arXiv:2512.18110v1 [math.KT] 19 Dec 2025

线性群的无序分解与同调稳定性

IVAN VASILEV, SERGE YAGUNOV

摘要。本文提出一种改进的证明策略，用于研究线性群的同调稳定性，其中一般线性群是主要例子。我们的方法比 Quillen 和 Suslin–Nesterenko 的经典著作中的方法更为直接，但仅适用于局部化系数。我们的方法中出现的对 $(n-1)!$ 的局部化，似乎与 Mirzaii 的若干猜想以及 Suslin 的单射猜想密切相关。

1. 引言

同调稳定性现象在数学的许多领域中都发挥着核心作用，涵盖代数 K 理论和代数拓扑，也包括数论与几何群论中较新的应用。值得注意的例子包括 Miller–Patzt–Petersen–Randal- Williams 关于 L-函数 [5] 的研究，以及 Szymik–Wahl 关于 Higman–Thompson 群 [11]的研究。

粗略地说，一列群

$$G_1 \hookrightarrow G_2 \hookrightarrow \cdots$$

若其在同调上诱导的映射呈现同调稳定性，则称之为

$$H_i(G_n;\mathbb{Z}) \longrightarrow H_i(G_{n+1};\mathbb{Z})$$

当 n 足够大时，这些映射都是同构（具体取决于 i）。

这类族中最基础且具有重要历史意义的例子之一，是一般线性群 $\mathrm{GL}_n(R)$。对其同调的研究与代数K-理论密切交织，并一直是推动该领域发展的重要力量。

事实上，Quillen 对高阶 K-群的定义，将一个环 R 与由无限一般线性群构造出的空间的同伦群联系起来

$$\mathrm{GL}(R) = \varinjlim_n \mathrm{GL}_n(R).$$

Hurewicz 同态 为同伦与同调搭起了一座自然的桥梁，并给出典范映射

$$h_n\colon K_n(R) \longrightarrow H_n(\mathrm{GL}(R);\mathbb{Z}),$$

其 将代数 K 理论与更易计算的群同调结构联系起来 y.

域上的一般线性群具有同调稳定性，这一事实最早由 Quillen 在其开创性工作 [8], 中确立，他证明了有限域上的一般线性群具有稳定性。随后，van der Kallen [12] 以及涅斯捷连科和苏斯林 [7] 将这一结果推广了。

对于无限域，目前已知的最优稳定范围可表述如下：

定理。 设 F 是一个无限域。那么，包含映射 $\mathrm{GL}_{n-1}(F) \hookrightarrow \mathrm{GL}_n(F)$ 诱导出一个同构

$$H_i(\mathrm{GL}_{n-1}(F),\mathbb{Z}) \xrightarrow{\cong} H_i(\mathrm{GL}_n(F),\mathbb{Z})$$

对所有 $n > i$。

日期：2025年12月23日。

Nesterenko和Suslin通过明确描述第一个非同构稳定化映射的余核，证明了这一稳定范围是最佳的。

定理。 设 F 是一个无限域。那么存在一个自然的正合列

$$H_n(\mathrm{GL}_{n-1}(F)) \longrightarrow H_n(\mathrm{GL}_n(F)) \twoheadrightarrow K_n^M(F),$$

其中 $K_n^M(F)$ 表示 F的第 n 个米尔诺 K 群。

证明同调稳定性结果的常用策略，可以简要概括为：利用群作用于适当空间或复形所产生的谱序列。关于这一策略的全面阐述及其众多应用，可参见 [13]。

本文使用一种经过修改的一般位置复形，这是该领域的标准做法。令 A_k 表示由 F^n 中的 k 元向量组生成的自由阿贝尔群，并要求这些向量的每个子集，只要其包含的向量数不超过 $\min(n,k)$，就线性无关。这些自由阿贝尔群通过左乘构成一个 $\mathrm{GL}_n(F)$-模复形，并配备由面映射交错和定义的标准微分。

每个自由阿贝尔群 A_k 还可以赋予对称群 S_k的右作用，其在生成元上的定义为

$$(v_1,\dots,v_k)\cdot\sigma = (-1)^{\mathrm{sign}(\sigma)}(v_{\sigma^{-1}(1)},\dots,v_{\sigma^{-1}(k)}),$$

应被视为定向的类比。容易验证，该作用与微分交换，从而使我们能够定义商复形

$$\widetilde{A}_* = (A_*)_{S_*}.$$

本文的主要结果是，这个复形完整描述了一般线性群的相对同调，除了一个有限的挠部分。更确切地说，利用我们的方法，可以重新证明以下结果。

定理。 对于任意 $n\geq 1$ 以及任意无限域 F，记由一般位置的 n-型向量生成的复形为 $A_k^{(n)}$ （见下文）。则存在一个同构

$$H_*(\mathrm{GL}_n(F),\mathrm{GL}_{n-1}(F);\mathbb{Q}) \cong H_{*+1}\big((\widetilde{A}_*^{(n)})_{\mathrm{GL}_n}\big)\otimes\mathbb{Q}.$$

将该定理表述得更明确一些，可得到两个重要的推论 .

推论 1.1。 设 F为一个无限域。则包含映射 $\mathrm{GL}_{n-1}(F) \hookrightarrow \mathrm{GL}_n(F)$ 诱导出一个同构

$$H_i(\mathrm{GL}_{n-1}(F);\mathbb{Z}[\tfrac{1}{(n-1)!}]) \xrightarrow{\cong} H_i(\mathrm{GL}_n(F);\mathbb{Z}[\tfrac{1}{(n-1)!}])$$

对所有 $i\leq n-1$均成立。

推论 1.2. 设 F 是一个无限域。则存在一个自然的正合列

$$H_n(\mathrm{GL}_{n-1}(F);\mathbb{Z}[\tfrac{1}{(n-1)!}]) \longrightarrow H_n(\mathrm{GL}_n(F);\mathbb{Z}[\tfrac{1}{(n-1)!}]) \twoheadrightarrow K_n^M(F)\otimes\mathbb{Z}[\tfrac{1}{(n-1)!}],$$

其中 $K_n^M(F)$ 表示 F的第 n个 *Milnor* K群。

这些结果与 Suslin 和 Nesterenko 的定理一致。利用无序分解，我们得到了更简短且更明确的证明，代价是需要局部化系数。使用无序分解可以消除 GL 单项式子群所贡献的部分同调。这种方法受到第二作者在研究双 Grassmann 复形的同调时提出的思想的启发 [14]。假设 R 是一个含有许多单位元的局部环，则类似的技术也可应用于群 $\mathrm{GL}_*(R)$的情形。

致谢。 第一作者由衷感谢 Vasily Ionin，他对自己的数学兴趣产生了重要影响；作者将自己如今对同伦论及

相关领域的热情归功于他。作者还感谢 Viktor Lavrukhin、Ivan Vorobyev、Roman Mikhailov，以及209室全体成员，他们营造了有利于数学洞见涌现的氛围。

I.V. 曾获 Rodnye Goroda基金会奖学金资助，目前由国立高等经济学院数学系资助。

2. 仿射分解及其无序版本

约定 2.1. 本文中，我们（通常）研究定义在固定无限域 F 上的一般线性群。为简洁起见，我们常将 $\mathrm{GL}_n(F)$ 记作 GL_n，或简记为 G_n。

