arXiv:2512.18319v1 [math.MG] 20 Dec 2025

不可分解有限周长集的拓扑刻画

Paolo Bonicatto、Panu Lahti 和 Enrico Pasqualetto

2025年12月23日

摘要

我们证明，一个有限周长集是不可分解的，当且仅当在选择适当代表的意义下，它在 *1*-细拓扑 中是连通的。这给出了不可分解性的一种拓扑刻画，即使在欧几里得空间中也是新的。我们的方法关键性地依赖于度量空间中的有界变差函数理论，并且能够在满足 1-Poincar´e 不等式且具有双侧性的完备倍增度量测度空间中证明主要结果（该类空间包括所有黎曼流形、卡诺群以及具有 $K \in \mathbb{R}$ 和 $N < \infty$ 的 RCD(K,N) 空间）。作为一个直接推论，我们获得了有限周长集分解为极大不可分解连通分支的分解定理的另一种证明。

1 引言

度量测度空间 $(X,d,\mathfrak{m})$ 中的有限周长集 E 若不能表示为两个非$\mathfrak{m}$可忽略集合F,G 的不交并，且满足 $P(E,X) = P(F,X) + P(G,X)$，则称其为不可分解集。这一测度论概念与拓扑学中的连通性概念相似。Federer [15, 在25] 第 4.2 节中，在更一般的流框架下研究了欧几里得空间中不可分解集的性质；随后，Ambrosio 等人 [3] 证明，在 $\mathbb{R}^n$ 中，有限周长集总能唯一地分解为极大不可分解集，称为本质连通分支。另见 [3] ，其中列有大量更早的相关参考文献，尤其是与图像处理有关的文献。

第一位和第三位署名作者与 Tapio Rajala 在 [11], 中将该理论推广到了度量测度空间，而第二位署名作者则在 [25]中进行了推广。与度量测度空间分析中的通常做法一样，在这些论文以及本文中，我们都假设空间（X， d， $\mathfrak{m}$）是完备的，配备倍增测度，并且满足 1-Poincar´é 不等式；我们将这类空间称为 PI 空间。主要定义将在第2节回顾。不可分解集也曾在 [16, 第 3 节4], 中，以及在分数阶周长的相关研究中得到考察，

数学主题分类（2020年）： 30L99, 26B30, 46E36*Keywords*: 有限周长集、不可分解集、度量测度空间、精细拓扑、双侧性性质、Poincar´e 不等式

也如此——例如参见 [14]。在 [12, 13]中，研究者针对不一定具有有限周长的集合考察了一个类似概念，并指出，测度论意义上的连通性概念似乎比拓扑意义上的概念更为合适。

尽管如此，在理论发展过程中，一个自然而然的问题一直是：测度论意义下的不可分解性是否会与某种合适拓扑下通常意义上的连通性相一致。本文证明，事实确实如此。关于双侧性以及 1-细拓扑的定义，参见第 2 节。

定理 1.1. 设$(X, d, \mathfrak{m})$ 是一个 *PI* 空间，且假设 X 具有双侧性。设 $E \subset X$ 满足 $P(E, X) < \infty$。那么，集合 E 不可分解，当且仅当细内部 I_E 在1-细拓扑下连通。

此外，细内部 I_E 在1-细拓扑下的连通分支，恰好是 E 的本质连通分支。

这里， I_E 是测度论内部，而 fine-int I_E 是它在 1-细拓扑下的内部；事实证明，差集 $I_E \setminus$ fine-int I_E 是 $\mathfrak{m}$-零测的（甚至相对于余维一豪斯多夫测度也是零测的）。作为主定理的推论，我们得到了一个关于 E 的本质连通分支存在性的新证明。

论文结构

我们在第2节介绍定义和初步结果。在第3节和4节中，我们发展1-细拓扑理论，特别证明了它是局部连通的。我们在第5节证明定理1.1。在第6节中，我们进一步发展1-细域理论，并在第7 节研究通过通常的度量拓扑获得本质连通分支的可能性。我们的部分理论依赖于一个具有独立研究价值的结果：关于 $p = 1$的（强）Cartan性质，我们在第8节证明了这一性质。

致谢。
E. P. 获得了芬兰研究委员会362898号资助。

2 记号和定义

本节介绍本文所采用的基本记号、定义和假设。

2.1 倍增与庞加莱不等式

全文中，$(X, d, \mathfrak{m})$ 是一个配备度量 d 和博雷尔正则外测度 $\mathfrak{m}$的完备度量空间。为避免某些病态情形，我们假设 X 至少包含两个点。当某个性质在一个 $\mathfrak{m}$-测度为零的集合之外成立时，我们称其几乎处处成立，简称

