arXiv:2512.18188v1 [math.CA] 20 Dec 2025

离散立方体上卷积的上确界

´ ´JOSE GAITAN 和 JOSE
MADRID

ABSTRACT. 我们求出最优常数 C，使得

$$\|f_1 * f_2 * \cdots * f_k\|_\infty \geqslant C \prod_{i=1}^{k} \|f_i\|_1$$

对于函数 f_i： $\{0,1\}^d \to \mathbb{R}$。作为应用，我们推导出超立方体上 Sidon 集的界，并进一步得到连续类比问题的界。

1. INTRODUCTION

对于加法群 G 的子集 A_1， A_2， $\ldots A_n$，我们定义和集

$$A_1 + A_2 \cdots + A_n := \{a_1 + a_2 + \cdots + a_n;\ a_i \in A_i \text{ for all } i\},$$

以及 kA**:=** $A_1 + A_2 + \cdots + A_k$**,** $A_i = A$ 对于 $1 \leqslant i \leqslant k$。

若集合 $A \subset G$ 满足

$$|\{(a_1, a_2, \ldots, a_k) \in A^k; a_1 + a_2 + \cdots + a_k = a\}| \leqslant g \qquad (1.1)$$

对所有 $a \in kA$。

自 Cilleruelo、Ruzsa 和 Vinuesa 的结果 [3] 将 Sidon 集大小的最优界与卷积上确界的最优界联系起来以来，这些问题便吸引了许多作者的关注。具体而言，寻找满足下式的最佳常数 C 的问题

$$\|f * f\|_\infty \geqslant C\|f\|_1^2$$

对所有支撑在 $(-1/4,\ 1/4)$ 上的非负函数 f： $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$，已在 [4], [5], [8],[14],[17] 和 [23]中得到研究。目前已知的最佳界为

$$1.28 < C < 1.51. \qquad (1.2)$$

下界由 Cloninger 和 Steinerberger 建立 [5],上界此前由 Matolcsi 和 Vinuesa 在

2020 数学主题分类。39A12, 26D15, 11B30, 11B13,关键词和短语。卷积；超立方体；Sidon 集；最优界。1

[17] 通过对阶梯函数进行数值分析得出。Matolcsi 和 Vinuesa 也曾观察到 [17, 注 4。1] 即

$$C = \lim_{m\to\infty} 2(m+1)\bar{C}_{2,m}, \text{ and } C \leqslant 2(m+1)\bar{C}_{2,m} \text{ for all } m \geqslant 1,$$

¯其中，对任意 $k, m \in \mathbb{N}$, $C_{k,m}$ 表示满足以下条件的最佳常数

$$\|\underbrace{f * f * \cdots * f}_{k}\|_\infty \geqslant \bar{C}_{k,m}\|f\|_1^k$$

对所有 $f\colon \{0,1,\dots,m\} \to \mathbb{R}$ 均成立。我们还用 $C_{k,m}$ 表示满足以下条件的最佳常数

$$\|f_1 * f_2 * \cdots * f_k\|_\infty \geqslant C_{k,m}\prod_{i=1}^{k}\|f_i\|_1$$

对所有函数 $f_i\colon \{0,1,\dots,m\} \to \mathbb{R}$, $1 \leqslant i \leqslant k$ 均成立。

2. Main results and convolution inequalities on $\{0,1\}^d$

我们的主要结果给出了 $C_{k,1}$ 的精确公式。

定理 2.1. 令 $k \in \mathbb{N}$, $k \geqslant 2$, 则

$$\begin{aligned} C_{k,1} = \bar{C}_{k,1} &= \binom{k}{\lfloor k/2\rfloor}\left(\frac{\lfloor\frac{k+1}{2}\rfloor\lceil\frac{k+1}{2}\rceil}{(\lfloor\frac{k+1}{2}\rfloor+\lceil\frac{k+1}{2}\rceil)^2}\right)^{\frac{k}{2}} \\ &= \begin{cases} \frac{\binom{k}{\lfloor k/2\rfloor}}{2^k}, & \text{if } k \text{ odd}, \\ \frac{\binom{k}{\lfloor k/2\rfloor}}{2^k}\left(1-\frac{1}{(k+1)^2}\right)^{\frac{k}{2}}, & \text{if } k \text{ even}. \end{cases} \end{aligned}$$

注：令 $k \in \mathbb{N}$, $k \geqslant 2$。与 [17, 注 4.1] 类似。若我们将 C_k 记为满足下述条件的最佳常数

$$\|\underbrace{f * f * \cdots * f}_{k}\|_\infty \geqslant C_k\|f\|_1^k$$

对所有支撑在 $(-\frac{1}{2k}, \frac{1}{2k})$ 上的非负函数 f，均有：$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$，则 $-$

$$C_k = \lim_{m\to\infty} k(m+1)\bar{C}_{k,m}, \text{ and } C_k \leqslant k(m+1)\bar{C}_{2,m} \text{ for all } m \geqslant 1.$$

这可通过考察简单函数立即得出
$f(x) := \sum_{j=1}^{k} a_j\chi_{[-\frac{1}{2k}+\frac{j-1}{k^2}, -\frac{1}{2k}+\frac{j}{k^2}]}(x)$ for $a_1,\dots,a_k \in \mathbb{R}_{\geqslant 0}$.

推论 1. 设 $k \in \mathbb{N}, k \geqslant 2$。以下不等式成立

$$C_k \leqslant 2kC_{k,1}.$$

近年来，受加法组合学和信息论应用的启发，人们研究了许多定义在超立方体上的实值函数的卷积不等式。例如，为了获得加法能量 [13], [7], 、不相交划分的数量 [12],以及和集 [2], [18], [10]的界。

对于任意 k，$d \geqslant 1$，以及任意 f_1，.....，f_k：$\{0,1\}^d \to \mathbb{R}$ 我们有：若$f_1 * f_2 * \ldots * f_k$支撑于 $\{0,1,\ldots,k\}^d$，则（因为一组数的最大值大于其平均值）

$$\|f_1 * f_2 * \ldots * f_k\|_{\ell^\infty(\mathbb{Z}^d)} \geqslant \frac{1}{(k+1)^d} \prod_{j=1}^{k} \|f_j\|_1. \tag{2.1}$$

