1}{F_1}$ 放入 L^∞。这样便消除了导数，使我们能够重复上述论证，从而证明上文的目标 (3)。

注 16。 将上述论证与此前的研究方法进行比较颇有启发[2, 18, 19]。正如 [18], 所强调的，在 $\mathcal{G}f$ 为高斯函数且 $\Omega=B_R(0)$ 为以零点为中心、半径为 R 的球时， [2] 中的稳定性界会像 $e^{-\pi R^2}$ 那样退化。这是因为在[2] 中，作者在 $\frac{F_1}{F_2}$ 中并未“消去”高斯函数，而是在执行上述论证时改用 $\frac{\mathcal{G}f_1}{\mathcal{G}f_2}$。随后，他们分别估计分子和分母（分别取上界和下界），导致 R^2中出现指数级损失。[18, 19], 在一定程度上修正了这一问题，不过这些论文对问题项 $\left\|\frac{\nabla|F_1|}{|F_1|}(|F_1|-|F_2|)\right\|_{L^p(\Omega)}$ 的处理也截然不同。事实上，在我们的分析中，我们消去 F_1 的零点，并将 $\frac{\nabla|F_1|}{|F_1|}$ 放入 L^∞. 。特别是，在高斯函数的情形下，当 $F_1=1$时，这不会导致 R 中的任何损失（事实上，问题项会完全消失）。另一方面，在 [18, 19] 中，作者试图直接对一般函数H进行估计，

$$\left\|\frac{\nabla|F_1|}{|F_1|}H\right\|_{L^p(\Omega)}.$$

这里，考虑 F_1 是多项式的情形很有启发性，因为下文将证明，这类函数在$\mathbb{C}$上允许稳定的相位恢复。在这种情况下，我们写作 $F_1(z)=(z-z_1)\cdots(z-z_n)$，其中 z_i 是 F_1 的零点。每个零点都会在 $\left|\frac{\nabla|F_1|}{|F_1|}\right|=\left|\frac{\nabla F_1}{F_1}\right|$ 中产生一个极点，问题在于如何估计这些极点的贡献。在 [19, 命题 4。3], 中，作者通过使用加权范数 $\mathcal{M}(f)$ （如(4)所示）来“量化”极点的贡献，从而得到如下形式的估计

$$\left\|\frac{\nabla|\mathcal{G}f|}{|\mathcal{G}f|}H\right\|_{L^p(\Omega)}\lesssim\|(1+|\cdot-z_0|^{2d+2})H\|_{L^q(\Omega)},$$

其中 z_0 是 $|\mathcal{G}f|$ 在整个 $\mathbb{C}$ 上的最大值，并恰当选取指标（特别是，不允许 $p=2$，否则会与我们的论证相悖，并导致可积性显著损失）。这里的关键在于，参数 z_0 取决于 $|\mathcal{G}f|$ 的最大值，而非Ω，而是取决于$\mathbb{C}$上的最大值。特别是，当$\Omega=B_1(0)$ 且在Ω中选取$(z_i)_{i=1}^n$ 时，最大值很可能远离Ω，从而使上述范数中的权重很大。同样，当 $\mathcal{G}f$ 为平移高斯函数且$\Omega=B_1(0)$时，随着高斯函数向无穷远平移，稳定性常数会发散（更准确地说，范数 $\mathcal{M}(f)$ 会增大，因为作者将稳定性常数中非 *Cheeger* 的部分隐藏在该范数中）。

3.2. 复平面上的多项式。 现在我们转向整个空间的情形，但其中 $F_1=p(z)$ 是一个多项式。根据我们将在下文给出的粘合论证以及上述关于有界区域的稳定性结果，只需证明，对于一个与 $p(z)$ 的“主体”相距足够远的半平面，上述条件成立即可。事实上，我们将复平面划分为一个大

圆盘（半径为 R）和三个半平面，使所有子集均有显著重叠，并且在主圆盘之外， $p(z)e^{-\pi|z|^2}$ 非常小但不为零。

为处理 (2)，我们可以写成 $\left|\frac{\nabla F_1}{F_1}\right| = \left|\frac{p'}{p}\right|$；由于 p' 是比 p 阶数更低的多项式，因此可以使它在半空间上很小。这一项无关紧要，可以并入 L^∞。结合上述论证，这也解决了 (3)。对于 (1)，我们选择适当的半平面，使多项式相对于高斯测度衰减，从而满足对数凹性；然后在对数凹性的定义中通过 ∞ 延拓密度 V（即将测度延拓为 0），并利用 $\mathbf{R}^d$ 上的对数凹测度满足 Poincar´e 不等式这一事实。由此可推出半空间上的 Poincar´e 不等式；再结合上一小节中的论证，便可得到半空间上 Gabor 相位恢复的稳定性。