几乎处处。如果存在常数 $C_d \geq 1$ 使得下式成立，我们就称测度 $\mathfrak{m}$ 是**倍增的**

$$0 < \mathfrak{m}(B(x,2r)) \leq C_d\,\mathfrak{m}(B(x,r)) < \infty$$

对于每个球 $B(x,\ r) := \{y \in X :\ d(y,\ x) < r\}$，其中 $x \in X$、$r > 0$；我们约定球均为开集。我们始终假设 $\mathfrak{m}$ 具有倍增性质。给定一个球 $B = B(x,\ r)$，有时将 $tB := B(x,\ tr)$ 记作 $t > 0$。通过迭代倍增条件，我们得到：对于任意 $x \in X$ 和 $y \in B(x,\ R)$，其中 $0 < r \leq R < \infty$，有

$$\frac{\mathfrak{m}(B(y,r))}{\mathfrak{m}(B(x,R))} \geq \frac{1}{C_d^2}\left(\frac{r}{R}\right)^Q, \tag{2.1}$$

其中 $Q > 1$ 仅依赖于倍增常数 C_d。

由空间的完备性和测度的倍增性质$\mathfrak{m}$，我们得到 X 是真空间，这意味着闭且有界的集合是紧的。定义在 X 或其子集上的所有函数都取值于 $[-\infty, \infty]$。给定一个开集 $W \subset X$，我们将 $L^1_{\mathrm{loc}}(W)$ 定义为满足以下条件的 u 上的函数类：对每个开集 $W' \Subset W$，都有$u \in L^1(W')$，其中后一记号表示 W' 是 W 的紧子集。—其他函数局部空间也以类似方式定义。

2.2 曲线、（弱）上梯度、Newton-Sobolev空间

所谓（**可求长**）**曲线**，是指连续映射 $\gamma\colon I \to X$，它将实数轴上的一个紧区间 I 映入 X，且具有有限**长度** $\ell_\gamma < \infty$。我们假设每条曲线都以弧长参数化，这总是可以做到的（例如参见 [17,定理 3.2]）。

若非负博雷尔函数 g 定义在 X 上，且对于任意非常值曲线 $\gamma\colon [0, \ell_\gamma] \to X$，均有下式成立，则称其为函数 u在 X 上的上梯度

$$|u(x) - u(y)| \leq \int_\gamma g\,ds := \int_0^{\ell_\gamma} g(\gamma(s))\,\mathrm{d}s, \tag{2.2}$$

其中 x 和 y 是 γ的端点。只要 $|u(x)|$、$|u(y)|$ 至少有一个为无穷大，我们就将 $|u(x) - u(y)| = \infty$ 解释为相应的值。上梯度最初是在[19]中引入的。

曲线族 Γ的 1-模定义为

$$\mathrm{Mod}_1(\Gamma) := \inf \int_X \rho\ \mathrm{d}\mathfrak{m},$$

其中，下确界取遍所有非负博雷尔函数 ρ $\int_\gamma \rho\ s \geq 1$，使得对每条曲线 $\gamma \in \Gamma$均有 d。若某性质仅对除一个 1-模为零的曲线族以外的曲线成立，则称该性质对几乎每条曲线（按 1-模）成立。若 g 是一个非负的 $\mathfrak{m}$-可测函数，定义在 X 上，且（2.2）对几乎每条曲线（按 1-模）成立，则称 g 是**的一个 1-弱上梯度** u。只考虑曲线 $\gamma\colon [0, \ell_\gamma] \to A \subset X$，我们可以说函数 g 是 u 在 A中的一个（1-弱）上梯度。

若存在有限常数$C_P > 0$ 和 $\lambda \geq 1$，使得对每个球 $B(x, r)$、每个 $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(X)$ 以及 u的每个上梯度 g，都有

$$\fint_{B(x,r)} |u - u_{B(x,r)}| \, \mathrm{d}\mathfrak{m} \leq C_P r \fint_{B(x,\lambda r)} g \, \mathrm{d}\mathfrak{m},$$

其中

$$u_{B(x,r)} := \fint_{B(x,r)} u \, \mathrm{d}\mathfrak{m} := \frac{1}{\mathfrak{m}(B(x,r))} \int_{B(x,r)} u \, \mathrm{d}\mathfrak{m}.$$

我们将始终假设 X 满足 1-Poincar´e 不等式。具有倍增测度并满足 Poincar´e 不等式的完备度量空间通常称为 PI 空间。

设 $W \subset X$ 为一个开集。我们令

$$\|u\|_{N^{1,1}(W)} := \|u\|_{L^1(W)} + \inf \|g\|_{L^1(W)},$$

其中，下确界是在 W中 u 的所有 1-弱上梯度 g 上取的。接着我们定义 **Newton-Sobolev空间**

$$N^{1,1}(W) := \{u \colon \|u\|_{N^{1,1}(W)} < \infty\},$$

该概念最早在 [34]中引入。

我们认为 Newton-Sobolev 函数在每个 $x \in W$处都有定义（尽管此时 $\|\cdot\|_{N^{1,1}(W)}$只是一个半范数）。已知，对于任意 $u \in N^{1,1}_{\mathrm{loc}}(W)$，$u$ 在 W中存在一个最小 1-弱上梯度，记为 g_u，并且对于 u 在 W中的每个 1-弱上梯度 $g \in L^1_{\mathrm{loc}}(W)$，都有 $g_u \leq g$ 在 W 中几乎处处成立；参见例如定理 2.25] [8,。

