arXiv:2512.18223v1 [cs.CG] 20 Dec 2025

在具有接地或穿刺约束的几何相交图中寻找团

J. Mark Keil 和 Debajyoti Mondal

出发 ，萨斯喀彻温大学，加拿大萨斯卡通 a

摘要

几何相交图由一组几何对象构造而成，其中每个顶点代表一个不同的对象，并且当且仅当相应对象相交时，两个顶点之间才有一条边。我们研究在接地和刺穿约束下，如何在由线段和圆盘构成的相交图中寻找最大团这一问题。在接地情形下，所有对象都位于同一条水平线上方并与该直线相接触。在刺穿情形下，所有对象都能被一条公共直线刺穿。

• 我们证明，求向上射线相交图的最大团是 NP 难的。这一结果加强了此前已知的射线图 NP 困难性，并解决了接地线段图的开放问题。该困难性结果在刺穿情形下仍然成立。

• 我们表明，接地单位长度线段的相交图可在多项式时间内求解，但被刺穿的单位长度线段对应的问题是 NP 难的。

• 对于接地圆盘的情形，我们给出了一种多项式时间算法。如果放宽接地约束，那么对于半径位于区间 $[1,3]$, 内的圆盘相交图，我们给出一种耗时 $O(n^3 f(n))$ 的 $3/2$-近似算法，其中 n 是圆盘的数量， $f(n)$ 是在一个含 n 个顶点的共二分图中求最大团所需的时间。这比此前已知的针对任意圆盘的随机化高效多项式时间近似方案、准多项式时间近似方案或 2-近似算法更快。我们通过证明半径位于 $[1,3]$ 内的两两相交圆盘可三点穿刺，得到这一结果；这将早已为人所知的单位圆盘情形中的 3-可穿刺性质推广到了更广泛的一类圆盘。

1 引言

设 $\mathcal{S}$ 为一组几何对象。几何相交图 $G(\mathcal{S})$ 是一种图，其中每个顶点表示 $\mathcal{S}$ 中的一个不同对象，并且当且仅当相应对象相交时，两个顶点之间才有一条边。本文研究在 $G(\mathcal{S})$ 中寻找最大团 的问题，即从 $\mathcal{S}$ 中找出最大的两两相交对象集合。大量研究考察了各种类型几何对象的交图上的最大团问题 [8, 15, 26, 29, 33]。本文研究 $\mathbb{R}^2$ 中的几何对象，主要关注线段和圆盘。

线段的交图。线段相交图上的最大团问题最初由 Kratochv´ıl 和 Ne$\check{s}$et$\check{r}$il [35] 提出，作为一个开放问题，并且长期未能解决

本研究得到加拿大自然科学与工程研究委员会（NSERC）的探索基金和联盟基金资助。

长达二十年。这个问题被广泛认为是一个颇具挑战性的开放问题 [5] ，最终在 ESA 2012 上，Cabello、Cardinal 和 Langerman [14]通过证明在射线相交图中计算最大团是 NP 困难的，解决了这一问题。大量研究探讨了线段图的推广，例如弦图，即平面中曲线的交图。在 SODA 2011 上，Fox 和 Pach [28] 提出了一种亚指数时间算法，用于在 k-相交弦图中计算最大团。这里，如果每对曲线至多有 k 个公共点，则称弦图为 k-相交。因此，该结果适用于线段相交图。他们还给出了一种多项式时间算法，可以在 k-相交弦图中将最大团的大小近似到因子 $n^{1-\epsilon_k}$以内，其中 $\epsilon_k > 0$ 是一个依赖于 k的参数。他们没有给出 ϵ_k的详细推导，而该推导依赖于 k-相交图中特定分隔器的性质。据我们所知，这仍然是线段相交图最大团问题目前已知的最佳近似结果。

圆盘相交图。 1990年，Clark、Colbourn 和 Johnson [21]证明，单位圆盘图的最大团问题可以在多项式时间内求解。后续研究尝试加速该算法 [11, 23, 25]；然而，将这一结果推广到具有两种不同半径的圆盘图，十年来一直悬而未决 [12, 13]。在 SoCG 2025 上，Keil 和 Mondal [33] 解决了这一开放问题，证明对于具有固定数量半径类型的圆盘相交图，可以在多项式时间内计算最大团。然而，对于一般圆盘图 [27, 3], ，即使将圆盘半径限制在某个区间 $[1, 1+\epsilon]$ 内（其中 $\epsilon > 0$ [9]），其时间复杂度问题仍未解决。对于椭圆的相交图 [3], ，若较大半径与较小半径之比为某个大于 1 的给定数值，则最大团问题是 NP难的。然而，这一困难性结果既不适用于线段，也不适用于圆盘。

接地与刺穿设置。 本文研究接地与刺穿设置下线段相交图和圆盘相交图的最大团问题。在接地情形中，所有对象都位于一条公共水平线 ℓ上方并与之接触 ℓ。在刺穿情形中，所有对象都可以被一条公共直线刺穿。文献中已广泛研究这些限制条件下的各种问题，旨在理解特定子类的结构 [16, 31, 19, 17],、为一般情形设计高效的近似算法 [20, 1], ，以及了解多项式时间可解变体与 NP 难变体之间的差距 [10, 4, 32, 37]。

Middendorf 和 Pfeiffer [39]在接地线段相交图的最大团问题上取得了开创性成果。他们证明，如果不在地面直线上的自由端点位于固定数量的水平直线上，那么接地线段的该问题可在多项式时间内求解。他们还证明，单弯折折线相交图的该问题是 NP 难的。后来，Keil、Mondal 和 Moradi [34] 证明，接地单弯折折线的该问题是 NP 难的，即使其自由端点和弯折点被限制在两条水平直线上也成立。他们提出了一个开放问题：接地线段的情形是否可在多项式时间内求解？后来，这个问题甚至在更严格的条件下被提出，即接地线段的长度为单位长度 [2]。接地单弯折折线的 NP 难性结果自然适用于刺穿情形。类似地，射线相交图的 NP 难性 [14] 可以视为所有线段都接地于一个圆或被一个圆刺穿的情形。

据我们所知，接地圆盘的交图一直尚未得到研究，但已有多项研究考察了各种形式的刺穿。例如，Breu[11] 研究了单位圆盘图，其中的限制条件是所有圆盘都位于宽度为$\sqrt{3}/2$的带状区域内；在这种情况下，可以用该带状区域的角平分线刺穿这些圆盘。另一种得到广泛研究的设置是点刺穿或点穿刺。每组两两相交的圆盘都可以用四个点 [18, 22, 41],刺穿，而对于单位圆盘，三个点就足够了 [6, 30]。这一思想可用于设计一个针对

$O(n^4 \cdot f(n))$时间 [3] 处理 n 个圆盘的算法如下。首先，计算这些圆盘的排列 $\mathcal{A}$，然后对于每一对单元 c, $c' \in \mathcal{A}$，在被 c, c'击中的圆盘的相交图 $G(c, c')$中计算一个最大团。其中， $f(n)$是关于 n的多项式，表示在共二分图 $G(c, c')$中计算最大团所需的时间。在 FOCS 2018 [8], 中提出了一种亚指数时间准多项式时间近似方案和一种随机化高效多项式时间近似方案，但二者都慢于直接的 2-近似算法。

贡献。 本文证明，在向上射线的相交图中，寻找最大团是 NP难的。这意味着，对于被一条直线穿刺的接地线段和单位长度线段，最大团问题同样是 NP 困难，从而解决了 [34] 中提出的时间复杂度问题。我们通过证明每个平面图 G 都存在一个偶细分，且其补图可以表示为向上射线图，得到了 NP 困难性归约；相比之下，先前关于射线图的 NP 困难性结果 [15] 使用了向上和向下射线，为 G 找到几何表示。 [15] 中的射线构造依赖于圆周围的对称射线排列，因此难以据此调整方法来确保射线均朝上。作为替代，我们给出一种增量构造，其中每条新插入的射线都经过精心旋转，以确保所有射线始终朝上。

与此不同，我们为两种受限情形给出了多项式时间算法。一种针对接地单位长度线段，从而解决了 [2] 中提出的时间复杂度问题。在这种情形下，我们将问题归约为求余可比图中的最大团，而该问题已知存在多项式时间解法 [29]。另一种针对自由端点位于 O 条直线上的接地线段，这加强了 [39] 的结果；后者假设自由端点位于水平直线上。由于我们允许使用不一定水平的直线， [39], 中依赖于利用水平直线的高度进行子问题分解的动态规划方法不再适用。我们的算法同样采用动态规划，但为了处理任意斜率的直线，我们证明，在进行子问题分解时，每条直线上只需跟踪少数几条线段。对于任意接地线段的相交图，我们采用比 [28] 更简单的方法，在多项式时间内给出最大团大小的 $O(n^{3/4})$ 近似。

对于接地圆盘，我们给出了一种多项式时间算法来计算最大团。如果放宽接地约束，那么我们可以在 $O(n^3 \cdot f(n))$ 时间内，为 $[1, 3]$-圆盘计算 $3/2$-近似。其中， $f(n)$ 是在具有 n 个顶点的共二分图中寻找最大团所需的时间。尽管我们对半径施加了限制，但其运行时间仍快于此前已知的适用于任意圆盘的 2-近似算法 [3], QPTAS 和随机化EPTAS [7] 。然而，本文的核心贡献在于我们所依据的证明：每个两两相交的 $[1, 3]$-圆盘集合都可以由 3 个点穿刺。这将长期以来已知适用于单位圆盘的 3-可穿刺性质 [6, 30], 扩展到了更广泛的 [1,3]-圆盘类别。

下表总结了本文的贡献。

对象 $\rightarrow$ 设置 $\downarrow$	向上射线/ 线段	单位 长度 线段	带有 端点位于 $O(1)$ 条直线	圆盘
接地	NP难 – 定理 2.2 $O(n^{3/4})$-近似 定理 3.8	多项式时间 定理 3.7	多项式时间 定理 3.4	多项式时间 – 定理 4.1
被 直线刺穿	NP难 定理 2.2	NP难 定理 2.2	Open	[1,3]-圆盘的 3/2-近似 在 $O(n^3 f(n))$ 时间内 – 定理 4.9

2 向上射线、接地线段和被刺穿的单位长度线段的交图的 NP 困难性

本节将证明，向上射线的相交图上的最大团问题是 NP难。任何具有向上射线表示的图也具有接地线段表示或被刺穿的单位长度线段表示，证明如下。给定一个向上射线表示，取一条水平直线 L，其 y 坐标足够高，使所有射线的交点都位于 L 下方；移除射线位于 L 上方的部分，将该表示垂直翻转，并将 L 视为地面直线。要得到单位长度线段表示，我们将线段向 L 下方延伸，使所有线段长度相同。由于所有射线的交点都位于 L 的另一侧，延伸部分不会产生任何新的交点。因此，我们的 NP 困难性结果意味着，接地线段和被刺穿的单位长度线段的相交图上的问题也是 NP 难的。

证明思路是说明每个平面图都有一个偶细分，其补图具有向上射线的交表示。由于在平面图的偶细分中寻找独立集是 NP 难的 [15], ，我们由此得到向上射线图最大团问题的 NP 困难性。我们先简要介绍所需的平面图细分（用于 [15]），然后证明它们是向上射线的交图。构造向上射线表示时，我们不要求坐标是多项式有界的。因此，我们的 NP 困难性结果基于这样的假设：输入给出的是向上射线图的组合表示，而非几何表示。

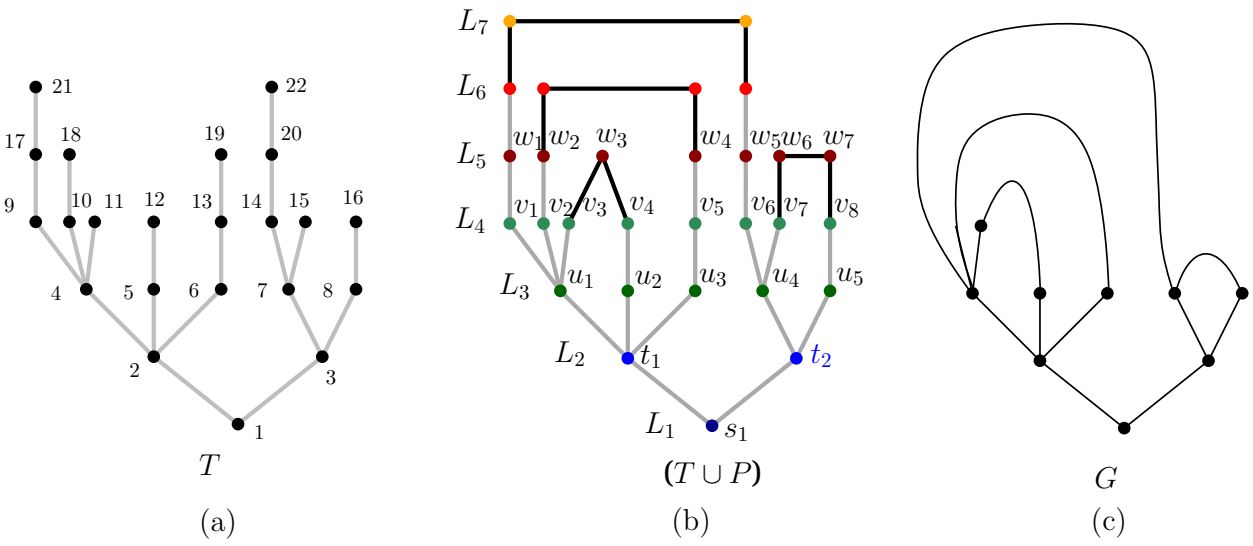


图 1：（a）一棵嵌入树。（b）$(T \cup P)$ 的一个偶细分，其中 T 和 P 分别以灰色和黑色显示。（c）$(T \cup P)$ 所对应的平面图。

2.1 平面图的偶细分

设 T 是一棵嵌入树，σ 是从根节点开始进行广度优先遍历时各节点的顺序：先按顺时针顺序访问其子节点，然后在每个内部节点处，从其父节点开始按顺时针顺序考察其子节点。图 1(a) 展示了一棵嵌入树，其中的节点按照这种广度优先遍历排序。对于 T 的第 i层，其中 $i \geq 1$，我们记作

σ 中与 T 的根节点距离为 $(i-1)$ 的节点所组成的有序子集。我们用 σ_i 表示第 i 层顶点构成的有序序列。

一个可容许扩展 是由一组顶点不相交路径组成的集合 P，具有以下性质：(a) P 中的每条极大路径都有 3 个或 4 个顶点。(b) P 中每条极大路径的端点都是 T 中相邻且处于同一层的叶节点。(c) P中任意路径的内部顶点都不是 T的顶点。

图 1(b) 展示了树 T的一个可容许扩展，其中 T 的边分别以灰色显示， P的边以黑色显示。我们用 $(T \cup P)$ 表示图 $(T \cup P)$ 的补图。图 G 的偶细分 是一个图 G'：对于 G的每条边 $(u,\ v)$，要么保留该边，要么将其替换为一条包含偶数个细分顶点的路径。我们将使用以下引理。

引理 2.1（Cabello、Cardinal 和 Langerman [15]） 任意嵌入的平面图 G 都有一个偶细分（$T \cup P$），其中 T是嵌入树， P是 T的一个可容许扩展。此外，这样的 T 和 P 可以在多项式时间内计算出来。

