# 广义调和数：恒等式与性质

Roberto S´anchez-Peregrino 数学系 帕多瓦大学`，*
peregrino84@gmail.com

arXiv:2512.18282v1 [math.GM] 20 Dec 2025

**摘要**

本文在 Boyadzhiev 开创的研究基础上，引入了广义调和
n数，

$$H_n(\alpha) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha^k}{k},$$

由此推导出新的恒等式，并对已有恒等式进行重新表述。我们还推广了 Gould 恒等式，使经典调和数可以替换为相应的广义调和数。我们的研究有助于深入理解这些数的结构性质，并彰显了初等方法在揭示新数学现象方面的有效性。具体而言，我们重新得到若干已知的广义调和数恒等式，并建立了新的恒等式，其中包括涉及广义调和数与斐波那契数、拉盖尔多项式及相关数列的恒等式。

## 1 引言与背景

在第一节中，我们建立了全文将要使用的若干预备结果和定义。在第二节中，我们给出了博亚季耶夫定理的一种新表述和解释：([2]) $\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} {}_{k+\lambda}^{a_k}$. 特别地，在本节中，我们推广了一个Gould恒等式，从而建立了调和数与广义调和数之间的新关系。在第三节中，我们利用广义调和数推广了Pan的一条定理，([12]) $\sum_{k=0}^{n} a^k b^{n-k} \binom{n}{k} H_k(\alpha)$，。在第四节中，我们结合 S´anchez 的方法和 Pan 定理来回答 Boyadzhiev 问题([4])。

MSC 数学主题分类 2010：主要分类 11B65。次要分类 05A19？，40889？：

关键词：二项式系数、二项式变换、第二类斯特林数、调和数、广义调和数。

*退休人员：帕多瓦大学，纯粹与应用数学系，Belzoni 路 7 号，I-35131 帕多瓦（意大利）。

## 2 定义和性质，等等。

**定义 2.1.** 给定一个数列 $\{a_k\}_{k=0}^n$，我们将其二项式变换定义为新数列$\{b_k\}_{k=0}^n$，其中

$$b_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k$$

.

**定义 2.2**。令 $P$ =$\{$正规幂级数$\}$，其为一个整环。

**定义 2.3**。

$$\binom{x}{y} = \begin{cases} \frac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(y+1)\Gamma(x-y+1)} & \text{if } x, y \in \mathbb{C}, \\ \frac{(x)_y}{y!} & \text{if } x \in \mathbb{C}\ y \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

**命题 2.1**。令 $x \in \mathbb{C}$，且 $n \in \mathbb{N}$ 则，
$\sum_{m=0}^{n} \binom{x+m}{m} = \binom{x+n+1}{n}$

**定义 2.4**。令 $\alpha \in \mathbb{C}$ 和 $p \in \mathbb{N}$，我们定义

$$H_k^{(p)}(\alpha) = \begin{cases} 0 & \text{if } k = 0, \\ \sum_{j=1}^{k} \frac{\alpha^j}{j^p} & \text{otherwise.} \end{cases}$$

**注 2.1**。 $H_k^{(p)}$（$\alpha$） $= \begin{cases} H_k \\ \end{cases}$ （$\alpha$） （广义调和数）当 $p = 1$ 时，$H_k$ $p = 1$

（调和数）当 时，$\alpha = 1$，$-H_k^-$ $p = 1$ $\alpha = -1$.（斜调和数）当 时，

$H_n(\alpha)$，这些数的形式与调和数相同。它们也可以表示为:

$$H_n(\alpha) = \int_0^{\alpha} \frac{1 - y^n}{1 - y}\, dy,$$

$$H_n(\alpha) = \int_{1-\alpha}^{1} \frac{1 - (1-x)^n}{x}\, dx. \text{ Gencev([9])}$$

**定义 2.5**。 由符号 $\left\{ \begin{array}{c} t \\ s \end{array} \right\}$ 表示的数称为第二类斯特林数。

观察 2.6（Sanchez[13]）。

$$\binom{n}{k} k^p = \sum_{l=0}^{p} \sum_{j=0}^{p} (-1)^l \binom{n-l}{k} \binom{n}{l} \binom{n-l}{j-l} j! \left\{ \begin{array}{c} p \\ j \end{array} \right\} = \sum_{l=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} (-1)^l \binom{n-l}{k} \binom{n}{l} \binom{n-l}{j-l} j! \left\{ \begin{array}{c} p \\ j \end{array} \right\}$$

例子 2.1。

$$\binom{n}{k} k^p = \begin{cases} n\binom{n}{k} - n\binom{n-1}{k}, \quad if\, p = 1; \\ n^2\binom{n}{k} - n(2n-1)\binom{n-1}{k} + n(n-1)\binom{n-2}{k}, \quad if\, p = 2; \\ n^3\binom{n}{k} - n(3n^2 - 3n + 1)\binom{n-1}{k} + 3n(n-1)^2\binom{n-2}{k} - \\ n(n-1)(n-2)\binom{n-3}{k},\ if\, p = 3. \\ n^p\binom{n}{k} - n(n^p - (n-1)^p)\binom{n-1}{k} + \cdots + (-1)^p\binom{n}{p} p!\binom{n-p}{k}, \\ for\ any \quad p, n; \end{cases}$$