令 A_k 表示由域 F 上所有 $n \times k$ 矩阵生成的自由阿贝尔群，即

$$A_k \coloneqq \mathbb{Z}\big[M_{n\times k}(F)\big].$$

按照约定，我们令 $A_0 = \mathbb{Z}$。这个分次阿贝尔群配备了如下定义的微分：

$$\partial_k([X_1, X_2, \dots, X_k]) = [X_2, \dots, X_k] - [X_1, X_3, \dots, X_k] + \cdots + (-1)^{k+1}[X_1, \dots, X_{k-1}],$$

其中，X_i 是生成元的各列。

群 G_n 通过左乘作用于这些阿贝尔群。标准验证表明，带有上述微分的分次阿贝尔群 A_*构成一个由 G_n构成的模的复形。该复形的某些子复形自然出现在同调稳定性的背景下。这些子复形中出现的 G_n模的生成元通常满足所谓的一般位置条件，正如 [4]中引入并正式定义的那样。

现在我们引入向量集合的 i-型一般位置条件 这一概念。此类条件的变体此前已有出现，并有重要应用；例如参见 [7], [10], 和 [6]。特别是，这些研究的关键在于我们将称为 2-型和 n-型一般位置条件的条件。

对于局部环 R:

- 令 R^∞ 表示具有基 e_1自由（左） R-模 e_2，，.....。
- 令 R^n 表示由基 $e_1, \dots, e_n$生成的 R^∞ 的子模。
- 向量 $v \in R^n$ 与其对应的高度为 n的列向量等同。

向量 $v_1, \dots, v_m \in R^\infty$ 称为联合幺模（或称构成一个幺模框架），如果它们构成 R^∞的某个自由直和项的一组基。对于向量 $v_1, \dots, v_m \in R^n$，联合幺模这一性质等价于矩阵 $(v_1, \dots, v_m) \in \mathbf{M}_{n\times m}(R)$ 的左可逆性。

定义 2.2。 如果一组 k 中的向量的每个由 $\min(i, k)$ 个向量组成的子集都构成一个幺模框架，则称该组向量满足- 型一般位置条件。

注 2.3。 当环 R 为域时，向量组构成幺模框架当且仅当这些向量线性无关。尽管我们的定义适用于任意局部环，为简便起见，本文仅讨论无限域。

这个定义使我们能够定义复形 A_* 的自然滤子。令 $A_k^{(i)}$ 表示由所有列满足 i 型一般位置条件的 $n \times k$ 矩阵生成的自由阿贝尔群。这些阿贝尔群构成一个 G_n-模复形 $A_*^{(i)}$，因为对于每个 i，$\mathrm{GL}_n(F)$ 中元素的左乘都保持 i 型一般位置条件。所得滤子如下：

$$A_* = A_*^{(0)} \supset A_*^{(1)} \supset \cdots \supset A_*^{(n)} \supset 0.$$

事实上，所有这些复形都是无环的。我们将针对 $A_*^{(n)}$ 给出明确的证明，因为这是本文的主要研究对象；类似的论证同样适用于所有其他情形。因此，我们提出以下一般性陈述。

命题 2.4. 对于任意 $0 \le i \le n$，复形 $A^{(i)}_*$是无环的。

证明。 我们考虑 $i = n$ 的情形。为证明无环性，我们明确展示每个循环都是一个边界。令

$$c = \sum_j n_j(a^j_1, \dots, a^j_k) \in A^{(n)}_k,$$

$k < n$ 为一个循环。

由于域 F 是无限的，存在一个向量 $\tilde{a}$，使得对于每个直和项，向量集合

$$(\tilde{a}, a^j_1, \dots, a^j_k)$$

仍构成一个幺模框架。定义

$$b = \sum_j n_j(\tilde{a}, a^j_1, \dots, a^j_k) \in A^{(n)}_{k+1}.$$

容易验证，$c = \partial_{k+1}(b)$。因此，c 是一个边界，而复形 $A^{(n)}_*$ 是无环的。□

现在我们可以定义上述复形的无序版本。对于每个 i，模 $A^{(i)}_k$ 具有自然的右 S_k-模结构。只需指定其在生成元上的作用：对于生成元 $[X_1, X_2, \dots, X_k]$ 及任意置换 $\sigma \in S_k$，定义

$$[X_1, X_2, \dots, X_k]\sigma = (-1)^{\mathrm{sign}(\sigma)}[X_{\sigma^{-1}(1)}, X_{\sigma^{-1}(2)}, \dots, X_{\sigma^{-1}(k)}].$$

接着，我们定义商复形

$$\widetilde{A}^{(i)}_k \coloneqq \left(A^{(i)}_k\right)_{S_k} \;\cong\; A^{(i)}_k \Big/ \left\langle m - (-1)^{\mathrm{sign}(\sigma)} m\sigma \;\middle|\; m \in A^{(i)}_k,\ \sigma \in S_k \right\rangle.$$

由此得到的群构成一个由 GL$_n$-模组成的复形，我们仿照无序构型空间，将其称为无序分解。这些关系可以理解为编码了复形中每个向量组的定向。

注 2.5. 这些确实是 G_n-模复形，因为左侧的 G_n-作用与右侧的 S_k-作用相容。

事实证明，无序复形也是无环的，这基本上是通过调整命题 2.4 的论证得出的。

命题 2.6. 对于每个 $0 \le i \le n$，复形 $\widetilde{A}^{(i)}_*$是无环的。

由此得到的群构成一个 GL$_n$-模复形，我们将其称为无序分解，以类比无序构型空间。这些关系可以解释为编码了复形中每个向量组的定向。

3. Quillen 稳定性论证

Quillen 利用群作用在适当空间或复形上所产生的谱序列，提出了一种证明同调稳定性的方法。要将此方法应用于一族群$\{G_n\}_{n\ge 0}$，需构造相应的一族链复形$\{A^n_*\}_{n\in\mathbb{N}}$，它们是 G_n-模，并满足适当的无环性和函子性条件（详细讨论见 [13] ）。

现在我们来说明这一方法在当前具体情形中的应用。给定一个 G_n-模复形 C_*，考虑标准谱序列（参见 [1] 第 7.5 章）：

$${}^I E^1_{p,q} = H_q(G_n; C_p) \implies H_{p+q}(G_n; C_*).$$

如果复形 C_* 是无环的，那么根据以下广为人知的命题，这个谱序列收敛到零：

命题 3.1 ([1, 命题 5.2])。 如果 $\tau\colon\ C\,!\,C'$ 是 G-链复形之间的弱等价，那么 τ诱导一个同构 $H_*(G,C)\cong H_*(G,C')$

我们研究由上文引入的无序分解所产生的谱序列。对于每个 i，这会得到一个谱序列

$$ {}^{I}E^{1}_{p,q} = H_q(G_n;\widetilde{A}^{(i)}_p) \implies 0. $$

在下一节中，我们将分析该谱序列关于 $i=n$的特殊性质。值得注意的是，将分解局部化后， ${}^{I}E$-页中包含许多消失项，这使得一般线性群的同调稳定性证明得以简化。

4. 性质 谱序列的性质与同调稳定性证明 F

本节给出理解由 $\widetilde{A}^{(n)}_*$ 产生的谱序列性质所需的关键论述。我们先介绍来自 [7], 的基础命题，最后给出关键的引理 4.5。