2.2 计算（$T \cup P$）的向上射线表示

现在我们证明，$(T \cup P)$（通过对$(T \cup P)$取补图得到）存在一种由向上射线构成的相交表示。首先介绍一些将在整个构造中使用的记号。设 r 是一条原点为 q的射线。设 h_q 是一条经过 q的水平线。若 r 具有非零斜率且位于 h_q上方，则称其为向上的。设 A是由一组射线构成的排列（图2(a)）。我们将 A 的面或单元称为由 A的射线界定的平面连通区域。我们将 A 的路径称为 A中的一条简单折线链。若一条路径的所有线段都位于 A的无界面上，则称其为外路径。大小为 k 的帆形配置 $\mathcal{S}$ 是由 k 条两两相交的射线 r_1、……、r_k 构成的排列，其中包含一条外路径 e_1、……、e_k，且对于每个从1到 k的 i， e_i 都是 r_i 的一部分（图2(b)）。我们将 e_1、……、e_k 称为 $\mathcal{S}$的极值路径。帆形若仅由向上射线构成，则称为向上的。我们常会在一个帆形 $\mathcal{S}$ 上方添加一个帆形 $\mathcal{S}'$，使得 $\mathcal{S}'$ 的每条射线 r'_i 都起始于 $\mathcal{S}$ 极值路径上边 e_i正上方的单元（图2(c)）。由于 r'_i 与除 r_i之外的所有其他射线相交，因此这就实现了匹配的补。

现在我们可以介绍具体细节了。首先请读者参阅图 1(b)，其中展示了平面图的偶细分（$T \cup P$）；图 2(d)则给出了构造的高层示意图。我们从两个向上帆形配置 $\mathcal{S}_\ell$ 和 $\mathcal{S}_r$ 开始，它们各包含 $\lceil k/2 \rceil + 1$ 条射线，其中 k是 T的层数。我们分别用奇数和偶数索引为 $\mathcal{S}_\ell =$（L_1，L_3，……）和 $\mathcal{S}_r =$（L_2，L_4，……）中的射线编号。图 1(d)分别以粗线和细线展示了 $\mathcal{S}_\ell$ 和 $\mathcal{S}_r$ 的前三条射线。我们将这两个帆形称为帆骨架，并将其中的射线称为骨架射线；它们将用于引导构造与（$T \cup P$）对应的射线。为简化说明，我们定义的骨架射线数量多于T中的层数。因此，某些索引较大的骨架射线可能不会用到，可在整个构造完成后移除。假设 $k' = \lceil k/2 \rceil + 1$。我们将 L_1 定义为一条从原点出发、倾角为（$90^\circ + \alpha$）的向上射线，其中 $\alpha = 90^\circ/2k'$。对于从 2 到$2k'$的每个 i， L_i 的原点位于 L_{i-1}上，而 L_i 与所有其他骨架射线相交。帆骨架的详细构造见附录 A。

2.2.1 与 T 的节点对应的射线的构造

骨架射线 L_1 表示 T的根节点。令 γ 为帆骨架中所有不同交点对之间的最小距离。对于每条骨架射线 L_i，其中 $1 \le i \le 2k'$，我们

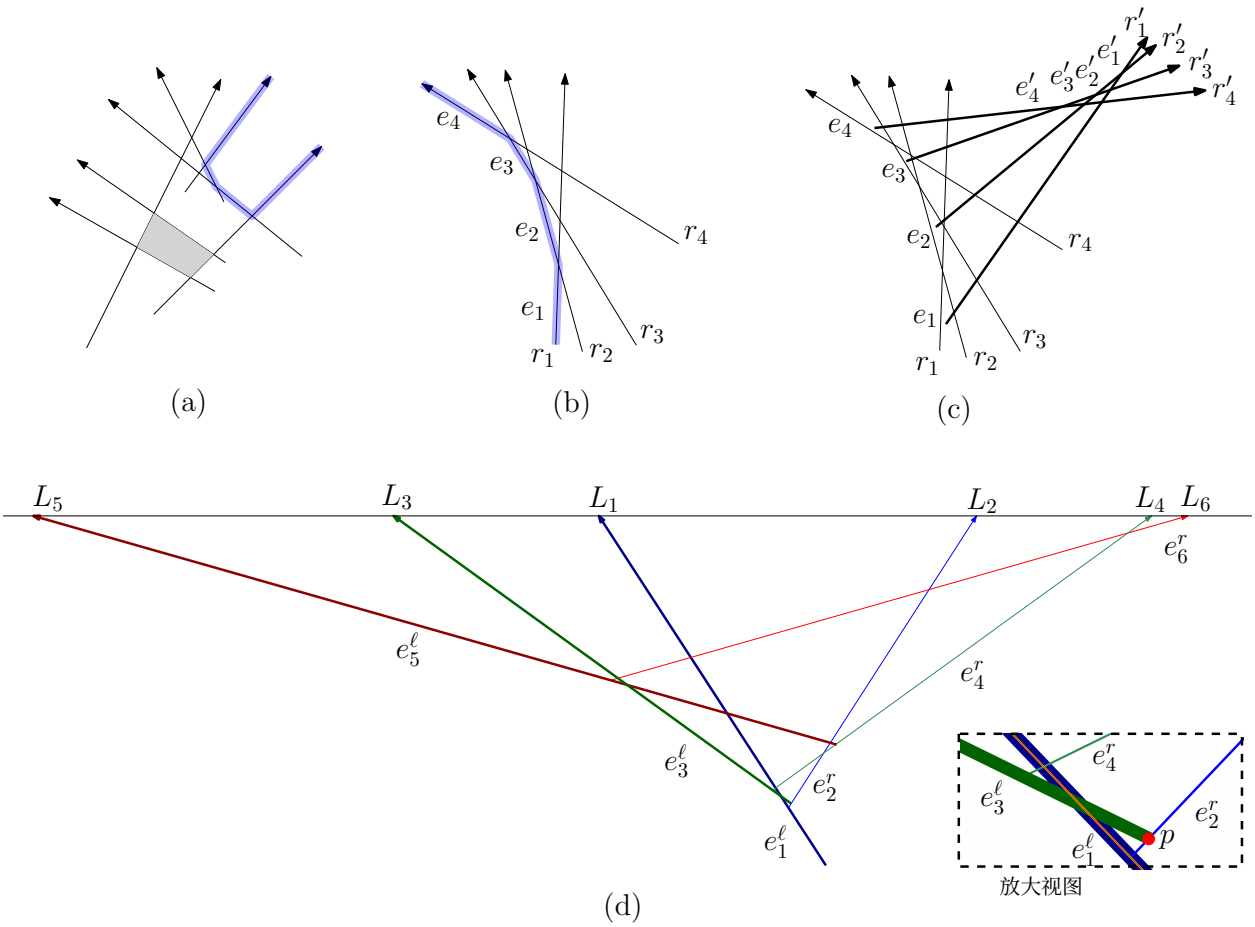


图2：(a) 灰色的 A和蓝色的外路径的面示意图。(b) 一个向上帆 $\mathcal{S}$，其中极值路径为蓝色。(c) 使用两个帆形表示匹配的补的向上射线表示。(d) 帆骨架示意图。

现在考虑一个带状区域 L_i^s，其宽度为 ϵ，并使其相对于 γ足够小，从而加粗射线不会完全覆盖帆骨架的任何面。

我们用 $\xi(j)$表示由 L_{j-1}^s 和 L_j^s 确定的平行四边形，其中 $j \geq 2$（图 3）。对于 T的每个 j层，其中 $j \geq 2$，我们现在构造一个帆形配置 R_j，其中有 $|\sigma_j|$ 条向上射线，使得这些射线的起点始终有界于 $\xi(j)$内，且帆形的所有交点始终位于 $\xi(j+1)$内。我们首先令 R_j 的所有射线经过同一个点，然后移动这些射线，以确保存在一条非退化极值路径。

令 u_1、……、u_r 为σ_{j-1} 中的顶点，并令 e_1、……、e_r 为帆形 R_{j-1}的极值路径（图 3）。对于从 1 到 r的每个 t，我们构造 $c(u_t)$条向上射线，其中 $c(u_t)$是 u_t的子节点数。这些射线的起点位于 e_t 正上方的单元内，且射线经过 $\xi(j+1)$的质心。例如，图 3 中的顶点 u_4 有两个子节点 v_6、v_7，因此它们的射线起点位于 e_4正上方的单元内。

现在考虑 v 中的一个顶点 σ_j，并验证其邻接关系。由于我们正在实现 $(T \cup P)$，对应于 $\overline{v}$ 的射线必须与对应于 σ_1、……、σ_j 的所有射线相交，但表示其父节点 u_t 的射线除外，该父节点位于 T 中。根据初始帆骨架的构造，u_t 的射线与对应于 σ_1、……、σ_{j-2} 中各顶点的所有射线相交。由于对应于 v 的射线从紧邻 e_t 上方的单元出发，因此它与对应于 $\sigma_{j-1} \setminus u_t$ 的所有射线相交。最后，由于

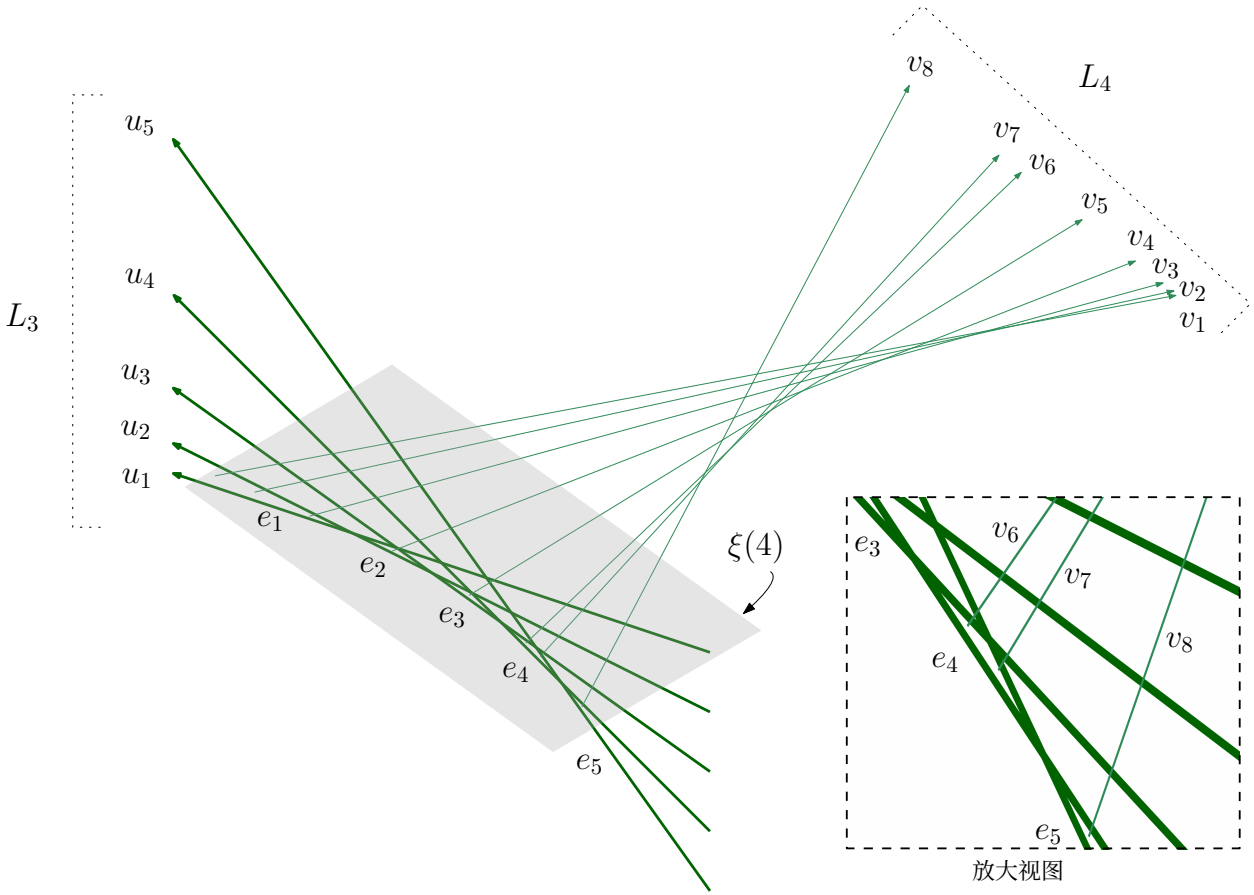


图 3：两个相邻层的顶点构造。

R_j 经过 $\xi(j+1)$ 的一个公共点，因此 v 的邻接关系已得到正确实现。现在，我们移动 R_j 的射线（不改变起点），以获得一个非退化帆形配置R_j，使其所有交点都位于 $\xi(j+1)$ 内。由于我们不要求坐标为多项式有界，按与 σ_j 中相同的顺序逐条移动射线，即可轻松得到这样的表示（附录 B ）。

2.2.2 P的内部节点的射线构造

$P=(a,\ b,\ c,\ d)$的内部节点的射线，几乎可以用与上一节相同的方式插入。根据可容许扩展的定义，$a,\ d$ 的射线在一条极值路径上依次出现，因此可以在紧邻边 e_a和 e_d上方的单元中构造 $b,\ c$ 的射线，这两条边分别对应 $a,\ d$。图 4 展示了一个 $P=(v_7,\ w_6,\ w_7,\ v_8)$的示例。详情见附录 C。

下面的定理总结了本节的结果。

定理 2.2 对于向上射线、接地线段和被刺穿的单位长度线段的相交图，求最大团是 *NP*难的。

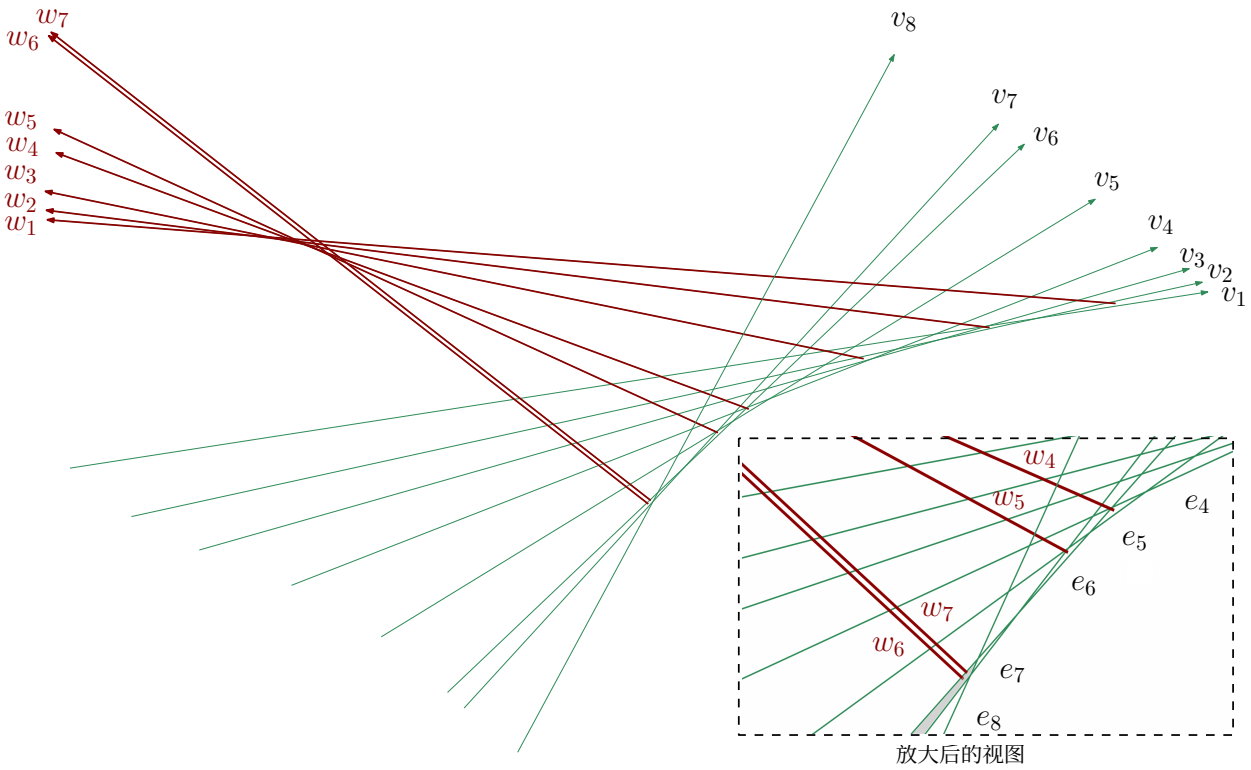


图4： P中若干路径表示的示意图。

3 近似结果与精确计算

本节针对两种受限情形，给出用于计算接地线段相交图中最大团的多项式时间算法。随后，我们给出一种可实现 $O(n^{3/4})$-近似的多项式时间算法。

3.1 固定直线集上的端点线段

我们用来证明线段图的 NP 困难性的射线原点无法用$O(1)$条直线覆盖。因此，若将线段的端点限制在固定数量的直线上，我们的困难性结果便不再成立。现在我们将证明，这类限制使我们能够设计一种多项式时间算法，在接地线段的相交图中求最大团。然而，在此限制下，刺穿情形的时间复杂度仍未解决。为简化表述，我们假设各线段的端点互不相同。