观察 2.7 (Sanchez[13])。给定关系式 $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a_k = b_n$。我们用 $\{b_n\}$来表示数列 $\{k^p a_k\}$的二项式变换，即，

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}k^p a_k = \sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{p}\sum_{j=0}^{p}(-1)^l\binom{n-1}{k}\binom{n}{l}\binom{n-1}{j-1}j!\left\{ \begin{array}{c} p \\ j \end{array} \right\}a_k =$$

$$\sum_{l=0}^{p}\sum_{j=0}^{p}(-1)^l\binom{n}{l}\binom{n-l}{j-l}j!\left\{ \begin{array}{c} p \\ j \end{array} \right\}b_{n-l}.$$

**注 2.2.** 设 $f(t)$ 是在单位圆盘上解析的函数：

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n. \tag{1}$$

则以下恒等式成立（证明见 *[4]*）：

$$\frac{1}{1-\lambda t} f\left(\frac{\mu t}{1-\lambda t}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} t^n \left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\mu^k \lambda^{n-k} a_k\right). \tag{2}$$

这里， $\lambda$和 $\mu$ 是适当的参数。

我们在第*4*节给出这个恒等式一种全新且截然不同的证明。本文讨论幂级数环。。

**定义 2.8**（艾弗森括号）**.** 设 P 是一个数学命题，则艾弗森括号定义为

$$[P] = \begin{cases} 0 & \text{if P is false;} \\ 1 & \text{if P is true.} \end{cases}$$

下一节将重新阐述 Boyadzhiev 的工作，由此推广 Gould基本恒等式，并建立从涉及调和数的恒等式到涉及广义调和数的恒等式的过渡。

# 3 Boyadzhiev。

本节将给出博亚季耶夫定理 [2] 的一种新表述。

**引理 3** **.1.** 设 $\{b_n\}$ 是一个数列，对每个数 $\lambda \in \mathbb{C} - [-1, -2, \ldots, -n]$ 和 $n \in \mathbb{N}^+$，我们有 $e$

$$n!\sum_{m=1}^{n}\frac{b_m}{m!(\lambda+m)(\lambda+m+1)...(\lambda+n)} = \begin{cases} \sum_{m=1}^{n}\frac{b_m}{m}, & if\ \lambda = 0, \\ \frac{1}{\lambda\binom{n+\lambda}{n}}[\sum_{m=1}^{n}\binom{\lambda-1+m}{m}b_m], & if\ \lambda \neq 0, \\ H_n, & if\ \lambda = 0, b_m = 1, \\ \frac{1}{\lambda\binom{n+\lambda}{n}}[\binom{\lambda+n}{n-1} - 1], & if\ \lambda \neq 0, b_m = 1. \end{cases} \tag{3}$$

证明。 若 $\lambda \neq 0$，则左端 (3) 为

$$n!\sum_{m=1}^{n}\frac{b_m}{m!(\lambda+m)(\lambda+m+1)...(\lambda+n)} =$$

$$\frac{n!}{(n+\lambda)_n}\frac{1}{\lambda}\left(\sum_{m=1}^{n}\frac{\lambda(\lambda+1)(\lambda+2)\cdots(\lambda+m-1)b_m}{m!}\right) =$$

$$\frac{1}{\lambda\binom{n+\lambda}{n}}\left(\sum_{m=1}^{n}\frac{\lambda(\lambda+1)(\lambda+2)\cdots(\lambda+m-1)b_m}{m!}\right) =$$

$$\frac{1}{\binom{n+\lambda}{n}}[\sum_{m=1}^{n}\binom{\lambda-1+m}{m}b_m]$$

如果 $\lambda = 0$，这显而易见。 □

**引理 3.2.** 对于每个 $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{-1, -2, \ldots, -n\}$ 以及每个 $n \geq 1$，我们有：

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \frac{a_k}{k+\lambda} = n! \sum_{m=1}^{n} \frac{b_m}{m!(\lambda+m)(\lambda+m+1)\cdots(\lambda+n)} - b_0 n! \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{m!(\lambda+m)(\lambda+m+1)\cdots(\lambda+n)}. \tag{4}$$

最后一个引理是 *Boyazhiev* 定理的一种新形式。

这个版本引理的证明仅基于这样一个观察：Boyadzhiev 方法 [2] 在等价变换下会得出相同的结果。

下面定理的证明基于引理 3.1 和 3.2。

**定理 3.1**。 设 $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{-1, -2, \ldots, -n\}$ 和 $n \geq 1$。那么，根据引理 *3.1* 和 *3.2*，我们有：

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \frac{a_k}{k+\lambda} = \begin{cases} \sum_{m=1}^{n} \frac{b_m}{m} - b_0 H_n. & \text{if } \lambda = 0, \\ = \frac{1}{\lambda \binom{n+\lambda}{n}} [\sum_{m=1}^{n} \binom{\lambda-1+m}{m} b_m] - b_0 \frac{1}{\lambda \binom{n+\lambda}{n} [\binom{\lambda+n}{n} - 1]}. & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{5}$$