令 $M_{n\times m}(F)$ 表示所有系数取自 F 的 $n\times m$矩阵构成的集合，并定义仿射群如下:

$$ \mathrm{Aff}_{n,m} \coloneqq \left\{ \begin{pmatrix} I_n & M_{n\times m}(F) \\ 0 & \mathrm{GL}_m(F) \end{pmatrix} \right\}, $$

其中 I_n 是 $n\times n$ 单位矩阵。

定理 4.1 （[7, 定理 1.11]）。 包含映射 $\mathrm{GL}_n(F)\hookrightarrow \mathrm{Aff}_{m,\,n}$ 诱导一个同构 m

$$ H_*(\mathrm{GL}_n(F);\mathbb{Z}) \cong H_*(\mathrm{Aff}_{m,n};\mathbb{Z}). $$

仿射群的同调尤为重要，因为它自然地出现在我们的谱序列的 E^1 页上。我们给出以下著名引理（见 [7]）及其证明，因为这一技巧将在后续讨论中再次用到。不过，在陈述该引理之前，我们先需要以下结构性结果。

命题 4.2 （[1, 推论 5.4]）。 设 N 是一个 G-模，其底层阿贝尔群具有 $\bigoplus_{i\in I} M_i$ 的形式。假设 G 的作用按照 G 在 I 上的某个作用置换各直和项。设 G_i 为 i 的各向同性群，并令 E 为 I 模 G 的一组代表元。则 M_i 是一个G_i-模，且存在一个 G-同构

$$ N \cong \bigoplus_{i\in E} \mathrm{Ind}_{G_i}^{G} M_i. $$

引理 4.3 ([7, 引理 2.3])。 存在一个同构 $H_*(\mathrm{GL}_n;\ \widetilde{A}^{(n)}_1)\cong H_*(\mathrm{GL}_{n-1};\ \mathbb{Z})$。该映射

$$ H_*(\mathrm{GL}_{n-1};\mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} H_*(\mathrm{GL}_n;\widetilde{A}^{(n)}_1) \xrightarrow{\epsilon} H_*(\mathrm{GL}_n;\mathbb{Z}) $$

由标准嵌入 GL_{n-1} 、$!\mathrm{GL}_n$诱导。 □

证明。 首先注意到，对所有 i都有 $\widetilde{A}^{(i)}_1 = A^{(i)}_1$ ，因为 S_1 是平凡的。特别地， $\widetilde{A}^{(n)}_1$ 与 Nesterenko–Suslin 的 C_1一致。群 GL_n 在 $\widetilde{A}^{(n)}_1$ 上传递作用，结合 Shapiro 引理与命题 4.2，我们得到

$$ H_*(\mathrm{GL}_n,\widetilde{A}^{(n)}_1) \cong H_*(\mathrm{Stab}_{\mathrm{GL}_n}(e_1),\mathbb{Z}), $$

其中 $e_1=(1、\ 0、\ \ldots\ldots、\ 0)^{\mathsf{T}}$。稳定子群 $\mathrm{Stab}_{\mathrm{GL}_n}(e_1)$恰好是仿射群 $\mathrm{Aff}_{1,\ n-1}$。应用定理 4.1，随后得到

$$ H_*(\mathrm{Aff}_{1,n-1};\mathbb{Z}) \cong H_*(\mathrm{GL}_{n-1};\mathbb{Z}), $$

从而确立了 第一个同构。第二个断言直接由 [7,引理 2.4]得出。 □

注记 4.4。 类似地，可以得到一个更强的结果 [7]:

$$H_*(\mathrm{GL}_n; A_k^{(n)}) \cong H_*(\mathrm{GL}_{n-k}; \mathbb{Z})$$

证明使用了与引理 4.3 中类似的论证。我们将其作为一条备注，因为我们的处理主要关注复形的无序变体。

现在我们可以证明关键引理了:

引理 4.5. 映射 $(\mathrm{id}\ \sigma)$: $H_*(\mathrm{GL}_n;\ A_k^{(n)})$! $H_*(\mathrm{GL}_n;\ A_k^{(n)})$ 对所有 $2 \le k \le n$和任意置换 $\sigma \in S_k$都是恒等映射。

证明。 只需证明该命题对任意两个相邻列的对换 θ 成立。令 $u = (e_{n-k+1}, \ldots, e_n)$。存在一个元素 $h \in \mathrm{GL}_n$——即一个矩阵，其左乘会交换 u 的两行，从而交换与 θ对应的列。这是可行的，因为 u 由单位矩阵的最后 k 列组成。

考虑偶对范畴（群，模）中的以下交换图表:

$$\begin{tikzcd}
(\mathrm{GL}_{n-k},\ \mathbb{Z}) \arrow[r, "(i,\ u)"] \arrow[dr] & (\mathrm{GL}_n,\ A_k^{(n)}) \arrow[d, shift right, "(id,\ \sigma)"'] \arrow[d, shift left, "(hgh^{-1},\ hm)"] \\
 & (\mathrm{GL}_n,\ A_k^{(n)})
\end{tikzcd}$$

上方的箭头由标准嵌入 $\mathrm{GL}_{n-k} \hookrightarrow \mathrm{GL}_n$ 以及将模上的 $1 \mapsto u$映射诱导。上方箭头与两个竖直箭头的复合相同，这迫使对角箭头成为使图表交换的唯一映射。

接着应用同调函子，得到:

$$\begin{tikzcd}
H_*(\mathrm{GL}_{n-k},\ \mathbb{Z}) \arrow[r, "(i,u)_*"] \arrow[dr] & H_*(\mathrm{GL}_n, A_k^{(n)}) \arrow[d, shift right, "(id,\ \sigma)_*"'] \arrow[d, shift left, "(hgh^{-1},\ hm)_*"] \\
 & H_*(\mathrm{GL}_n,\ A_k^{(n)})
\end{tikzcd}$$

根据 [1, §3.8], , 映射 $(hgh^{-1},\ hm)_*$ 在同调上是恒等映射。引理 4.3 表明 $(i,\ u)_*$ 是一个同构。由交换性可知，对角箭头是一个同构，因此 $(\mathrm{id}\ \sigma)_*$ 在同调上作用为恒等映射。□

前面的引理在分析我们的谱序列结构时起着关键作用，以下结果说明了这一点。

引理 4.6。 设 $2 \le k \le n$。则 $H_*(\mathrm{GL}_n, \widetilde{A}_k^{(n)}) \otimes \mathbb{Z}[\frac{1}{k\,!}] = 0$。

证明。 设 σ_i 表示交换第 i 列与第 $(i+1)$ 列的对换。我们在局部化复形上进行，其中 $k!$ 在 $A_*^{(n)}$ 中可逆。

模 $\widetilde{A}_k^{(n)}$ 可表示为以下映射的余核:

$$\bigoplus_{i=1}^{k-1} A_k^{(n)} \xrightarrow{\phi} A_k^{(n)} \twoheadrightarrow \widetilde{A}_k^{(n)} \to 0,$$

其中， $\phi = \sum_{i=1}^{k-1}$（$+\sigma_i$ 号）通过（m_1，……， m_{k-1}） ! $\sum_{i=1}^{k-1}$（$m_i + m_i\sigma_i$）作用。

余核恰好刻画了反对称关系

$$m = (-1)^{\mathrm{sign}(\sigma)} m\sigma,$$

由换位生成。与该短正合列相关的长正合同调序列

$$0 \longrightarrow \mathrm{Im}(\phi) \hookrightarrow A_k^{(n)} \twoheadrightarrow \widetilde{A}_k^{(n)} \longrightarrow 0$$