我们的思路是引入严格独立集这一概念，设计一种动态规划算法。若一对接地线段满足以下条件，则称它们严格独立：(C_1) 两条线段不相交。(C_2) 将其中任一线段从其自由端点向外延伸（沿地面直线向上），都不会与另一条线段相交。然而，若将两条线段都从各自的自由端点向外延伸，则它们的延伸部分会彼此相交。

图5(a)–(c)中的线段对并非严格独立，而图5(d)展示了一对严格独立的线段。严格独立集是一个接地线段集合，其中任意一对线段都严格独立。我们首先将输入的接地线段 S 转换为另一个接地线段集合 S'，使得 $G(S')$中的严格独立集对应于一个

G（S）中的最大团。

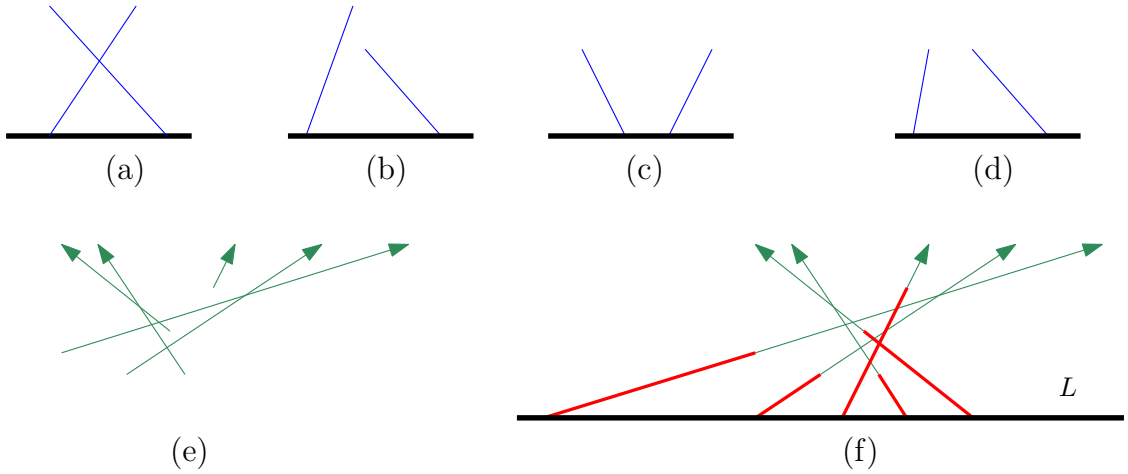


图 5：(a)–(c) 不严格独立的线段对。(d) 严格独立的线段对。(e) 向上射线表示。(f) 对应的接地线段表示，以红色显示。

3.1.1 将 S 转换为 S'

我们利用 [17] 的结果，将 S 中的线段转换为一组向上射线 $U(S)$，使得 S 中的两条线段相交，当且仅当 $U(S)$中对应的射线相交。图5(e)给出了 $U(S)$的一个示例。这样的转换可以在线性时间内完成。

现在考虑由 U（S）中的射线确定的直线排列 $\mathcal{A}$，并定义一条地面直线 L，使排列的所有交点都位于 L上方。接着，我们通过取地面直线 L 与 U（S）中的射线之间的直线部分，构造集合 S'。图 5(f) 以红色显示了 S'。下面给出引理，证明见附录 D。

引理*3.1 </style}* S 中的一对线段相交，当且仅当 S' 中对应的线段严格独立。

3.1.2 动态规划：计算 S'的严格独立集

假设直线 ℓ_1、.....、ℓ_k 覆盖了 S' 中所有线段的自由端点。我们将线段 的高度 s 定义为其自由端点的 y 坐标，并将高度记为 $h(s)$。令 $\sigma[1\ldots n]$ 为根据线段在地面直线上的顺序得到的线段序列。我们用“左”和“右”来描述 σ 中线段的相对顺序。该算法的思路是按高度非递减的顺序排列线段，并利用此顺序猜测最优解中的线段。假设已选出一组 I 严格独立线段。为了在保持严格独立性的同时扩展该集合，算法通过猜测要纳入的下一条最高线段来生成子问题，并从所有此类选择中取最大值。该算法的另一个关键组成部分是紧凑问题编码。我们不会保留 I 中的所有线段，而是维护一个至多包含 $4k$ 条线段的集合，并将其传递给每个子问题。

我们首先介绍一些符号和初步观察。设 s_i, s_j 为两条线段，其中 s_i 在 σ 中位于 s_j 的左侧。设 T 为一个至多包含 $4k$ 条线段的严格独立集，其中至多 $2k$ 条位于 $\sigma[1\ldots i]$ 中，至多 $2k$ 条位于 $\sigma[j\ldots n]$ 中。我们用 $Q[s_i, s_j, T]$ 表示最大

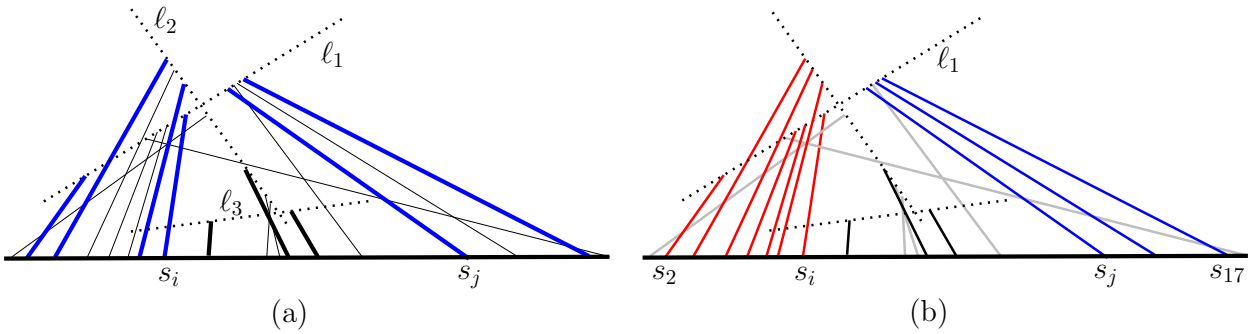


图 6：（a）一组自由端点被 3 条直线（以点表示）覆盖的接地线段。集合 T 以粗蓝色显示，与 $Q[s_i, s_j, T]$ 对应的线段以粗黑色显示。（b） A'_ℓ，A'_r 和 A' 分别以红色、蓝色和黑色显示的示意图。

可从 $\sigma[i+1 \ldots j-1]$ 添加的线段数量，且没有任何线段高于 s_i，s_j 两者，并且这些线段与 T 一起构成一个严格独立集（图 6(a)）。

令 A 为 S' 中的一个最大严格独立集。令 s_i 和 s_j 为 A 中的两条线段，使得 A 中位于 s_i 和 s_j 之间的线段都不高于 s_i 和 s_j。令 A' 为这些线段组成的集合。令 $(A \setminus A')$ 中位于 A' 左侧和右侧的线段分别为 A'_ℓ 和 A'_r（图 6(b)）。现在我们按如下方式构造严格独立集 T。对于从 1 到 k 的每个 w，我们从 $(A \setminus A')$ 中选取自由端点位于 ℓ_w 上的线段来填充条目 $T[4w-3 \ldots 4w]$。具体而言，将前两个条目 $T[4w-3]$ 和 $T[4w-2]$ 分别设为自由端点位于 ℓ_w 上的最高和最低线段。同样，将 $T[4w-1]$ 和 $T[4w]$ 分别设为自由端点位于 ℓ_w 上的最高和最低线段。如果找不到足够的线段来赋值，则其中一些条目保持为空。根据 T 的构造，容易看出 s_i 和 s_j 属于 T。例如，在图 6(b) 中，条目 $T[1, \ldots, 4]$ 分别设为 s_i、s_2、s_{17}、s_j。

下面的引理证明了这种问题编码的合理性，其证明见附录 E。

引理 3.2 设 A 是 S' 的一个最大严格独立集，s_i 和 s_j 是 A 中的两条线段。设 A' 为 A 中位于 s_i 和 s_j 之间的线段集合。假设 A' 中没有线段同时高于 s_i 和 s_j。设 Z 为与 $Q[s_i, s_j, T]$ 对应的线段。那么，$Z \cup (A \setminus A')$ 是 S' 的一个最大严格独立集。

根据引理 3.2，无须追踪解中已选取的整个集合（$A \setminus A'$），我们可以针对（$A \setminus A'$）的一个子集 T 对子问题进行编码，即 $Q[s_i, s_j, T]$。现在我们为 $Q[s_i, s_j, T]$ 建立递推关系。为方便说明，我们在 S' 中添加两条虚拟线段，一条位于 $\sigma[1]$ 左侧，另一条位于 $\sigma[n]$ 右侧，使新增线段满足以下条件。(a) 它们彼此之间以及与 S' 中的每条线段都严格独立。(b) 它们高于 S' 中的线段。(c) 它们的自由端点位于水平线 ℓ_{k+1} 上，该水平线不同于 ℓ_1、.....、ℓ_k。

虚拟线段 $\sigma[0]$ 和 $\sigma[n+1]$ 可通过以下方式构造：首先计算一个矩形 $abcd$，使其包围 S' 中的所有线段，并在其顶边 ab 与 S' 中所有线段的延伸部分相交。然后，构造斜率为正的线段 $\sigma[0]$（斜率为负的线段 $\sigma[n+1]$），并分别以 a（b）为其自由端点。此时，S'中的最大严格独立集大小为 $Q[s_0, s_{n+1}, T]$，其中 $T = \{s_0, s_{n+1}\}$。为简单起见，我们省略 T中的空项，只写出其非空元素。以下引理给出了一个问题分解（图 7(b)–(d)），其证明见附录 E。

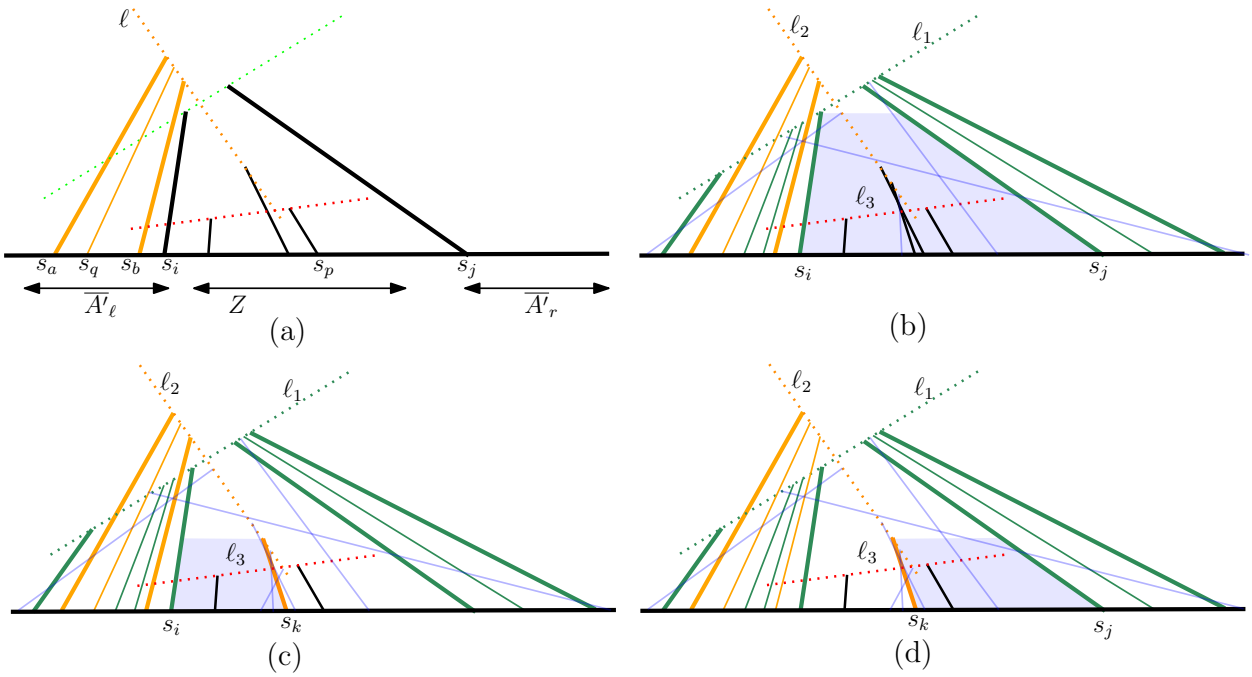


图7：（a）引理 3.2 的示意图。（b）一个子问题 $Q[s_i, s_j, T]$，其中已纳入解的线段用绿色或橙色表示，分别表示它们位于ℓ_1 或 ℓ_2上。与所选线段不严格独立的线段用细蓝线表示。 T 中的线段用粗橙色或绿色直线表示。黑色线段是 s_k的候选项。（c）–（d）将 $Q[s_i, s_j, T]$ 分解为 $Q[s_i, s_k, T_1]$ 和 $Q[s_k, s_j, T_2]$。

引理 3.3

$$Q[s_i, s_j, T] = \begin{cases} 0 & ; \textit{if no segment between } s_i, s_j \textit{ has height at most } \min\{h(s_i), h(s_j)\} \textit{ and is strictly independent to } T. \\ \max\limits_{s_k}\{Q[s_i, s_k, T_1] + Q[s_k, s_j, T_2] + 1\} & ; \textit{over } s_k \textit{ between } s_i, s_j \textit{ where } h(s_k) \leq \min\{h(s_i), h(s_j)\} \textit{ and } s_k \textit{ is strictly independent with } T. \end{cases}$$

