修订的单子直觉演算的 Esakia 定理

G. BEZHANISHVILI 和 L. CARAI

Abstract. 我们证明，修正版单子Grzegorczyk逻辑 M⁺Grz 是修订的单子直觉逻辑 M⁺IPC 的最大模态伴侣。因此，与单子直觉逻辑 MIPC 不同，Esakia 定理确实适用于 M⁺IPC。

arXiv:2512.18111v1 [math.LO] 19 Dec 2025

Contents

1. 引言 2. 单子直觉逻辑 3. MS4 的单子扩张 4. 模态伴侣 5. M⁺IPC 的 Esakia 定理 参考文献

1
2
4
5
7
11

1. Introduction

Grzegorczyk 逻辑 Grz 是直觉命题演算 IPC 的最大模态伴侣，这是一个经典结果（参见 [Esa79]）。[Nau91] 声称，Esakia 定理不适用于谓词情形。虽然该证明存在漏洞，但单子直觉演算 MIPC 确实没有最大模态伴侣（参见[BC25]）。我们的目标是证明，Esakia 定理确实适用于修订演算 M⁺IPC。后者通过加入卡萨里公理的单子版本得到

$$\forall x[(p(x) \to \forall x p(x)) \to \forall x p(x)] \to \forall x p(x),$$

并证明 M⁺Grz 是 M⁺IPC 的最大模态伴侣，其中 M⁺Grz 是对单子 Grzegorczyk 逻辑 MGrz 加入单子 Casari 公理的 G¨odel 翻译后得到的修正版。

我们简要说明证明 IPC 的 Esakia 定理的方法、该方法为何不适用于 MIPC，以及为何在 M⁺IPC 中情况有所改善。将每个描述性 S4 框架关联到其骨架，由此定义了一个函子 ρ，它从描述性 S4 框架范畴映射到描述性 IPC 框架（埃萨基亚空间）范畴。该函子有一个右伴随 σ，这两个函子在有限 IPC 框架（有限偏序集及

2020 数学主题分类。03B20,03B45, 03B55。关键词与短语。直觉主义逻辑，模态逻辑，G¨odel 翻译，模态伴侣，单子逻辑。

p-态射）与有限 Grz 框架之间建立了等价。结合 IPC 的有限模型性质（简称 fmp），可知 Grz 是 IPC 的模态伴侣。要证明 Grz 是其中最大的一个，设 M 是 IPC 的模态伴侣。由于 Grz 也具有有限模型性质，只需注意每个有限 Grz 框架 $\mathfrak{F}$ 都是一个 M 框架。考虑 $\rho\mathfrak{F}$。由于 M 是 IPC 的模态伴侣，存在一个描述性 M 框架 $\mathfrak{G}$，使得 $\rho\mathfrak{F} \cong \rho\mathfrak{G}$，因此 $\sigma\rho\mathfrak{F} \cong \sigma\rho\mathfrak{G}$。由于 $\sigma\rho\mathfrak{G}$ 是 $\mathfrak{G}$ 的 p-态射像，并且 $\mathfrak{F} \cong \sigma\rho\mathfrak{F} \cong \sigma\rho\mathfrak{G}$，我们得出 $\mathfrak{F}$ 是 $\mathfrak{G}$ 的 p-态射像。因此，$\mathfrak{F}$是一个 M 框架。

MIPC 的情况就没有那么顺利了。积极的一面是，MIPC 和 MGrz 都具有有限模型性质（尽管证明要复杂得多；见 [GKWZ03，第 10 节3] 和 [BK24，第 7] 节），并且它们具有相同的有限框架。然而，问题在于 σ 不再定义良好。尽管如此，它在有限 MIPC 框架上仍定义良好，而且$\sigma\rho\mathfrak{F} \cong \mathfrak{F}$ 对于每个有限 MGrz-框架 $\mathfrak{F}$ 也成立（尽管 ρ 和 σ 不再建立有限 MGrz-框架范畴与有限 MIPC 框架范畴之间的等价，因为 MGrz 和 MIPC 的 p-态射概念不同；见第 2 节和第 3 节）。根据对单子直觉逻辑的模态伴侣的刻画（见 [BC25，定理 5.12(2)]），存在一个从 $\rho\mathfrak{G}$ 到 $\rho\mathfrak{F}$ 的 p-态射，但这不再意味着存在一个从$\mathfrak{G}$ 到 $\mathfrak{F}$ 的 p-态射（尽管 $\mathfrak{F} \cong \sigma\rho\mathfrak{F}$）。这正是 MIPC 中 Esakia 定理失效的核心所在（见 [BC24]）。

对于 M$^+$IPC，情况有所改善。事实上，有限 M$^+$IPC-框架与有限 M$^+$Grz-框架之间的 p-态射恰好相同（因此，ρ 和 σ 确实给出了有限 M$^+$Grz-框架范畴与有限 M$^+$IPC-框架范畴之间的等价）。此外，M$^+$IPC 和 M$^+$Grz 都具有有限模型性质（见 [BBI23]）。我们的关键观察是：若 $\mathfrak{G}$ 是一个描述性 M 框架，且 $\mathfrak{F}$ 是一个有限 MGrz-框架，那么从 $\rho\mathfrak{G}$到 $\rho\mathfrak{F}$的每个 p-态射都可提升为从$\mathfrak{G}$ 到 $\mathfrak{F} \cong \sigma\rho\mathfrak{F}$的 p-态射，由此得到 M$^+$IPC 的 Esakia 定理。

2. Monadic intuitionistic logics

本节简要回顾单子直觉逻辑及其描述性框架语义。设 $\mathcal{L}$ 为 IPC 的命题语言，$\mathcal{L}_{\forall\exists}$ 为它扩充了两个“量词模态” $\forall$ 和 $\exists$后的语言。