如果 $a_0 = 0$ （因此 $b_0 = 0$ 也成立），那么我们就得到 *Boyazhiev* 定理的一种新形式。

在下面的例子中，我们将使用引理（3.1）和定理（3.1）。

**恒等式 3.1**。 在 $\lambda = 0$ 的第一种情况下，我们有以下关系

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \frac{a_k}{k} = \sum_{m=1}^{n} \frac{b_m}{m} - b_0 H_n.$$

- 对于 $a_n = (\alpha - 1)^n$，广义调和数与调和数之间满足以下关系。

$$H_n(\alpha) = H_n + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \frac{(\alpha-1)^k}{k}.$$

- 设 $a_n = (-2)^n$。那么斜调和数与调和数之间满足以下关系。。

$$H_n(-1) := H_n^- = H_n + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-2)^k}{k}.$$

- 第二种情况 $\lambda = 0$，并且 $a_n = 1$ 对于 $n \in \mathbb{N}.$，则有
  $\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{k} = \sum_{m=1}^{n} \frac{2^m}{m} - H_n.$
- 对于 $\lambda = 1$ 的第三种情况，我们有以下关系

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \frac{a_k}{k+1} = \frac{1}{n+1} \left( \sum_{m=1}^{n} b_m - n b_0 \right).$$

**恒等式 3.2**。 上一个定理（3.1）是一个重要恒等式的推广形式。这是 Knuth [8], 第 [202]页以及 Flajolet（[6]）中提到的一个著名恒等式。

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{k+\lambda} = \frac{1}{\lambda \binom{\lambda+n}{n}} := \frac{n!}{\lambda(\lambda+1)(\lambda+2)\ldots(\lambda+n)}.$$

**恒等式 3.3**。 我们将不使用欧拉贝塔函数来计算下列关系，以便在[3]中考察 Boyadzhiev 引理 3。这是 Gould 恒等式针对 $a = 1.$ 的一个推广

$$\sum_{k=j}^{n} \binom{n}{k} \binom{k}{j} \frac{(-1)^k (a)^k}{k} = \sum_{t=1}^{n} \frac{\binom{t}{j} (-a)^j (1-a)^{t-j}}{t}. \tag{6}$$

证明。 我们将定理（3.1）应用于下一个恒等式。 $\sum_{k=j}^{n}\binom{n}{k}\binom{k}{j}(-a)^k=\binom{n}{j}(-a)^j(1-a)^{n-j}$， 于是得到

$$\sum_{k=j}^{n}\binom{n}{k}\binom{k}{j}\frac{(-1)^k(a)^k}{k}=\sum_{t=1}^{n}\frac{\binom{t}{j}(-a)^j(1-a)^{t-j}}{t}. \tag{7}$$

□

**恒等式 3.4**。新问题

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}H_k(\alpha)k^p=??? \tag{8}$$

完成某些有理函数情形的二项式变换后，我们转而研究广义调和数，而非调和数，旨在解决 Boyadzhiev 和Coffey提出的一个问题。

# 4 Pan

本节将 Pan 定理分为两部分，并给出一种替代证明。第二部分未见于原论文。此外，我们在 P(I. Niven [11]) 中工作，其中 P(I. Niven [11]) 是如下的正规幂级数整环。

不借助收敛级数，我们为 Boyadzhiev 的论文中的一个 Boyadzhiev 引理给出新的证明。此证明的思路与 Gould ([10]) 和 Boyadzhiev ([4]) 的经典文章相近。

**引理 4.1**。 给定一个由形式幂级数定义的函数

$$f(t)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nt^n,$$

那么，以下表示式成立

$$\frac{1}{1-\lambda t}f\left(\frac{\mu}{\lambda}\left(\frac{\lambda t}{1-\lambda t}\right)\right)=\sum_{n=0}^{\infty}t^n\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\mu^k\lambda^{n-k}a_k\right). \tag{9}$$

其中 $\lambda$、$\mu$ 是适当的参数。

证明。

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{\infty}t^n\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\mu^k\lambda^{n-k}a_k\right)=\\
&\sum_{n=0}^{\infty}(\lambda t)^n\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(\frac{\mu}{\lambda})^ka_k\right)=\sum_{k=0}^{\infty}(\frac{\mu}{\lambda})^ka_k\left(\sum_{k=n}^{\infty}\binom{n}{k}(\lambda t)^n\right)\\
&\sum_{k=0}^{\infty}(\frac{\mu}{\lambda})^ka_k\left(\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+k}{k}(\lambda t)^{n+k}\right)=\sum_{k=0}^{\infty}(\frac{\mu}{\lambda})^ka_k(\lambda t)^k\left(\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+k}{k}(\lambda t)^n\right)\\
&\sum_{k=0}^{\infty}(\frac{\mu}{\lambda})^ka_k(\lambda t)^k(1-\lambda t)^{-k-1}=\frac{1}{1-\lambda t}\sum_{k=0}^{\infty}(\frac{\mu}{\lambda})^ka_k\left(\frac{\lambda t}{1-\lambda t}\right)^k=\\
&\frac{1}{1-\lambda t}f\left(\frac{\mu}{\lambda}\left(\frac{\lambda t}{1-\lambda t}\right)\right)
\end{aligned}$$

□

我们通过必需地使用形式幂级数，给出了 Pan 定理的新证明 s.