设 ℓ 为经过 s_k自由端点的直线。设 T^- （T^+）为 T中位于 s_i左侧（右侧）的条目。若 T^- 包含两个线段 s、 s'，且它们的自由端点位于 ℓ上，则通过添加 s_k 并删除 s、 s'、 s_k中位于中位位置的线段，得到 T_1。否则，将 s_k添加到 T中，得到 T_1。 T_2 的构造关于 T^+对称。

由于 s_i 和s_j各有 O（n）种可能，而 T有 O（n^{4k}）种可能，因此子问题的数量为 O（n^{4k+2}）。根据引理 3.3，每个子问题都可以通过 O（n）次表查找来计算。若 $k = O$（1），计算所有子问题的解所需的总运行时间为O（$n^{O(1)}$）。现在我们利用引理 3.1 得到以下定理。

定理3.4 给定一组 n 接地线段，其自由端点位于 $O(1)$ 条直线上，可以在 $O(n^{O(1)})$ 时间内计算出相应相交图中的最大团。

3.2 单位长度接地线段

现在，我们给出一种多项式时间算法，用于在接地单位长度线段图 $G(S)$中寻找最大团。设 M 是 $G(S)$中的一个最大团，我们的思路是定义一组规模为多项式的子图$\mathcal{G}$，并保证其中至少有一个包含最大团 M。随后，寻找 M 的过程就可以限制在这些子图中。为确保这一方法可行，我们还需要证明每个子图都具有良好的性质，从而能够在多项式时间内找到其中的最大团。

$\mathcal{G}$ 的构造很简单。对于一对相交的接地线段 s_a、s_b，令 $G(s_a, s_b)$ 为由所有同时与 s_a 和 s_b 相交，且位于地面直线上 s_a 与 s_b 之间的线段所确定的相交图。现在定义 $\mathcal{G}$ 为图 $\bigcup_{s_a, s_b \in S} G(s_a, s_b)$ 的集合。令 M 为 $G(S)$ 的一个最大团，并令 s_ℓ 和 s_r 分别为 M 中最左端和最右端的线段，那么该团必定存在于图 $G(s_\ell, s_r)$ 中。我们将证明 $G(s_\ell, s_r)$ 是一个余可比图，因此可以在多项式时间内计算出最大团 [29]。

如果图的顶点存在一个线性序 $v_1 \ldots, v_n$，并且对于任意满足 $1 \le i < j < k \le n$ 的 i, j, k，边 (v_i, v_k) 的存在意味着 v_j 至少与 v_i 或 v_k 之一相邻，那么该线性序称为无伞序。我们将使用余可比图的以下刻画。

引理 3.5（Kratsch 和 Stewart [36]）图是余可比图，当且仅当它具有无伞序。

引理 3.6 图 $G(s_\ell, s_r)$ 是余可比图。

证明：[证明概要] 设 $\sigma = (s_\ell, \ldots, s_r)$ 是图 $G(s_\ell, s_r)$ 中各线段在地面直线上的顺序。我们证明 σ 是无伞序，因此根据引理 3.5，$G(s_\ell, s_r)$ 是余可比图。具体而言，对于 σ 中任意子序列 s_a, s_c, s_b，我们证明如果 s_a 和 s_b 相交，那么它们中至少有一个与 s_c 相交。根据 s_a 和 s_b 的交点 $i(s_a, s_b)$ 的位置，我们分两种情况讨论。如果 $i(s_a, s_b)$ 位于由 s_ℓ 和 s_r 确定的两条直线的上方（图 8(a)–(b)），那么为了避免 s_a, s_b，s_c 的长度必须小于一个单位。如果 $i(s_a, s_b)$ 没有位于两条直线的上方（图 8(c)–(d)），那么为了避免 s_a, s_b，线段 s_c 必须避开 s_ℓ 和 s_r 中至少一个。详细内容见附录 G。□

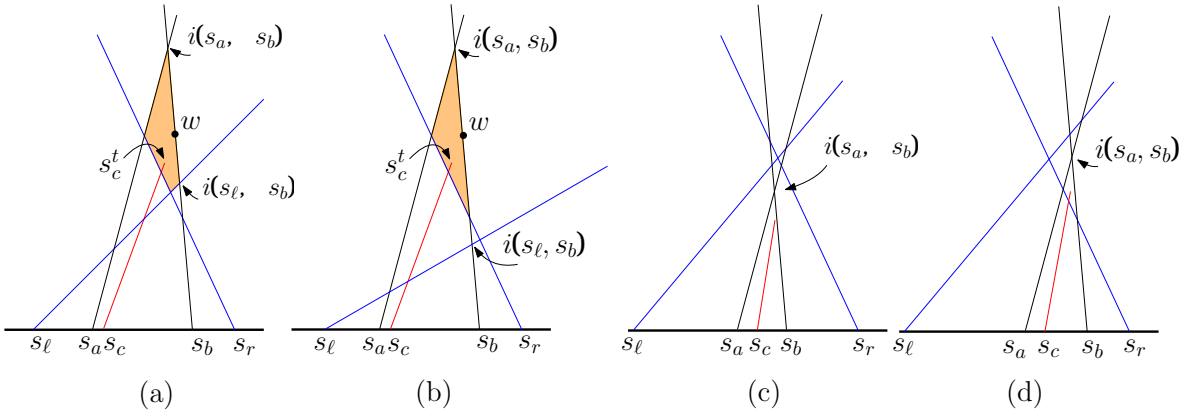


图 8：示意　　图 8：引理 3.6 证明的示意。s_c^t 的自由端点 s_c 位于橙色区域　　.

由于可以在多项式时间内计算 n-顶点余可比图中的最大团，[29], 我们可以利用引理 3.6 得到以下定理。

定理 3.7 给定一组接地单位长度线段，可以在多项式时间内计算相应相交图中的最大团。

3.3 接地线段图的近似

现在，我们给出一种多项式时间的 $O(n^{3/4})$-近似算法，用于计算任意接地线段图中的最大团。

定理 3.8 给定 n 条接地线段，可以在多项式时间内计算出其相交图中的一个团 C，使得 $|C|$ 为Ω($n^{-3/4}|M|$)，其中 M 为最大团。

证明： [证明概要]我们将线段划分为 $O(n^{3/4})$ 个满足特定性质的子集。设 S为其中一个子集，并设 σ 表示按照自由端点的 x 坐标递增排列的线段顺序。我们设计 S，使得相应的自由端点（分别为接地端点）序列在 y 坐标（分别在 x 坐标）上单调递增或递减。我们证明 S 是一个余可比图，这意味着通过检查所有子集，可以找到大小为 Ω($n^{-3/4}|M|$) 的团。详细内容见附录 F。□

4 圆盘相交图

本节介绍圆盘相交图方面的结果。

4.1 接地情形下的多项式时间算法

定理 4.1 给定一组接地圆盘 $\mathcal{D}$，可以在多项式时间内计算相应圆盘相交图 $G(\mathcal{D})$ 中的最大团。

证明： [证明概要] 对于每个圆盘 $D \in \mathcal{D}$，我们计算一个包含 D 且以其为最小圆盘的最大团 $M(D)$。取这些团中最大的一个，即可得到 $G(\mathcal{D})$ 的最大团。为了计算 $M(D)$，我们只需考察与 D 相交的圆盘集合 $S \subseteq \mathcal{D}$。接下来我们证明，S 的相交图是一个共二分图。详情见附录 H。□

4.2 [1,3]-圆盘图的 (3/2)-近似

本节考虑 $[1,3]$-**圆盘**，即半径位于区间 $[1,3]$ 内的圆盘。设 $\mathcal{D}$ 是一组 $[1,3]$-圆盘。现在我们说明，如何在 $O(n^3 f(n))$ 时间内计算相应圆盘相交图中的一个 3/2-近似，其中 $f(n)$ 是计算一个含 n 个顶点的共二分图中的最大团所需的时间。我们将使用以下观察：给定一组被三个点穿刺的圆盘，可以在 $O(f(n))$ 时间内计算最大团的一个 3/2-近似。其思路是先构造三个图，每个图都通过剔除仅被三个点中的某一个点击中的圆盘得到，然后取这三个图中最大的团。为了得到最终的近似算法，我们将证明，寻找最大团可以归约为 $O(n^3)$ 个两两相交的圆盘子集。

4.2.1 两两相交的 $[1,3]$-圆盘的刺点

技术背景。 我们首先介绍一些记号和初步结果。若三个两两相交的圆盘 D_1，D_2，D_3 有一个公共交点，我们称它们为*Helly* 三元组。否则，称它们为非 *Helly* 三元组。非 Helly 三元组的内切圆是能够包含在该三元组的三个圆盘所围成区域内的最大圆（图 9(a) ）。给定一条线段 ab，我们用记号 $L(ab)$表示由 ab确定的直线。对于角 $\angle pqr$，我们考虑从 qp 到 qr的顺时针角。我们用 $W(\angle pqr)$表示一个楔形

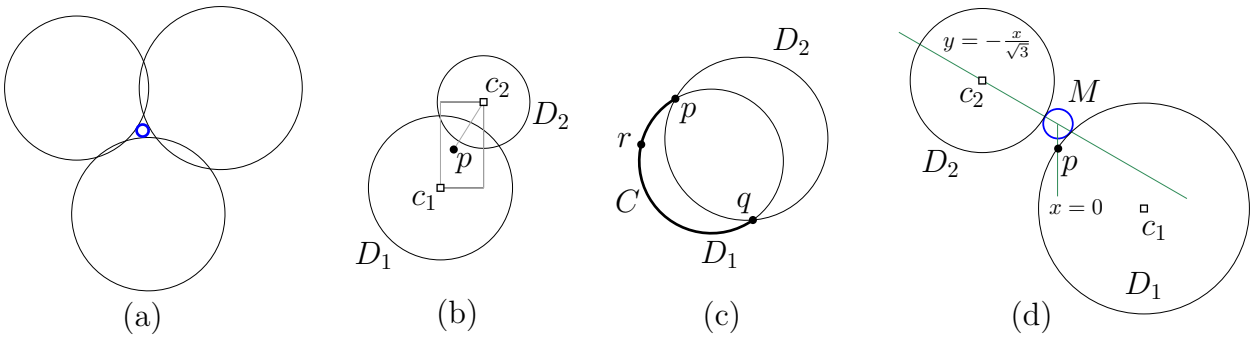


图9：（a）非 Helly 三元组及其内切圆分别以黑色和蓝色显示。（b）引理 4.3、（c）引理4.4 和（d）引理4.5 的示意图。

区域，该区域由射线 qp 顺时针旋转直至与 qr重合时扫过。我们将使用以下四个引理，其中后三个引理的证明见附录I。

引理 4.2（Biniaz、Bose 和 Wang [6]） 三个半径为 r 的两两相交圆盘组成的非 *Helly* 三元组，其内切圆的半径至多为 $r(\frac{2}{\sqrt{3}}-1)$。

引理 4.3 设 D_1 和 D_2 是两个相交的圆盘，其中心分别为 c_1 和 c_2。设 p 是包含在以 c_1c_2 为对角线的轴对齐矩形中的一点（图*9*（*b*））。如果我们沿着 $L(pc_2)$ 将 c_2 朝 p 移动，那么 D_2 始终与 D_1 相交。

引理 4.4 设 D_1 和 D_2 是两个在两个不同的点 p 和 q 处相交的圆盘。设 C 是 D_1 边界上位于 p 和 q 之间的一段开圆弧，且设 r 是 C 上的一点（图*9*（*c*））。如果 r 位于 D_2 外部，那么整段圆弧 C 都位于 D_2 外部。

引理4.5 设 r 为区间 $[1,3]$中的一个数。设 M 为半径为 $r(\frac{2}{\sqrt{3}}-1)$、中心为 $o=(0,0)$的圆，并设 p 为点 $(0,-\frac{1}{\sqrt{3}})$。按如下方式定义两个圆盘 D_1 和 D_2：D_1 与 p 相切，且其中心位于第四象限；D_2 与 M 相切，且其中心位于第二象限的直线 $y=-\frac{x}{\sqrt{3}}$ 上（图*9(d)*）。如果这些圆盘的半径至多为三，那么D_1 不可能在线 $y=-\frac{x}{\sqrt{3}}$下方与 D_2 相交。

寻找刺穿点。设 Q 为与 $\mathcal{D}$中的每个圆盘都相交的最小圆，它可以在线性时间 [38]内计算得出。如果 Q 的半径为零，那么一个点就能刺穿所有圆盘。否则，Q 是 $\mathcal{D}$ [6]中某个非 Helly 三元组的内切圆。现在可以使用以下引理，为单位圆盘的情形找到三个刺穿点 A,B,C。

引理4.6（Biniaz、Bose 和 Wang [6]）设 S 是一组两两相交的单位圆盘，且其中包含一个非 *Helly* 三元组。假设与 S 中每个圆盘都相交的最小圆以 $(0,0)$ 为圆心。那么，点 $A=(0,-\frac{1}{\sqrt{3}})$、$B=(1/2,1/2\sqrt{3})$ 和 $C=(-1/2,1/2\sqrt{3})$ 可刺穿 S 中的所有圆盘。

假设与所有 $\mathcal{D}$ 的 [1,3]圆盘相交的最小圆是 Q，其中 Q 由一个非 Helly 三元组确定。设 D_b、D_ℓ、D_r是该非 Helly 三元组中的圆盘，按顺时针顺序围绕Q 排列（图 10(a)）。设 c_b、c_ℓ、c_r、c_q分别是 D_b、D_ℓ、D_r、Q的中心。令 o 为原点 (0，0)，并假设 $\angle c_\ell o c_r$ 是 $\{\angle c_\ell o c_r, \angle c_r o c_b, \angle c_b o c_\ell\}$ 中最小的角。我们平移$\mathcal{D}$，使得 Q的中心与 o重合，并旋转平面，使得 c_b 位于 o下方。在此设置中，以下性质已为人所知。