2.3 有界变差函数

接下来，我们按照 [33] 给出度量空间上有界变差函数的定义及其基本性质。另请参见例如 [4, 15]，了解欧几里得情形下的经典理论。给定一个开集 $W \subset X$ 和一个函数 $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(W)$，我们将**全变差**定义为 u 在 W 中的

$$\|Du\|(W) := \inf \left\{ \liminf_{i\to\infty} \int_W g_{u_i} \, \mathrm{d}\mathfrak{m} : \, u_i \in N^{1,1}_{\mathrm{loc}}(W), \, u_i \to u \text{ in } L^1_{\mathrm{loc}}(W) \right\},$$

其中，每个 g_{u_i} 仍然是 u_i 在 W 中的最小 1-弱上梯度。（在 [33], 中使用了点态 Lipschitz 常数代替上梯度，但用这两种定义都可以类似地发展该理论。）我们称函数 $u \in L^1(W)$ 为有界变差函数，并记作 $u \in \mathrm{BV}(W)$，若 $\|Du\|(W) < \infty$。

对于任意集合 $A \subset X$，我们定义

$$\|Du\|(A) := \inf\{\|Du\|(W) : \, A \subset W, W \subset X \text{ is open}\}.$$

如果 $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(W)$ 和 $\|Du\|(W) < \infty$，那么根据 [33, 定理 3.4]，$\|Du\|(\cdot)$ 是 W 上的博雷尔正则外测度。若一个 $\mathfrak{m}$-可测集合 $E \subset X$ 具有**有限**

周长，则称其在 W 中具有该性质：$\|D\chi_E\|(W) < \infty$，其中 $\chi_E\colon X \to \{0,1\}$ 是 E 的示性函数。E 在 W 中的周长也记作

$$P(E,W) := \|D\chi_E\|(W).$$

如果 $P(E, X) < \infty$，我们简言之称 E 为有限周长集。

对于任意可测集 E_1，$E_2 \subset X$ 以及开集 $W \subset X$，我们有

$$P(E_1 \cap E_2, W) + P(E_1 \cup E_2, W) \le P(E_1, W) + P(E_2, W); \tag{2.3}$$

参见 [33, 命题 4。7]；对于 E_1，E_2 在 W 中具有有限周长的集合，同样的结论也成立，只需将 W 替换为任意 $A \subset W$。利用这个不等式（仅用于并集），以及全变差关于开集中的 L^1_{loc}-收敛的下半连续性，对于任意开集 $W \subset X$ 和任意 E_1，$E_2 \ldots \subset X$ 有

$$P\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j, W\right) \le \sum_{j=1}^{\infty} P(E_j, W). \tag{2.4}$$

下述**余面积公式** 见 [33, 命题 4.2]：若 $\Omega \subset X$ 为开集且 $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$，则

$$\|Du\|(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} P(\{u > t\}, \Omega)\, \mathrm{d}t, \tag{2.5}$$

其中我们简写 $\{u > t\} := \{x \in \Omega : u(x) > t\}$。

将 Poincar´e 不等式应用于全变差定义中用于逼近 $N^{1,1\,\mathrm{loc}}$ 函数的序列，我们得到以下 BV 版本：对于每个球 $B(x,r)$ 以及每个 $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(X)$，有

$$\int_{B(x,r)} |u - u_{B(x,r)}|\, \mathrm{d}\mathfrak{m} \le C_P r \|Du\|(B(x,\lambda r)).$$

1-Poincar´e 不等式蕴含所谓的 Sobolev-Poincar´e 不等式，参见例如[8, 定理 4.21]，；将后者应用于全变差定义中用于逼近 $N^{1,1\,\mathrm{loc}}$ 函数的序列，可得到适用于 BV函数的以下 **Sobolev-Poincar´e 不等式**：对于每个球 $B(x,r)$ 以及每个 $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(X)$，有

$$\left(\fint_{B(x,r)} |u - u_{B(x,r)}|^{Q/(Q-1)}\, \mathrm{d}\mathfrak{m}\right)^{(Q-1)/Q} \le C_{SP} r \frac{\|Du\|(B(x,2\lambda r))}{\mathfrak{m}(B(x,2\lambda r))},$$

其中 Q 是（2.1）中的指数，且 $C_{SP} = C_{SP}(C_d, C_P, \lambda) \ge 1$ 是一个有限常数。对于一个 $\mathfrak{m}$-可测集合 $E \subset X$，这意味着（例如参见 [22, 公式（3.1）]）