给出:

$$H_*(\mathrm{GL}_n; \mathrm{Im}(\phi)) \xrightarrow{j_*} H_*(\mathrm{GL}_n; A_k^{(n)}) \xrightarrow{p_*} H_*(\mathrm{GL}_n; \widetilde{A}_k^{(n)}).$$

我们证明, j_* 在局部化后成为同构。

满射性。复合映射:

$$H_*\left(\mathrm{GL}_n; \bigoplus_{i=1}^{k-1} A_k^{(n)}\right) \xrightarrow{\phi_*} H_*(\mathrm{GL}_n; \mathrm{Im}(\phi)) \xrightarrow{j_*} H_*(\mathrm{GL}_n; A_k^{(n)})$$

根据引理 4.5, 满足 $\phi_* = \bigoplus_{i=1}^{k-1} (\mathrm{id} + \mathrm{id}) = 2 \cdot \bigoplus \mathrm{id}$。由于 2 在系数环中可逆, 满射性得证。

单射性。定义 $\psi : A_k^{(n)} \to \mathrm{Im}(\phi)$ 如下:

$$\psi := \sum_{\sigma \in S_k} (\mathrm{id} + (-1)^{\mathrm{sign}(\sigma)} \sigma).$$

复合映射:

$$H_*(\mathrm{GL}_n; \mathrm{Im}(\phi)) \xrightarrow{j_*} H_*(\mathrm{GL}_n; A_k^{(n)}) \xrightarrow{\psi_*} H_*(\mathrm{GL}_n; \mathrm{Im}(\phi))$$

在生成元上的作用为:

$$\begin{aligned}
\psi(m + m\sigma_i) &= \sum_{\sigma \in S_k} \left[(\mathrm{id} - (-1)^{\mathrm{sign}(\sigma)} \sigma)(m + m\sigma_i) \right] \\
&= k!(m + m\sigma_i) - \sum_{\sigma \in S_k} (-1)^{\mathrm{sign}(\sigma)} m\sigma - \sum_{\sigma \in S_k} (-1)^{\mathrm{sign}(\sigma)} m\sigma_i\sigma \\
&= k!(m + m\sigma_i).
\end{aligned}$$

由于任意初等变换都是奇数, 符号交错项会被消去, 只剩下乘以$k!$, 而局部化后它成为同构。因此, j_* 是单射。□

引理 4.7。对于任意 $k \geq n+1$,

$$H_i(\mathrm{GL}_n; \widetilde{A}_k^{(n)}) \otimes \mathbb{Z}[\tfrac{1}{k!}] = \begin{cases} H_{i+1}(\widetilde{A}_k^{(n)})_{\mathrm{GL}_n} \otimes \mathbb{Z}[\frac{1}{k!}], & i = 0, \\ 0, & \textit{otherwise.} \end{cases}$$

证明。 首先注意到, 对于 $k \geq n+1$, GL_n 在 $A_k^{(n)}$ 的生成元上自由作用。根据命题 4.2, 这使得 $A_k^{(n)}$ 成为自由的 $\mathbb{Z}[\mathrm{GL}_n]$-模, 因此 $H_{i\geq 1}(\mathrm{GL}_n; A_k^{(n)}) = 0$。在假设 $k!$ 在 $\widetilde{A}_*^{(n)}$和 $A_*^{(n)}$中均可逆的情况下, 我们证明:

$$H_i(\mathrm{GL}_n; \widetilde{A}_k^{(n)}) = \begin{cases} H_{i+1}(\widetilde{A}_k^{(n)})_{\mathrm{GL}_n}, & i = 0, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

考虑引理 4.6 给出的长正合列:

$$\cdots \to H_*(\mathrm{GL}_n; \mathrm{Im}(\phi)) \xrightarrow{j_*} H_*(\mathrm{GL}_n; A_k^{(n)}) \xrightarrow{p_*} H_*(\mathrm{GL}_n; \widetilde{A}_k^{(n)}) \to \cdots \tag{1}$$

为证明 $H_{i\geq 2}(\mathrm{GL}_n; \widetilde{A}_k^{(n)}) = 0$, 我们先证明 $H_{i\geq 1}(\mathrm{GL}_n; \mathrm{Im}(\phi)) = 0$。根据引理 4.6, 复合映射:

$$H_*(\mathrm{GL}_n; \mathrm{Im}(\phi)) \xrightarrow{j_*} H_*(\mathrm{GL}_n; A_k^{(n)}) \xrightarrow{\psi_*} H_*(\mathrm{GL}_n; \mathrm{Im}(\phi)) \tag{2}$$

是一个同构（乘以 $k!$）。由于 $H_{i\geq 1}(\mathrm{GL}_n; A_k^{(n)}) = 0$，这意味着 $H_{i\geq 1}(\mathrm{GL}_n;\mathrm{Im}(\phi)) = 0$。

对于 $H_1(\mathrm{GL}_n; \widetilde{A}_k^{(n)}) = 0$，我们考察 (1) 的余段：

$$0 \to H_1(\mathrm{GL}_n; \widetilde{A}_k^{(n)}) \to (\mathrm{Im}(\phi))_{\mathrm{GL}_n} \xrightarrow{j_*} (A_k^{(n)})_{\mathrm{GL}_n} \to (\widetilde{A}_k^{(n)})_{\mathrm{GL}_n} \to 0.$$

由于 j_* 是单射（由 (2) 可知），我们得出 $H_1(\mathrm{GL}_n; \widetilde{A}_k^{(n)}) = 0$，正如所需。□ □

前面的引理足以证明本文的一项核心结果。现在我们证明，上文定义的复形 $\widetilde{A}_*^{(n)}$为 $\mathbb{Q}$上的相对同调群提供了一个几何模型。由此可得一项同调稳定性结果，该结果最初由涅斯捷连科和苏斯林 [7]得出；有关一般线性群更早的稳定性结果，参见 [12]。

定理 4.8。对于任意 $n \geq 1$，存在一个同构：

$$H_*(\mathrm{GL}_n, \mathrm{GL}_{n-1}; \mathbb{Q}) \cong H_{*+1}\left((\widetilde{A}_*^{(n)})_{\mathrm{GL}_n}\right) \otimes \mathbb{Q}.$$

证明。在整个证明过程中，我们假设复形 $\widetilde{A}_*^{(n)}$已经定义在 $\mathbb{Q}$上。考虑复形 $\widetilde{A}_*^{(n)}$的超同调谱序列：

$$E^1_{p,q} = H_p(\mathrm{GL}_n; \widetilde{A}_q^{(n)}) \implies H_{p+q}(\mathrm{GL}_n; \widetilde{A}_*^{(n)}) = 0,$$

其中的消失是由 $\widetilde{A}_*^{(n)}$ 的无环性得出的。

根据前面的结果，该谱序列的 E^1 页具有如下形式：

$$\begin{array}{ccccccc}
H_p(G_n;\mathbb{Q}) \leftarrow H_p(G_{n-1};\mathbb{Q}) & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
\vdots \qquad\qquad \vdots & 0 & & 0 & 0 & 0 \\
\vdots \qquad\qquad \vdots & 0 & & 0 & 0 & 0 \\
H_0(G_n;\mathbb{Q}) \leftarrow H_0(G_{n-1};\mathbb{Q}) & 0 & \cdots & 0 \leftarrow (\widetilde{A}^{(n)}_{n+1})_{G_n} & \leftarrow (\widetilde{A}^{(n)}_{n+2})_{G_n} & \\
\end{array}$$