**定理 4.1** (Boyadzhiev 和 Pan)。 设 $H_k(\alpha)$ 为广义调和数。那么，对于

$n\geq 1$,

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\mu^k\lambda^{n-k}H_k(\alpha)=\begin{cases}(\mu+\lambda)^n\left(H_n(\frac{\lambda+\mu\alpha}{\mu+\lambda})-H_n(\frac{\lambda}{\mu+\lambda}\right) & if\ \mu+\lambda\neq 0.\\ \frac{\lambda^n}{n}\left((1-\alpha)^n-1\right) & if\ \mu+\lambda=0.\end{cases}$$

这里我们将方程 (9) 应用于函数 $f(t) = \frac{\ln(1-\alpha t)}{1-t} = -\sum_{n=1}^{\infty} H_n(\alpha)t^n$。这就证明了 Pan 定理 (4.1)

*Proof.* $\frac{1}{1-\lambda t} f\left(\frac{\mu t}{1-\lambda t}\right) = \frac{1}{1-\lambda t} \frac{\ln\left(1-\left(\frac{\alpha\mu t}{1-\lambda t}\right)\right)}{1-\left(\frac{\mu t}{1-\lambda t}\right)}$
$\frac{\ln\left(1-\left(\frac{\alpha\mu t}{1-\lambda t}\right)\right)}{(1-\lambda t)(1-\frac{\mu}{\lambda}\left(\frac{\lambda t}{1-\lambda t}\right))} = \frac{\ln(1-(\lambda+\alpha\mu)t-\ln(1-\lambda t)}{1-(\lambda+\mu)t} = \left(-\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{(\lambda+\alpha\mu)^n}{n}t^n + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda^n}{n}t^n\right)\sum_{n=0}^{\infty}(\lambda+\mu)^n t^n =$
$\left(\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\lambda^k}{k}(\lambda+\mu)^{n-k}\right)t^n - \left(\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{(\lambda+\alpha\mu)^k}{k}(\lambda+\mu)^{n-k}\right)t^n =$
$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{(\frac{\lambda}{\lambda+\mu})^k}{k}(\lambda+\mu)^n t^n\right) - \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{(\frac{\lambda+\alpha\mu}{\lambda+\mu})^k}{k}(\lambda+\mu)^n t^n\right) =$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(H_n(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}) - H_n(\frac{\lambda+\alpha\mu}{\lambda+\mu})\right)(\lambda+\mu)^n t^n.$$

在 $\lambda+\mu=0$ 的情况下，我们使用相同的方法。

□

现在我们给出几个例子，以说明我们定理的重要性。

**恒等式 4.1**。 根据定理 4.1，我们有

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}H_k(\alpha) = \frac{1}{n}\left((1-\alpha)^n - 1\right).$$

在 $\alpha=1$ 的情况下，我们有这个经典恒等式。

**恒等式 4.2**。 我们知道 $H_k^- = -H_k(-1)$，因此

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}H_k^- = 2^n H_n(\frac{1}{2}).$$

**恒等式 4.3**。 在这个恒等式中，我们的公式与 Robert Frontczak 的公式不同。

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^k H_k^- = -(3)^n\left(H_n(\frac{-1}{3}) - H_n(\frac{1}{3})\right).$$

**恒等式 4.4.** 将 $\lambda=1=\mu$ 代入定理 (4.1)，可得到已知恒等式的一个新推广（例如，参见 Spivey([14])

$\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}H_k(\alpha) = 2^n\left(H_n(\frac{1+\alpha}{2}) - H_n(\frac{1}{2})\right.$
众所周知，$\lim_{n->+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k2^k} = 2\ln 2$（将 $\frac{-1}{2}$ 代入 $\ln(1+x)$ 的麦克劳林级数），因此我们得到 ln 2 的如下表达式:

$$\ln 2 = \lim_{n->+\infty}\left(H_n(\frac{1+\alpha}{2}) - 2^{-n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}H_n(\frac{1}{2})\right)$$

**恒等式 4.5.** 情形 $\alpha=1$ 是众所周知的。
$\sum_{k=1}^{n}\frac{H_k(\alpha)}{k} = \begin{cases}\frac{1}{2}\left(H_n^2 + H_n^{(2)}\right) & \text{if } \alpha=1,\\ H_n(\alpha)\cdot H_n + H_n(\alpha)^{(2)} - \sum_{k=1}^{n}\alpha^k\frac{H_k}{k} & \text{if } \alpha\neq 1\end{cases}$

下一个定理是两个已有定理的推广。其中第一个是 Boyadzhiev 关于调和数的定理，第二个是 Fronczak 关于反对称调和数的定理。

**定理 4.2**。 给定数列 $a_n = (-1)^n H_n(\alpha)$ 和 $c_n$，我们考虑它们的二项式变换。特别地，$b_n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k H_k(\alpha) = \frac{1}{n}\left((1-\alpha)^n - 1\right)$ 和 $d_n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}c_k$.