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\min\{\mathfrak{m}(B(x,r)\cap E), \mathfrak{m}(B(x,r)\setminus E)\}}{\mathfrak{m}(B(x,r))}\right)^{(Q-1)/Q} \le C_{SP} r \frac{P(E, B(x,2\lambda r))}{\mathfrak{m}(B(x,2\lambda r))}.$$

重新排列后，这意味着

$$\begin{aligned}&\min\{\mathfrak{m}(B(x,r)\cap E),\mathfrak{m}(B(x,r)\setminus E)\}\\&\quad\le 2C_{SP}r\left(\frac{\min\{\mathfrak{m}(B(x,r)\cap E),\mathfrak{m}(B(x,r)\setminus E)\}}{\mathfrak{m}(B(x,r))}\right)^{1/Q}P(E,B(x,2\lambda r)).\end{aligned}\tag{2.6}$$

由 1-Poincar´e 不等式可得，借助 [8, 定理4.21，定理5.51] 我们还得到以下 Sobolev不等式：若 $x\in X$, $0<r<\frac{1}{4}$直径 X，且 $u\in N^{1,1}(X)$，其中$u=0$属于 $X\setminus B(x,r)$，则

$$\int_{B(x,r)}|u|\,\mathrm{d}\mathfrak{m}\le C_S r\int_{B(x,r)}g_u\,\mathrm{d}\mathfrak{m}$$

对于某个有限常数 $C_S=C_S(C_d,\ C_P)\ge 1$。对于任意 $\mathfrak{m}$-可测集合 $E\subset B(x,\ r)$，将 Sobolev不等式应用于逼近 χ_E 的适当序列，我们得到**等周不等式**

$$\mathfrak{m}(E)\le C_S r P(E,X).\tag{2.7}$$

2.4 下近似极限和上近似极限、豪斯多夫测度与测度拓扑

扩展实值函数 u 在 X 上的**下近似极限**和**上近似极限**分别定义为

$$u^{\wedge}(x):=\sup\left\{t\in\mathbb{R}:\ \lim_{r\to 0}\frac{\mathfrak{m}(B(x,r)\cap\{u<t\})}{\mathfrak{m}(B(x,r))}=0\right\}\tag{2.8}$$

and

$$u^{\vee}(x):=\inf\left\{t\in\mathbb{R}:\ \lim_{r\to 0}\frac{\mathfrak{m}(B(x,r)\cap\{u>t\})}{\mathfrak{m}(B(x,r))}=0\right\}.\tag{2.9}$$

对于任意集合 $A\subset X$ 和 $0<R<\infty$，余维一的受限**Hausdorff内容**定义为

$$\mathcal{H}_R(A):=\inf\left\{\sum_{j\in I}\frac{\mathfrak{m}(B(x_j,r_j))}{r_j}:\ A\subset\bigcup_{j\in I}B(x_j,r_j),\ r_j\le R\right\},$$

其中，下确界取遍至多可数的指标集 I。随后，将 $A\subset X$ 的**余维一Hausdorff测度**定义为

$$\mathcal{H}(A):=\lim_{R\to 0}\mathcal{H}_R(A).$$

对于 $E\subset X$ 和 $x\in X$，我们记作

$$\Theta^*(E,x):=\limsup_{r\to 0}\frac{\mathfrak{m}(E\cap B(x,r))}{\mathfrak{m}(B(x,r))},\tag{2.10}$$

若极限存在，则记为 $\Theta(E,\ x)$。对于任意 $E \subset X$，**测度论内部** I_E 定义为满足 $\Theta(X\backslash E,\ x) = 0$ 的点 $x \in X$ 所组成的集合，而**测度论外部** O_E 定义为满足 $\Theta(E,\ x) = 0$ 的点 $x \in X$ 所组成的集合。**测度论边界** $\partial^* E$ 定义为满足 E 及其补集均具有严格正上密度的点 $x \in X$ 所组成的集合，即

$$\Theta^*(E,x) > 0 \quad \text{and} \quad \Theta^*(X \setminus E,x) > 0.$$

我们定义如下**测度拓扑**。

定义 2.11。如果对于每个 $x \in U$，$U \subset X$ 在测度拓扑中是开集，则称集合 $U \subset X$ 为开集。

给定一个数 $0 < \gamma \leq 1/2$，我们还定义**强边界**

$$\Sigma_\gamma E := \left\{ x \in X : \liminf_{r\to 0} \frac{\mathfrak{m}(B(x,r) \cap E)}{\mathfrak{m}(B(x,r))} \geq \gamma \ \text{ and } \ \liminf_{r\to 0} \frac{\mathfrak{m}(B(x,r) \setminus E)}{\mathfrak{m}(B(x,r))} \geq \gamma \right\}. \tag{2.12}$$