定义：

$$\chi_i = \mathrm{coker}\left(H_i(\mathrm{GL}_{n-1};\mathbb{Q}) \to H_i(\mathrm{GL}_n;\mathbb{Q})\right), \quad \kappa_i = \ker\left(H_i(\mathrm{GL}_{n-1};\mathbb{Q}) \to H_i(\mathrm{GL}_n;\mathbb{Q})\right).$$

由于该谱序列收敛到零，我们可以推出：

$$\chi_i = \kappa_i = 0 \quad \text{for } 0 \leq i \leq n-2,$$

并且还有 $\chi_{n-1} = 0$，因为进出这些位置的所有微分均为零。

由相对同调的标准长正合列可得：

$$H_*(\mathrm{GL}_{n-1};\mathbb{Q}) \to H_*(\mathrm{GL}_n;\mathbb{Q}) \to H_*(\mathrm{GL}_n, \mathrm{GL}_{n-1};\mathbb{Q}), \tag{3}$$

由此可得，对于 $i \leq n-2$，$H_i(\mathrm{GL}_n, \mathrm{GL}_{n-1}; \mathbb{Q}) = 0$，因此我们得到了关于第 i 个同调的同构，其中 $i \leq n-2$，这是由 4.6 得出的。

为了证明 $H_{n-1}(\mathrm{GL}_n, \mathrm{GL}_{n-1}; \mathbb{Q}) = 0$，考虑以下序列：

$$H_{n-1}(\mathrm{GL}_n;\mathbb{Q}) \xrightarrow{0} H_{n-1}(\mathrm{GL}_n, \mathrm{GL}_{n-1};\mathbb{Q}) \xrightarrow{0} H_{n-2}(\mathrm{GL}_{n-1};\mathbb{Q}) \xrightarrow{\sim} H_{n-2}(\mathrm{GL}_n;\mathbb{Q}).$$

第一个映射为零，因为 $\chi_{n-1} = 0$，而最后一个映射是一个同构。

这就迫使 $H_{n-1}(\mathrm{GL}_n, \mathrm{GL}_{n-1}; \mathbb{Q}) = 0$，因此对于 $i \leq n-1$，我们有：

$$H_i(\mathrm{GL}_n, \mathrm{GL}_{n-1};\mathbb{Q}) \cong H_{i+1}\left((\widetilde{A}_*^{(n)})_{\mathrm{GL}_n}\right) = 0.$$

谱序列的收敛性为 $k \geq 0$ 导出短正合列：

$$0 \to \chi_{n+k} \hookrightarrow H_{n+k+1}\left((\widetilde{A}_*^{(n)})_{\mathrm{GL}_n}\right) \twoheadrightarrow \kappa_{n+k-1} \to 0.$$

因此，我们得到以下长正合列：

$$\cdots \to H_{n+k}(\mathrm{GL}_n;\mathbb{Q}) \to H_{n+k+1}\left((\widetilde{A}_*^{(n)})_{\mathrm{GL}_n}\right) \to H_{n+k-1}(\mathrm{GL}_{n-1};\mathbb{Q}) \to H_{n+k-1}(\mathrm{GL}_n;\mathbb{Q}).$$

对长正合列 (3) 应用五引理可得：

$$H_{n+k}(\mathrm{GL}_n,\mathrm{GL}_{n-1};\mathbb{Q}) \cong H_{n+k+1}\left((\widetilde{A}_*^{(n)})_{\mathrm{GL}_n}\right) \quad \text{for all } k \geq 0,$$

至此，证明完成。 □

由定理 4.8 及其中分析的谱序列结构，我们得到：**推论 4.9**。 标准嵌入 GL_{n-1} ，！ GL_n 诱导出同构：

$$H_i\left(\mathrm{GL}_{n-1};\mathbb{Z}\left[\tfrac{1}{(n-1)!}\right]\right) \cong H_i\left(\mathrm{GL}_n;\mathbb{Z}\left[\tfrac{1}{(n-1)!}\right]\right) \quad \textit{for all } i \leq n-2,$$

诱导映射在 $i = n-1$ 时为满射。

这一结果最初由Nesterenko和Suslin针对 $\mathbb{Z}$ 系数 [7]建立。这里我们给出一个替代性的、更为简洁的证明，适用于局部化系数$\mathbb{Z}\left[\frac{1}{(n-1)!}\right]$。

剩余部分1.2的证明有些技术性；不过，我们仍在此给出证明，因为它清楚地描述了4.8的谱序列中出现的长微分。

5. 与Milnor的 K-群的关系

对于本节，记

$$t_i := \ker\left(\widetilde{A}_i^{(n)} \to \widetilde{A}_{i-1}^{(n)}\right) \cong \mathrm{coker}\left(\widetilde{A}_{i-1}^{(n)} \to \widetilde{A}_i^{(n)}\right).$$

特别地，存在一个短正合列

$$t_1 \hookrightarrow \widetilde{A}_1^{(n)} \twoheadrightarrow \widetilde{A}_0^{(n)}.$$

由相应的长正合列，我们得到一个映射

$$H_n(\mathrm{GL}_n) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(\mathrm{GL}_n,\ t_1)$$

$$H_n(\mathrm{GL}_n)/H_n(\mathrm{GL}_{n-1})$$

根据正合性，该映射可经由 $H_n(\mathrm{GL}_n,\widetilde{A}_1^{(n)}) \cong H_n(\mathrm{GL}_{n-1})$（见 4.3）分解。注意，顶部映射$\partial$是长正合列中的连接同态；由于我们只会使用分解后的映射，因此也将其记为 ∂。

此外，通过标准的维数平移，我们得到一个映射；在将系数中的 $(n-1)!$ 置为可逆元后，该映射成为同构：

$$H_{n-1}(\mathrm{GL}_n,t_1) \longrightarrow H_{n-2}(\mathrm{GL}_n,t_2) \longrightarrow \cdots \longrightarrow H_0(\mathrm{GL}_n,t_n).$$

事实上，上述每个映射都是由与短正合列相对应的长正合列产生的连接同态

$$t_i \hookrightarrow \widetilde{A}_i^{(n)} \twoheadrightarrow t_{i-1}.$$

由于在系数中将（$n-1$）！求逆后，相关范围内的同调群 $H_*(\mathrm{GL}_n,\widetilde{A}_i^{(n)})$ 消失，因此我们得到了所需的同构。

由此我们得到了以下结论：

命题 5.1。 存在一列由连接同态诱导的映射

$$H_{n-1}(\mathrm{GL}_n; t_1) \xrightarrow{\sim} H_{n-2}(\mathrm{GL}_n; t_2) \xrightarrow{\sim} \cdots \xrightarrow{\sim} H_0(\mathrm{GL}_n; t_n),$$