下一个结果给出了一个最优界，改进了（2.1）。

定理 2.2。对于任意 k、$d \geqslant 1$，以及任意 f_1、.....、f_k：$\{0,1\}^d \to \mathbb{R}$ 我们有

$$\|f_1 * f_2 * \ldots * f_k\|_{\ell^\infty(\mathbb{Z}^d)} \geqslant \binom{k}{\lfloor k/2 \rfloor}^d \left(\frac{\lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor \lceil \frac{k+1}{2} \rceil}{(\lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor + \lceil \frac{k+1}{2} \rceil)^2} \right)^{\frac{kd}{2}} \prod_{j=1}^{k} \|f_j\|_1. \tag{2.2}$$

$$= \begin{cases} \frac{\binom{k}{\lfloor k/2 \rfloor}^d}{2^{kd}} \prod_{j=1}^{k} \|f_j\|_1, & \text{if } k \text{ odd}, \\ \frac{\binom{k}{\lfloor k/2 \rfloor}^d}{2^{kd}} \left(1 - \frac{1}{(k+1)^2}\right)^{\frac{kd}{2}} \prod_{j=1}^{k} \|f_j\|_1, & \text{若 } k \text{ 为偶数。} \end{cases} \tag{2.3}$$

此外，对于每个固定的 k，这个不等式都是尖锐的；当 $f_i(x_1$、.....、$x_d)$：$= \left(k - \lfloor \frac{k}{2} \rfloor\right)^{\sum_{i=1}^d x_i} \left(\lfloor \frac{k}{2} \rfloor + 1\right)^{d - \sum_{i=1}^d x_i}$对所有$x \in \{0,1\}^d$、$1 \leqslant i \leqslant k$都成立时，等号成立。特别地，若 k 为奇数，则当 $f_i(x)$：$= \binom{k+1}{2}^d$对所有 $x \in \{0,1\}^d$、$1 \leqslant i \leqslant k$都成立时，等号成立。

推论 2。对于所有 $A \subset \{0,1\}^d$，我们有

$$\max_{x \in kA} |\{(a_1,\ldots,a_k) \in A^k; a_1 + \cdots + a_k = x\}| \geqslant \binom{k}{\lfloor k/2 \rfloor}^d \left(\frac{\lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor \lceil \frac{k+1}{2} \rceil}{(\lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor + \lceil \frac{k+1}{2} \rceil)^2} \right)^{\frac{kd}{2}} |A|^k. \tag{2.4}$$

特别地，若 k 为奇数且 A是一个 $g-$阶 *Sidon* 集 k，则 $|A|^k \leqslant g^{2^{kd}} (\frac{k}{\lfloor k/2 \rfloor})^d$。

注：若 k 为奇数且 $A = \{0,1\}^d$，则(2.4)两边均等于 $\binom{k}{\lfloor k/2 \rfloor}^d$。

推论 *2* 的证明。取所有 $1 \leqslant i \leqslant k$ 均为 $f_i = \chi_A$，即可由定理 2.2 得出。□

3. 证明主要结果

定理 *2.2* 的证明。这可通过标准的维度压缩（张量化）论证，由定理 2.1 推出 [2, 命题 2.1],为完整起见，我们在此给出详细证明。

假设 (2.2) 对 $d = 1$ 成立。对于任意 $(\bar{x}, x') \in \mathbb{Z}^{d-1} \times \mathbb{Z}$，定义 $\bar{f}_i \colon \mathbb{Z}^{d-1} \to \mathbb{R}$，其中 $\bar{f}_i(z) := \sum_{y=0}^{1} f_i(\bar{z}, y)$，则有

$$
\begin{aligned}
&\max_{x \in \{0,1,\dots,k\}^d} f_1 * f_2 * \cdots * f_k(\bar{x}, x') \\
&= \max_{\bar{x} \in \{0,1,\dots,k\}^{d-1}} \sum_{\sum \bar{x}_i = \bar{x}} \max_{x' \in \{0,1,\dots,k\}} \sum_{\sum x'_i = x'} \prod_{i=1}^{k} f_i(\bar{x}_i, x'_i) \\
&\overset{\text{case } d=1}{\geqslant} \max_{\bar{x} \in \{0,1,\dots,k\}^{d-1}} \sum_{\sum \bar{x}_i = \bar{x}} C \prod_{i=1}^{k} \sum_{y=0}^{1} f_i(\bar{x}_i, y) \\
&= C \max_{\bar{x} \in \{0,1,\dots,k\}^{d-1}} \sum_{\sum \bar{x}_i = \bar{x}} \prod_{i=1}^{k} \bar{f}_i(\bar{x}_i) \\
&= C \max_{x \in \{0,1,\dots,k\}^{d-1}} \bar{f}_1 * \bar{f}_2 * \cdots * \bar{f}_k(\bar{x}) \\
&\overset{\text{iterate}}{\geqslant} \dots C^d \prod_{i=1}^{k} \|f_i\|_1.
\end{aligned}
$$

□

定理 *2.1* 的证明。给定函数 $f_i \colon \{0,1\} \to \mathbb{R}$，其中 $1 \leqslant i \leqslant k$。不失一般性，我们假设 $f_i \neq 0$，否则 (2.2) 显然成立。定义 $x_i := \frac{f_i(1)}{f_i(0)+f_i(1)}$，对每个 $1 \leqslant i \leqslant k$，(2.2) 等价于证明

$$
\begin{aligned}
&\inf_{0 \leqslant x_i \leqslant 1} \max_{0 \leqslant m \leqslant k} \sum_{i_1, i_2, \dots, i_m} x_{i_1} \dots x_{i_m} \prod_{j \notin \{i_1, \dots, i_m\}} (1 - x_j) \qquad (3.1) \\
&= \binom{k}{\lfloor k/2 \rfloor} \left(\frac{\lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor \lceil \frac{k+1}{2} \rceil}{(\lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor + \lceil \frac{k+1}{2} \rceil)^2} \right)^{\frac{k}{2}}.
\end{aligned}
$$

3.1. 对角情形。 以下引理对应于情形 $x_1 = x_2 = \cdots = x_k$ 在 (3.1) 中。

引理 3.1。 设 $k \geqslant 1$，则下列恒等式成立

$$\bar{C}_{k,1} = \inf_{x\in[0,1]} \max_{0\leqslant m\leqslant k} \binom{k}{m} x^{k-m}(1-x)^m = \binom{k}{\lfloor k/2 \rfloor} \left(\frac{\lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor \lceil \frac{k+1}{2} \rceil}{(\lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor + \lceil \frac{k+1}{2} \rceil)^2} \right)^{\frac{k}{2}}. \tag{3.2}$$