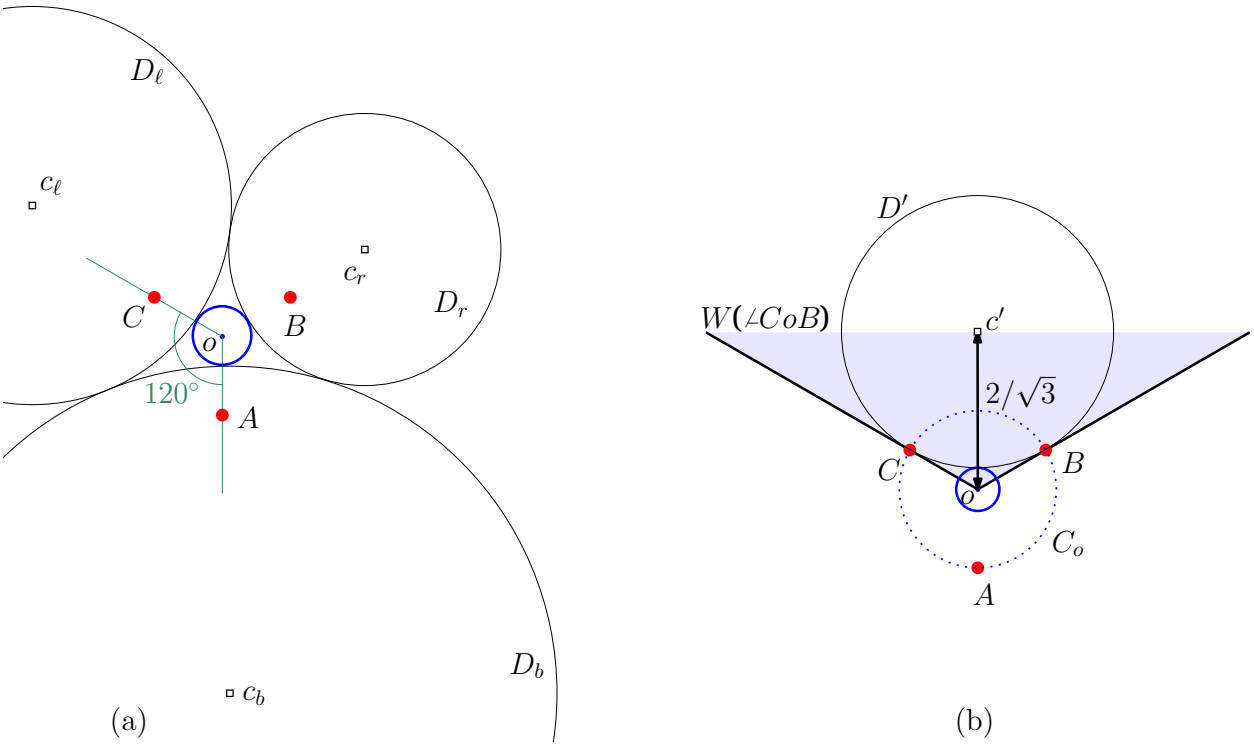


图10: （a） $\{D_b, D_\ell, D_r\}$、 $\{A, B, C\}$ 和 Q的示意图，其中 Q 为蓝色。由于空间限制，部分圆盘仅绘制了一部分。（b）一个与 B、 C 相切的单位圆盘，其中心位于 $W(\angle CoB)$中。

引理 4.7（Carmi、Katz和Morin [18]） D_l 与 Q的切点处的切线斜率为正，而 D_r 与 Q 的切点处的切线斜率为负。

现在我们证明，引理4.6中的点 A、 B、 C可以穿刺 $\mathcal{D}$中的所有圆盘。反设 D' 是 $\mathcal{D}$ 中的一个圆盘，其中心为 c' ，半径为 r' ，并且 D' 未被 $\{A, B, C\}$ 中的任何点穿刺，但它与三个圆盘 D_b、 D_ℓ、 D_r 以及 Q都相交。设 r_q为 Q的半径。设C_o为半径为$\frac{1}{\sqrt{3}}$的圆，即经过 A、 B、 C的圆。

我们首先证明， r_q必须至少为（$\frac{2}{\sqrt{3}} - 1$），并且 c'必须位于 C_o之外。来自 $\{A, B, C\}$ 中点的三对垂直平分线交于 o。因此， C_o内的每个点到 $\{A, B, C\}$中某个点的距离都不超过 $\frac{1}{\sqrt{3}}$。由于 D'未被穿刺， c' 不能位于 C_o中。现在假设c' 位于 C_o之外。由于 D' 未被穿刺，我们可以移动 D' ，使 c' 到 $\{A, B, C\}$中两个点的距离相等。不失一般性，假设 c'到B 和 C的距离相等。如果 D' 是一个单位圆盘，则 $|oc'| = \frac{2}{\sqrt{3}}$ （图 10(b)）。如果 r_q 小于（$\frac{2}{\sqrt{3}} - 1$），那么D' 无法与 Q相交。如果 D' 的半径更大，那么它距 Q更远，这与D' 和 Q相交相矛盾。

由于 $\mathcal{D}$ 中圆盘的最大半径为 3，因此 Q 的半径至多为 3($\frac{2}{\sqrt{3}} - 1$)（引理 4.2）。本节余下部分假设 ($\frac{2}{\sqrt{3}} - 1$) $\leq r_q \leq$ 3($\frac{2}{\sqrt{3}} - 1$)，且 c' 位于 C_o 之外。现在，我们根据 c' 的位置讨论两种情况，并证明在每种情况下 D' 都会被穿刺。

情形1（$c' \in W$（$\angle CoB$））。注意， D' 不可能包含 o。现在不失一般性地假设， D' 在 L（oA）的左半平面上与 D_b 相交，因此位于 L（oC）下方。我们沿直线 L（$c'o$）平移 D' ，使其与 C相切。由于 D' 此前与 D_b 和 Q相交，根据引理 4.3

在此次平移过程中，它仍与 D_b 和 Q 相交。由于 D' 与 D_b 相交并与C相切， c' 位于直线 $x = C$的左半平面上。现在我们在不改变 $|c'C|$ 距离的情况下，将 D' 逆时针旋转，使其与 Q 相切（图11(a)）。令 c'_{old} 表示旋转前 c' 的位置。由于 c'_{old} 位于直线 $x = C$的左半平面上，$\angle c'c'_{old}c_b$ 不能大于$\angle c'_{old}c'c_b$。因此， $|c'c_b| \leq |c_{old}c_b|$，且 D' 仍与 D_b相交。现在，考虑 C， Q，D'和 D_b分别作为 p， M， D_2和 D_1，根据引理4.5即可得出矛盾（图11(b)）。

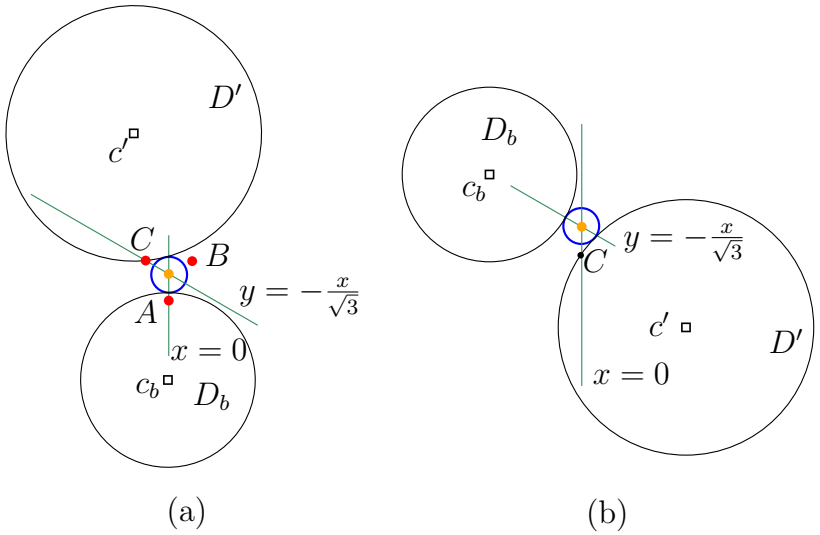


图11：(a) 情形1的示意图，其中 Q 以蓝色显示， o 以橙色标记。(b) 对平面的变换，以展示其与引理4.5的关系。

情形 2（$c' \in W(\angle AoC)$ **或** $c' \in W(\angle BoA)$。只需考虑 $c \in W(\angle BoA)$的情况，因为另一种情况的论证是对称的。由于 D' 不能包含 o，我们可以根据 D' 与 D_ℓ 在 $L(oC)$上方还是下方相交，分为两个子情形。

情形 2.1（D' **与** D_ℓ **在下方相交** $L(oC)$）。我们通过考察以下两种情形来处理这一情况。如果 c_ℓ 位于 $L(oC)$上方，那么我们重新定位 c_ℓ 和 D'，使得 c_ℓ 位于 $L(oC)$上，并且 D'与 A 和 Q相切。我们利用引理 4.5证明这会导致矛盾。如果 c_ℓ 位于 $L(oC)$下方，那么根据引理 4.7， D_ℓ 与 D_b 的左上弧相切。接着我们证明 D'避开这段圆弧，从而也避开 D_ℓ。详情见附录I.1。

情形2.2（D' **与** D_ℓ **上方的** $L(oC)$**相交**）。处理这一情形的直观思路如下。由于 D_ℓ 与 D_b相切，$\angle c_boc_\ell$ 不可能很大。此外， D' 必须与 Q 相交且避开 C这一约束，会将 D' 推离正 x 轴。因此，我们通过证明 D' 无法与 D_ℓ相交来得出矛盾。详细内容见附录I.1。

下面的定理概述了本节的结果。

定理4.8 设 $\mathcal{D}$ 是一组 n 两两相交的圆盘，其半径属于区间 $[1, 3]$。那么，可以在 $O(n)$ 时间内计算出三个点，使其刺穿 $\mathcal{D}$ 。

4.2.2 对 $G(\mathcal{D})$ 中的最大团进行 3/2-近似

我们首先计算圆盘的排列，并针对每个单元，根据与该单元相交的圆盘集合确定一个团。接下来，我们枚举所有非Helly三元组，这需要$O(n^3)$次猜测。对于每个这样的三元组，根据定理4.8，我们得到三个刺穿点。对于每一对

刺穿点 p，p'，我们计算由被 p 和 p'穿刺的圆盘所诱导的相交图中的最大团。最后，我们返回所有已计算团中的最大者。

定理 4.9 给定半径为 $[1,3]$，的 n 个圆盘，我们可以在 $O(n^3 f(n))$ 时间内，求出其相交图 G 中的一个团 C，使得 $|C| \geq 2|M|/3$。这里，M 是 G 中的一个最大团，而 $f(n)$ 是在一个有 n 个顶点的共二分图中求最大团所需的时间。

该定理适用于任意配置的 $[1,3]$ 个圆盘，因此也适用于所有圆盘都被一条直线刺中的情形。

5 结论

未来研究有若干方向。端点位于 $O(1)$ 条直线上的被刺线段情形仍未解决。一个值得探索的方向是证明向上射线图具有 APX-困难性，或为其设计多项式时间近似方案。也可以尝试将我们针对 $[1,3]$ 个圆盘所得的结果推广开来。若能找到运行时间更快的更优近似算法，将会很有意义。

参考文献

[1] P. K. Agarwal 和 N. H. Mustafa。二维凸对象的相交图的独立集。《计算几何》，34(2)：83–95，2006年。[2] R. Akpanya、B. Rivier 和 F. B. Stock。CCCG 2024 的开放问题。载于《第 *32*届加拿大计算几何会议（*CCCG*）论文集》，第167–170页，2024年。[3] C. Amb¨uhl 和 U. Wagner。椭圆与三角形相交图中的团问题。《计算系统理论》，38(3)：279–292，2005年。[4] S. Bandyapadhyay、A. Maheshwari、S. Mehrabi 和 S. Suri。矩形与 L 形框相交图上的支配集近似。《计算几何》，82：32–44，2019年。[5] J. Bang-Jensen、B. Reed、M. Schacht、R. ˇS´amal、B. Toft 和 U. Wagner。关于 Jarik Neˇsetˇril 提出的六个问题。载于《离散数学专题：献给 *Jarik Neˇsetˇril 60*岁生日》，第613–627页。施普林格，2006年。[6] A. Biniaz、P. Bose 和 Y. Wang。用于刺点两两相交圆盘的简单线性时间算法。《计算几何》，114：102011，2023年。[7] M. Bonamy、 ´E. Bonnet、N. Bousquet、P. Charbit、P. Giannopoulos、E. J. Kim、P. Rzazewski、F. Sikora 和 S. Thomass´e。圆盘图和单位球图上最大团的高效多项式时间近似方案与亚指数时间算法。《*ACM* 学报》，68(2)：9:1–9:38，2021年。[8] M. Bonamy、E. Bonnet、N. Bousquet、P. Charbit 和 S. Thomass´e。圆盘和单位球上的最大团高效多项式时间近似方案。载于 M. Thorup 编，《第*59*届 *IEEE* 计算机科学基础年会（*FOCS*）论文集》，第568–579页。IEEE 计算机学会，2018年。[9] ´E. Bonnet、P. Giannopoulos、E. J. Kim、P. Rzazewski 和 F. Sikora。圆盘图上最大团的准多项式时间近似方案与亚指数时间算法。载于 B. Speckmann 和 C. D. T´oth 编，《第*34*届国际计算几何研讨会（*SoCG*）论文集》，第99卷，*LIPIcs*，第12:1–12:15页。Schloss Dagstuhl - Leibniz-Zentrum f¨ur Informatik，2018年。

[10] P. Bose、P. Carmi、J. M. Keil、A. Maheshwari、S. Mehrabi、D. Mondal 和 M. Smid。在外弦图及其相关图上计算最大独立集。《计算几何》，103：101852，2022年。[11] H. Breu。受约束单位圆盘图的算法方面。博士论文，不列颠哥伦比亚大学，1996年。[12] S. Cabello。两种尺寸圆盘的最大团。《几何相交图：问题与方向》*CG Week*研讨会开放问题，埃因霍温，*6*月*25*日，2015年。[13] S. Cabello。在算法图论研讨会上提出的开放问题。亚得里亚海岸研讨会，科佩尔，斯洛文尼亚，*6*月*16–19*日，2015年。[14] S. Cabello、J. Cardinal 和 S. Langerman。射线相交图中的团问题。载于《欧洲算法研讨会（*ESA*）》，第241–252页。施普林格，2012年。[15] S. Cabello、J. Cardinal 和 S. Langerman。射线相交图中的团问题。《离散与计算几何》，50(3)：771–783，2013年。[16] S. Cabello 和 M. Jeˇciˇc。细化几何相交图类别的类别层次。《组合学电子期刊》，第P1–33页，2017年。[17] J. Cardinal、S. Felsner、T. Miltzow、C. Tompkins 和 B. Vogtenhuber。射线与接地线段的相交图。《图算法及其应用期刊》，22(2)：273–295，2018年。[18] P. Carmi、M. J. Katz 和 P. Morin。用四个点刺穿两两相交的圆盘。《离散与计算几何》，70(4)：1751–1784，2023年。[19] D. Chakraborty、K. Gajjar 和 I. Rusu。识别被直线刺穿的几何相交图。《理论计算机科学》，995：114488，2024年。[20] T. M. Chan、T. C. van Dijk、K. Fleszar、J. Spoerhase 和 A. Wolff。用线段刺穿矩形——分解如何降低浅层单元复杂度。载于《第*29*届国际算法与计算研讨会（*ISAAC*）论文集》，2018年。[21] B. N. Clark、C. J. Colbourn 和 D. S. Johnson。单位圆盘图。《离散数学》，86(1- 3)：165–177，1990年。[22] L. Danzer。关于欧几里得平面中圆盘的 Gallai 问题的解法。《匈牙利数学科学研究》，21(1-2)：111–134，1986年。[23] D. Eppstein 和 J. Erickson。迭代最近邻与极小多面体的求解。《离散与计算几何》，11：321–350，1994年。[24] P. Erd¨os 和 G. Szekeres。几何中的一个组合问题。《数学汇刊》，2：463–470，1935年。[25] J. Espenant、J. M. Keil 和 D. Mondal。在圆盘图中寻找最大团。载于 E. W. Chambers 和 J. Gudmundsson 编，《第*39*届国际计算几何研讨会（*SoCG*）论文集》，第258卷，*LIPIcs*，第30:1–30:17页。Schloss Dagstuhl - Leibniz-Zentrum f¨ur Informatik，2023年。[26] S. Felsner、R. M¨uller 和 L. Wernisch。梯形图及其推广：几何与算法。《离散应用数学》，74(1)：13–32，1997年。