它们在将 $(n-1)!$ 于系数中求逆后成为同构。

约定 5.2。从此处起，我们假设在整个复形 $\widetilde{A}^{(n)}_*$ 中， $(n-1)!$ 已被求逆。

回顾一下，我们曾考虑过基于复形 $\widetilde{A}^{(n)}_*$ 构造的谱序列；现在我们聚焦于第二页 $E^2_{n+1,\,0}$。根据先前的计算 4.6，我们有如下描述 $E^1_{n,\,0} \cong 0$ 和$E^1_{n+i,\,0} \cong (\widetilde{A}^{(n)}_{n+i})_{G_n}$，其中 $i \geq 1$。转到第二页后，我们得到

$$E^2_{n+1,0} \cong \operatorname{coker}\left(H_0(\mathrm{GL}_n, \widetilde{A}^{(n)}_{n+2}) \longrightarrow H_0(\mathrm{GL}_n, \widetilde{A}^{(n)}_{n+1})\right).$$

现在我们证明以下命题：

命题 5.3。 $H_0(\mathrm{GL}_n,\ t_n) \cong E^2_{n+1,\,0}$。

证明。 根据上面的讨论，我们有

$$E^2_{n+1,0} \cong \operatorname{coker}\left(H_0(\mathrm{GL}_n, \widetilde{A}^{(n)}_{n+2}) \longrightarrow H_0(\mathrm{GL}_n, \widetilde{A}^{(n)}_{n+1})\right),$$

而短正合列

$$t_{n+1} \hookrightarrow \widetilde{A}^{(n)}_{n+1} \twoheadrightarrow t_n$$

给出

$$H_0(\mathrm{GL}_n, t_n) \cong \operatorname{coker}\left(H_0(\mathrm{GL}_n, t_{n+1}) \longrightarrow H_0(\mathrm{GL}_n, \widetilde{A}^{(n)}_{n+1})\right).$$

由于张量积保持满射，诱导的映射

$$H_0(\mathrm{GL}_n, \widetilde{A}^{(n)}_{n+2}) \longrightarrow H_0(\mathrm{GL}_n, t_{n+1})$$

i是满射。因此，上述两个余核相同，从而证明了所述结论 . □

一般位置条件保证零次同调群 $H_0(\mathbf{GL}_n,\ \widetilde{A}^{(n)}_{n+1})$ 由形如 $(e_1,\ \ldots\ldots,\ e_n,\ \bar{\alpha})$ 的 $n \times (n+1)$ 矩阵生成，其中 e_i 表示 F^n 中的标准基向量，而 $\bar{\alpha}$ 是 F^n 中任意一个所有坐标均非零的元素。

我们将这样的生成元记为 $[\bar{\alpha}] = \{\alpha_1,\ \ldots\ldots,\ \alpha_n\}$，其中只记录生成元所依赖的数据。由于 $\widetilde{A}^{(n)}_{n+1}$ 是由满足一般位置条件的 $(n+1)$-元向量组生成的阿贝尔群，其余不变量构成一个由形如 $\{\alpha_1,\ \ldots\ldots,\ \alpha_n\}$的元素生成的阿贝尔群，其中每个 $\alpha_i \in F^*$ 都是任意的。

为了根据生成元与关系确定 $E^2_{n+1,\,0}$ 的结构，我们描述由映射的余核产生的关系：

$$H_0(\mathrm{GL}_n, \widetilde{A}^{(n)}_{n+2}) \longrightarrow H_0(\mathrm{GL}_n, \widetilde{A}^{(n)}_{n+1}).$$

命题 5.4。 群 $E^2_{n+1,\,0}$ 由以下元素生成：

$$\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} := (e_1, \ldots, e_n, \bar{\alpha}),$$

满足以下关系：

$$\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+n} \{\alpha_1(\beta_1 - \beta_i), \ldots, \widehat{\alpha_i(\beta_i - \beta_i)}, \ldots, \alpha_n(\beta_n - \beta_i), \beta_i\} = \{\alpha_1\beta_1, \ldots, \alpha_n\beta_n\} - \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\},$$

and

$$\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} = (-1)^{\operatorname{sign}(\sigma)} \{\alpha_{\sigma^{-1}(1)}, \ldots, \alpha_{\sigma^{-1}(n)}\},$$

其中 α_i 和 β_i 使得向量

$$\left(e_1, \ldots, e_n, (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)^t, (\alpha_1\beta_1, \ldots, \alpha_n\beta_n)^t\right)$$

它们共同满足一般位置条件。

证明。 考虑 $(\widetilde{A}^{(n)}_{n+2})_{\mathrm{GL}_n}$ 的任意一个生成元。相差一个 GL_n 的元素之乘积后，$^-$不妨设其形式为 $(e_1, \ldots, e_n, \bar{\alpha}, \beta)$，其中，与通常一样，$e_i$ 是标准 $^-$ 基的向量，而 $\bar{\alpha}, \beta$ 满足一般位置条件。为方便起见，令 $[\bar{\alpha}] = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ 并令 $[\beta] = \{\alpha_1\beta_1, \ldots, \alpha_n\beta_n\}$。显然，第二个向量可以表示成这种形式。

$E^2_{n+1,\,0}$ 中的所有关系都可以表示为这类生成元在标准微分下的像的线性组合。因此，我们得到关系

$$\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}(e_1, \ldots, \widehat{e_i}, \ldots, e_n, \bar{\alpha}, \bar{\beta}) = (-1)^{n+1}(e_1, \ldots, e_n, \bar{\beta}) + (-1)^{n+2}(e_1, \ldots, e_n, \bar{\alpha}).$$

直接计算可得

$$(e_1, \ldots, \widehat{e_i}, \ldots, e_n, \bar{\alpha}, \bar{\beta}) = \{\alpha_1(\beta_1 - \beta_i), \ldots, \widehat{\alpha_i(\beta_i - \beta_i)}, \ldots, \alpha_n(\beta_n - \beta_i), \beta_i\},$$

因此，用生成元表示，我们得到

$$\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+n}\{\alpha_1(\beta_1 - \beta_i), \ldots, \widehat{\alpha_i(\beta_i - \beta_i)}, \ldots, \alpha_n(\beta_n - \beta_i), \beta_i\} = \{\alpha_1\beta_1, \ldots, \alpha_n\beta_n\} - \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}.$$

□

注 5.5。 α_i 和 β_i 上的条件可以重新表述如下。从标准基中任取 $^-$个向量，再加上来自 $\bar{\alpha}$ 或 β 的一个向量，它们处于一般位置，当且仅当所有 α_i 和 β_i 都非零。从标准基中任取 $n-2$ 个向量，再加上$^-$以及 $\bar{\alpha}$ 和 β，它们处于一般位置，当且仅当所有 β_i 都互不相同。

值得注意的是，$E^2_{n+1,\,0}$ 中的关系在 n 次 Milnor K-理论中同样成立；参见 [7]中的命题 3.4。因此，存在一个诱导映射

$$E^2_{n+1,0} \longrightarrow K^M_n(F),$$

该映射将每个生成元 $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ 映射为 Milnor K-理论中对应的生成元，记号相同。因此，我们得到以下映射序列：

$$H_n(\mathrm{GL}_n(F))/H_n(\mathrm{GL}_{n-1}(F)) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(\mathrm{GL}_n, t_1) \xrightarrow{\sim} E^2_{n+1,0} \longrightarrow K^M_n(F).$$