于是我们得到该恒等式。

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k H_k(\alpha)c_k = \\ (-1)^n d_n H_n(\alpha) - \sum_{m=0}^{n-1} d_m \frac{(-1)^m}{n-m} + \sum_{m=0}^{n-1} d_m \left( \sum_{t=1}^{n} \frac{\binom{t}{n-m}(-1)^m (1-a)^{n-m}\,(a)^{t-(n-m)}}{t} [\alpha \neq 1] \right) \tag{10}$$

$$\tag{11}$$

证明。 根据 Boyadzhiev 定理([3]), 我们有

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}H_k(\alpha)c_k = \binom{n}{n}d_n\nabla^n b_n + \sum_{m=0}^{n-1} d_m\binom{n}{m}\nabla^m b_n. \tag{12}$$

方程(12)等式右端的第一项求和与.....相同。

$$\binom{n}{n}d_n\binom{n}{m}\nabla^n b_n = \\ d_n\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\binom{j}{n-n}(-1)^{n-j}b_j = d_n\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}(-1)^{n-j}b_j = d_n(-1)^n H_n(\alpha). \tag{13}$$

方程(12)等式右端的第二项求和与.....相同

$$\sum_{m=0}^{n-1} d_m\binom{n}{m}\nabla^m b_n = \\ \sum_{m=0}^{n-1} d_m \left( \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\binom{j}{n-m}(-1)^{n-m}b_j \right) = \\ \sum_{m=0}^{n-1} d_m \left( \sum_{j=1}^{n}\binom{n}{j}\binom{j}{n-m}(-1)^{n-j}\left\{\frac{1}{j}((1-j)^j-1)\right\} \right) \\ = \sum_{m=0}^{n-1} d_m(-1)^n \sum_{j=1}^{n}\binom{n}{j}\binom{j}{n-m}(-1)^j\left\{\frac{1}{j}((1-j)^j)\right\} + \\ \sum_{m=0}^{n-1} d_m(-1)^n \sum_{j=1}^{n}\binom{n}{j}\binom{j}{n-m}(-1)^j\left\{\frac{1}{j}(-1)\right\} \tag{14}$$

方程(14)中等式右端的第二个求和式与.....相同

$$-\sum_{m=0}^{n-1} d_m(-1)^n \sum_{j=1}^{n}\binom{n}{j}\binom{j}{n-m}(-1)^j\frac{1}{j} = \\ -\sum_{m=0}^{n-1} d_m(-1)^n(-1)^{n-m}\frac{1}{n-m} = -\sum_{m=0}^{n-1} d_m\frac{(-1)^m}{n-m} \\ -\sum_{m=0}^{n-1} d_m(-1)^n(-1)^{n-m}\frac{1}{n-m} = -\sum_{m=0}^{n-1} d_m\frac{(-1)^m}{n-m} \tag{15}$$

方程(14)中等式右端的第一个求和式与.....相同

$$\sum_{m=0}^{n-1} d_m(-1)^n \sum_{j=1}^{n} \binom{n}{j}\binom{j}{n-m}(-1)^j \left\{\frac{1}{j}((1-j)^j)\right\} =$$
$$(-1)^n \sum_{m=0}^{n-1} d_m \sum_{j=n-m}^{n} \binom{n}{j}\binom{j}{n-m}(-1)^j \left\{\frac{1}{j}((1-j)^j)\right\} =$$
$$(-1)^n \sum_{m=0}^{n-1} d_m \sum_{t=1}^{n} \frac{\binom{t}{n-m}(-(1-\alpha))^{n-m}\alpha^{t-(n-m)}}{t} =$$
$$\sum_{m=0}^{n-1} d_m(-1)^m \sum_{t=1}^{n} \frac{\binom{t}{n-m}(1-\alpha))^{n-m}\alpha^{t-n+m}}{t}. \tag{16}$$

我们可以在方程（13、15 和 16）之后证明该定理。 □

**例4.1**。 现在我们给出几个例子，以展示我们的定理（*4.2*）的重要性。我们列出了一些实体，可将方程（*11*）应用于这些实体，从而得到涉及广义调和数的新恒等式。

- $n^\beta = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}k!\left\{ \begin{array}{c} \beta \\ k \end{array} \right\}, \quad c_n = n^\beta, \quad d_n = n!\left\{ \begin{array}{c} \beta \\ n \end{array} \right\}.(Stirling\ numbers\ of\ second\ kinds\ \beta \in \mathbb{C}).$
- $\frac{(-1)^{n-1}}{n} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k H_k, \quad c_n = (-1)^{n-1}H_n, \quad d_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n}(Harmonicnumbers).$
- $F_n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{k-1}F_k, \quad c_n = F_n, \quad d_n = (-1)^{n-1}F_n(Fibonacci\ numbers).$
- $F_{2n} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}F_k, \quad c_n = F_{2n}, \quad d_n = F_n(Fibonacci\ numbers).$
- $L_n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k L_k, \quad c_n = L_n, \quad d_n = (-1)^n L_n(Lucas\ numbers).$
- $L_{2n} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}L_k, \quad c_n = L_{2n}, \quad d_n = L_n(Lucas\ numbers).$
- $(-1)^n B_n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_k, \quad c_n = (-1)^n B_n, \quad d_n = B_n.(Bernoulli\ numbers).$
- $L_n(x) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{(-x)^k}{k!}, \quad c_n = L_n(x), \quad d_n = \frac{(-x)^n}{n!}(Laguerre\,polynomials).$