引理 *3.1* 的证明。 我们注意到

$$\begin{aligned} \binom{k}{i} x^{k-i}(1-x)^i &= \binom{k}{i+1} x^{k-i-1}(1-x)^{i+1} \frac{i+1}{k-i} \frac{x}{1-x} \\ &\geqslant \binom{k}{i+1} x^{k-i-1}(1-x)^{i+1}, \end{aligned} \tag{3.3}$$

对所有 $x \geqslant \frac{k-i}{k+1}$ （当 $x = \frac{k-i}{k+1}$ 时取等号）。于是，对于任意 $0 \leqslant i \leqslant k$

$$\max_{0\leqslant m\leqslant k} \binom{k}{m} x^{k-m}(1-x)^m = \binom{k}{i} x^{k-i}(1-x)^i,$$

对所有 $x \in \left[\frac{k-i}{k+1}, \frac{k+1-i}{k+1} \right]$。

对于每个 $k \geqslant 1$ 和 $0 \leqslant i \leqslant k$，我们定义函数 $g_{k,i} : \left[\frac{k-i}{k+1}, \frac{k+1-i}{k+1} \right] \to \mathbb{R}$，其定义为 $g_{k,i}(x) := x^{k-i}(1-x)^i$。我们注意到，$g_{k,i}$ 关于 $\left[\frac{k-i}{k+1}, \frac{k-i}{k} \right]$ 递增，关于 $\left[\frac{k-i}{k}, \frac{k+1-i}{k+1} \right]$ 递减，因为 $g'_{k,i}(x) = x^{k-i-1}(1-x)^{i-1}[(k-i) - kx]$。因此

$$g_{k,i}(x) \geqslant \min \left\{ g_{k,i}\left(\frac{k-i}{k+1} \right), g_{k,i}\left(\frac{k+1-i}{k+1} \right) \right\}$$

对所有 $x \in \left[\frac{k-i}{k+1}, \frac{k+1-i}{k+1} \right]$ 均成立。此外，注意到由 (3.3) 可得 $\binom{k}{i} g_{k,i}\left(\frac{k-i}{k+1} \right) = \binom{k}{i+1} g_{k,i+1}\left(\frac{k-i}{k+1} \right)$。于是，由 $h : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ 定义的函数 $h(x) := \binom{x}{x+1}^x$ 是递减函数（当 $x \to \infty$ 时递减至 $\frac{1}{e}$），因此我们有

$$\left(\frac{k-i}{k-i+1} \right)^{k-i} \leqslant \left(\frac{i}{i+1} \right)^i$$

对所有 $i \leqslant \frac{k}{2}$ 均成立。等价地，我们有

$$g_{k,i}\left(\frac{k-i}{k+1} \right) \leqslant g_{k,i}\left(\frac{k+1-i}{k+1} \right).$$

由此，根据对称性，我们得出

$$\begin{aligned}\inf_{x\in[0,1]}\max_{0\leqslant m\leqslant k}\binom{k}{m}x^{k-m}(1-x)^m &= \min_{0\leqslant i\leqslant k/2}\binom{k}{i}g_{k,i}\left(\frac{k-i}{k+1}\right)\\ &= \binom{k}{\lfloor\frac{k}{2}\rfloor}g_{k,\lfloor\frac{k}{2}\rfloor}\left(\frac{k-\lfloor\frac{k}{2}\rfloor}{k+1}\right)\\ &= \binom{k}{\lfloor k/2\rfloor}^d\left(\frac{\lfloor\frac{k+1}{2}\rfloor\lceil\frac{k+1}{2}\rceil}{(\lfloor\frac{k+1}{2}\rfloor+\lceil\frac{k+1}{2}\rceil)^2}\right)^{\frac{k}{2}}.\end{aligned}$$

□

3.2. 从一般情形到对角情形。 根据引理 3.1¯，只需证明 $C_{k,\ 1}=C_{k,\ 1}$；为此，采用概率解释会很方便。设 $\boldsymbol{p}=(p_1,\ \ldots,\ p_k)\in(0,\ 1)^k$ 是 $k\geqslant 2$ 的一个 k元参数组。对于所有 $1\leqslant i\leqslant k$，注意到每个由 $f_i(1)=p_i$和 $f_i(0)=1-p_i$定义的函数$f_i\colon\{0,1\}\to[0,1]$，都是成功概率为 $p_i\in[0,1]$的伯努利随机变量。卷积$f_1*f_2*\ldots*f_k\colon\{0,1,\ldots,k\}\to\mathbb{R}$ 可以表示为

$$f_{k,i}(\boldsymbol{p}):=(f_1*f_2*\ldots*f_k)(i).$$

$f_{k,\ i}(\boldsymbol{p})$ 等于一组 k 相互独立的伯努利随机变量中恰有 i 次成功的概率，这就是成功概率为 $[p_1,\ldots,p_k]$ 的泊松二项分布（泊松二项分布的概率质量函数）的概率质量函数的定义（也常称为伯努利和）。

3.2.1. 证明策略、记号与基本性质。我们将从这一概率论的视角来理解卷积 $f_{k,\ i}(\boldsymbol{p})$，并利用泊松二项分布的性质。在 3.2.2 中，我们将分析归结为交点$\bigcup_{i=1}^k\mathcal{P}_{k,\ i}$，，其中 $\mathcal{P}_{k,\ i}:=\{\boldsymbol{p}\in(0,\ 1)^k:f_{k,\ i}(\boldsymbol{p})=f_{k,\ i-1}(\boldsymbol{p})\}$。在 3.2.4 中，我们将证明其下确界值

$$\inf_{\boldsymbol{p}\in[0,1]^k}\|f_1*f_2*\ldots*f_k\|_\infty=\inf_{\boldsymbol{p}\in[0,1]^k}\max_{0\leqslant i\leqslant k}\{f_{k,i}(\boldsymbol{p})\}\tag{3.4}$$

必须在 $f_1=f_2=\ldots=f_k$ 时取到，这将问题归结为引理 3.1。

我们将 $\boldsymbol{p}'_j:=(p_1,\ p_2,\ \ldots\ldots,\ p_{j-1},\ p_{j+1},\ \ldots\ldots,\ p_k)\in(0,\ 1)^{k-1}$ 记作删除了 j第 j 个条目后的参数向量 $\boldsymbol{p}$。于是

$$f_{k-1,i}(\boldsymbol{p}'_j):=(f_1*f_2*\ldots*f_{j-1}*f_{j+1}*\cdots*f_k)(i),$$

这是忽略第 $j-$ 个伯努利随机变量时 i 次试验成功的概率。我们有递归关系

$$f_{k,i}(\boldsymbol{p}) = (1-p_j)f_{k-1,i}(\boldsymbol{p}'_j) + (p_j)f_{k-1,i-1}(\boldsymbol{p}'_j), \tag{3.5}$$