3.2.1. 粘合论证。 在上述论证中，我们构造了复平面中的开子集，这些开子集之间具有“显著的重叠”，并且在 $\mathcal{G}^{-1}p$ 处对 Gabor 相位恢复具有稳定性，其中 p 是 Fock 空间中的一个多项式。现在，我们系统地证明，可以以保持局部稳定性的方式将这些区域“粘合”在一起。为此，对于开集 $\Omega \subseteq \mathbf{C}$ 以及 $r \geq 0$，我们引入如下记号：

$$c_{r,\Omega}(f) := \sup_{g \in L^2(\mathbb{R})} \frac{d_\Omega(f,g)}{\| |\mathcal{G}f| - |\mathcal{G}g| \|_{H^1_r(\Omega)}},$$

其中

$$d_\Omega(f,g) := \inf_{|\lambda|=1} \|\mathcal{G}f - \lambda \mathcal{G}g\|_{L^2(\Omega)}.$$

如果 $\Omega \subseteq \mathbf{C}$ 是一个域，且 $A, B \subseteq \Omega$ 是非空开子集，并且 $\Omega = A \cup B$，我们将 f-连通性 定义为 A 与 B 之间的

$$\lambda_{A,B}(f) := \frac{\|\mathcal{G}f\|_{L^2(A\cap B)}}{\|\mathcal{G}f\|_{L^2(A)} + \|\mathcal{G}f\|_{L^2(B)}} > 0.$$

我们的粘合结果可以表述如下。

命题17。 设 $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ 是一个域，并设 A、$B \subseteq \Omega$ 是满足 $A \cup B = \Omega$ 的非空开子集。令 $r \geq 0$，并固定 $f \in L^2(\mathbb{R})$。则

$$c_{r,\Omega}(f) \leq \left(c_{r,A}(f)^2 + c_{r,B}(f)^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\lambda_{A,B}(f)^{-1} + \sqrt{2}\right).$$

证明。 我们分别用 τ_A 和τ_B 表示 $d_A(f,g)$ 和 $d_B(f,g)$ 的极小元的复共轭。然后，令

$$\tau_0 := \mathrm{avg}_{\mathbb{S}^1}(\tau_A, \tau_B) := \begin{cases} \frac{\tau_A - \tau_B}{|\tau_A - \tau_B|}, & \text{if } \tau_A \neq -\tau_B, \\ i\tau_A, & \text{otherwise,} \end{cases}$$

并注意到

$$|\tau_A - \tau_0| = |\tau_B - \tau_0| \leq 2^{-\frac{1}{2}} |\tau_A - \tau_B|.$$

现在我们估计

$$\begin{aligned}
d_\Omega(f,g) &\le \|\tau_0\mathcal{G}f-\mathcal{G}g\|_{L^2(\Omega)}\\
&\le \|\tau_0\mathcal{G}f-\mathcal{G}g\|_{L^2(A)}+\|\tau_0\mathcal{G}f-\mathcal{G}g\|_{L^2(B)}\\
&\le \|\tau_A\mathcal{G}f-\mathcal{G}g\|_{L^2(A)}+\|\tau_B\mathcal{G}f-\mathcal{G}g\|_{L^2(B)}+|\tau_A-\tau_0|\|\mathcal{G}f\|_{L^2(A)}+|\tau_B-\tau_0|\|\mathcal{G}f\|_{L^2(B)}\\
&\le c_{A,r}(f)\||\mathcal{G}f|-|\mathcal{G}g|\|_{H^1_r(A)}+c_{B,r}(f)\||\mathcal{G}f|-|\mathcal{G}g|\|_{H^1_r(B)}\\
&+2^{-\frac12}|\tau_A-\tau_B|(\|\mathcal{G}f\|_{L^2(A)}+\|\mathcal{G}f\|_{L^2(B)})\\
&\le \left(c_{A,r}(f)^2+c_{B,r}(f)^2\right)^{\frac12}\left(\||\mathcal{G}f|-|\mathcal{G}g|\|^2_{H^1_r(A)}+\||\mathcal{G}f|-|\mathcal{G}g|\|^2_{H^1_r(B)}\right)^{\frac12}\\
&+2^{-\frac12}\lambda_{A,B}(f)^{-1}|\tau_A-\tau_B|\|\mathcal{G}f\|_{L^2(A\cap B)}\\
&\le 2^{\frac12}\left(c_{A,r}(f)^2+c_{B,r}(f)^2\right)^{\frac12}\||\mathcal{G}f|-|\mathcal{G}g|\|_{H^1_r(\Omega)}+2^{-\frac12}\lambda_{A,B}(f)^{-1}\|(\tau_A-\tau_B)\mathcal{G}f\|_{L^2(A\cap B)}.
\end{aligned}$$