对于开集 $\Omega \subset X$ 以及满足 $P(E,\Omega) < \infty$ 的 $\mathfrak{m}$-可测集合 $E \subset X$，我们有

$$\mathcal{H}((\partial^* E \setminus \Sigma_\gamma E) \cap \Omega) = 0 \tag{2.13}$$

对于 $\gamma \in (0, 1/2]$，它仅取决于 C_d 和 C_P，参见 [1, 定理 5。4]。此外，对于任意博雷尔集 $A \subset \Omega$，我们有

$$P(E,A) = \int_{\partial^* E \cap A} \theta_E \, \mathrm{d}\mathcal{H}, \tag{2.14}$$

其中 $\theta_E :\ \partial^* E \cap \Omega \to [\alpha, C_d]$ 满足 $\alpha = \alpha(C_d, C_P, \lambda) > 0$，参见 [1, 定理 5.3] 和[5,定理 4.6]。

特别地，$P(E,\ \Omega) < \infty$ 蕴含 $\mathcal{H}(\partial^* E \cap \Omega) < \infty$。根据 Federer 对有限周长集的刻画，反过来同样成立（原始的欧几里得结果见 [15, 第 4.5 节11]）。

定理 2.15 （[28, 定理 1。1]）。设 $\Omega \subset X$ 为一个开集，设 $E \subset X$ 为一个$\mathfrak{m}$-可测集，并假设 $\mathcal{H}（\partial^* E \cap \Omega） < \infty$。则 $P（E,\ \Omega） < \infty$。

定义 2.16。若对于任意一对满足 $F \subset E$ 的有限周长集 $E,\ F \subset X$，都有以下性质，则称 $(X,\ d,\ \mathfrak{m})$ 是**各向同性**的：

$$\theta_F(x) = \theta_E(x) \quad \text{for } \mathcal{H}\text{-a.e. } x \in \partial^* F \cap \partial^* E.$$

定义 2.17。我们称空间 $(X、\ d、\ \mathfrak{m})$ 具有**双侧性**，如果对于任意两个不相交的有限周长集 $E、\ F \subset X$，都有对于 $\mathcal{H}$-几乎处处的 $x \in \partial^* E \cap \partial^* F$，

$$\lim_{r\to 0} \frac{\mathfrak{m}(B(x,r) \setminus (E \cup F))}{\mathfrak{m}(B(x,r))} = 0.$$

根据 [5, 命题 6，2] 双侧性蕴含各向同性。除了所有欧几里得空间（更一般地说，所有光滑黎曼流形）之外，具有双侧性的 PI 空间还包括所有RCD（K、N）空间，其中 $K \in \mathbb{R}$ 且 $N \in [1, \infty)$，正如 [11, 例 131]中所指出的。接下来的结果中，我们证明每个卡诺群都具有双侧性。

命题 2.18. 每个卡诺群 $\mathbb{G}$ 都具有双侧性。

证明。本证明中使用的记号取自 [6]。取两个互不相交的有限周长集 $E, F \subset \mathbb{G}$。应用 [6, 推论 2.5], , 可得

$$\begin{aligned} \nu_E(x) = \nu_{\mathbb{G}\setminus F}(x) = -\nu_F(x) \quad & \text{for } \mathcal{H}\text{-a.e. } x \in \mathcal{F}E \cap \mathcal{F}(\mathbb{G}\setminus F) = \mathcal{F}E \cap \mathcal{F}F, \\ \nu_{E\cup F}(x) = \nu_E(x) \quad & \text{for } \mathcal{H}\text{-a.e. } x \in \mathcal{F}(E\cup F) \cap \mathcal{F}E, \\ \nu_{E\cup F}(x) = \nu_F(x) \quad & \text{for } \mathcal{H}\text{-a.e. } x \in \mathcal{F}(E\cup F) \cap \mathcal{F}F, \end{aligned}$$

由此可知

$$\nu_E(x) = -\nu_F(x) = -\nu_{E\cup F}(x) = -\nu_E(x) \quad \text{for } \mathcal{H}\text{-a.e. } x \in \mathcal{F}E \cap \mathcal{F}F \cap \mathcal{F}(E\cup F).$$

由于对于每个 $x \in \mathcal{F}E$，$|\nu_E(x)| = 1$，且 $\mathcal{F}E \cap \mathcal{F}F \cap \mathcal{F}(E\cup F)$ 与 $\partial^* E \cap \partial^* F \cap \partial^*(E\cup F)$ 在 $\mathcal{H}$ 意义下几乎处处等价，因此我们得出 $\mathcal{H}(\partial^* E \cap \partial^* F \cap \partial^*(E\cup F)) = 0$，这表明 $\mathbb{G}$ 具有双侧性。 □