这对所有 $0 \leqslant i,j \leqslant k$ 均成立，约定 $f_{k-1,k}(\boldsymbol{p}'_j) = f_{1,-1}(\boldsymbol{p}'_j) = 0$。

泊松二项分布的第一个性质是它们是单峰的。也就是说，“先递增后递减，且众数唯一，或由两个相邻整数 i 和 $i-1$ 共有”（如 [22] 所述）。更准确地说，对于每一组参数$\boldsymbol{p} \in [0,1]^k$，都存在唯一的指标 $0 \leqslant i \leqslant k$，使得

$$f_{k,k}(\boldsymbol{p}) < \cdots < f_{k,i+1}(\boldsymbol{p}) < f_{k,i}(\boldsymbol{p}) \geqslant f_{k,i-1}(\boldsymbol{p}) > \cdots > f_{k,1}(\boldsymbol{p}) > f_{k,0}(\boldsymbol{p}). \tag{3.6}$$

其中，这个指标值 i 称为众数。对于每个 $\boldsymbol{p} \in [0,1]^k$，序列 $\{f_{k,j}(\boldsymbol{p})\}$ 的最大值在 $f_{k,i}(\boldsymbol{p})$ 处唯一取得；或者该最大值可由 $f_{k,i}(\boldsymbol{p}) = f_{k,i-1}(\boldsymbol{p})$ 共有，这称为单峰性。。

众所周知，泊松二项分布也是一种对数凹分布，即

$$f_{k,i}(\boldsymbol{p})^2 \geqslant f_{k,i-1}(\boldsymbol{p}) f_{k,i+1}(\boldsymbol{p}) \tag{3.7}$$

对于 $1 \leqslant i \leqslant k$，且对于所有 $\boldsymbol{p} \in [0,1]^k$。但它确实属于一类满足更强性质的分布，即超对数凹性，其定义通常为

$$f_{k,i}(\boldsymbol{p})^2 \geqslant \left(\frac{i+1}{i}\right)\left(\frac{k-i+1}{k-i}\right) f_{k,i-1}(\boldsymbol{p}) f_{k,i+1}(\boldsymbol{p}). \tag{3.8}$$

对于 $1 \leqslant i \leqslant k-1$，参见 [22, 定理 2] 或 [20, 推论 4.2]。

3.2.2. 化简为交点。不妨将$f_{k,i}(\boldsymbol{p}) = f_{k,i}(\boldsymbol{p}'_j, p_j)$视为线性函数 $f_{k,i}(\boldsymbol{p}'_j, \cdot) : [0,1] \to [0,1]$，其由 (3.5) 定义。概率分布还有一个性质如下：单调似然比。

命题 3.2. 设 $1 \leqslant i \leqslant k$ 和 $\boldsymbol{p}'_j \in (0,1)^{k-1}$。那么

(1)

$$r_{k,i}(\boldsymbol{p}'_j, p_j) := \frac{f_{k,i}(\boldsymbol{p}'_j, p_j)}{f_{k,i-1}(\boldsymbol{p}'_j, p_j)} \tag{3.9}$$

是 $p_j \in [0,1]$ 上的递增函数。

(2)

$$r_{k,i+1}(\boldsymbol{p}) < r_{k,i}(\boldsymbol{p}) \tag{3.10}$$

对所有 $1 \leqslant i \leqslant k$ 和任意 $\boldsymbol{p} \in [0,1]^k$，在指标 i 上递减。

注：事实上，比值 $r_{k,i}(\boldsymbol{p}'_j, p_j)$ 在 $p_j \in [0,1]$ 上也是凹的，但就我们的目的而言，只需要单调性。

证明。根据递归关系 (3.5)，表达式 $r_{k,\ i}$ 的分子和分母都是关于 p_j 的线性函数，更确切地说

$$r_{k,i}(\boldsymbol{p}'_j, p_j) = \frac{p_j\Big(f_{k-1,i-1}(\boldsymbol{p}'_j) - f_{k-1,i}(\boldsymbol{p}'_j)\Big) + f_{k-1,i}(\boldsymbol{p}'_j)}{p_j\Big(f_{k-1,i-2}(\boldsymbol{p}'_j) - f_{k-1,i-1}(\boldsymbol{p}'_j)\Big) + f_{k-1,i-1}(\boldsymbol{p}'_j)}. \quad (3.11)$$

那么，导数 $dr_{k,\ \ dp_j}{}^{i}$ 的符号由下式给出

$$\begin{aligned}&\big(f_{k-1,i-1}(\boldsymbol{p}'_j) - f_{k-1,i}(\boldsymbol{p}'_j)\big) f_{k-1,i-1}(\boldsymbol{p}'_j)\\ &\quad - \big(f_{k-1,i-2}(\boldsymbol{p}'_j) - f_{k-1,i-1}(\boldsymbol{p}'_j)\big) f_{k-1,i}(\boldsymbol{p}'_j)\\ =&f_{k-1,i-1}(\boldsymbol{p}'_j)^2 - f_{k-1,i}(\boldsymbol{p}'_j) f_{k-1,i-2}(\boldsymbol{p}'_j) > 0\end{aligned}$$

其中，最后一个不等式由超对数凹性性质 (3.8) 得出，因此对于所有 $p_j \in (0,\ 1)$，都有 $dr_{k,\ \ dp_j}{}^{i} > 0$。

第二部分同样由 (3.8) 得出，因为 $\binom{i+1}{i}\binom{k-i+1}{k-i} > 1$，然后，重新整理各项可得 $\frac{f_{k,\ i}(\boldsymbol{p})\ f_{k,\ i-1}(\boldsymbol{p})}{f_{k,\ i+1}(\boldsymbol{p})\ f_{k,\ i}(\boldsymbol{p})} > 1$，或者等价地 $r_{k,\ i}(\boldsymbol{p}) > r_{k,\ i+1}(\boldsymbol{p})$。□

根据前一个命题，对于固定的 $\boldsymbol{p}'_j \in (0,\ 1)^{d-1}$，比值 $r_{k,\ i}(\boldsymbol{p}'_j,\ p_j)$ 等于 1 的 $p_j \in [0,1]$ 至多有一个。事实上，由 (3.11) 解出 p_j，可得 $r_{k,\ i}(\boldsymbol{p}'_j,\ p_j^*) = 1$ 当且仅当

$$p_j^* := \frac{f_{k-1,i-1}(\boldsymbol{p}'_j) - f_{k-1,i}(\boldsymbol{p}'_j)}{2f_{k-1,i-1}(\boldsymbol{p}'_j) - f_{k-1,i}(\boldsymbol{p}'_j) - f_{k-1,i-2}(\boldsymbol{p}'_j)} \in [0,1].$$