定义 2.1。 [Pri57, p. 38] 由语言 $\mathcal{L}_{\forall\exists}$ 中的以下内容构成的一元直觉主义命题演算 MIPC 是公式集合中最小的集合：

- IPC 的所有定理；
- 关于 $\forall$ 的 S4 公理：$\forall(p \wedge q) \leftrightarrow (\forall p \wedge \forall q)$、$\forall p \to p$、$\forall p \to \forall\forall p$；
- 关于 $\exists$ 的 S5 公理：$\exists(p \vee q) \leftrightarrow (\exists p \vee \exists q)$、$p \to \exists p$、$\exists\exists p \to \exists p$、$(\exists p \wedge \exists q) \to \exists(\exists p \wedge q)$；
- 连接公理：$\exists\forall p \leftrightarrow \forall p$、$\exists p \leftrightarrow \forall\exists p$

以及闭 u 在肯定前件、代入和 $\forall$-必然化（$\varphi/\forall\varphi$）规则下 .

众所周知，MIPC 公理化了 IQC 的一元片段。事实上，按照[Ono87，第 3], 节，固定一个个体变量 x，将每个命题字母 p 与一元谓词 $p^*(x)$ 关联起来，并设

- $p^* = p^*(x)$；
- $(\neg\varphi)^* = \neg\varphi^*$;

- $(\varphi \circ \psi)^* = \varphi^* \circ \psi^*$ 其中 $\circ = \wedge, \vee, \to$;
- $(\forall\varphi)^* = \forall x\varphi^*$ 和 $(\exists\varphi)^* = \exists x\varphi^*$。

于是我们得到 Bull [Bul66] 的以下结果（另见 [OS88]）。

定理 2.2。MIPC $\vdash \varphi$ 当且仅当 IQC $\vdash \varphi^*$。

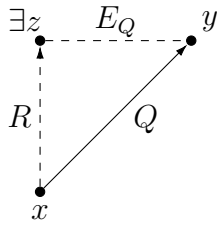
定义 2.3。一个单子直觉逻辑是一个由 $\mathcal{L}_{\forall\exists}$ 中的公式组成的集合，包含 MIPC，并且对定义 2.1 中的推理规则闭合。

每个单子直觉逻辑都相对于其描述性框架语义[Bez99], 是完备的，下面我们回顾该语义。通常，对于集合 X 上的二元关系 R 以及 $U \subseteq X$，我们将 $R[U]$ 记作 R的像，将 $R^{-1}[U]$ 记作 R的逆像，将 U作为其对象。当 $U = \{x\}$时，我们分别简写为 $R[x]$ 和 $R^{-1}[x]$。如果 R是一个拟序（自反且传递的关系），我们用 E_R表示由下式给出的等价关系

$$x\ E_R\ y \iff x\ R\ y\ \&\ y\ R\ x. \qquad (*)$$

我们回顾一下，*Stone* 空间 是一个 X 紧致、豪斯多夫且零维的拓扑空间。若二元关系 R 在 X 连续，则称其为 $R[x]$ ：对每个$x \in X$， $R[x]$ 都是闭的；对每个开闭 $U \subseteq X$, $R^{-1}[U]$ 都是开闭的。下一个定义源自 [Bez99，第 4] 节（另见 [BC25，定义 2.7]）。

定义 2.4. 一个描述性 MIPC-框架 是一个元组 $\mathfrak{F} = (X,\ R,\ Q)$，满足
(1) X 是一个 Stone 空间，(2) R 是一个连续偏序，
(3) Q是一个连续拟序，(4) 一个开闭的 R-上集 U 是
一个开闭的 R-上集，(5) $R \subseteq Q$，(6)
$x\ Q\ y \Longrightarrow \exists z \in X:\ \ x\ R\ z$ & $z\ E_Q\ y$。



注意，如果描述性 MIPC 框架是有限的，那么其拓扑就是离散的。更一般地，忘掉拓扑后，得到的就是 MIPC 的标准 Kripke 语义（参见，例如， [Ono77，第 3] 节）。

接下来回顾如何在描述性 MIPC 框架 $\mathcal{L}_{\forall\exists}$ 中解释公式 $\mathfrak{F} = (X,\ R,\ Q)$。$\mathfrak{F}$ 上的一个赋值 是一个映射 v，它为每个命题字母关联一个开闭 R-上闭集。在 $\mathfrak{F}$ 中，直觉主义联结词 $\wedge$, $\vee$, $\to$, $\neg$ 的解释是标准的（例如参见

[CZ97，第 236–237] 页）。为了了解 $\forall$ 和 $\exists$ 如何解释，令 $x \in X$。那么，对于 $\mathcal{L}_{\forall\exists}$ 的每个公式 φ,

$$\begin{aligned} x \vDash_v \forall\varphi &\iff (\forall y \in X)(x\ Q\ y \Longrightarrow y \vDash_v \varphi);\\ x \vDash_v \exists\varphi &\iff (\exists y \in X)(x\ E_Q\ y\ \&\ y \vDash_v \varphi)\\ &\iff (\exists y \in X)(y\ Q\ x\ \&\ y \vDash_v \varphi). \end{aligned}$$

定理 2.5. [Bez99，定理 14] 每个单子直觉逻辑相对于其描述性MIPC框架类都是完备的。

3. Monadic extensions of MS4

本节简要回顾 MS4 的单子扩张及其描述性框架语义。设 $\mathcal{L}_{\Box\forall}$ 为一种包含两个模态算子 $\Box$ 和 $\forall$的命题模态语言。