下一节中，我们将推广 Boyadzhiev 的一个特殊情形，即 Pan 的公式，旨在推广下一个问题 $S_n^p(z)$: $= \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}j^p H_j z^j$. 随后我们会展示一些例子，并在最后证明 Coffey 的问题（[5]）。

我们的方法采用条件 $p \le n$ 不过，使用 Coffey的方法，我们可以消除这一限制 .

# 5 Boyadzhiev-end

在此，我们通过用广义调和数替代经典调和数，推广了 Boyadzhiev 的一个定理（[4]）。我们为一般情形给出了一个闭式公式。我们列出几个定理，并作如下定义：

$$AS_n^p(z) := \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}j^p H_j(\alpha)z^j. \tag{17}$$

第一种情况取 $z \neq -1$.

- By theorem (4.1) we have this relation
  $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}z^k H_k(\alpha) = (1+z)^n\left(H_n(\frac{1+\alpha z}{1+z}) - H_n(\frac{1}{1+z})\right)$
- By Khristo and Sanchez, we have this relation
  $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}k^p a_k = \sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{p}\sum_{j=0}^{p}(-1)^l\binom{n-l}{k}\binom{n}{l}\binom{n-1}{j-1}j!\left\{ \begin{array}{c} p \\ j \end{array} \right\}a_k =$
  $\sum_{l=0}^{p}\sum_{j=0}^{p}(-1)^l\binom{n}{l}\binom{n-1}{j-1}j!\left\{ \begin{array}{c} p \\ j \end{array} \right\}b_{n-l}$ where $b_n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a_k$. See Definition 1.

$$AS_n^p(z) := \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} j^p H_j(\alpha) z^j = \tag{18}$$

$$\sum_{l=0}^{p}\sum_{j=0}^{p}(-1)^l \binom{n}{l}\binom{n-l}{j-l} j! \left\{ \begin{array}{c} p \\ j \end{array} \right\} (1+z)^{n-l} \left( H_{n-l}(\frac{1+\alpha z}{1+z}) - H_{n-l}(\frac{1}{1+z}) \right) \tag{19}$$

$$\tag{20}$$

第二种情况取 $z = -1$.

- 根据恒等式（4.1），我们得到以下关系
  $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}(-1)^k H_k(\alpha) = \frac{1}{n}((1-\alpha)^n) - 1)$
- 根据 Khristo 和 Sanchez，我们得到以下关系
  $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k^p a_k = \sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{p}\sum_{j=0}^{p}(-1)^l \binom{n-l}{k}\binom{n}{l}\binom{n-1}{j-1} j! \left\{ \begin{array}{c} p \\ j \end{array} \right\} a_k =$
  $\sum_{l=0}^{p}\sum_{j=0}^{p}(-1)^l \binom{n}{l}\binom{n-1}{j-1} j! \left\{ \begin{array}{c} p \\ j \end{array} \right\} b_{n-l}$ 其中 $b_n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} a_k$. 参见定义 1。

$$AS_n^p(z) := \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} j^p H_j(\alpha)(-1)^j = \tag{21}$$

$$\sum_{l=0}^{p}\sum_{j=0}^{p}(-1)^l \binom{n}{l}\binom{n-l}{j-l} j! \left\{ \begin{array}{c} p \\ j \end{array} \right\} (\frac{1}{n-l}\left((1-\alpha)^{n-l} - 1\right) \tag{22}$$

- 第三种情况，我们取 $z = -1,\ \alpha = 1$.

$$AS_n^p(z) := \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} j^p H_j(1)(-1)^j = (-1)^n n! \left\{ \begin{array}{c} p \\ n \end{array} \right\} H_n - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k k! \binom{n}{k}}{n-k} \tag{23}$$

我们给出这种情况下的证明。令 $p < n$，则（23）式左边为

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \binom{n}{k} H_k k^p =$$

$$\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{p}\sum_{j=0}^{p}(-1)^l \binom{n-l}{k}\binom{n}{l}\binom{n-l}{j-l} j! \left\{ \begin{array}{c} p \\ j \end{array} \right\} (-1)^k H_k =$$

$$\sum_{l=0}^{p}\sum_{j=0}^{p}(-1)^l \frac{-1}{n-l}\binom{n}{l}\binom{n-l}{j-l} j! \left\{ \begin{array}{c} p \\ j \end{array} \right\} \overset{*}{=} \sum_{t=1}^{n}\sum_{j=0}^{p}(-1)^{n-t}\frac{-1}{t}\binom{n}{t}\binom{t}{n-j} j! \left\{ \begin{array}{c} p \\ j \end{array} \right\} =$$

$$-\sum_{j=0}^{n-1}\frac{(-1)^j}{n-j} j! \left\{ \begin{array}{c} p \\ j \end{array} \right\}.$$