由 $r_{k,i}(\boldsymbol{p}'_j, p_j)$ 的单调性可得以下关于当 p_j 取值在 p_j^* 附近时主模态保持不变的结果。

命题 3.3。设参数 $[\boldsymbol{p}'_j, p_j^*] \in [0,1]^k$ 的某种取值使指标 i 成为主模态，则

$$\max_{0\leqslant i\leqslant k}\{f_{k,i}(\boldsymbol{p}'_j, p_j)\} = \begin{cases} f_{k,i-1}(\boldsymbol{p}'_j, p_j), & if \quad p_j \in (0, p_j^*)\\ f_{k,i-1}(\boldsymbol{p}'_j, p_j) = f_{k,i}(\boldsymbol{p}'_j, p_j), & if \quad p_j = p_j^*\\ f_{k,i}(\boldsymbol{p}'_j, p_j), & if \quad p_j \in (p_j^*, 1)\end{cases}$$

此外，以下图 *1* 对所有 $p_j \in$ （0，1） 都是准确的。

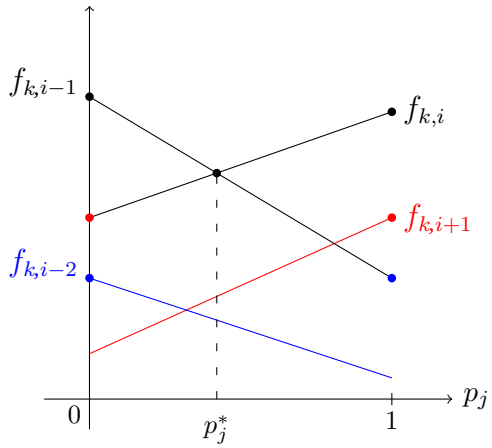

FIGURE 1

证明。 我们将验证 $f_{k,\ i}$ 是一个斜率为正的线性方程，而 $f_{k,\ i-1}$ 的斜率为负。这可以通过使用（3.11）以及 $r_{k,\ i}$的单调性看出，注意

$$\frac{f_{k-1,i}(\boldsymbol{p}'_j)}{f_{k-1,i-1}(\boldsymbol{p}'_j)} = r_{k,i}(\boldsymbol{p}'_j, 0) < r_{k,i}(\boldsymbol{p}'_j, p_j^*) = 1,$$

因此，$f_{k-1,i}(\boldsymbol{p}'_j) < f_{k-1,i-1}(\boldsymbol{p}'_j)$，由 (3.5) 可知，$f_{k,i}$ 的斜率为正。同理，利用 $r_{k,i}(\boldsymbol{p}'_j, 1) > r_{k,i}(\boldsymbol{p}'_j, p_j^*) = 1$，我们得出 $f_{k,i-1}$ 的斜率为负。

为证明对所有 $p_j \in (0,1)$，$f_{k,i+1}(\boldsymbol{p}'_j, p_j) < f_{k,i}(\boldsymbol{p}'_j, p_j)$，我们注意到 $f_{k,i+1}(\boldsymbol{p}'_j, 1) = f_{k-1,i}(\boldsymbol{p}'_j) = f_{k,i}(\boldsymbol{p}'_j, 0)$，并且如图 1 所示，$f_{k,i+1}$ 作为 p_j 的线性函数，其斜率为正，因为

$$\frac{f_{k-1,i+1}(\boldsymbol{p}'_j)}{f_{k-1,i}(\boldsymbol{p}'_j)} = r_{k,i+1}(\boldsymbol{p}'_j, 0) < r_{k,i}(\boldsymbol{p}'_j, 0) < r_{k,i}(\boldsymbol{p}'_j, p_j^*) = 1,$$

由命题 3.2 得出。

同理，对所有 $p_j \in (0, 1)$，我们有 $f_{k,i-1}(\boldsymbol{p}'_j, p_j) > f_{k,i-2}(\boldsymbol{p}'_j, p_j)$，因为 $f_{k,i-2}(\boldsymbol{p}'_j, 0) = f_{k-1,i-2}(\boldsymbol{p}'_j) = f_{k,i-1}(\boldsymbol{p}'_j, 1)$，且 $f_{k,i-2}$的斜率为负，因为 $r_{k,i-1}(\boldsymbol{p}'_j, 1) > r_{k,i}(\boldsymbol{p}'_j, 1) > r_{k,i}(\boldsymbol{p}'_j, p_j^*) = 1$。同样的论证适用于其余的 $\{f_{k,j}\}_{j=i+2}^{k}$ 和 $\{f_{k,j}\}_{j=0}^{i-3}$。□

如图 1 所示，这意味着交点 p_j^* 是命题 3.3 中函数所有局部最小值所在的位置。

命题 3.4。 值 下确界 $\boldsymbol{p}\in[0,1]^k$最大值 $\min_{0\leqslant i\leqslant k}\{f_{k,i}(\boldsymbol{p})\}$ 必须出现在众数相同的参数取值处，也就是说，两个函数相交处

因此，极小化参数向量位于 $\boldsymbol{p} \in \bigcup_{i=1}^{k} \mathcal{P}_{k,i}$，其中 $\mathcal{P}_{k,i} := \{\boldsymbol{p} \in (0,1)^k : f_{k,i}(\boldsymbol{p}) = f_{k,i-1}(\boldsymbol{p})\}$。

3.2.3. 一些辅助结果。 下一个定理分为两部分，第一部分由牛顿证明，见 [11, 第 2.22 节，定理51] ；或见 [11, 第 4 节3] 中的初等证明。它确立了满足牛顿不等式 的一列正数 $\{a_j\}$ 与实系数实根多项式之间的经典关系。第二部分展示了这类不等式与泊松分布之间的关系，这一关系最初由 Aissen、Schoenberg 和 Whitney 发现，见 [1],定理 4.1]。

定理 3.5。 (1) 设 $\{a_j\}_{j=0}^{k}$ 为一列有限实数$_k$，其生成多项式 $P(z) = \sum a_j z^j$ 仅有$_{j=0}$

实根。于是

$$\left(\frac{a_i}{\binom{k}{i}}\right)^2 \geqslant \frac{a_{i-1}}{\binom{k}{i-1}} \frac{a_{i+1}}{\binom{k}{i+1}}, \tag{3.12}$$