[27] A. V. Fishkin. 圆盘图：简短综述。载于 K. Jansen 和 R. Solis-Oba 编，《近似与在线算法论文集：第一届国际研讨会（*WAOA*）》，《计算机科学讲义》第 2909 卷，第 260–264 页。施普林格，2003年。[28] J. Fox 和 J. Pach. 计算交图的独立数。载于 D. Ran- dall 编，第二十二届年度 *ACM-SIAM*离散算法研讨会（*SODA*）论文集，第 1161–1165 页。SIAM，2011年。[29] F. Gavril. 丝图相交图中的最大权独立集与团。《信息处理快报》，73(5-6):181–188，2000年。[30] H. Hadwiger 和 H. Debrunner. *Ausgew¨ahle Einzelprobleme der kombinatorischen Geometriein der Ebene*。Kundig，1955年。[31] V. Jel´ınek 和 M. T¨opfer. 关于接地L图及其相关图类。《电子组合学期刊》，26(3):P3.17，2019年。[32] J. M. Keil、J. S. Mitchell、D. Pradhan 和 M. Vatshelle. 外弦图上最大权独立集问题的一种算法。《计算几何》，60:19–25，2017年。[33] J. M. Keil 和 D. Mondal. 轻松求解圆盘图中的最大团问题。载于 O. Aichholzer 和 H. Wang 编，第*41*届国际计算几何研讨会（*SoCG*）论文集，第 332 卷，*LIPIcs*，第 63:1–63:16 页。Schloss Dagstuhl - Leibniz-Zentrum f¨ur Informatik，2025年。[34] J. M. Keil、D. Mondal、E. Moradi 和 Y. Nekrich. 在接地一弯折弦图中寻找最大团。《图算法与应用期刊》，26(4)，2022年。[35] J. Kratochv´ıl 和 J. Ne˘set˘ril. 交定义图类中的独立集与团问题。《查理大学数学评论》，31(1):85–93，1990年。[36] D. Kratsch 和 L. Stewart. 余可比图上的支配问题。《*SIAM*离散数学期刊》，6(3):400–417，1993年。[37] G. Liu 和 H. Wang. 直线约束圆盘的几何击中集。载于算法与数据结构研讨会，第 574–587 页。施普林格，2023年。[38] M. L¨offler 和 M. van Kreveld. 不精确点上的最大包围盒、最小直径及相关问题。《计算几何》，43(4):419–433，2010年。[39] M. Middendorf 和 F. Pfeiffer. 弦图类中的最大团问题。《离散数学》，108(1-3):365–372，1992年。[40] D. Mondal. 着色图的同时嵌入。《图与组合》，37(3):747–760，2021年。[41] L. Stach´o. Gallai关于圆的钉定问题的一个解。《数学学报》，32(1-3):19–47，1981年。

帆骨架的构造

假设 $k' = \lceil k/2 \rceil + 1$。我们将确保帆骨架满足以下性质 es.

P1. 对每个 从 1 到 k' 的 i， L_{2i-1} 和 L_{2i} 的斜率绝对值相同 .

P2. 对每个从 2 到 k' 的 i， L_{2i} 的斜率大于 $L_{2(i-1)}$。

P3. 对每个从 2 到 $2k'$ 的 i， L_i 的原点位于 L_{i-1} 上，并且 L_i 与所有其他骨架射线相交，即 $\{L_1, L_2, \ldots, L_{2k'}\} \setminus L_i$。

现在，我们描述一种用于 $\mathcal{S}_\ell$ 和 $\mathcal{S}_r$ 的增量构造，使其满足性质 P1–P3。假设 $\alpha = 90^\circ/2k'$，并令 β 为一个较小的正常数。

令 L_1 为向上的骨架射线，其起点位于 (0,0)，且与正 x 轴的倾角为 $(90^\circ + \alpha)$。令 z 为 L_1上的一个点。我们将 L_2 定义为一条骨架射线，其起点为 z，倾角为 $(90^\circ - \alpha)$。不难验证 $\{L_1, L_2\}$ 满足性质 P1–P3。对于从 2 到 k'的每个 i，我们分别将 L_{2i-1} 和 L_{2i} 的倾角设为 $(90^\circ + i\alpha)$ 和 $(90^\circ - i\alpha)$，从而满足 P1–P2。现在，我们描述 L_{2i-1} 和 L_{2i} 的起点，并证明$\{L_1, L_2, \ldots, L_{2i}\}$ 满足 P3。

令 e^ℓ_1、e^ℓ_3、.....、e^ℓ_{2i-1}为 $\mathcal{S}_\ell$的极值路径，并令 e^r_2、e^r_4、.....、e^r_{2i-2}为 $\mathcal{S}_r$的极值路径。若 i 为偶数，则取 p 为 e^r_{2i-2} 上的一个点，该点与 e^r_{2i-2} 的下端点相距 β（例如，图 2(d)中的放大视图）。我们将 L_{2i-1} 的原点设为 p。由于 L_{2i-1}的斜率为负，而 L_2、.....、L_{2i-2}的斜率为正，因此 L_{2i-1} 与所有偶数编号的骨架射线相交。由于 L_{2i-1} 的倾角较大，它与所有骨架射线L_1、.....、L_{2i-3}相交。类似地，当 i为奇数时，我们将 L_{2i}的原点设在 e^r_{2i-1}上的一个点处，该点与 e^r_{2i-1}的下端点相距β，并证明它与 $\{L_1, \ldots, L_{2i-1}\}$中的所有骨架射线相交。因此，性质 P3 得以满足。

B 非退化帆的构造

设 v_1、v_2..... $v_{|\sigma_j|}$ 是 σ_j 的顶点， r_1、r_2..... $v_{|\sigma_j|}$ 是相应的射线。起初，所有射线都经过 ξ 的质心 $j+1$（图12）。我们不移动对应于 v_1 的射线以及 $v_{|\sigma_j|}$。对于从 2 到 $|\sigma_j| - 1$ 的 i，我们将 r_i 向 r_1 移近，通过与 e'_{i-1} 相交来形成边 e'_i。由于我们不要求坐标是多项式有界的，这一过程便得到了所需的非退化帆。

C P 的内部节点射线的构造

根据可容许扩展的定义， P 中的每条路径都有一个或两个内部顶点。此外，它的端点是 T 中处于 T 同一层且彼此相邻的两个叶节点。设 a、b、c、d 是 P 中的一条路径，其中 b 和 c 可以重合。假设 a、d 属于 T 的第 j 层。设 r_a、r_d 分别是 a 和 d 的射线。在构造 R_{j+1} 时，我们插入射线 r_b 和 r_c（分别对应 b 和 c）。设 e_a 和 e_d 是 R_j 的极值路径上分别对应于 r_a、r_d 的线段。由于 a、d 在 σ_j 中相邻，边 e_a、e_d 在 R_j 的极值路径上也是相邻的。

我们将 r_b、r_c 的起点设为同一个点，该点位于紧邻 e_a 和 e_d上方的单元内。与上一节中的构造类似，射线最初经过$\xi(j+2)$的质心。如果 $b \neq c$，那么在构造 R_{j+1}之后，我们将 r_c 稍微平移，同时保持其与 r_b平行。我们确保 r_c 的起点仍位于同一单元内，并且它与相同的一组射线相交

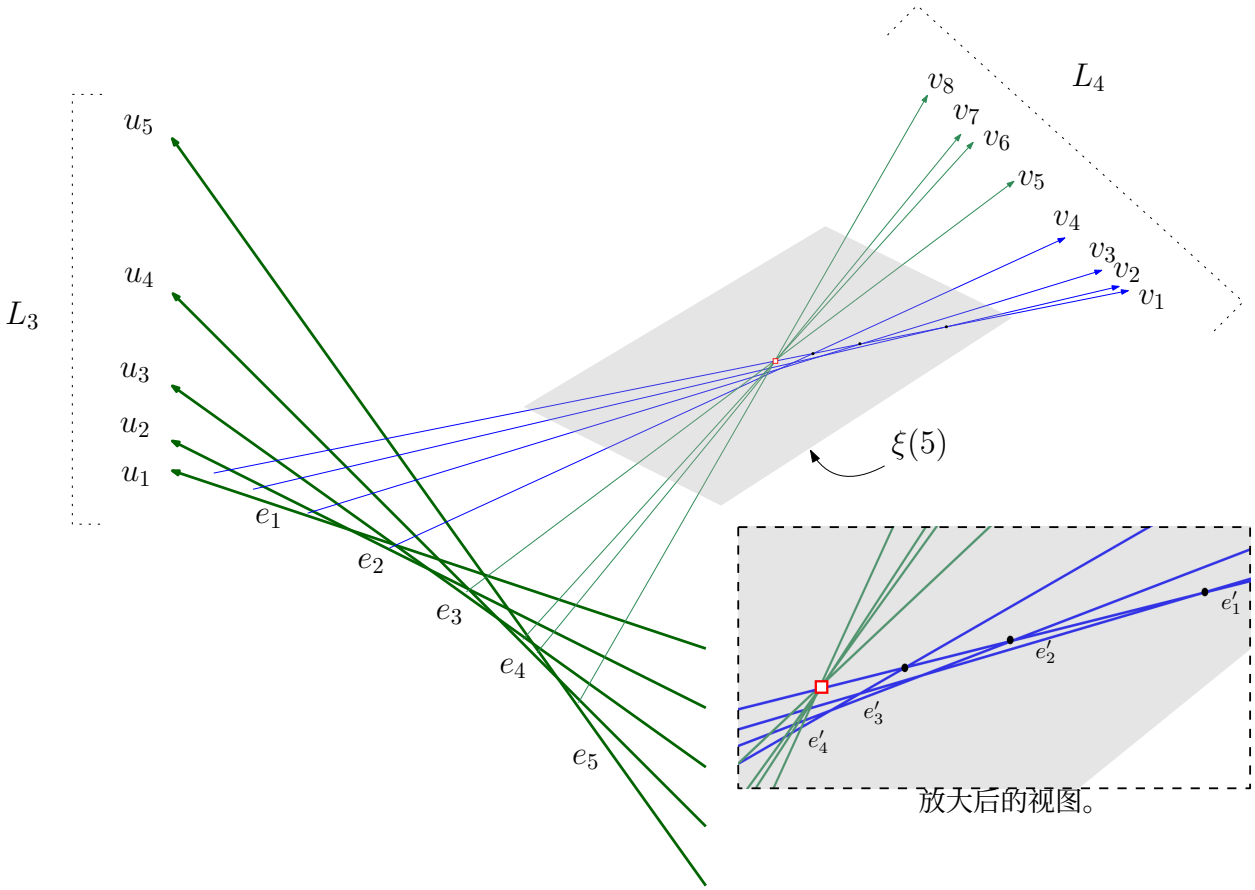


图12：非退化帆形构造示意图。最初，所有射线都经过 $\xi(5)$的质心，该质心用红色方框标出。射线 v_1 和 v_8 保持原位。射线 v_2，v_3，.....逐渐靠近，在质心上方与 v_1 相交，从而形成极值路径。已移动的三条射线 v_2，v_3，v_4 以蓝色标出。v_1 与v_2，v_3，v_4 之间的交点以黑点标出。

，且顺序相同）。例如，考虑图4中的路径 $(v_7$、w_6、w_7、$v_8) \in P$，其中 w_6、w_7 的两条射线互相平行，且起点位于紧邻 e_{v_7}、e_{v_8}上方的单元内。

现在只需证明，$(T \cup P)$中 r_b 和 r_c 的邻接关系已得到正确实现，也就是说，它们与对应于 σ_1，.....，σ_j 的所有射线相交，但不与射线 r_a，r_d相交。根据初始帆骨架的构造，r_b，r_c 与 σ_1，.....，σ_{j-2}中的所有射线相交。由于 r_b，r_c 从紧邻 e_a 和 e_d 上方的单元出发（例如，图4放大视图中以灰色阴影标出的单元），它们与对应于 $\sigma_{j-1} \setminus \{r_b, r_c\}$的所有射线相交。由于 r_b，r_c 最初经过 $\xi(j+2)$的一个公共点，它们与σ_{j+1}中的所有其他射线相交。在产生 R_{j+1}的扰动过程中，相交图保持不变。最后，在 $b \neq c$的情况下，我们使 r_b 与 r_c 平行。因此，$(T \cup P)$中 b 和 c 的所有邻接关系都得到了正确实现。

D 第3.1.1节的细节

证明： [引理 3 的证明。1] 设 r_1 和 r_2 是 $U(S)$ 中的两条射线，s_1 和 s_2 是 S'中的对应线段。如果 S 中的两条线段相交，那么它们在 $U(S)$ 中的射线 r_1 和 r_2 也相交。根据构造，s_1 和 s_2 满足 (C_1)–(C_2)，也就是说，它们严格独立。现在考虑以下情况

当 s_1 和 s_2 严格独立时。根据条件 (C_1)–(C_2)，将线段 s_1 和s_2 越过其自由端点延长，必定会使延伸部分相交。因此， r_1和 r_2 必定相交，进而它们在 S 中的相关线段也相交。□

E 第3.1.2节的详细内容

证明: [引理3的证明。2] 我们首先证明， $Z \cup (A \setminus A')$是一个严格独立集，即每条线段 $s_p \in Z$ 都与每条线段 $s_q \in (A \setminus A')$严格独立。由于$(T \cup Z)$是一个严格独立集，我们可以假设 $s_q \notin T$。不失一般性，设 s_q 是 A'_ℓ的一条线段，其自由端点位于某条直线 $\ell \in \{\ell_1, \ldots, \ell_k\}$ 上（图7(a)）。由于 $s_q \notin T$， T必须包含两条线段 s_a 和 s_b，它们分别是 A'_ℓ 中自由端点位于ℓ上的最高和最低线段。反设 s_p 与 s_q 并非严格独立。

首先假设条件 C_1 不成立，即 s_p 与 s_q相交。由于线段 s_a， s_q， s_b， s_i属于 A，它们构成一个严格独立集。线段 s_i 位于 s_q 和 s_p之间。因此，为了避免与 s_q 和 s_p相交， s_i 必须小于 s_p，这与我们的假设 $s_p \in Z$ 矛盾，因为 Z 中没有任何线段高于 s_i， s_j。

现在假设条件 C_2 被违反。如果延伸部分 s_q 与 s_p相交，那么 s_p 必定高于 s_i，这与我们关于 $s_p \in Z$的假设相矛盾。

如果 s_p 的延伸部分与 s_q相交，那么我们可以证明 s_p 不可能与 $\{s_a, s_b\}$严格独立，这与（$T \cup Z$）是严格独立集相矛盾。由于 s_a 和 s_b 严格独立，因此它们不可能位于 ℓ的相对两侧半平面上，否则将违反条件 C_2。现在不失一般性地考虑 s_a 和 s_b 位于 ℓ的左半平面上。接下来考虑以下两种情况。

- 假设 s_a 位于 s_q的左侧。由于 s_a 未被 s_p的延伸部分相交， s_a 的自由端点位于由 s_p确定的直线 L_p 的左半平面上，而 s_q 和 s_b 的自由端点位于 L_p的右半平面上。因此， s_b 必定与 s_p 或其延伸部分相交。 - 如果 s_a 位于 s_q 和 s_p之间，那么为避免与 s_p的延伸部分相交， s_a 必须小于 s_q。这与我们关于 s_q 小于 s_a的假设相矛盾。

我们现在已经证明， $Z \cup (A \setminus A')$是一个严格独立集。由于 $Q[s_i, s_j, T]$ 使得能够添加到 T 中并使所得集合保持严格独立的线段数量最大，因此 $|Z|$不可能小于 $|A'|$。如果 $|Z| > |A'|$，就会与 A 是一个最大严格独立集这一假设矛盾。因此， $Q[s_i, s_j, T]$ 等于 $|A'|$。□