定义 3.1. 单子 S4（记作 MS4）是包含 $\mathcal{L}_{\Box\forall}$经典命题演算 CPC 的所有定理、关于 $\Box$的 S4 公理、关于 $\forall$的 S5 公理、左交换公理的最小公式集

$$\Box\forall p \to \forall\Box p,$$

并且对肯定前件、代入、 $\Box$-必然化和 $\forall$-必然化规则封闭。

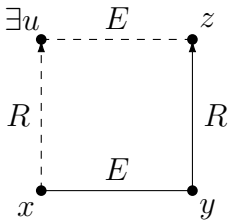
与 MIPC 一样，MS4 是谓词 S4 的一元片段（参见 [FS77，定理 8] 和 [BK24，定理 5.8]）。

定义 3.2. MS4 的单子扩张是 $\mathcal{L}_{\Box\forall}$ 的一个公式集，包含 MS4，且在定义 3.1 中的推理规则下闭。

与单子直觉逻辑一样，每个 MS4 的单子扩张相对于其描述性框架语义都是完备的。

定义 3.3. [BC25，定义 3.7] 一个描述性MS4框架是一个元组 $\mathfrak{G} = (Y, R, E)$，满足

(1) Y 是 Stone 空间，(2) R 是连续拟序，
(3) E 是连续等价关系，(4) $x\ E\ y$ &
$y\ R\ z \Longrightarrow \exists u \in Y$: $x\ R\ u$ & $u\ E\ z$。



与描述性 MIPC 框架一样，如果描述性 MS4 框架是有限的，那么其拓扑就是离散的。更一般地，忘掉拓扑后，得到的就是 MS4 的标准 Kripke 语义（参见，例如，[BC23，第 3] 节）。

本节最后回顾如何在描述性 MS4 框架 $\mathfrak{G} = (Y,\ R,\ E)$ 中解释 $\mathcal{L}_{\Box\forall}$ 的公式。在 $\mathfrak{G}$ 上的赋值 是一个映射 v，它为 Y 的每个命题字母指定一个既开又闭子集。$\mathfrak{G}$ 中经典命题联结词的解释是标准的。模态算子 $\Box$ 和 $\forall$ 的解释如下，其中 $x \in Y$ 和 φ 是 $\mathcal{L}_{\Box\forall}$ 的公式：

$$x \vDash_v \Box\varphi \iff (\forall y \in Y)(x\ R\ y \Longrightarrow y \vDash_v \varphi);$$
$$x \vDash_v \forall\varphi \iff (\forall y \in Y)(x\ E\ y \Longrightarrow y \vDash_v \varphi).$$

与单子直觉逻辑一样，我们有：

定理 3.4。 [BC24，定理 2。24] *MS4* 的每个单子扩张都相对于其描述性MS4框架类是完备的。

4. Modal companions

本节将模态直觉逻辑与 MS4 的模态扩张联系起来。首先回顾 Fischer Servi [FS77]（另见 [FS78]）如何将 IPC 到 S4 的哥德尔翻译 $(-)^t$ 扩展为 MIPC 到 MS4 的翻译，方法是为 $\forall$ 和 $\exists$ 添加以下两个子句：

$$(\forall\varphi)^t = \Box\forall\varphi^t \quad \text{and} \quad (\exists\varphi)^t = \exists\varphi^t.$$

定理 4.1。 [FS77，FS78] MIPC $\vdash \varphi$ 当且仅当对于 $\mathcal{L}_{\forall\exists}$ 的每个公式 φ，MS4 $\vdash \varphi^t$。

接下来，我们将众所周知的模态伴侣和直觉片段的概念（参见例如 [CZ97，第 9.6] 节）推广到单子情形。

定义 4.2。 [BC25，定义 4.4] 设 L 是一种单子直觉逻辑，M 是 MS4 的单子扩张。若满足以下条件，我们称 M 是 L 的模态伴侣，并称 L 是 M 的直觉片段：

$$\mathsf{L} \vdash \varphi \iff \mathsf{M} \vdash \varphi^t$$

对于 $\mathcal{L}_{\forall\exists}$ 的每个公式 φ。

为了刻画直觉模态逻辑的模态伴侣，我们需要回顾描述性 MIPC 框架之间以及描述性 MS4 框架之间的态射概念。为此，我们先回顾一下，两个克里普克框架 $\mathfrak{F}_1 = (X_1,\ R_1)$ 和 $\mathfrak{F}_2 = (X_2,\ R_2)$ 之间的一个*p*-态射是一个映射 $f\colon\ X_1 \to X_2$，满足 $R_2[f(x)] = fR_1[x]$，对每个 $x \in X_1$ 均成立。

定义 4.3。 [Bez99，第 4] 节。设 $\mathfrak{F}_1 = (X_1,\ R_1,\ Q_1)$ 和 $\mathfrak{F}_2 = (X_2,\ R_2,\ Q_2)$ 是描述性 MIPC 框架。映射 $f\colon\ X_1 \to X_2$ 若满足以下条件，则称为描述性 MIPC框架的态射

(1) f 是连续的，(2) $f\colon (X_1, R_1) \to (X_2, R_2)$ 是一个 p-态射，(3) $f\colon (X_1, Q_1) \to (X_2, Q_2)$ 是一个 p-态射，(4) 对每个 $x \in X_1$，$Q_2^{-1}[f(x)] = R_2^{-1} f Q_1^{-1}[x]$。