因为 $n-1 \geq l \geq j > p$。 $*$ 成立。当 $p \geq n$ 时，也使用相同的方法。
The 另一种方法非常简单，就是使用定理（4.2）和第一个例子
of（4.1）。

为了展示方程（19）的应用，我们将给出几个例子

**例 5.1. 若** $p = 0$ 则有

$$AS_n(z) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}(-1)^k z^k H_k(\alpha) = (1+z)^n \left( H_n(\frac{1+\alpha z}{1+z}) - H_n(\frac{1}{1+z}) \right)$$

若 $p=1$ 则有 $\binom{n}{k}k=n\binom{n}{k}-n\binom{n-1}{k}$

$$AS_n^1(z)=n(1+z)^n\left(H_n(\tfrac{1+\alpha z}{1+z})-H_n(\tfrac{1}{1+z})\right)-n(1+z)^{n-1}\left(H_{n-1}(\tfrac{1+\alpha z}{1+z})-H_{n-1}(\tfrac{1}{1+z})\right)=$$

$$n(1+z)^{n-1}\left\{zH_{n-1}(\frac{1+\alpha z}{1+z})-zH_{n-1}(\frac{1}{1+z})+\frac{1+z}{n}\left[\left(\frac{1+\alpha z}{1+z}\right)^n-\left(\frac{1}{1+z}\right)^n\right]\right\} \tag{24}$$

若 $p=2$ 则有 $n^2\binom{n}{k}-n(2n-1)\binom{n-1}{k}+n(n-1)\binom{n-2}{k}$

$$\begin{aligned}
&AS_n^2(z)=\\
&n^2(1+z)^n\left(H_n(\frac{1+\alpha z}{1+z})-H_n(\frac{1}{1+z})\right))-\\
&\quad n(2n-1)(1+z)^{n-1}\left(H_{n-1}(\frac{1+\alpha z}{1+z})-H_{n-1}(\frac{1}{1+z})\right)+\\
&\quad n(n-1)(1+z)^{n-2}\left(H_{n-2}(\frac{1+\alpha z}{1+z})-H_{n-2}(\frac{1}{1+z})\right)=\\
&\quad n(1+z)^{n-2}\left\{\left(H_n(\frac{1+\alpha z}{1+z})-H_n(\frac{1}{1+z})\right)\left(n(1+z)^2-(2n-1)(1+z)+(n-1)\right)+\right.\\
&\quad \left.\frac{1+\alpha z}{1+z}^{n-1}(1+z)\left(\frac{1+\alpha z}{1+z}-1)(1+z)+\frac{2nz-z}{n-1}\right)-\frac{nz}{(n-1)(1+z)^{n-2}}\right\}
\end{aligned}$$

若 $p=3$ 如（2.7）所示，我们有 $\binom{n}{k}k^3=n^3\binom{n}{k}-n\left(3n^2-3n+1\right)\binom{n}{k}+3n\left(n-1\right)^2\binom{n-2}{k}$

$$n(n-1)(n-2)\binom{n-3}{k}.$$

$$\begin{aligned}
&AS_n^3(z)=\\
&n^3(1+z)^n\left(H_n(\frac{1+\alpha z}{1+z})-H_n(\frac{1}{1+z})\right))-\\
&\quad n(3n^2-2n+1)(1+z)^{n-1}\left(H_{n-1}(\frac{1+\alpha z}{1+z})-H_{n-1}(\frac{1}{1+z})\right))+\\
&\quad 3n(n-1)^2(1+z)^{n-2}\left(H_{n-2}(\frac{1+\alpha z}{1+z})-H_{n-2}(\frac{1}{1+z})\right)=\\
&\quad n(n-1)(n-2)(1+z)^{n-3}\left(H_{n-2}(\frac{1+\alpha z}{1+z})-H_{n-2}(\frac{1}{1+z})\right)=.\\
&\quad .....\\
&\quad nx^{n-3}\left\{(H_{n-3}(\frac{1+\alpha z}{1+z})-H_{n-3}(\frac{1}{1+z}))\left(n^2(1+z)^3-(3n^2-3n+1)(1+z)^2\right)+\right.\\
&\quad 3(n-1)^2(1+z)-(n-1)(n-2)-3(1-n)^3+(1-n)(1-3n+3n^2)(1+z)\\
&\quad -n^2(1-n)(1+z)^2+c(2-n)(1-3n+3n^2)(1+z)+\frac{1+\alpha z}{1+z}n^2(-2+n)(1+z)^2\\
&\quad \left.+\frac{1+\alpha z}{1+z}^2n(1-n)(2-n)(1+z)^2+\right.\\
&\quad \left.(-1+(1+z))(1-4n-n^2(-2+z)+n^3(z))).\right\}
\end{aligned}$$