也就是说，任何实系数实根多项式（不一定是正的）都满足牛顿不等式 ***(3.12)***。

(2) 此外，若我们附加条件，要求序列 $\{a_j\}_{j=0}^{k}$由非负数组成，则以下命题等价：

- 多项式 $P(z) = \sum a_j z^j$ 只有实根。$_{j=0}$
- 序列 $\{a_j\}_{j=0}^{k}$ 是对数凹且单峰的。
- 序列 $\frac{a_1}{P}(1) \cdots \frac{a_k}{P}(1)$ 是成功概率为 $\boldsymbol{p} = (p_1, \ldots, p_k)$的泊松二项分布的概率分布。

我们知道，$\{f_{k,j}(\boldsymbol{p})\}_{j=0}^{k}$ 是泊松二项分布的概率分布，因此，关于复变量 z ，生成多项式 $P(z) = \sum_{k} f_{k,\,j}(\boldsymbol{p}) z^j$的根均为实数。由此直接$_{j=0}$得出，连续差分数列$D_{k,\,j} = f_{k,\,j} - f_{k,\,j-1}$ 对所有 $1 \leqslant j \leqslant k$ 都满足牛顿不等式

(3.12)。这是因为，如果我们考虑生成多项式

$$\begin{aligned} Q(z) &= \sum_{j=0}^{k} D_{k,j}(\boldsymbol{p}) z^j \\ &= \sum_{j=0}^{k} (f_{k,j}(\boldsymbol{p}) - f_{k,j-1}(\boldsymbol{p})) z^j \\ &= (1-z) \sum_{j=0}^{k} f_{k,j}(\boldsymbol{p}) z^j. \end{aligned}$$

这表明， $Q(z)$ 也是一个系数为实数的实根多项式 $\{D_{k,j}(\boldsymbol{p})\}_{j=0}^{k}$ ，满足

$$\left(D_{k,i}(\boldsymbol{p})\right)^2 \geqslant \left(\frac{i+1}{i}\right)\left(\frac{k-i+1}{k-i}\right) D_{k,i-1}(\boldsymbol{p}) \cdot D_{k,i+1}(\boldsymbol{p}'_{12}) \tag{3.13}$$

对所有 $1 \geqslant k$ 和所有 $1 \leqslant i \leqslant k-1$，如 (3.12) 所示。

注意，对所有 $1 \leqslant i \leqslant k-1$， $\binom{i+1}{i}\binom{k-i+1}{k-i} > 1$ 均成立，因此牛顿不等式 $\left(\overline{D_{k,i}(\boldsymbol{p})}\right)^2 > D_{k,\,i-1}(\boldsymbol{p}) D_{k,\,i+1}(\boldsymbol{p}'_{12})$ 均为严格不等式。

最后，注意序列 $\{D_{k,j}(\boldsymbol{p})\}_{j=0}^{k}$ 满足相同的递归关系 (3.5)，即

$$D_{k,i}(\boldsymbol{p}) = (1-p_j) D_{k-1,i}(\boldsymbol{p}'_j) + (p_j) D_{k-1,i-1}(\boldsymbol{p}'_j), \tag{3.14}$$

对所有 $1 \leqslant i,\ j \leqslant k.$ 均成立

3.2.4. 拉格朗日乘数与论证的结尾。 根据命题 3.4，我们已将原问题化为在受限参数集 $\bigcup_{i=1}^{k} \mathcal{P}_{k,\,i}.$ 上求解一个最小化问题

定理 3.6。 设 $\mathcal{P}_{k,\,i} := \{\boldsymbol{p} \in (0,1)^k : f_{k,\,i}(\boldsymbol{p}) = f_{k,\,i-1}(\boldsymbol{p})\}$ 为使 $f_{k,\,i}$ 与 $f_{k,\,i-1}$ 相交的参数所构成的 $k-1)$–维代数流形。

$f_{k,\,i}(\boldsymbol{p})$ 在 $\mathcal{P}_{k,\,i}$ 上的最小值在每个 $1 \leqslant i \leqslant k$ 都满足 $p_1 = p_2 = \ldots = p_k$ 时取得。换言之，当 $f_{k,\,i}(\boldsymbol{p}) :=(f * f * \ldots * f(i)$。

证明。 我们使用拉格朗日乘数法，在参数约束集合 $\mathcal{P}_{k,i} := \{\boldsymbol{p} \in (0,1)^k : f_{k,i}(\boldsymbol{p}) = f_{k,i-1}(\boldsymbol{p})\}$ 下，使 $f_{k,i}(\boldsymbol{p})$ 的值最小。该最小值由 $f_{k,i}$ 在所有满足下式的解 $(\boldsymbol{p}, \lambda) \in \mathcal{P}_{k,i} \times \mathbb{R}$ 处取值得到

$$\nabla f_{k,i} = \lambda \nabla (f_{k,i} - f_{k,i-1}) \tag{3.15}$$

其中 $\lambda \in \mathbb{R}$ 是一个常数，梯度是针对参数 $(p_1, \ldots, p_k)$。每个函数 $f_{k,i}(\boldsymbol{p})$ 在 p_j 上可微，其导数为

$$\frac{\partial}{\partial p_j}\big(f_{k,i}(\boldsymbol{p})\big) = f_{k-1,i-1}(\boldsymbol{p}'_j) - f_{k-1,i}(\boldsymbol{p}'_j) = -D_{k-1,i}(\boldsymbol{p}'_j), \tag{3.16}$$

这由 (3.5) 立即得出。于是

$$\frac{\partial}{\partial p_j}\big(f_{k,i}(\boldsymbol{p}) - f_{k,i-1}(\boldsymbol{p})\big) = -D_{k-1,i}(\boldsymbol{p}'_j) + D_{k-1,i-1}(\boldsymbol{p}'_j)$$

由于 (3.15) 可以写成以下方程组

$$\frac{\partial}{\partial p_j}\big(f_{k,i}(\boldsymbol{p})\big) = \lambda\, \frac{\partial}{\partial p_j}\big(f_{k,i}(\boldsymbol{p}) - f_{k,i-1}(\boldsymbol{p})\big), \tag{3.17}$$

对 $1 \leqslant j \leqslant k$ 成立。根据前面的计算，这等价于

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{D_{k-1,i}(\boldsymbol{p}'_j) - D_{k-1,i-1}(\boldsymbol{p}'_j)}{D_{k-1,i}(\boldsymbol{p}'_j)}, \tag{3.18}$$