令 $\mathbf{DF}_{\mathsf{MIPC}}$ 表示描述性 MIPC 框架及其态射构成的范畴。

注 4.4. 上述定义的最后一个条件等价于

$$E_{Q_2}[f(x)] = R_2^{-1} f E_{Q_1}[x] \text{ for each } x \in X_1$$

（见 [Bez99，命题 16]）。然而，必须强调的是，这严格弱于声称 f 是关于 E_Q 的 p-态射（见 [BC25，例 5.16]）。

定义 4.5. [BC25，定义 3.8] 设 $\mathfrak{G}_1 = (Y_1, R_1, E_1)$ 和 $\mathfrak{G}_2 = (Y_2, R_2, E_2)$ 是描述性 MS4 框架。映射 $f\colon Y_1 \to Y_2$ 是一个描述性 MS4框架的态射，如果

(1) f 是连续的，(2) $f\colon (Y_1, R_1) \to (Y_2, R_2)$ 是 p-态射，(3) $f\colon (Y_1, E_1) \to (Y_2, E_2)$ 是 p-态射，

令 $\mathbf{DF}_{\mathsf{MS4}}$ 表示描述性 MS4 框架及其态射所构成的范畴。

注 4.6。 我们强调，上述定义的最后一个条件比注 4.4 中的条件更强。

接下来，我们将描述性 MS4 框架与描述性 MIPC 框架联系起来。为此，我们回顾一下骨架的概念。给定一个描述性 MS4 框架 $\mathfrak{G} = (Y, R, E)$，令 Q_E 为复合体 $E \circ R$；也就是说，

$$x\, Q_E\, y \iff \exists z \in Y : x\, R\, z \;\&\; z\, E\, y. \tag{$**$}$$

由于 R 是自反的，显然有 $E \subseteq Q_E$（但反过来并非总是成立）。这将在断言 5.16 中用到。

定义 4.7。

(1) 将描述性 MS4 框架 $\mathfrak{G} = (Y, R, E)$ 的骨架 定义为元组

$$\rho(\mathfrak{G}) \coloneqq (X, R', Q')$$

其中，X 是 Y 上由 R诱导的等价关系 E_R 对 Y 取商所得的集合（见（$*$）），$\pi\colon Y \to X$ 是商映射，

$$\pi(x)\, R'\, \pi(y) \iff x\, R\, y,$$

and

$$\pi(x)\, Q'\, \pi(y) \iff x\, Q_E\, y.$$

(2) 若 $\mathfrak{G}_1 = (Y_1, R_1, E_1)$、$\mathfrak{G}_2 = (Y_2, R_2, E_2)$，且 $f\colon \mathfrak{G}_1 \to \mathfrak{G}_2$ 是一个$\mathbf{DF}_{\mathsf{MS4}}$-态射，则我们定义 $\rho(f)\colon \rho(\mathfrak{G}_1) \to \rho(\mathfrak{G}_2)$为

$$\rho(f)(\pi_1(x)) = \pi_2(f(x))$$

对每个 $x \in Y_1$，其中 π_1, π_2 是相应的商映射。

引理 4.8. [BC25, 引理 5.15] $\rho\colon \mathbf{DF}_{\mathsf{MS4}} \to \mathbf{DF}_{\mathsf{MIPC}}$ 是一个定义良好的函子。

对于单子直觉逻辑 L，令 $\mathbf{DF}_{\mathsf{L}}$ 为$\mathbf{DF}_{\mathsf{MIPC}}$ 中由描述性 L-框架构成的满子范畴；对于 MS4 的单子扩张 M，类似地定义 $\mathbf{DF}_{\mathsf{M}}$。沿用[CZ97，第 261], 页，我们称满态射 $f\colon \mathfrak{F}_1 \to \mathfrak{F}_2$ 为一个约化。若存在从 $\mathfrak{F}_1$ 到 $\mathfrak{F}_2$的约化，则记作 $\mathfrak{F}_1 \twoheadrightarrow \mathfrak{F}_2$。对于描述性 MIPC 或 MS4-框架的类$\mathbf{K}$，令

$$\mathscr{R}(\mathbf{K}) = \{\mathfrak{F}_2 \mid \mathfrak{F}_1 \twoheadrightarrow \mathfrak{F}_2 \text{ for some } \mathfrak{F}_1 \in \mathbf{K}\}.$$

下一个定理刻画了给定单子直觉逻辑的所有模态伴侣。

定理 4.9。 [BC25，定理 5.12(2)] 设 L 是一个单子直觉逻辑。M 是 MS4 的单子扩张，当且仅当 L 的模态伴侣是 $\mathbf{DF}_{\mathsf{L}} = \mathscr{R}(\rho[\mathbf{DF}_{\mathsf{M}}])$。

注 4.10。 命题 [BC25，定理 5.12(2)] 的证明使用了代数语义，但利用代数语义与描述性框架语义之间的对偶等价性，可以得到上述等价的重新表述。

5. Esakia's theorem for $\mathsf{M}^{+}\mathsf{IPC}$

我们回顾一下（例如参见 [CZ97，第 93] 页）：格热戈尔奇克逻辑 Grz 是由格热戈尔奇克公理扩张 S4 得到的正规扩展。

$$\mathsf{grz} = \Box(\Box(p \to \Box p) \to p) \to p.$$

给定描述性 S4 框架 $\mathfrak{G} = (Y,\ R)$，我们回顾一下，$x \in Y$是 $U \subseteq Y$的极大点，当且仅当 $x \in U$ 并且

$$(\forall y \in U)(x\ R\ y \Longrightarrow x = y).$$

令 $\max U$表示 U的极大点集。描述性 Grz-框架有如下刻画：

定理 5.1。 [Esa19，第 71] 设 $\mathfrak{G} = (Y, R)$ 是一个描述性 S4-框架 .