最后，我们对第二项进行估计：

$$\begin{aligned}
\|(\tau_A-\tau_B)\mathcal{G}f\|_{L^2(A\cap B)} &\le \|\tau_A\mathcal{G}f-\mathcal{G}g\|_{L^2(A\cap B)}+\|\tau_B\mathcal{G}f-\mathcal{G}g\|_{L^2(A\cap B)}\\
&\le \|\tau_A\mathcal{G}f-\mathcal{G}g\|_{L^2(A)}+\|\tau_B\mathcal{G}f-\mathcal{G}g\|_{L^2(B)}\\
&\le 2^{\frac12}\left(c_{A,r}(f)^2+c_{B,r}(f)^2\right)^{\frac12}\||\mathcal{G}f|-|\mathcal{G}g|\|_{H^1_r(\Omega)}.
\end{aligned}$$

至此，证明完成。 □

注 18. 加博尔相位恢复的稳定性可以部分推广到其他窗函数。事实上， [17] 构造了使模糊函数不为零的窗函数，并研究了这些窗函数下短时傅里叶变换相位恢复问题的稳定性，见 [22]。我们指出，为什么这些窗函数能够实现短时傅里叶变换相位恢复，一个简要解释可直接由(1) 以及上述加博尔相位恢复问题的稳定性论证得出。事实上，对于任意窗函数 Φ，我们可以利用(1) 推出

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\left(|V_\phi f|^2-|V_\phi g|^2\right)(\omega,-x) &= (\mathcal{A}f(x,\omega)-\mathcal{A}g(x,\omega))\overline{\mathcal{A}\phi(x,\omega)}\\
&= \overline{\frac{\mathcal{A}\phi(x,\omega)}{\mathcal{A}\Phi(x,\omega)}}(\mathcal{A}f(x,\omega)-\mathcal{A}g(x,\omega))\overline{\mathcal{A}\Phi(x,\omega)}\\
&= \overline{\frac{\mathcal{A}\phi(x,\omega)}{\mathcal{A}\Phi(x,\omega)}}\mathcal{F}\left(|V_\Phi f|^2-|V_\Phi g|^2\right)(\omega,-x),
\end{aligned}$$

其中 ϕ 是高斯窗。乘以 $\langle(x,\omega)\rangle$ 并应用 ***Plancherel*定理**，可得

$$\||V_\phi f|^2-|V_\phi g|^2\|_{H^1}=\|\langle(x,\omega)\rangle\overline{\frac{\mathcal{A}\phi(x,\omega)}{\mathcal{A}\Phi(x,\omega)}}\mathcal{F}\left(|V_\Phi f|^2-|V_\Phi g|^2\right)(\omega,-x)\|_{L^2}.$$

在 [17], 中，构造了满足界 $\left|\langle(x,\omega)\rangle\,\overline{\mathcal{A}\phi_{(x,\omega)}\,\mathcal{A}\Phi(x,\omega)}\right|\lesssim 1$ 的 Φ 示例。对于这样的 Φ，我们得到

$$\||V_\phi f|^2-|V_\phi g|^2\|_{H^1}\lesssim\||V_\Phi f|^2-|V_\Phi g|^2\|_{L^2}. \tag{21}$$

值得注意的是，式 (21) 的右侧只出现了 L^2 范数。现在可以利用上述稳定性结果，在某些情况下（例如当 $V_\phi f$ 是多项式时）对其进行界定

$$\||V_\phi f|^2 - |V_\phi g|^2\|_{H^1} \geq C(f) \inf_{|\lambda|=1} \|(V_\phi f)^2 - \lambda (V_\phi g)^2\|.$$

这为使用窗函数 Φ 的短时傅里叶变换相位恢复提供了一种稳定性形式；特别地，如果 $|V_\Phi f| = |V_\Phi g| \in L^4$，我们便可立即从上述定量估计推出，这意味着 f 是 g 的模为一的倍数。