对所有 $1 \leqslant j \leqslant k$ 成立。只有当 λ 不依赖于被排除的 p_j 而保持不变时，拉格朗日乘数问题才有解。我们的目标是证明，这只有在 $p_1 = p_2 \cdots = p_k$ 时才会发生。首先注意到 $\lambda \neq 0$；否则，根据 (3.17) 和 (3.16)，我们有 $D_{k-1,\,i}(\boldsymbol{p}'_j) = 0$ 对任意 $1 \leqslant j \leqslant k$ 都成立，那么对于 $\boldsymbol{p} \in \mathcal{P}_{k,\,i}$，可得

$$0 = f_{k,i}(\boldsymbol{p}) - f_{k,i-1}(\boldsymbol{p}) = (1-p_j)D_{k-1,i}(\boldsymbol{p}'_j) + (p_j)D_{k-1,i-1}(\boldsymbol{p}'_j)$$

因此 $D_{k-1,\,i-1}(\boldsymbol{p}'_j) = 0$ 也成立，这意味着 $f_{k-1,\,i-2}(\boldsymbol{p}'_j) = f_{k-1,\,i-1}(\boldsymbol{p}'_j) = f_{k-1,\,i}(\boldsymbol{p}'_j)$，这是不可能的，因为该序列是单峰的，也就是说，最多只有两个函数能同时相等。由 (3.18) 可得

$$\frac{\lambda - 1}{\lambda} := \frac{D_{k-1,i-1}(\boldsymbol{p}'_j)}{D_{k-1,i}(\boldsymbol{p}'_j)}, \tag{3.19}$$

对所有 $1 \leqslant j \leqslant k$。我们声称，若 $p_{j_1} \neq p_{j_2}$，则 $D_{k-1,\,i-1}(\boldsymbol{p}'_{j_1})\, D_{k-1,\,i}(\boldsymbol{p}'_{j_1}) \neq D_{k-1,\,i-1}(\boldsymbol{p}'_{j_2})\, D_{k-1,\,i}(\boldsymbol{p}'_{j_2})$。假设 $p_1 \neq p_2$，则 $\boldsymbol{p}'_1 \neq \boldsymbol{p}'_2$。我们用 $\boldsymbol{p}'_{12}$ 表示从 $\boldsymbol{p}$ 中移除坐标 $\{p_1, p_2\}$ 后得到的向量。注意，表达式 (3.19) 与 (3.9) 一样，是两个连续函数之比；此外，函数 $D_{k,\,i}$ 满足递归

关系 (3.14)，与 $f_{k,\ i}$ 满足的关系相同，因此展开递归后可得

$$\frac{\lambda-1}{\lambda}=\frac{(p_2)\Big(D_{k-2,i-2}(\boldsymbol{p}'_{12})-D_{k-2,i-1}(\boldsymbol{p}'_{12})\Big)+D_{k-2,i-1}(\boldsymbol{p}'_{12})}{(p_2)\Big(D_{k-2,i-1}(\boldsymbol{p}'_{12})-D_{k-2,i}(\boldsymbol{p}'_{12})\Big)+D_{k-2,i}(\boldsymbol{p}'_{12})},$$

其中，我们得到一个关于 p_2 的两个线性项之比，并且每个差值$D_{k-2,j}(\boldsymbol{p}'_{12})$都与 p_2 无关。我们可以对 $\boldsymbol{p}'_2$ 重复这一过程，并通过收集 p_1的线性系数，得到类似的表达式

$$\frac{\lambda-1}{\lambda}=\frac{(p_1)\Big(D_{k-2,i-2}(\boldsymbol{p}'_{12})-D_{k-2,i-1}(\boldsymbol{p}'_{12})\Big)+D_{k-2,i-1}(\boldsymbol{p}'_{12})}{(p_1)\Big(D_{k-2,i-1}(\boldsymbol{p}'_{12})-D_{k-2,i}(\boldsymbol{p}'_{12})\Big)+D_{k-2,i}(\boldsymbol{p}'_{12})}.$$

这引出了如下定义

$$\Lambda(y):=\frac{y\Big(D_{k-2,i-2}(\boldsymbol{p}'_{12})-D_{k-2,i-1}(\boldsymbol{p}'_{12})\Big)+D_{k-2,i-1}(\boldsymbol{p}'_{12})}{y\Big(D_{k-2,i-1}(\boldsymbol{p}'_{12})-D_{k-2,i}(\boldsymbol{p}'_{12})\Big)+D_{k-2,i}(\boldsymbol{p}'_{12})},$$

对于固定的参数 $\boldsymbol{p}'_{12}$，这是关于变量y的莫比乌斯变换，这意味着它在定义域内对所有 y 要么都是单射，要么恒为常数，当且仅当

$$\frac{D_{k-2,i-1}(\boldsymbol{p}'_{12})-D_{k-2,i}(\boldsymbol{p}'_{12})}{D_{k-2,i}(\boldsymbol{p}'_{12})}=\frac{D_{k-2,i-2}(\boldsymbol{p}'_{12})-D_{k-2,i-1}(\boldsymbol{p}'_{12})}{D_{k-2,i-1}(\boldsymbol{p}_{12})},$$

等价地

$$\frac{D_{k-2,i-1}(\boldsymbol{p}'_{12})}{D_{k-2,i}(\boldsymbol{p}'_{12})}-1=\frac{D_{k-2,i-2}(\boldsymbol{p}'_{12})}{D_{k-2,i-1}(\boldsymbol{p}_{12})}-1.$$

或者也可以将其写成

$$\Big(D_{k-2,i-1}(\boldsymbol{p}'_{12})\Big)^2=D_{k-2,i}(\boldsymbol{p}'_{12})\cdot D_{k-2,i-2}(\boldsymbol{p}'_{12}).$$

但根据差分 $\{D_{k-2,j}(\boldsymbol{p}'_{12}))\}_{j=1}^{k-2}$ 的严格牛顿不等式，如式 (3.13) 所示，这个等式不成立。这个论证证明了 $\Lambda(y)$ 是一个非常数莫比乌斯变换，因此在其定义域上是单射；由此可得，$\Lambda(p_1)=\Lambda(p_2)=\dfrac{\lambda-1}{\lambda}$ 当且仅当 $p_1=p_2$。

回顾我们任意选取了 p_1 和 p_2，通过对所有不同的成对选择反复应用相同的论证，我们得到拉格朗日乘数问题的唯一解是 $p_1=p_2=\cdots=p_k$ 和 λ，由 (3.18) 给出；该解使 $f_{k,i}(\boldsymbol{p})$ 在受限参数集合 $\mathcal{P}_{k,i}$ 上取得最小值。□