存在一个自然映射，将 Milnor K-理论 $K^M_n(F)$ 映射到 $H_n(\mathrm{GL}_n(F))/H_n(\mathrm{GL}_{n-1}(F))$，该映射通过同调中的交叉积构造。事实上，存在一个交叉积映射

$$\underbrace{F^* \otimes \cdots \otimes F^*}_{n} \cong H_1(\mathrm{GL}_1) \otimes \cdots \otimes H_1(\mathrm{GL}_1) \xrightarrow{\times} H_n(\mathrm{GL}_n(F)).$$

交叉积映射与商映射 $H_n(\mathrm{GL}_{n-1})$ 复合后，能够通过 Milnor K-理论分解，这一事实由 Suslin 在另一篇论文中证明；参见 [9],推论 2.7.2。

因此，我们得到以下图表：

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & \ker(H_n(\mathrm{GL}_{n-1}) \to H_n(\mathrm{GL}_n)) & & \\ & & & & \uparrow\!\uparrow & & \\ H_n(\mathrm{GL}_n)/H_n(\mathrm{GL}_{n-1}) & \xhookrightarrow{\partial} & H_{n-1}(\mathrm{GL}_n, t_1) & \xrightarrow{\sim} & E^2_{n+1,0} & \twoheadrightarrow & K^M_n(F) \end{array}$$

我们的目标是证明图表中的所有水平态射都是同构，而左侧的垂直映射是零映射。我们首先证明，从 Milnor K-理论出发并最终回到该理论的复合映射是恒等映射。

现在，让我们从 $E^2_{n+1,0}$ 的生成元入手，更明确地描述上图中的态射。每个生成元 $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ 都映射到 Milnor K- 群 $K_n^M(F)$ 中相应的生成元 $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$。

对于任意由两两可交换元素构成的 n 元组（g_1，g_2、.....、g_n），其中元素属于 $\mathrm{GL}_n(F)$，考虑同调类

$$c(g_1, g_2, \dots, g_n) \in H_n(\mathrm{GL}_n)$$

由循环表示为

$$\sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign}(\sigma)\, [g_{\sigma(1)} \mid g_{\sigma(2)} \mid \dots \mid g_{\sigma(n)}] \otimes 1$$

命题5.6。从 $K_n^M(F)$ 到 $H_n(\mathrm{GL}_n(F))/H_n(\mathrm{GL}_{n-1}(F))$ 的交叉积映射有如下显式描述（参见 [3], [9]）：

$$\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} \longmapsto c(D_1(\alpha_1), \dots, D_n(\alpha_n))\, [H_n(\mathrm{GL}_{n-1})],$$

其中，$D_i(a)$ 是对角矩阵，a 位于第 i个位置，其余位置均为1。

现在，我们通过标准自由分解考察图表 5 中其余水平映射对生成元$c(D_1(\alpha_1) \dots, D_n(\alpha_n))$的作用。首先考察边界映射 $\partial : H_n(\mathrm{GL}_n)/H_n(\mathrm{GL}_{n-1}) \to H_{n-1}(\mathrm{GL}_n, t_1)$。

为清楚起见，我们省略 α指标，因为它们由 D的指标唯一确定。连接态射 ∂ 由长正合列构造，如下图所示：

$$\begin{array}{ccc} c(D_1, \dots, D_n) \otimes e_n & \longrightarrow & c(D_1, \dots, D_n) \otimes 1 \\ \downarrow & & \\ \partial(c(D_1, \dots, D_n) \otimes 1) & \longleftarrow & \partial(c(D_1, \dots, D_n)) \otimes e_n \in H_{n-1}(\mathrm{GL}_n, \widetilde{A}_1) \end{array}$$

该构造将类 $c(D_1(\alpha_1) \dots, D_n(\alpha_n)) \otimes 1$ 提升为 $c(D_1(\alpha_1) \dots, D_n(\alpha_n)) \otimes e_n$，其中$\sim H_n(\mathrm{GL}_n, A_1)$，然后对自由分解中的微分进行作用。

我们可以明确描述该类在边界映射下的像。

命题 5.7. 采用上述记号，$c(D_1(\alpha_1) \dots, D_n(\alpha_n))$ 的边界满足

$$\partial\big(c(D_1(\alpha_1), \dots, D_n(\alpha_n)) \otimes 1\big) = c(D_1(\alpha_1), \dots, D_{n-1}(\alpha_{n-1})) \otimes (-1)^n \big(e_n - D_n(\alpha_n) e_n\big) \in H_{n-1}(\mathrm{GL}_n, t_1).$$

证明。首先，考虑作用于该循环的 δ_i 的内面算子，其中 $0 < i < n$。

$$\delta_i(c(D_1(\alpha_1), \dots, D_n(\alpha_n))) \otimes e_n = \delta_i\left(\sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign}(\sigma)\, [D_{\sigma(1)}(\alpha_{\sigma(1)}) \mid D_{\sigma(2)}(\alpha_{\sigma(2)}) \mid \dots \mid D_{\sigma(n)}(\alpha_{\sigma(n)})]\right) \otimes e_n$$

我们将仅因对换 i 和 $i+1$而不同的置换归为一组。相应的直和项符号相反，因此相互抵消：

$$\delta_i\Big([D_{\sigma(1)} \mid \dots \mid D_{\sigma(i)} \mid D_{\sigma(i+1)} \mid \dots \mid D_{\sigma(n)}] - [D_{\sigma(1)} \mid \dots \mid D_{\sigma(i+1)} \mid D_{\sigma(i)} \mid \dots \mid D_{\sigma(n)}]\Big) = 0.$$

Therefore, the only terms that contribute 是 those 相应的 ding to δ_0 and δ $_{n}$。现在，我们将相差对换 $(1, n)$ 的直和项归为一组，并考察它们的和：

$$\delta_0\Big(\operatorname{sign}(\sigma)\, [D_{\sigma(1)} \mid D_{\sigma(2)} \mid \dots \mid D_{\sigma(n)}]\Big) \otimes e_n + \delta_n\Big((-1)^{n-1} \operatorname{sign}(\sigma)\, [D_{\sigma(2)} \mid D_{\sigma(3)} \mid \dots \mid D_{\sigma(n)} \mid D_{\sigma(1)}]\Big) \otimes e_n.$$

除非 $\sigma(1) = n$，否则这个和为零，因为在其他情况下，e_n 上的作用是平凡的。对所有满足 $\sigma\ \sigma(1) = n$ 的项求和，并应用在 e_n 上的作用，即可完成证明。□

运用相同的推理，我们得到以下一般性结论。

命题 5.8. 设 $x \in t_i$ 的原像为 $\tilde{x} \in A_{i+1}$，使得 $D_j(\alpha_j)$ 在 $\tilde{x}$ 上作用平凡，其中 $j < n-i$。则有以下公式：

$$\partial\big(c(D_1(\alpha_1),\dots,D_{n-i}(\alpha_{n-i}))\big)\otimes x \;=\; c(D_1(\alpha_1),\dots,D_{n-i-1}(\alpha_{n-i-1}))\otimes(-1)^{n-i}\big(\tilde{x}-D_{n-i}(\alpha_{n-i})\tilde{x}\big).$$

现在我们明确描述这个复合映射：

$$K_n^M(F)\longrightarrow H_n(\mathrm{GL}_n)/H_n(\mathrm{GL}_{n-1})\xhookrightarrow{\partial} H_{n-1}(\mathrm{GL}_n,t_1)\xrightarrow{\cong} E^2_{n+1,0}.$$