致谢。我们感谢 FrancescaBartolucci，与她的有趣讨论启发了本文的部分内容。

References

[1] Pedro Abdalla、Daniel Freeman、Jo˜ao PG Ramos 和 Mitchell A Taylor。关于从截断和折叠测量中进行精确稳定恢复。arXiv 预印本 arXiv:2506.20054，2025 年。[2] Rima Alaifari、Ingrid Daubechies、Philipp Grohs 和 Rujie Yin。无限维中的稳定相位恢复。《计算与数学基础》，19(4):869–900，2019 年。[3] Rima Alaifari 和 Philipp Grohs。Banach 空间连续框架一般情形下的相位恢复。《SIAM 数学分析杂志》，49(3):1895–1911，2017 年。[4] Wedad Alharbi、Salah Alshabhi、Daniel Freeman 和 Dorsa Ghoreishi。相位恢复的局部性与稳定性。《采样理论、信号处理与数据分析》，22(1):第 10 号论文，16 页，2024 年。[5] Eugene Bilokopytov。互不相交非奇异算子与 Banach 格上的各种拓扑。arXiv 预印本 arXiv:2501.03866，2025 年。[6] G´erard Bourdaud 和 Yves Meyer。作用于 Sobolev 空间的函数。《泛函分析杂志》，97(2):351–360，1991 年。[7]G´erard Bourdaud 和 Winfried Sickel。具有分数阶光滑性的函数空间上的复合算子。载于《调和分析与非线性偏微分方程》，RIMS Kˆokyˆuroku Bessatsu 第 B26 卷，第 93–132 页。京都大学数理解析研究所，2011 年。[8] Jameson Cahill、Peter G. Casazza 和 Ingrid Daubechies。无限维希尔伯特空间中的相位恢复。《美国数学会汇刊 B 辑》，3:63–76，2016 年。[9] Robert Calderbank、Ingrid Daubechies、Daniel Freeman 和 Nikki Freeman。对 L_2(R) 的无限维子空间进行稳定相位恢复。arXiv 预印本 arXiv:2203.03135，2022 年。[10] Manuel Cam´u˜nez、Enrique Garc´ıa-S´anchez 和 David de Hevia。Banach 格中复数稳定相位恢复的刻画。arXiv 预印本 arXiv:2504.06693，2025 年。[11] Michael Christ、Ben Pineau 和 Mitchell A. Taylor。H¨older 稳定相位恢复的例子。《数学研究快报》，31(5):1339–1352，2024 年。[12] D. Freeman、T. Oikhberg、B. Pineau 和 M. A. Taylor。函数空间中的稳定相位恢复。《数学年刊》，390(1):1–43，2024 年。[13] Daniel Freeman 和 Daniel Haider。ReLU 层、饱和与相位恢复的最优下 Lipschitz 界。arXiv 预印本 arXiv:2502.09898，2025 年。[14] Daniel Freeman 和 Mitchell A Taylor。关于 H¨older 稳定相位恢复的 Cahill-Casazza-Daubechies 问题。arXiv 预印本 arXiv:2512.08806，2025 年。[15] Enrique Garc´ıa-S´anchez 和 David de Hevia。实现稳定相位恢复的等距嵌入到 C(K) 空间。arXiv 预印本 arXiv:2512.08110，2025 年。[16] Enrique Garc´ıa-S´anchez、David de Hevia 和 Mitchell Taylor。关于 C(K) 中存在能够实现稳定相位恢复的大子空间。《arXiv 预印本 arXiv:2512.08114》，2025 年。[17] Karlheinz Gr¨ochenig、Philippe Jaming 和 Eugenia Malinnikova。Wigner 分布和短时傅里叶变换的零点。《马德里数学杂志》，33(3):723–744，2020 年。[18] Philipp Grohs 和 Martin Rathmair。稳定加博尔相位恢复与谱聚类。《纯粹与应用数学通讯》，72(5):981–1043，2019 年。

[19] Philipp Grohs 和 Martin Rathmair。多元函数的稳定加博尔相位恢复。欧洲数学会杂志（*JEMS*），24(5):1593–1615，2022 年。[20] Djalil Kateb。关于映射 $f \mapsto |f|^{\mu}$，$\mu > 1$ 在 Besov 空间上的有界性。《数学新闻》，248/249:110–128，2003 年。[21] Ben Pineau 和 Mitchell A Taylor。粗糙非线性演化方程的最优 Sobolev 阈值。*arXiv* 预印本 *arXiv:2505.14966*，2025 年。[22] Martin Rathmair。稳定 STFT 相位恢复与庞加莱不等式。《国际数学研究通知》，2024(22):14094–14114，2024 年。[23]Martin Rathmair。通过半定规划实现加博尔相位恢复。在 *ICMAT*（马德里）举办的「分析与应用中的格结构」研究专题学期课程中所作的短期课程报告，2024 年。幻灯片见 https://www.icmat.es/RT/2024/LSAA/program.php。[24] 陶哲轩。《非线性色散方程：局部与整体分析》。CBMS 数学区域会议丛书第 106 卷。美国数学会，2006 年。