现在我们已经准备好完成定理 2.1 的证明。根据命题 3.4，$\inf_{\boldsymbol{p}\in[0,1]^k} \max_{0\leqslant i\leqslant k}\{f_{k,i}(\boldsymbol{p})\}$ 在 $\boldsymbol{p}\in\bigcup_{i=1}^{k}\mathcal{P}_{k,i}$ 处取得；随后根据定理 3.6，该下确界必然在某个同时满足 $p_1=p_2=\cdots=p_k$ 的 $\boldsymbol{p}$ 处取得。因此，

$$\begin{aligned}\inf_{\boldsymbol{p}\in[0,1]^k}\max_{0\leqslant i\leqslant k}\{f_{k,i}(\boldsymbol{p})\} &= \inf_{\boldsymbol{p}\in\bigcup_i \mathcal{P}_{k,i}}\max_{0\leqslant i\leqslant k}\{f_{k,i}(\boldsymbol{p})\}\\ &= \inf_{p\in[0,1]}\max_{0\leqslant i\leqslant k}\{(f*f*\ldots*f)(i): f(1)=p\}\end{aligned}$$

这便归结为引理 3.1。 □

4. Acknowledgements.

J.M. 部分获得了 AMS Stefan Bergman Fellowship 和西蒙斯基金会拨款 #453576 的资助。J.M. 感谢 Zane Li 进行了一次有趣的讨论。

References

[1] Aissen、M.、Schoenberg、I. J、Whitney、A. M.，《全正序列的生成函数 I》，全正序列的生成函数 *I*，《数学分析杂志》，第 2 卷：93–103，（1952）。[2] L. Becker、P. Ivanisvili、D. Krachun 和 J. MADRID，《离散布伦-闵可夫斯基不等式：立方体的子集》，离散布伦-闵可夫斯基不等式：立方体的子集，《组合数学》（2025）45:48。[3] J. Cilleruelo、I. Z. Ruzsa、C. Vinuesa，《广义 Sidon 集》，广义 *Sidon* 集，《数学进展》225（2010），第 5 期，2786–2807。[4] J. Cilleruelo、I. Z. Ruzsa、C. Trujillo，《有限 $B_h[g]$序列的上界和下界，$B_h[g]$序列，《数论杂志》**97**（2002），26–34。[5] A. Cloninger 和 S. Steinerberger，《自卷积的上确界及其在 Sidon 集中的应用》自卷积的上确界及其在 *Sidon* 集中的应用，《美国数学会会刊》，第 145 卷，第 8 期，2017 年 8 月，3191–3200 页[6] J. Cilleruelo、C. Vinuesa，$B_2[g]$ 集与 *Schinzel* 和 *Schmidt* 的一个猜想，《组合学、概率与计算》**17**（2008），第 6 期，741–747。[7] J. de Dios、R. Greenfeld、P. Ivasnisvili 和 J. MADRID，《离散立方体上的加法能量》，离散立方体上的加法能量，预印本，将发表于《离散分析》。[8] B. Green，《平方数的数量和 $B_h[g]$ 集，《算术学报》**100**（2001），365–390。[9] K. Gyarmati、M. Matolcsi 和 I. Z. Ruzsa，《不同被加数的 Pl ¨ *unnecke* 不等式》，Bolyai Society 数学研究丛书（BSMS，第 19 卷），《架起桥梁：数学与计算机科学之间》，309–320 页。[10] B. Green、D. Matolcsi、I. Z. Ruzsa、G. Shakan 和 D. Zhelezov，《加权普雷科帕-莱因德勒不等式与拟立方体的和集》，加权普雷科帕-莱因德勒不等式与拟立方体的和集，预印本。[11] Hardy、G. H.、Littlewood、J. E.、P´olya、G.，《不等式（第 2 版）》，不等式（第 *2* 版）。剑桥大学出版社，（1988）。[12] P. Ivanisvili，《卷积估计与不相交划分的数量》，卷积估计与不相交划分的数量，《电子组合学杂志》，第 24 卷，第 2 期（2017），论文 P2.43。

[13] D. Kane 和 T. Tao, 《关于划分簇的一个界》, 关于划分簇的一个界, 《电子组合学杂志》, 第 24 卷, 第 2 期（2017）, 论文 P2.31。[14] G. Martin、K. O'Bryant, 《广义 Sidon 集的构造》, 广义 *Sidon* 集的构造, 《组合理论杂志》A辑**113**（2006）, 第 4 期, 591–607。[15] G. Martin、K. O'Bryant, 《连续拉姆齐理论中的对称子集问题》, 连续拉姆齐理论中的对称子集问题, 《实验数学》**16**（2007）, 第 2 期, 145–166。[16] G. Martin、K. O'Bryant, 《自卷积的上确界及其在加法数论中的应用》, 自卷积的上确界及其在加法数论中的应用, 《伊利诺伊州数学杂志》**53**（2009）, 第 1 期, 219–235。[17] M. Matolcsi、C. Vinuesa, 《自卷积上确界的改进界》, 自卷积上确界的改进界, 《数学分析与应用杂志》372（2010）, 第 2 期, 439–447。[18]D. Matolcsi、I. Z. Ruzsa、G. Shakan 和 D. Zhelezov, 《和集基数的分析方法》, 和集基数的分析方法, 《组合数学》（2022）。https://doi.org/10.1007/s00493-021-4547-0。[19] P. Milgrom、I. Segal, 《任意选择集的包络定理》, 任意选择集的包络定理, 《计量经济学》70（2002）, 583–601。[20] W. Tang、F. Tang, 《泊松二项分布——过去与现在》, 泊松二项分布——过去与现在, 《统计科学》, Statist. Sci. 38(1), 108–119, （2023 年 2 月）。[21] T. Tao、V. Vu, 《加法组合学》。剑桥高等数学研究丛书, 105。剑桥大学出版社, 剑桥, 2006。[22] Wang, Y. H., 《独立试验中的成功次数》, 独立试验中的成功次数, 《中华统计学志》, 第 3 卷: 295–312, （1993）。[23] G. Yu, 《 $B_2[g]$ 集的一个上界》, $B_2[g]$ 集, 《数论杂志》**122**（2007）, 第 1 期, 211–220。

(JG) Department of Mathematics,
Virginia Polytechnic Instituteand State University,
225 Stanger Street, Blacksburg, VA 24061-1026,USA电子邮箱地址: jogaitan@vt.edu (JM) Department of Mathematics,
Virginia Polytechnic Instituteand State University,
225 Stanger Street, Blacksburg, VA 24061-1026,USA电子邮箱地址: josemadrid@vt.edu