证明: [引理 3 的证明。3] 根据定义， $Q[s_i, s_j, T]$ 表示 $\sigma[i+1 \ldots j-1]$ 中不高于 s_i， s_j 且可以添加到 T中并使所得集合保持严格独立的线段的最大数量。因此，在不存在此类线段的基本情形下，我们令 $Q[s_i, s_j, T]$ 为 0。

现在考虑一般情形（图 7(b)–(d)）。令 Z 为与 $Q[s_i, s_j, T]$对应的线段集合，根据定义，它与 T 构成严格独立集。令 s_k为 Z 中不高于 s_i， s_j的最高线段。令 Z_ℓ 和 Z_r 分别为 Z 中位于 s_k左侧和右侧的线段。现在只需证明 $Q[s_i, s_k, T_1] = |Z_\ell|$ 以及与 $Q[s_i, s_k, T_1]$ 对应的线段都与 Z_r严格独立。用类似的论证可以证明 $Q[s_i, s_k, T_2] = |Z_r|$。结合 s_k，即可得到所需的递推关系。

由于 $s_k \in Z$，$(Z_\ell \cup \{s_k\})$ 是一个严格独立集。由于 $(T_1 \setminus \{s_k\}) \subset T$，集合 $(Z_\ell \cup (T_1 \setminus \{s_k\}))$ 是严格独立的。因此，$(Z_\ell \cup T_1)$ 是一个严格独立集。由于 s_k 是最高的线段

在 Z 中， Z_ℓ 中没有线段高于 s_k。注意，对应于 $Q[s_i, s_k, T_1]$ 和 Z_r 的线段分别位于 s_k 的左侧和右侧，并且所有这些线段都与 s_k 严格独立。此外，这些线段都不高于 s_k。因此，对应于 $Q[s_i, s_k, T_1]$ 的线段与集合 Z_r 严格独立。根据定义， $Q[s_i, s_k, T_1]$ 使满足与 Z_ℓ 相同高度和严格独立性条件的线段数量最大化。因此， $Q[s_i, s_k, T_1] \geq |Z_\ell|$。如果 $Q[s_i, s_k, T_1] > |Z_\ell|$，那么我们可以从 Z 中删除 Z_ℓ，并将所有对应于 $Q[s_i, s_k, T_1]$ 的线段加入 Z，从而改进 $Q[s_i, s_j, T]$，这与我们关于 $Q[s_i, s_j, T]$ 最优性的初始假设相矛盾。□

F 第 3.3 节的详细内容

证明：[定理 3 的证明。8] 设 S 为一组 n 接地线段，且令 $G(S)$ 为相应的相交图。假设这些线段的自由端点处于一般位置，即没有两个端点具有相同的 x 坐标或 y 坐标，并且没有线段包含另一条线段的端点。令 F 为按 x 坐标递增排列的自由端点序列。根据 Erd˝os-Szekeres 定理，[24]，存在一个包含 $\Omega(\sqrt{n})$ 个自由端点的 F 子序列，其中这些端点的 y 坐标单调递增或单调递减。利用这一结果，可以将 F 划分为子序列 F_1、.....、F_k，其中 $k = O(\sqrt{n})$，且每个 F_i（$1 \leq i \leq k$）至多包含 $\sqrt{n}$ 个元素 [40]。类似地，我们将每个 F_i 中的线段划分为一组子序列 $\sigma_{i,1}$、.....、$\sigma_{i,z}$，其中 $z = O(\sqrt[4]{n})$，且对于每个 σ_i（j），$1 \leq j \leq k$，其中线段在地面直线上的 x 坐标单调递增或单调递减。

令 M 为 $G(S)$ 中的一个最大团。那么存在指标 i, j，使得 $\sigma_{i,j}$ 至少包含 M 中的 $\frac{|M|}{zk} = \Omega(n^{-3/4}|M|)$ 个顶点。令 $M(\sigma_{i,j})$ 为对应于 $\sigma_{i,j}$ 中线段的相交图中的最大团。那么 $|M(\sigma_{i,j})| \geq \frac{|M|}{zk}$。现在我们证明 $M(\sigma_{i,j})$ 是余可比图，因此只需返回所有子序列中找到的一个团。

根据引理 3.5，只需证明$\sigma_{i,j}$ 是对应于 $\sigma_{i,j}$ 的相交图的无伞序，因此可以在多项式时间内计算 $M(\sigma_{i,j})$ [29]。令 s_p, s_q, s_r 为 $\sigma_{i,j}$ 中按此顺序排列的三条线段。反设 s_p 与 s_r 相交，但它们都不与 s_q 相交。由于 $\sigma_{i,j}$ 是 F_i 的子序列，自由端点 s_p^t, s_q^t, s_r^t 单调递增或递减。因此， s_q^t 的 y 坐标介于 s_p^t 和 s_r^t 的 y 坐标之间。令 Δ 为由线段 s_p, s_r 和地面直线所确定的三角形。注意， s_q 在地面直线上介于 s_p 和 s_r 之间。由于 s_q 既不与 s_p 相交，也不与 s_r 相交，因此它位于Δ内部，这与 s_q^t 的 y 坐标介于 s_p^t 和 s_r^t 的 y 坐标之间矛盾。□

G 第 3.2 节的详细内容

注 G.1 设 Δabc 是一条底边为 ab、顶点为 c 的三角形。设 q 是线段 ab 上的一点。那么 $|qc| \leq$ 最大值$\{|ac|, |bc|\}$。

证明： [引理 3.6] 的证明。设 $\sigma = (s_\ell, \ldots\ldots, s_r)$ 为地面直线上各线段的顺序。注意，根据定义，$G(s_\ell, s_r)$ 中的所有线段都与 s_ℓ 和 s_r 相交。现在我们证明， σ 是 $G(s_\ell, s_r)$ 的一个无伞序，因此根据引理 3.5， $G(s_\ell, s_r)$ 是一个余可比图。具体来说，设 s_a， s_c， s_b 是按此顺序出现在 σ 中的三个线段。现在我们证明，如果 s_a 与 s_b 相交，那么它们中至少有一个必定与 s_c 相交。

对于线段 s_a，我们将其位于地面直线上的端点称为 s_a^g，将自由端点称为 s_a^t。如果一对线段 s_a 和 s_b 相交，则将交点记为 $i(s_a, s_b)$。令 W

表示由 s_ℓ 和 s_r确定的两条直线之上方的闭楔形区域。根据 $i(s_a,\ s_b)$ 是否位于 W 中，我们区分两种情况。

情形1（$i(s_a, s_b) \in W$）。反设 s_c 不与 s_a 和 s_b相交。由于s_c 位于 s_a 和 s_b之间，点 s_c^t 必定位于三角形 $\Delta s_a^g i(s_a, s_b) s_b^g$ 内部。由于 s_c 同时与 s_ℓ 和 s_r相交，因此 s_c^t 属于 W。不失一般性，假设将线段s_c 向上延长后，会与 s_b 交于点 w （图 8(a)）。现在沿着 s_b 移动 w ，使长度$|ws_c^g|$ 增加。如果 w 沿着 s_b向上移动，那么它会到达 $i(s_a, s_b)$。现在对 $\Delta s_a^g i(s_a, s_b) s_b^g$ 应用注 G.1，可知 $|ws_c^g|$ 至多为一个单位。由于 s_c 的长度严格小于 $|ws_c^g|$，因此 s_c 不可能是单位长度。如果 w 沿着 s_b向下移动，那么它会到达 $i(s_\ell, s_b)$。注意，移动 w时也可能碰到 $i(s_r, s_b)$，但我们会继续移动，直到到达 $i(s_\ell, s_b)$（图 8(b)）。现在对 $\Delta s_\ell^g i(s_\ell, s_b) s_b^g$应用注 G.1，即可使用相同的论证。

情形 2（$i(s_a, s_b) \notin W$）。如果 $i(s_a, s_b) \in \Delta s_\ell^g i(s_\ell, s_r) s_r^g$，那么该三角形包含 $\Delta s_a^g i(s_a, s_b) s_b^g$（图 8(c)）。由于 s_c 位于 s_a 和 s_b之间， s_c 无法到达线段 s_ℓ 和 s_r。如果 $i(s_a, s_b) \notin \Delta s_\ell^g i(s_\ell, s_r) s_r^g$，那么不失一般性，假设 $i(s_a, s_b)$ 位于由 s_ℓ 确定的直线下方（图 8(d)）。由于 $\Delta s_a^g i(s_a, s_b) s_b^g$ 位于由 s_ℓ确定的直线下方， s_c 无法与s_ℓ相交。□

H 第 4.1 节的细节

证明： [定理 4 的证明。对于每个圆盘 $D \in \mathcal{D}$，我们计算一个包含 D 且以其为最小圆盘的最大团 $M(D)$。然后，从这些团中取最大的一个，即可得到 $G(\mathcal{D})$ 的最大团。要计算 $M(D)$，我们只需检查与D 相交的圆盘集合 $S \subseteq \mathcal{D}$ （图 13(a)）。现在只需证明 S 的相交图是一个共二分图。令 $S_\ell \subset S$ 为满足以下条件的圆盘集合：对于每个圆盘 $D' \in S$， D' 的 x 坐标不大于 D 中心的对应坐标。令 S_r 为 S 中其余圆盘组成的集合。现在证明 S_ℓ 中的圆盘两两相交。根据对称性，同样的论证也适用于 S_r。

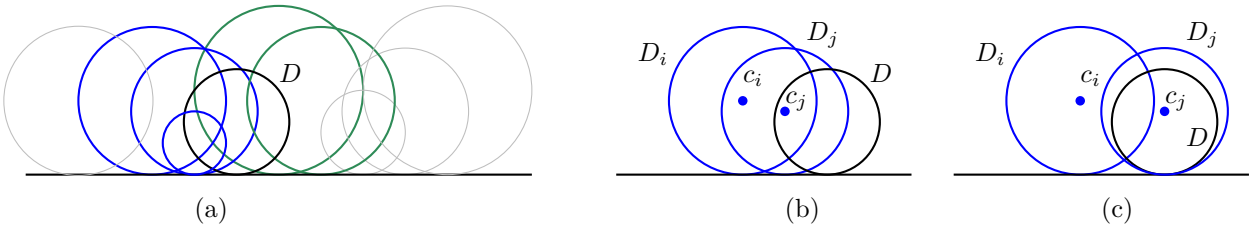


图 13：定理 4.1 的示意图。(a) $\mathcal{D}$，其中 D， S_ℓ 和 S_r 分别以黑色、蓝色和绿色显示。(b)–(c) 将 D_j 移动至覆盖 D的示意图。

设 D_i， $D_j \in S_\ell$ 为两个半径分别为 r_i 和 r_j、中心分别为 c_i 和 c_j的圆盘。设 d 为 c_i 与 c_j之间的欧几里得距离。不失一般性，假设 c_i 的 x坐标不大于 c_j的 x坐标。我们水平移动 D_j ，使得 c_j的 x坐标与 D的相等。设 d' 为 D_i 与 D_j之间的新距离。现在观察可知，$d' \geq d$。由于 D 是最小的圆盘，且 D_j 和 D 均接地， D_j 现在完全覆盖了 D（图 13(b)–(c)）。由于 D_i 与 D 相交，因此它必与 D_j相交，即 $d' \leq r_i + r_j$。由于 $d \leq d'$， D_i在原来的位置必与 D_j 相交。□

I 第 4.2.1 节的详细内容

证明： [L 的证明 emma 4.3] 证明如下：每个点 t 都比 c_2更靠近 pc_2 上的 c_1 。 □

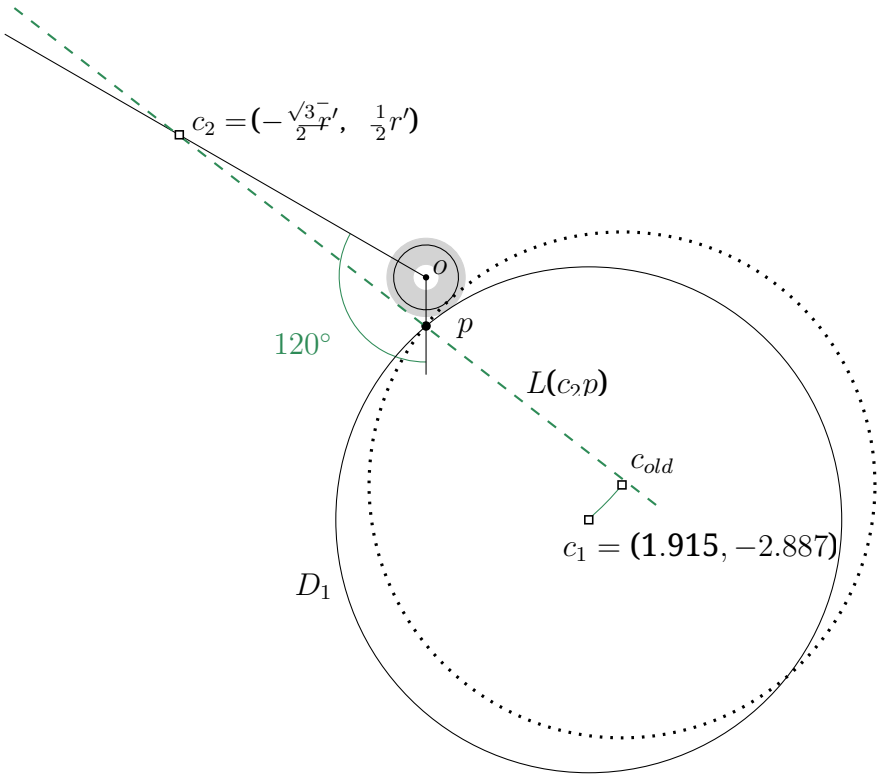


图14：引理4.5的示意图。灰色圆环表示 M 的范围。点状圆盘表示旋转前 D_1 的位置。

证明： [引理 4 的证明。令 R 为 D_1 中位于 D_2外部的区域。由于两个不同的圆最多相交于两点， R 是连通的。令 C' 为 D_1 边界上同时位于 R上的最长圆弧。由于 $r \notin D_2$，我们有 $r \in R$，因此圆弧 C 与 C'重合。 □

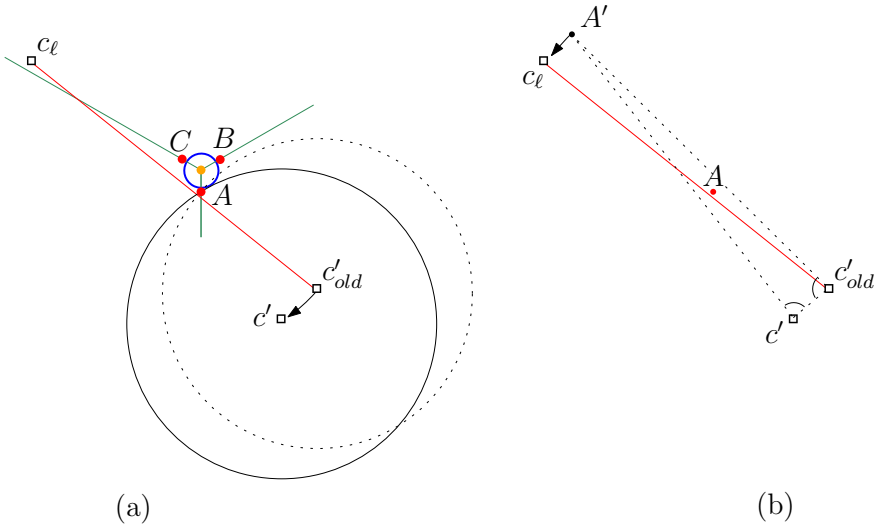
证明： [引理4.5] 的证明。反设 D_1 与 D_2 相交。设 c_i 是 D_i的中心，其中 $i \in \{1, 2\}$。设 D 是一个包含 D_1、与 p 和 M 相切且半径为三的圆盘。由于 D_1 与 D_2 相交，且二者都避开 o，因此 D 必与 D_2相交。因此，不失一般性，假设 D_1 的半径为三，同理 D_2 的半径也为三。