Coffey [5] 曾利用超几何函数研究方程 (17) 在特例 $\alpha=1$ 下的情形，而 Boyadzhiev [4]则提出了一种基于解析函数的方法。本文提出了一种截然不同的方法，完全避免使用超几何函数和解析函数。

# 6 结论

Open problems.
Definition and Identity

**1）**。 我们有 Boyadzhiev（[4]）的如下展开式。

$$\frac{\log(1-\alpha t)}{1-t} = -\sum_{n=1}^{\infty} H_n(\alpha) t^n \tag{25}$$

**1.1).** 将 $\alpha = 1$ 代入恒等式 (25)，可得到调和数的生成函数

$$\frac{\log(1-t)}{1-t} = -\sum_{n=1}^{\infty} H_n t^n.$$

**1.2.** 将 $\alpha = -1$ 代入恒等式 (25)，可得到 Sofo ([15]) 的斜调和数生成函数。

$$\frac{\log(1+t)}{1-t} = -\sum_{n=1}^{\infty} H_n^{-1} t^n.$$

**2）**。$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \binom{n}{k} H_k(\alpha) = \frac{1}{n}\left((1-\alpha)^n - 1\right)$。

**3).** $\sum_{k=1}^{n} \frac{H_k(\alpha)}{k} \stackrel{?}{=} \begin{cases} \frac{1}{2}\left(H_n^2 + H_n^{(2)}\right) & \text{if } \alpha = 1, \\ H_n(\alpha)\cdot H_n + H_n(\alpha)^{(2)} - \sum_{k=1}^{n} \alpha^k \frac{H_k}{k} & \text{if } \alpha \neq 1 \end{cases}$

**4).** 根据 Boyadzhiev 和 (4.1)，我们有 $\sum_{k=1}^{n}(-1)^k \frac{H_k(\alpha)}{k} = H_n(1-\alpha)^{(2)} - H_n(1)^{(2)}$。

我们可以得到文献中所见的关系。

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^k \frac{H_k(\alpha)}{k} = \begin{cases} H_n(1)^{(2)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} & \text{if } \alpha = 1, \\ H_n(2)^{(2)} - H_n(1)^{(2)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{2^k}{k^2} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} & \text{if } \alpha = -1. \end{cases}$$

**5).** 为了解释例子（4.1），这里列出了一些实体，可以应用定理（4.2）来构造涉及广义调和数的新恒等式。以下是已知恒等式的推广：Boyadzhiev([3])

在给出定义和几个例子之后，我们可以提出以下问题：取一个涉及调和数 $H_n(1)$ 或斜调和数 $H_n(-1)$ 的恒等式，用广义调和数 $H_n(\alpha)$替换其中的调和数，并求得一个新的恒等式。

**致谢**。
作者谨向 Pan教授 对其建议表示感谢。
.

# 参考文献

[1] T. Arakawa、T. Ibukiyama、M. Kaneko，《伯努利数与ζ函数》（施普林格，东京、海德堡、纽约、多德雷赫特、伦敦，2014）。[2] Khristo N. Boyadzhiev，《二项式变换与后向差分》。离散数学的进展与应用，13(1) (2014), 43-63.[3] Khristo N. Boyadzhiev，《乘积的二项式变换》。*arXiv:1701.00544[*数论*]*,2017年1月2日，星期一。[4] Khristo N. Boyadzhiev，《通过欧拉变换得到的调和数恒等式》。《整数数列期刊》，第12卷（2009），论文编号 09.6.1。

[5] Mark W. Coffey, 《论调和二项级数》。*arXiv:0812.1766v1 [math-ph],* 92008年12月。[6] Philippe Flajolet 和 Robert Sedgewick, 《梅林变换与渐近分析：有限差分和 Rice 积分》。《理论计算机科学》，144(1–2):101–124，1995年6月。[7] Robert Frontczak, 《含偏调和数的二项和》。《巴勒斯坦数学杂志》，第10卷(2)（2021），756–763。[8] Ronald L. Graham、Donald E. Knuth 和 Oren Patashnik, 《具体数学》，Addison-Wesley，纽约，1994。[9] Marian Gencev, 《涉及调和数的二项和》。《数学斯洛伐克》，61 (2011)，第2期，215–226。[10] H.W. Gould, 《用于求数列递推关系的级数变换》，《斐波那契季刊》*28(1990)*，166-171。[11] Ivan Niven, 《形式幂级数》，《美国数学月刊》第*76*卷第*8*期（*1969*年*10*月），第871-889页。[12] Ende Pan 和 Ce Xub, 《涉及调和数的一般 Mneimneh 型二项和》。*arXiv:2403.04107 [*数论*],* 102024年3月。[13] R. Sanchez Peregrino，预印本：《二项式变换与后向差分矩阵》。[14] M. Z. Spivey, 《组合和与有限差分》。《离散数学》，307 (2007), 3130-3146。[15] Anthony Sofo 和 Amrik Singh Nimbran, 《欧拉和与积分联系》。《数学》，7，24页（2019）。