Prop命题 5.9. 该复合映射将 $K_n^M(F)$ 的每个生成元 $\{\alpha_1,\dots,\alpha_n\}$ 映射为

$$\sum_{\{i_1,\dots,i_j\}\subset\{1,\dots,n\}}(-1)^j\,\{\alpha_1,\dots,1,\dots,1,\dots,\alpha_n\},$$

其中每个加数 在位置 $i_1,\dots,i_j$ 处都有 1，其余位置则为相应的 α_i *s.*

证明。 我们构造序列 $(x_i)_{i=1}^n$ 和 $(\tilde{x}_i)_{i=0}^n$，使其满足以下条件：

- $x_i \in t_i$, ∼
- $\tilde{x}_i \in A_{i+1}$,
- $\tilde{x}_i$ ↦! x_i 在映射 A_{i+1} −! t_i.下

我们选择这些序列，使得 $D_j(\alpha_j)$ 在每个 $\tilde{x}_i$ 上对 $j < n-i$ 作用平凡。对于每个 $i = 0,$ ....., $n-1$，这些选择体现在以下交换图中：

$$\begin{array}{ccc} c(D_1,\dots,D_{n-i})\otimes\tilde{x}_i & \longrightarrow & c(D_1,\dots,D_{n-i})\otimes x_i \\ \downarrow & \swarrow & \\ \partial(c(D_1,\dots,D_{n-i})\otimes x_i) & \longrightarrow & \partial\left(c(D_1,\dots,D_{n-i})\right)\otimes\tilde{x}_i \end{array}$$

我们通过令以下各项成立，归纳地定义这些序列

$$x_0 = 1 \qquad \text{and} \qquad \tilde{x}_0 = e_n,$$

如命题 5.7 所示，则由命题 5.8 可得：

$$x_i = (-1)^{\,n-i+1}\left(\tilde{x}_{i-1} - D_{\,n-i+1}(\alpha_{n-i+1})\,\tilde{x}_{i-1}\right).$$

对于归纳步骤，我们通过选取一个原像来定义每个 $\tilde{x}_i$，该原像保留所需性质。具体而言，将每个直和项与左侧的 e_{n-i} 合并，即可得到这样的原像（理由与命题 2.4 相同），从而确保 $D_j(\alpha_j)$ 对 $j < n-i$ 的 $\tilde{x}_i$ 作用平凡。

最后，为了追踪 $E^2_{n+1,\,0}$ 中的像，我们通过满射 $(A_{n+1})_{\mathrm{GL}_n} \twoheadrightarrow (t_n)_{\mathrm{GL}_n}$ 提升 x_n，方法是将列向量 $(\alpha_1,\dots,\alpha_n)^t$ 添至每个直和项。此构造确保所有列都满足一般位置条件，而将每个直和项表示为一个生成元即可证明该断言。
□

推论 5.10. 复合映射

$$K_n^M(F)\to H_n(\mathrm{GL}_n)/H_n(\mathrm{GL}_{n-1})\hookrightarrow H_{n-1}(\mathrm{GL}_n,t_1)\xrightarrow{\sim} E^2_{n+1,0}\to K_n^M(F)$$

是恒等映射。

证明。 该推论由前一个命题以及 Milnor$K$-理论中的如下事实得出：只要任一项等于 1，生成元 $\{\alpha_1,\dots,\alpha_n\}$ 就为零。□

此外，同一关系——当某个 $\alpha_i = 1$ 时，$\{\alpha_1,\dots,\alpha_n\} = 1$——在 $E^2_{n+1,0}$ 中也成立。尽管从概念上看很直接，但证明需要在 $E^2_{n+1,0}$ 中进行详细计算，碍于篇幅，我们从略。因此，复合映射

$$E^2_{n+1,0}\to K_n^M(F)\to H_n(\mathrm{GL}_n)/H_n(\mathrm{GL}_{n-1})\hookrightarrow H_{n-1}(\mathrm{GL}_n,t_1)\xrightarrow{\sim} E^2_{n+1,0}$$

也等于恒等映射。

这些结 果使我们能够重新得到涅斯捷连科和苏斯林的两个主要定理 [7].

推论 5.11。 由包含映射 GL_{n-1} 、*!*GL_n 诱导的映射，在将 $(n-1)$-阶同调中的 $(n-1)$！取逆后是单射。此外，诱导的映射在第 n 阶同调上的余核同构于第 n 阶 ***Milnor*** K**-群**：

$$H_{n-1}(\mathrm{GL}_{n-1}, \mathbb{Z}[\tfrac{1}{(n-1)!}]) \hookrightarrow H_{n-1}(\mathrm{GL}_n, \mathbb{Z}[\tfrac{1}{(n-1)!}]),$$

and

$$H_n(\mathrm{GL}_n)/H_n(\mathrm{GL}_{n-1}) \otimes \mathbb{Z}[\tfrac{1}{(n-1)!}] \cong K_n^M(F).$$

注 5.12。 涅斯捷连科和苏斯林最初是在整数系数下证明这些结果的，所采用的工具体系更为复杂。然而，我们认为，本文提出的方法不仅简化了他们的论证，而且还自然地联系到 Galatius–Kupers–Randal-Williams 的近期结果 [2], ；后者证明，只要 $(n-1)!$ 在系数域 k 中可逆，映射 $H_n(\mathrm{GL}_{n-1},\ k) \to H_n(\mathrm{GL}_n,\ k)$ 就是单射。

参考文献

[1] Kenneth S. Brown。《群的上同调》。数学研究生教材。Springer，纽约，2012年。[2] S. Galatius、A. Kupers 和 O. Randal-Williams。 e_∞-胞腔与无限域上的一般线性群。*arXiv* 预印本 *arXiv:2008.XXXX*，2020年。[3] D. Guin。线性群的同调与环的 k米尔诺 K 理论。《代数杂志》，123(1)：27–59，1989年。[4] M. Kerz。词复形与中冈稳定性。《同调、同伦与应用》，7(1)：77–85，2005年。[5] Jeremy Miller、Peter Patzt、Dan Petersen 和 Oscar Randal-Williams。一致扭曲同调稳定性。*arXiv* 预印本 *arXiv:2402.00354*，2025年。[6] B. Mirzaii。GL_n 的同调：GL_4 的单射猜想。《数学年刊》。待刊。[7] Yu. P. Nesterenko 和 A. A. Suslin。局部环上的一般线性群的同调及米尔诺 k理论。《苏联数学汇报》，34(1)：121–145，1990年。[8] D. Quillen。有限域上一般线性群的上同调与 k理论。《数学年刊》（第*2*辑），96：552–586，1972年。[9] A. A. Suslin。gl_n 的同调、特征类与米尔诺 k理论。《斯捷克洛夫数学研究所通讯》，3：207–225，1985年。[10] A. A. Suslin。域的 k_3 以及布洛赫群。《斯捷克洛夫数学研究所通讯》，183卷：180–199，1990年。[11] Markus Szymik 和 Nathalie Wahl。Higman–Thompson 群的同调。《数学创见》，216：445–518，2019年。arXiv:1411.5035。[12] W. van der Kallen。线性群的同调稳定性。《数学创见》，60：269–295，1980年。[13] N. Wahl。同调稳定性：一种计算工具。载于《*2022*年国际数学家大会论文集》，第4卷，第2904–2927页，柏林，2023年。EMS Press。[14] S. Yagunov。双格拉斯曼复形的同调。*K* 理论，12，3：277–292，1997年。