(1) $\mathfrak{G}$ 是描述性 Grz-框架，当且仅当对每个开闭 $U \subseteq Y$，都有 $U \subseteq R^{-1}[\max U]$。(2) 若 R 是偏序，则 $\mathfrak{G}$ 是描述性 Grz-框架。(3) 若 $\mathfrak{G}$ 是有限的，则 $\mathfrak{G}$ 是 Grz-框架，当且仅当 R 是偏序。

正如我们在引言中指出的，Esakia [Esa79] 证明了以下 g:

定理 5.2（Esakia 定理）。 Grz 是 IPC的最大模态伴侣。因此，IPC 的模态伴侣构成 S4 的正规扩张格中的区间 [S4，Grz] 。

为了探究单子情形下的 Esakia 定理，我们需要扩展函子 σ。然而，正如我们在引言中指出的，σ 通常无法扩展，因为若 $\mathfrak{F} = (X,\ R,\ Q)$是一个描述性 MIPC 框架，那么 E_Q 可能不是连续关系，因此$(X,\ R,\ E_Q)$不是描述性 MS4 框架（例如，参见 [BC24，注 2.23]）。不过，显然，若 $\mathfrak{F}$是有限的，那么$(X,\ R,\ E_Q)$就是一个 MS4 框架。因此我们作如下定义：

定义 5.3. 对于有限 MIPC 框架 $\mathfrak{F} = (X,\ R,\ Q)$，令 $\sigma\mathfrak{F} = (X,\ R,\ E_Q)$；对于有限 MIPC 框架之间的态射 $f\colon \mathfrak{F}_1 \to \mathfrak{F}_2$，令 $\sigma f = f$。

我们使用 σ 和 ρ来获得有限 MIPC 框架与有限 MGrz-框架之间的关系。

引理 5.4。 对于每个有限 MGrz-框架 $\mathfrak{F} = (X, R, E)$，都有 $E = E_{Q_E}$。

证明。 由于 $\mathfrak{F}$ 是有限 MGrz-框架，因此 R 是偏序。于是，[适用 Bez99 引理 3(b)]，由此可得 $E = E_{Q_E}$。□

命题 5.5。

(1) 对于有限 MIPC-框架 $\mathfrak{F} = (X, R, Q)$，$\sigma\mathfrak{F}$ 是有限 MGrz-框架，且 $\mathfrak{F} \cong \rho\sigma\mathfrak{F}$。(2) 对于有限 MGrz-框架 $\mathfrak{G} = (Y, R, E)$，$\rho\mathfrak{G}$ 是有限 MIPC-框架，且 $\mathfrak{G} \cong \sigma\rho\mathfrak{G}$。

证明。(1) 由于 $\mathfrak{F}$ 是有限的，$\sigma\mathfrak{F}$也是有限的；由定理 5.1(3) 可知，$\sigma\mathfrak{F}$ 是一个 MGrz 框架。此外，由于对于所有 $x, y \in X$，

$$x\ Q\ y \iff \exists z \in X : x\ R\ z\ \&\ z\ E_Q\ y,$$

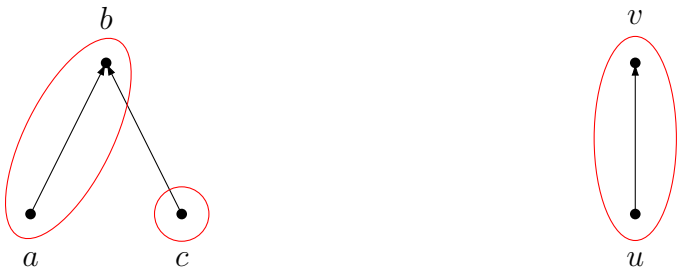
映射 $x \mapsto \{x\}$ 是一个双射，既保持又反映 R 和 Q。因此，它是 MIPC 框架 $\mathfrak{F}$ 与 $\rho\sigma\mathfrak{F}$之间的同构。

(2) 显然，$\rho\mathfrak{G}$ 是有限的，并且根据引理 4.8，它是一个 MIPC 框架。根据定理 5.1(3)，R是一个偏序。因此，由引理 5.4 可知，映射 $x \mapsto \{x\}$ 是一个双射，并且同时保持和反映 R 与 E。因此，它是 MGrz 框架 $\mathfrak{G}$和 $\sigma\rho\mathfrak{G}$之间的一个同构。□

定义 5.6. 令$\mathbf{Fin}_{\mathsf{MIPC}}$ 表示有限 MIPC 框架及其态射构成的范畴，令$\mathbf{Fin}_{\mathsf{MGrz}}$ 表示有限 MGrz 框架及其态射构成的范畴。

鉴于命题 5.5，我们可能会认为 ρ 和 σ 给出了$\mathbf{Fin}_{\mathsf{MGrz}}$ 与$\mathbf{Fin}_{\mathsf{MIPC}}$之间的等价。然而事实并非如此，因为存在 $\mathfrak{F}_1$，$\mathfrak{F}_2 \in \mathbf{Fin}_{\mathsf{MIPC}}$ 以及它们之间的一个$\mathbf{Fin}_{\mathsf{MIPC}}$-态射 f，使得 σf: $\sigma\mathfrak{F}_1 \to \sigma\mathfrak{F}_2$ 相对于 E_Q不是一个 p-态射，因此 σ 在态射上并未良定义：

例 5.7. 设 $\mathfrak{F}_1 = (X_1, R_1, Q_1)$ 和 $\mathfrak{F}_2 = (X_2, R_2, Q_2)$ 为下图所示的有限 MIPC 框架，其中黑色箭头表示偏序 R_1，R_2，红色圆圈表示等价关系 E_{Q_1}，E_{Q_2}。