若能弄清所有 CD(K, N) 空间（甚至 MCP(K, N) 空间）在 $K \in \mathbb{R}$ 和 $N \in [1, \infty)$ 条件下是否都具有双侧性，将会很有意思。

2.5 容量

集合 $A \subset X$ 的 **1-容量** 定义为

$$\operatorname{Cap}_1(A) := \inf \|u\|_{N^{1,1}(X)},$$

其中，下确界取遍所有满足 $u \geq 1$ in A 的函数 $u \in N^{1,1}(X)$。集合 $A \subset D$ 关于集合 $D \subset X$ 的**变分 1-容量** 定义为

$$\operatorname{cap}_1(A, D) := \inf \int_X g_u \, \mathrm{d}\mathfrak{m},$$

其中，下确界取遍满足 $u = 0$ in $X \setminus D$ 且 $u \geq 1$ in A 的函数 $u \in N^{1,1}(X)$，而 g_u 是 u 的最小 1-弱上梯度（在 X 中）。通过截断可知，我们可以假设 $0 \leq u \leq 1$ on X。关于容量所满足的基本性质，如单调性和可数次可加性，参见例如 [8]。

一个对我们经常有用的事实是，cap$_1$ 是外容量，这意味着对于 $A \in \Omega$，若 $\Omega \subset X$ 为开集，则有

$$\operatorname{cap}_1(A, \Omega) = \inf_{\substack{A \subset V \subset \Omega \\ V \text{ is open}}} \operatorname{cap}_1(V, \Omega), \tag{2.19}$$

见 [8, 命题 6.19(vii)]。

由 [18, 定理 4.3、定理 5.1] ，我们知道对于 $A \subset X$,

$$\operatorname{Cap}_1(A) = 0 \quad \text{if and only if} \quad \mathcal{H}(A) = 0. \tag{2.20}$$

对于任意集合 $A \subset B(x,\ r)$，有

$$\operatorname{cap}_1(A, 2B) \le C_d \mathcal{H}(A); \tag{2.21}$$

这可以通过考虑与 A的覆盖 $\{B_j\}_j$相对应的截断函数来证明；例如参见 [21,引理 3.3]的证明。

由 [8, 引理 11.22], ，对于 $A \subset B = B(x,\ r)$以及满足 $tr < \frac{1}{4}$直径 X的 $t > 2$，有

$$\operatorname{cap}_1(A, 2B) \le C'(1+t) \operatorname{cap}_1(A, tB) \tag{2.22}$$

f或者是一个有限常数C'，它仅取决于倍增常数和 Poincar´é 常数 .

由 [8, 命题 6.16] ，我们知道对于 $x \in X$ 和 $0 < r < \frac{1}{8}$ 直径 X, -有 e

$$\frac{\mathfrak{m}(B(x,r))}{C''r} \le \operatorname{cap}_1(B(x,r), B(x,2r)) \le C_d \frac{\mathfrak{m}(B(x,r))}{r} \tag{2.23}$$

对于某个有限常数 C''，该常数仅取决于倍增常数和 Poincar´e 常数。根据 [8, 命题 6.16], ，在此情形下，对于 $A \subset B(x,\ r)$，我们还有

$$\operatorname{cap}_1(A, B(x,2r)) \le 2(1 + r^{-1}) \operatorname{Cap}_1(A). \tag{2.24}$$

我们还将 $A \subset X$ 的 BV-容量定义为

$$\operatorname{Cap}_{\mathrm{BV}}(A) := \inf(\|u\|_{L^1(X)} + \|Du\|(X)),$$

其中，下确界取遍满足 $u \ge 1$ 在 A的某个邻域内成立的函数 $u \in \mathrm{BV}(X)$。根据 [18, 定理 4.3],，我们有

$$\operatorname{Cap}_1(A) \le C_r' \operatorname{Cap}_{\mathrm{BV}}(A) \tag{2.25}$$

对于每个 $A \subset X$，以及某个有限常数 $C_{\mathrm{r}}' = C_{\mathrm{r}}'(C_d,\ C_P,\ \lambda) \ge 1$。

对于任意 $A \subset \Omega$（其中 $\Omega \subset X$ 为开集），我们还定义变分 BV-**容量** 为

$$\operatorname{cap}_{\mathrm{BV}}^{\vee}(A, \Omega) := \inf \|Du\|(X),$$

其中，下确界取遍满足 $u^{\wedge} = u^{\vee} = 0$ $\mathcal{H}$在 $X \setminus \Omega$ 中几乎处处成立且 $u^{\vee} \ge 1$ $\mathcal{H}$在 A中几乎处处成立的函数 $u \in \mathrm{BV}(X)$。根据 [27, 定理 5.7] ，我们知道

$$\operatorname{cap}_1(A, \Omega) \le C_{\mathrm{r}} \operatorname{cap}_{\mathrm{BV}}^{\vee}(A, \Omega) \tag{2.26}$$