注意， D_1 和 D_2 都避开包含 o，且 D_1 与 p 和 M 相切。如果 c_1 位于 L（c_2p）上方，那么 D_1 位于 L（c_2p）下方的部分，也在经过 p 且垂直于 L（pc_2）的直线下方。由于我们假设 D_1 与 D_2 在直线 $y = -\frac{x}{\sqrt{3}}$ 下方相交，因此 c_1 必须位于 L（c_2p）上或其下方。图14展示了这一构型。增大 M 的半径会使 c_2 仍位于直线 $y = -x/\sqrt{3}$ 上，但离 o 更远，从而使 c_1 保持在 L（c_2p）下方。现在我们顺时针旋转 D_1，使其与 p 相切，并使 $|c_1o|$ 变为 3（$\frac{2}{\sqrt{3}} - 1$）。设 c_{old} 为旋转前 c_1 的位置。设 Z 是一个圆，其中心为 c_2，半径为 c_{old}。由于 p 位于 Z 内部，且在 L（$c_{old}c_2$）上或其上方，所以 c_1 位于 Z 内部。因此，旋转后 D_1 仍与 D_2 相交。

现在我们有位于 $(1.915, -2.887)$ 的 c_1，它可以由方程 $x^2 + (y + \frac{1}{\sqrt{3}})^2 = 9$和 $x^2 + y^2 = r'^2$ 得到，其中 $r' = 3 + r(\frac{2}{\sqrt{3}} - 1)$。中心 c_2位于 $(-\frac{\sqrt{3}}{2}r', \frac{1}{2}r')$。现在我们有$|c_1c_2| = \sqrt{(1.915 + \frac{\sqrt{3}}{2}r')^2 + (-2.887 - \frac{1}{2}r')^2}$。对于 $r \in [1, 3]$，我们有 $|c_1c_2| \in [6.44, 6.74]$，这与 D_1 和 D_2 相交的假设矛盾。□

I.1 情形 2 的详细内容

情形 2.1（D' 在 L（oC）下方与 D_ℓ 相交）。设 r_ℓ 为 D_ℓ的半径。我们先平移D'，使其与 A 和 Q 相切，同时保持与 D_ℓ 相交，如下所示。我们沿着 oc' 平移 D'，直到其与 A 相切，这样便能保持与 Q 相交。根据引理 4.3，D' 会继续与 D_ℓ相交。由于 c_ℓ 位于第二象限（引理 4.7），且 D_ℓ 避开 o，因此 D_ℓ不能包含 A。由于 D_ℓ 和 D' 都避开 A，并且 D_ℓ 和 D' 在 L（oC）下方相交，因此A 位于 L（$c'c_\ell$）上方。现在我们将 D' 顺时针旋转，使距离 $|c'A|$ 保持不变，同时让 c'与 Q 相切（图 15(a)）。设 c'_{old} 为旋转前 c' 的位置。考虑一点 A'，使得 $|c'_{old}A'| = |c'A'| = |c_\ell c'|$（图 15(b)）。由于 A 位于 L（$c_\ell c'_{old}$）上方，因此 A' 位于 L（$c_\ell c'_{old}$）上方。将A' 移动到 c_ℓ，且不改变距离 $|A'c'_{old}|$，会减小角 $\angle c'c'_{old}A'$。现在我们考察 $\Delta c'A'c_{old}$ 的角，以观察到 $|c_\ell c'| \leq |c_\ell c_{old}|$。因此，旋转后，$D'$ 会继续与 D_ℓ相交。



Fig图 15：将 D' 移动至与 A 和 Q相切的示意图。原点 o 为橙色 .

现在定义一个圆盘 D''，其中心为 c''、半径为三，并与 A 相切，且其中心位于$L(oc')$上。由于 D'' 包含 D' 位于 $L(oA)$左侧的部分，D'' 与 D_ℓ 相交（图 16(a)）。由于 $\mathcal{D}$ 中的圆盘半径最大值为三，因此 Q 的半径至多为 3（$\frac{2}{\sqrt{3}} - 1$）（引理 4.2）。现在，我们以 A 为中心顺时针旋转 D''，使距离 $|oc''|$ 变为 $3 + 3$（$\frac{2}{\sqrt{3}} - 1$）。现在，我们可以使用旋转 D' 时所用的相同论证，观察到 D'' 仍与D_ℓ相交。由于（$\frac{2}{\sqrt{3}} - 1$）$\leq r_q \leq 3$（$\frac{2}{\sqrt{3}} - 1$）≈ 0.46，且 D'' 与 A相切，可以观察到 c'' 位于第四象限。

现在根据 c_ℓ 的位置考虑两种情形。首先，假设 c_ℓ 的中心位于 $L(oC)$ 的上方。我们将 D_ℓ 沿 Q 逆时针滚动，使其中心 c_ℓ 位于 $L(oC)$ 上。由于 c_ℓ 位于第二象限（引理 4.7）中，沿 Q 滚动会使 c_ℓ 的 y 坐标减小（图 16(b)）。设移动 D_ℓ 之前 c_ℓ 的位置为 c_{old}。那么 $\angle c_\ell c_{old} c'' \leq \angle c'' c_\ell c_{old}$，因此 D_ℓ 仍会与 D' 相交。现在将 D'' 和 D_ℓ 分别视为 D_1 和 D_2，应用引理4.5，从而得到矛盾。

现在假设 c_ℓ 位于 $L(oC)$下方。引理 4.7 意味着 D_ℓ 与 D_b的左上弧相切，即从 D_b边界上的最左点到最上点的顺时针圆弧。现在我们证明，D_b 的左上弧位于 D''之外，这与 D'' 和D_ℓ 相交矛盾（图 16(c)）。

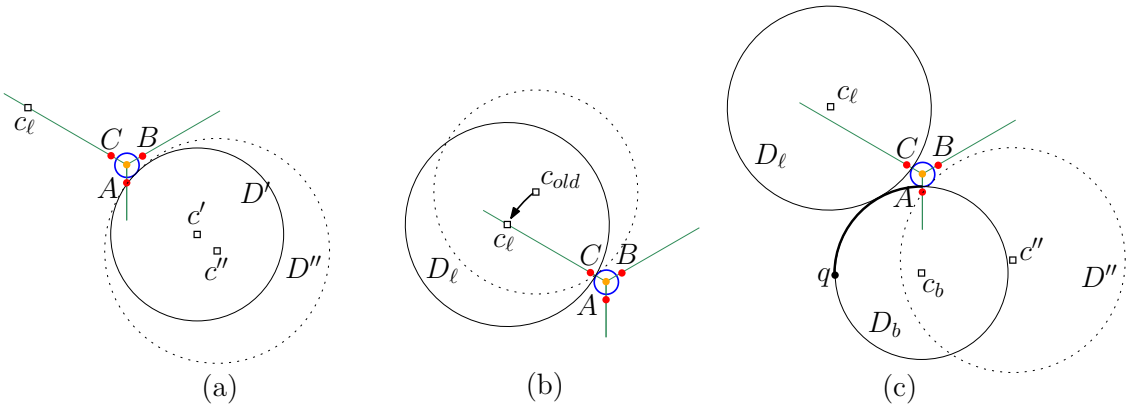


图 16：原点 o为橙色。示意图展示了：(a) D''；(b) D_ℓ 翻过 Q；(c) q 位于 D''之外。

我们首先计算 D''的中心 $c''=(x,\ y)$。由于 c''与o的距离为 $3+3(\frac{2}{\sqrt{3}}-1)=2\sqrt{3}$，因此有 $x^2+y^2=(2\sqrt{3})^2$。此外，c''与 A的距离为 3，因此 $x^2+(y+\frac{1}{\sqrt{3}})^2=3^2$。由此可得 $c''\approx(1.915,\ -2.887)$。设 D_b的半径为 r_b。 c'' 与 D_b的最左点 $q=(-r_b,\ -r_b-\frac{1}{\sqrt{3}})$之间的距离为 $|c''q|\approx\sqrt{(r_b+1.915)^2+(r_b-2.310)^2}$，，对于任意 $r_b\geq 1$，该距离均大于 3.19。因此， D'' 不可能包含 q。根据引理4.4，D_b 的左上弧位于 D''之外，证毕。

情形2.2（D' 与 D_ℓ 在 $L(oC)$上方相交）。如果 c_ℓ 位于 $L(oC)$下方，那么当 c_ℓ 位于 $L(oC)$上方时，我们采用与情形 2.1相同的论证。具体而言，我们移动 D'，使其接触 B 和 Q，并将 D_ℓ 翻过Q，使得 c_ℓ 位于 $L(oC)$上，从而应用情形 2.1的论证（图17(a)）。

现在假设 c_ℓ 位于 $L(oC)$和 $c'\in W(\angle BoA)$上方。考虑三角形 Δc_boc_ℓ，其中 $|c_\ell o|=r_\ell+r_q$、$|c_bo|=r_b+r_q$ 和 $|c_\ell c_b|=r_\ell+r_b$（图17(b)）。角 $\angle c_boc_\ell=\arccos\left(\frac{(r_\ell+r_q)^2+(r_b+r_q)^2-(r_\ell+r_b)^2}{2(r_\ell+r_q)(r_b+r_q)}\right)=\arccos\left(\frac{r_\ell r_q+r_br_q+r_q^2-r_\ell r_b}{r_\ell+r_q\quad r_b+r_q}\right)=\arccos\left(1-\frac{2r_\ell r_b}{(r_\ell+r_q)(r_b+r_q)}\right)$。对于固定的 r_ℓ和 r_b，当 r_q 减小时，该角增大。对于固定的 r_q，当 r_ℓ 和 r_b增大时，该角增大。因此，当 $r_q=(\frac{2}{\sqrt{3}}-1)$ 和 $r_\ell=r_b=3$时，$\angle c_boc_\ell$ 取得最大值，从而$\angle c_boc_\ell\approx 143.97°$。

与情形 2.1 类似，我们证明存在一个圆盘 D''，其中心为 c''，半径为 3，与 B相切，距离为 $|oc''|=3+r_q$，并与 D_ℓ相交。若 $r_q=3(\frac{2}{\sqrt{3}}-1)$，则 c''约为 (3.457,−0.215)，其中 $L(oc'')$与正 x 轴的夹角为 $-3.56°$。因此，只需考虑 $c''=(|oc''|\cos\theta,-|oc''|\sin\theta)$ 的坐标，其中 $0°\leq\theta\leq 90°$。

现在我们将 D_ℓ 顺时针绕过 Q 旋转，使得 c_ℓ 落在倾角为 $143.97°$ 的直线 L 上（图 17(c)）。由于 D_ℓ 在 L 上方与 D'' 相交（oC），因此 c_ℓ 必定在 L 上方（oc''）。于是 D_ℓ 仍与 D'' 相交。令 D'_ℓ 为半径为三、在 D_ℓ 与 Q 接触处与 Q 相切的圆盘。由于 D'_ℓ 包含 D_ℓ，它与 D'' 相交。由于 D'_ℓ 的中心 c'_ℓ 位于 L 上（oc_ℓ），$\angle c_boc'_\ell\leq 143.97°$。因此，我们可以假设中心 c'_ℓ 的坐标为（$-r\cos 53.97°,\ r\sin 53.97°$），其中 $r=3+r_q$（图17(c)）。

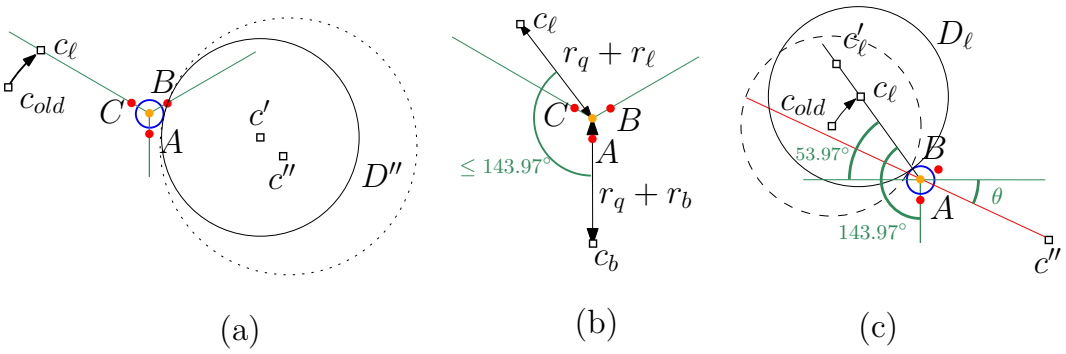


图17：情形2.2的示意图。(a) 当 c_ℓ 位于 $L(oC)$下方时的设置。(b)–(c) 中心 c_ℓ位于 $L(oC)$上方。

接下来，我们通过证明 $|c'_\ell c''|$ 大于六来导出矛盾，具体如下。

$$\begin{aligned}
|c'_\ell c''| &= \sqrt{(-r\cos 53.97° - |oc''|\cos\theta)^2 + (r\sin 53.97° + |oc''|\sin\theta)^2} \\
&= \sqrt{r^2 + |oc''|^2 + 2r|oc''|\cos 53.97°\cos\theta + 2r|oc''|\sin 53.97°\sin\theta} \\
&= \sqrt{r^2 + |oc''|^2 + 2r|oc''|\cos(53.97° - \theta)} \\
&= \sqrt{2r^2 + 2r^2\cos(53.97° - \theta)}
\end{aligned}$$

如果 $r_q = 2(\frac{2}{\sqrt{3}} - 1)$，那么 $c'' \approx (3.039, -1.308)$，且 $L(oc'')$ 与正 x 轴的夹角为 $-23.3°$。因此，如果 $(\frac{2}{\sqrt{3}} - 1) \leq r_q < 2(\frac{2}{\sqrt{3}} - 1)$，那么 $23.3° \leq \theta \leq 90°$。距离 $|c'_\ell c''|$ 在 $\theta = 90°$ 时最小。由于距离随着 r_q 减小而减小，因此我们有$|c'_\ell c''| \geq \sqrt{2(3 + (\frac{2}{\sqrt{3}} - 1))^2(1 + \cos 36.03°)} > 6$。

若 $2(\frac{2}{\sqrt{3}} - 1) \leq r_q \leq 3(\frac{2}{\sqrt{3}} - 1)$，则 $0° \leq \theta \leq 23.3°$。当 $\theta = 23.3°$ 时，距离 $|c'_\ell c''|$ 最小。由于距离会随着 r_q 的减小而减小，因此我们有 $|c'_\ell c''| \geq \sqrt{2(3 + 2(\frac{2}{\sqrt{3}} - 1))^2(1 + \cos 23.3°)} > 6$。