$\mathfrak{F}_1$ $\mathfrak{F}_2$

对于 $i = 1, 2$，我们有 $\sigma\mathfrak{F}_i = (X_i, R_i, E_{Q_i})$。定义 $f: X_1 \to X_2$，使得 $f(a) = u$ 且 $f(b) = f(c) = v$。于是，由于

$$E_{Q_2}[f(c)] = \{u, v\} \neq \{v\} = fE_{Q_1}[c].$$

因此， $\sigma f = f$ 不是一个 $\mathbf{Fin}_{\mathsf{MGrz}}$-态射。另一方面， f 是一个 $\mathbf{Fin}_{\mathsf{MIPC}}$-态射，因为对于 $x = a,\ b$，有 $E_{Q_2}[f(x)] = fE_{Q_1}[x]$，并且

$$E_{Q_2}[f(c)] = \{u, v\} = R_2^{-1} f E_{Q_1}[c].$$

根据定理 4.9，若 M 是 MIPC 的一个模态伴侣，那么对每个有限 MIPC 框架 $\mathfrak{F}$，都存在一个描述性 M 框架 $\mathfrak{G}$，使得 $\rho\mathfrak{G} \twoheadrightarrow \mathfrak{F}$。证明 MIPC 的 Esakia 定理时，主要障碍在于我们不再拥有 $\mathfrak{G} \twoheadrightarrow \sigma\mathfrak{F}$，这导致了以下结果:

定理5.8。 [BC24，定理 5。10] MIPC 没有最大模态伴随逻辑。

当我们研究 Esakia 的修正版谓词直觉逻辑 [Esa98] 及其一元片段 M⁺IPC 时，情况便有所不同。

定义5.9。 [BBI23，第 429] 该修订的单子直觉演算 M⁺IPC 通过向MIPC 添加单子 *Casari* 公式而得到

$$\forall((p \to \forall p) \to \forall p) \to \forall p,$$

而修正版单子*Grzegorczyk*逻辑 M⁺Grz 则是通过向 MGrz 添加单子 Casari 公式的 G¨odel 翻译而得到。

命题 5.10。

(1) [BBI23, 定理 5.17] M⁺IPC 具有有限模型性质。(2) [BBI23, 引理 4.4] 有限的MIPC框架 $\mathfrak{F} = (X, R, Q)$ 是一个M⁺IPC框架，当且仅当

$$(\forall x, y \in X)(x\ R\ y\ \ and\ x\ E_Q\ y \Longrightarrow x = y).$$

注5.11。

(1) 命题 5.10(2) 中的条件称为具有干净簇（参见 [BBI23, 定义 3.6]）。(2) 命题 5.10(2) 可推广到所有描述性 MIPC 框架（参见 [Bez00, 引理 38] 以及 [BBI23, 引理 4.2]）。就我们的目的而言，研究有限 M⁺IPC 框架就足够了。(3) 关于描述性 M⁺Grz 框架的刻画，参见 [BBI23, 引理 4.8]。

定义5.12。 令$\mathbf{Fin}_{\mathsf{M^+IPC}}$ 表示$\mathbf{Fin}_{\mathsf{MIPC}}$ 中由 M⁺IPC 框架构成的满子范畴，而$\mathbf{Fin}_{\mathsf{M^+Grz}}$ 则表示 $\mathbf{Fin}_{\mathsf{MGrz}}$ 中由 M⁺Grz 框架构成的满子范畴。

定理5.13。 函子 ρ: $\mathbf{Fin}_{\mathsf{M^+Grz}} \to \mathbf{Fin}_{\mathsf{M^+IPC}}$ 和 σ: $\mathbf{Fin}_{\mathsf{M^+IPC}} \to \mathbf{Fin}_{\mathsf{M^+Grz}}$ 给出 $\mathbf{Fin}_{\mathsf{M^+Grz}}$ 与 $\mathbf{Fin}_{\mathsf{M^+IPC}}$之间的等价。

证明。根据命题 5.5，只需证明 σ 在 Fin$_{\mathsf{M^+IPC}}$-态射上定义良好。设 $\mathfrak{F}_1 = (X_1, R_1, Q_1)$ 和 $\mathfrak{F}_2 = (X_2, R_2, Q_2)$ 是有限的 M⁺IPC-框架，且f: $\mathfrak{F}_1 \to \mathfrak{F}_2$ 是一个 Fin$_{\mathsf{M^+IPC}}$-态射。只需证明对所有$x \in X_1$， $E_{Q_2}[f(x)] \subseteq fE_{Q_1}[x]$。设 $f(x)\ E_{Q_2}\ y$。根据注 4.4，存在 $z \in X_1$，使得 $x\ E_{Q_1}\ z$ 且 $y\ R_2\ f(z)$。由 $x\ E_{Q_1}\ z$ 可得 $f(x)\ E_{Q_2}\ f(z)$。因此， $y\ R_2\ f(z)$ 且 $y\ E_{Q_2}\ f(z)$。由于 $\mathfrak{F}_2$ 是一个 M⁺IPC-框架，根据命题 5.10(2)，有 $y = f(z)$，证毕。□

现在我们证明本文的主要结果：M⁺IPC 的模态伴侣构成 MS4 的单子扩张格中的区间 [M⁺S4，M⁺Grz]，其中 M⁺S4 是由单子 Casari 公式的 G¨odel 翻译得到的 MS4 的单子扩张。为此，我们使用以下内容：