对于有限常数 $C_{\mathrm{r}} = C_{\mathrm{r}}(C_d,\ C_P,\ \lambda) \ge 1$。

2.6 1-细拓扑

我们先给出如下定义。

定义 2.27。 我们称 $A \subset X$ 在点 $x \in X$ 处是 **1-薄** 的，当且仅当

$$\lim_{r \to 0} \frac{\operatorname{cap}_1(A \cap B(x,r), B(x,2r))}{\operatorname{cap}_1(B(x,r), B(x,2r))} = 0.$$

我们还称集合 $U \subset X$ 是 **1-细开** 的，当且仅当 $X \setminus U$ 在每个 $x \in U$ 处都是 1-薄的。于是，我们将 X 上的 **1-细拓扑** 定义为 1-细开集构成的集族。

我们将集合 $H \subset X$ 的 **1-精细内部**（即包含于 H 中的最大 1-细开集）记为 fine-int H。我们将 H 的 **1-精细闭包**（即包含 H 的最小 1-精细闭集）记为 H^1。H 的 1-精细边界为$\partial^1 H := H^1 \setminus$ fine-int H。1-基 $b_1 H$ 是 H 不为 1-薄的点集。

参见 [26, 第 4] 节，了解关于此定义的讨论以及证明 1-细拓扑确实是一个拓扑的证明。现在我们总结一些关于 1-细拓扑及其与有限周长集之间联系的事实。

设 $A \subset X$。由 [24, 引理 3.1], 1-薄性蕴含零测度密度，即

$$\text{if } A \text{ is 1-thin at } x, \text{ then } \Theta(A,x) = 0. \tag{2.28}$$

由 [24, 推论 3.5],可得

$$\overline{A}^1 = A \cup b_1 A, \tag{2.29}$$

因此也有

$$\text{fine-int } A = A \setminus b_1(X \setminus A), \tag{2.30}$$

并且还有

$$\partial^1 A = (A \cap b_1(X \setminus A)) \cup ((X \setminus A) \cap b_1 A). \tag{2.31}$$

由 [24, 命题 3.3], , 对任意 $A \subset D \subset X$, 可得

$$\operatorname{Cap}_1(\overline{A}^1) = \operatorname{Cap}_1(A) \quad \text{and} \quad \operatorname{cap}_1(A,D) = \operatorname{cap}_1(\overline{A}^1 \cap D, D). \tag{2.32}$$

定义 2.33. 若集合 $U \subset X$ 满足以下条件，则称其为 **1-拟开集**： 对每个 $\varepsilon > 0$, 都存在一个开集 $G \subset X$, 使得 $U \cup G$ 为开集，且 $\operatorname{Cap}_1(G) < \varepsilon$。

根据 [30, 推论 6.12] , 我们知道对于任意集合 $U \subset X$,

$$U \text{ 是 1-拟开集} \iff U = V \cup N, \text{ 其中 } V \text{ 是 1-细开集，且 } \mathcal{H}(N) = 0. \tag{2.34}$$

引理 2.35 ([29, 引理 4.4])。 若 $A \subset X$ 在 $x \in X \setminus A$ 处是 1-薄的，则存在一个开集 $W \supset A$, 它在 x 处也同样是 1-薄的。

命题 2.36 ([29, 命题 4.5])。 设 $x \in X$ 满足$\operatorname{Cap}_1(\{x\}) > 0$。则$\{x\}$ 在 x处不是1-纤细的。

回想一下， I_E 是 E的测度论内部，即 $\Theta(X\setminus E,\ x)=0$。由（2.28）和（2.31）可知，恒有 $\partial^* E\subset \partial^1 I_E$。

定理 2.37 ([24, 定理 1.1])。 对于开集 $\Omega\subset X$ 和一个 $\mathfrak{m}$-可测集合 $E\subset X$，有 $P(E,\ \Omega)<\infty$ 当且仅当 $\mathcal{H}(\partial^1 I_E\cap\Omega)<\infty$。此外，此时

$$\mathcal{H}((\partial^1 I_E\setminus \partial^* E)\cap\Omega)=0. \tag{2.38}$$

我们还有以下结论。

命题 2.39 ([24, 推论 4.4])。 如果$\Omega\subset X$ 是开集，且 $E\subset X$ 满足$P(E,\ \Omega)<\infty$，那么集合 $I_E\cap\Omega$ 和 $O_E\cap\Omega$ 均为一个 *1*-精细开集与一个 $\mathcal{H}$-零测集的并。

引理 2.40。 设 $D,H\subset X$ 满足 $\mathcal{H}(D\Delta H)=0$。那么

$$\text{fine-int}\, D\Delta\,\text{fine-int}\, H,\quad \overline{D}^1\Delta\overline{H}^1,\quad \partial^1 D\Delta\partial^1 H$$