定理 5.14。

(1) [BBI23，定理 4。12] M⁺Grz 是M⁺IPC的模态伴侣。(2) [BBI23，定理 6。16] M⁺Grz 具有有限模型性质。

定理 5.15。 M⁺Grz 是M⁺IPC的最大模态伴侣。

证明。 设 M 是 M⁺IPC 的模态伴侣。根据定理 5.14(2)，M⁺Grz 具有有限模型性质。因此，为了证明 M $\subseteq$M⁺Grz，只需证明每个有限的 M⁺Grz-框架 $\mathfrak{G}$都是一个 M-框架。根据定理 4.9 和 5.14(1)，$\mathbf{DF}_{\mathsf{M^+IPC}} = \mathscr{R}(\rho[\mathbf{DF}_{\mathsf{M^+Grz}}])$。因此，由于$\rho(\mathfrak{G}) \in \rho[\mathbf{DF}_{\mathsf{M^+Grz}}] \subseteq \mathscr{R}(\rho[\mathbf{DF}_{\mathsf{M^+Grz}}])$，我们得到 $\rho(\mathfrak{G}) \in \mathbf{DF}_{\mathsf{M^+IPC}}$。于是，由于 $\mathfrak{G}$ 是有限的，$\rho\mathfrak{G}$ 是一个有限的 M⁺IPC-框架。将定理 4.9 应用于 M，可得一个描述性 M 框架$\mathfrak{H}$，使得 $\rho\mathfrak{G} \in \mathscr{R}(\rho\mathfrak{H})$。

断言 5.16. 设 $\mathfrak{F} = (X, R, Q)$ 是一个有限 M⁺IPC 框架，$\mathfrak{H} = (Y, S, E)$ 是一个描述性 MS4 框架。若 $\rho\mathfrak{H} \twoheadrightarrow \mathfrak{F}$，则 $\mathfrak{H} \twoheadrightarrow \sigma\mathfrak{F}$。

断言的证明。设 $f\colon \rho\mathfrak{H} \to \mathfrak{F}$ 是 $\mathrm{DF}_{\mathsf{MIPC}}$ 中的一个约化。令 $\pi\colon \mathfrak{H} \to \rho\mathfrak{H}$ 为商映射。定义 $g\colon \mathfrak{H} \to \sigma\mathfrak{F}$，使得对每个 $y \in Y$，$g(y) = f\pi(y)$。由于 $\sigma\mathfrak{F} = (X, R, E_Q)$，显然 g 是一个良定义连续满射。因为 $\pi\colon (Y, S) \to (Y', S')$ 和$f\colon (Y', S') \to (X, R)$ 都是 p-态射，所以 $g\colon (Y, S) \to (X, R)$ 也是 p-态射。因此，只需证明$g\colon (Y, E) \to (X, E_Q)$ 是一个 p-态射。

首先，假设 $x, y \in Y$ 且 $x\ E\ y$。那么 $x\ Q_E\ y$ 且 $y\ Q_E\ x$（Q_E 的定义见 (∗∗)），因此根据定义 4.7(1)，$\pi(x)\ Q'\ \pi(y)$ 且 $\pi(y)\ Q'\ \pi(x)$。因此，$f\pi(x)\ Q\ f\pi(y)$ 且 $f\pi(y)\ Q\ f\pi(x)$，由此可得 $g(x)\ E_Q\ g(y)$（E_Q 的定义见 (∗)）。

接下来，假设 $x \in X$、$y \in Y$，且 $g(y)\ E_Q\ x$。那么 $f\pi(y)\ E_Q\ x$。由于 f 是描述性 MIPC 框架的一个态射，存在 $z \in Y$，使得 $\pi(y)\ E_{Q'}\ \pi(z)$ 且 $x\ R\ f\pi(z)$（见注 4.4）。前者意味着 $\pi(y)\ Q'\ \pi(z)$ 且 $\pi(z)\ Q'\ \pi(y)$。由 $\pi(z)\ Q'\ \pi(y)$ 可知 $z\ Q_E\ y$（见定义 4.7(1)），因此存在 $u \in Y$，使得 $z\ S\ u$ 且 $u\ E\ y$。由 $z\ S\ u$ 可知 $f\pi(z)\ R\ f\pi(u)$，结合 $x\ R\ f\pi(z)$ 可得 $x\ R\ f\pi(u)$，因此 $x\ R\ g(u)$。此外，$u\ E\ y$ 意味着 $g(u)\ E_Q\ g(y)$（见上一段）。后者与 $g(y)\ E_Q\ x$ 一起可得 $x\ E_Q\ g(u)$。由于 $\mathfrak{F}$ 是一个有限的 M⁺IPC 框架，由 $x\ R\ g(u)$ 和 $x\ E_Q\ g(u)$ 可知 $x = g(u)$（见命题 5.10(2)）。因此，存在 $u \in Y$，使得 $y\ E\ u$ 且 $g(u) = x$，于是 $f\colon (Y, E) \to (X, E_Q)$ 是一个 p-态射，证明得证。□

作为断言 5.16 的直接推论，我们得到 $\sigma\rho\mathfrak{G} \in \mathscr{R}(\mathfrak{H})$。这意味着 $\sigma\rho\mathfrak{G} \in \mathbf{DF}_{\mathsf{M}}$，因为 $\mathbf{DF}_{\mathsf{M}}$ 对 $\mathscr{R}$ 闭。因此，由于 $\sigma\rho\mathfrak{G} \cong \mathfrak{G}$，我们得出$\mathfrak{G}$是一个 M-框架。□

为了证明 M^{+}IPC 的模态伴侣构成 MS4 的单子扩张格中的区间 $[\mathrm{M}^{+}\mathrm{S4},\mathrm{M}^{+}\mathrm{Grz}]$，还需证明 M^{+}S4 是 M^{+}IPC 的最小模态伴侣。为此，给定一个单子直觉逻辑 L，令

$$\tau(\mathsf{L}) = \mathsf{MS4} + \{\varphi^t : \mathsf{L} \vdash \varphi\}.$$

命题 5.17。

(1) [BC24, 命题 3。9] 设 Γ 是 $\mathcal{L}_{\forall\exists}$ 中的一组公式。那么

$$\tau(\mathsf{MIPC} + \Gamma) = \mathsf{MS4} + \{\gamma^t : \gamma \in \Gamma\}.$$

(2) [BC24, 命题 3。11] 若 L 是 *Kripke* 完备的单子直觉逻辑，则 $\tau(\mathsf{L})$ 是 L 的模态伴侣。

注 5.18。 我们强调，命题 5.17(2) 中 L 是 Kripke 完备的这一假设至关重要；至于 τ(L) 是否为任意单子直觉逻辑 L 的模态伴侣，目前仍是一个开放问题（见 [BC24, 注 3。10]）。

结合定理 5.15 和命题 5.17，可得：

定理 5.19. M^{+}IPC 的模态伴侣构成了M [S4与M^{+}Grz] 之间的区间，该区间位于MS4的单子扩张格中。

证明. 由命题 5.17(1)，$\mathrm{M}^{+}\mathrm{S4} = \tau(\mathrm{M}^{+}\mathrm{IPC})$。因此，由命题 5.10(1) 和命题 5.17(2)，M^{+}S4 是 M^{+}IPC 的模态伴侣。设 M 是 M^{+}IPC 的一个模态伴侣。由定理 5.15，M $\subseteq$ M^{+}Grz。此外，由于 M 证明 Casari 公式的 G¨odel 翻译，$\mathrm{M}^{+}\mathrm{S4} \subseteq$M，证毕。□

注 5.20. MIPC 的代数语义由单子 Heyting 代数[Bez98], 给出，而 MS4 的代数语义由单子 S4 代数 [BBI23, BC25] 给出。利用单子 Heyting 代数范畴与描述性 MIPC 框架范畴之间的对偶等价 [Bez99]，以及单子 S4 代数范畴与描述性 MS4 框架范畴之间的对偶等价 [BC25],，上述结果可表述如下：一个单子 S4 代数簇是与 M^{+}IPC 的某个模态伴侣对应的簇，当且仅当它包含 M^{+}Grz 代数簇且包含于 M^{+}S4 代数簇。

References

[BBI23] G. Bezhanishvili、K. Brantley 和 J. Ilin。《具有可证性解释的单子直觉主义逻辑与模态逻辑》。《符号逻辑杂志》，88(1):427–467，2023年。[BC23] G. Bezhanishvili 和L. Carai。《单子直觉主义量词的时间解释》。《*Rev. Symb. Log.*》，16(1):164–187，2023年。[BC24] G. Bezhanishvili 和 L. Carai。《单子情形下 Esakia 定理的失效》。已投稿。可见 arXiv:2409.05607，2024年。[BC25] G. Bezhanishvili 和 L. Carai。《单子情形下 Blok-Esakia 定理的失效》。《*Ann. Pure Appl. Logic*》，176(4):论文编号 103527，2025年。[Bez98] G. Bezhanishvili。《单子 Heyting 代数簇 I》。《逻辑学研究》，61(3):367–402，1998年。[Bez99] G. Bezhanishvili。《单子 Heyting 代数簇 II：对偶理论》。《逻辑学研究》，62(1):21–48，1999年。[Bez00] G. Bezhanishvili。《单子 Heyting 代数簇 III》。《逻辑学研究》，64(2):215–256，2000年。

[BK24] G. Bezhanishvili 和 M. Khan。《单子 Grzegorczyk 逻辑》。已投稿。可见 arXiv:2412.10854，2024年。[Bul66] R. A. Bull。《作为直觉主义模态概念形式化的 MIPC》。《符号逻辑杂志》，31(4):609–616，1966年。[CZ97] A. Chagrov 和 M. Zakharyaschev。《模态逻辑》，牛津逻辑指南丛书第35卷。克拉伦登出版社、牛津大学出版社，纽约，1997年。[Esa79] L. Esakia。《关于 Grzegorczyk 代数簇》。载于《非经典逻辑与集合论研究》（俄文），第257–287页。科学出版社，莫斯科，1979年。[Esa98] L. Esakia。《带有可证性意味的直觉主义逻辑中的量化》。《Bull. Sect. Logic Univ. L ´od ´z》，27:26–28，1998年。[Esa19] L. Esakia。《海廷代数：对偶理论》，逻辑学趋势丛书第50卷。A. Evseev 由俄文译出，G. Bezhanishvili 和 W. Holliday 编。施普林格，2019年。[FS77] G. Fischer Servi。《以直觉主义为基底的模态逻辑》。Studia Logica，36(3):141–149，1977年。[FS78] G. Fischer Servi。《MIPQ 的有限模型性质及其若干推论》。《圣母大学形式逻辑杂志》，19(4):687–692，1978年。[GKWZ03] D. M. Gabbay、A. Kurucz、F. Wolter 和 M. Zakharyaschev。《多维模态逻辑：理论与应用》，逻辑与数学基础研究丛书第148卷。北荷兰出版公司，阿姆斯特丹，2003年。[Nau91] P. G. Naumov。《相对于直觉主义谓词演算保守的模态逻辑》。《莫斯科大学数学通报》（俄文），6:86–90，1991年。[Ono77] H. Ono。《关于若干直觉主义模态逻辑》。《数理科学研究所出版物》，13(3):687–722，1977年。[Ono87] H. Ono。《中间谓词逻辑中的若干问题》。《数学逻辑报告》，21:55–67，1987年。[OS88] H. Ono 和 N.-Y. Suzuki。《直觉主义模态逻辑与中间谓词逻辑之间的关系》。《数学逻辑报告》，22:65–87，1988年。[Pri57] A. N. Prior。《时间与模态》。克拉伦登出版社、牛津大学出版社，纽约，1957年。

New Mexico State University电子邮箱地址：guram@nmsu.edu

University of Milan电子邮箱地址：luca.carai.uni@gmail.com