均为 $\mathcal{H}$-零测集。

回顾（2.20），是 $\mathcal{H}$-零测等价于是 Cap_1-零测。

证明。 由（2.29），可得 $\overline{D}^1=D\cup b_1 D$ 以及$\overline{H}^1=H\cup b_1 H$。由（2.21）可得 $b_1 D=b_1 H$。因此 $\mathcal{H}(\overline{D}^1\Delta\overline{H}^1)=0$。

由于 fine-int $D=X\setminus\overline{X\setminus D}^1$，我们也得到 $\mathcal{H}(\text{fine-int}\ D\Delta\,\text{fine-int}\, H)=0$。

由于 $\partial^1 D=\overline{D}^1\setminus\text{fine-int}\, D$，最终得到 $\mathcal{H}(\partial^1 D\Delta\partial^1 H)=0$。 □

2.7 不可分解集

定义 2.41。 设 $E\subset X$ 为一个有限周长集。给定任意博雷尔集$D\subset X$，若存在一个由有限周长集组成的 $E\cap D$ 的划分$\{F,G\}$，使得 $\mathfrak{m}(F)\ \mathfrak{m}(G)>0$ 且 $P(E,\ D)=P(F,\ D)+P(G,\ D)$，则称 E 在 D 中是**可分解的**。另一方面，若 E在 D中不可分解，则称之在 D中是**不可分解的** 。为简便起见，若 E 在 X 中可分解（分别地，不可分解于 X），则称 E 是**可分解的**（分别地，**不可分解的**）。

我们记录 [11] 中的一些结果，稍后将会用到。回忆定义2.16中各向同性空间的定义。

引理 2.42 ([11, 引理 2.3]). 假设 X 是各向同性的。设 $E,F\subset X$ 为有限周长集。则有以下结论：

(i) *If* $P(E\cup F,X)=P(E,X)+P(F,X)$, *then* $\mathcal{H}(\partial^* E\cap\partial^* F)=0$.

(ii) 假设 E、$F\subset X$ 不相交。若 $\mathcal{H}(\partial^* E\cap\partial^* F)=0$，则

$$P(E\cup F,X)=P(E,X)+P(F,X).$$

定理 2.43 ([11, 定理 2.14]和 [25, 定理 1.1])。 给定一个有限周长集 $E \subset X$，存在唯一的（模去 $\mathfrak{m}$-测度为零的集合）有限或可数划分 $\{E_j\}_j$，将 E 划分为不可分解集 E_j，使得 $\mathfrak{m}(E_j) > 0$ 对每个 j成立，并且

$$P(E, X) = \sum_j P(E_j, X).$$

这些集合 E_j 称为本质连通分支 属于 E。

我们称 X 为测地的，如果对于任意一对点 x，$y \in X$，都存在一条曲线 γ: $[0, \ell_\gamma] \to X$，满足 $\gamma(0) = x$、$\gamma(\ell_\gamma) = y$，且 $\ell_\gamma = d(x, y)$。

本质连通分支与度量拓扑中的连通分支之间存在如下联系。

命题 2.44 ([23, 命题 4。1])。 假设 X 是测地的。设 $\Omega \subset X$ 为开集，且设 $F \subset \Omega$ 为相对闭集，并满足 $\chi_F \in$ 有界变差$_{\mathrm{loc}}(\Omega)$。将 F中测度非零的连通分支记为 $F_1, F_2, \ldots$ 则

$$\mathfrak{m}\left(F \setminus \bigcup_j F_j\right) = 0 \quad \textit{and} \quad P(F, A) = \sum_j P(F_j, A) \ \textit{ for any } A \subset \Omega.$$

2.8 动机示例

一个自然的问题是，在表述类似于定理 1.1的结果时，能否使用度量拓扑或其他自然拓扑。我们考虑一些简单的示例。

Ex例 2.45。 考虑（无权）平面 $\mathbb{R}^2$ 以及有限周长集合 r

$$E := \mathbb{R}^2 \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} B(q_j, 2^{-j}),$$

其中 $\{q_j\}_{j=1}^{\infty}$ 是平面上有理坐标点的一个枚举。如果采用度量拓扑，则内部 $\operatorname{int} I_E$ 为空，因此定理 1.1 无法在度量拓扑中表述。如果用 E 的任何其他代表元替代 I_E，也会出现同样的问题。

另一方面，如果不考虑 $\operatorname{int} I_E$，而是考虑例如 I_E 或 I_E （仍采用度量拓扑），对于某些集合 E也会遇到问题，正如我们将在下一个示例中看到的那样。

示例 2.46。 考虑（无权）平面 $\mathbb{R}^2$ 以及集合

$$E := B((0,0),1) \cup B((2,0),1).$$

现在，E的本质连通分支是两个圆盘 $B((0, 0), 1)$ 和$B((2, 0), 1)$。

另一方面，$I_E = E \cup \{(1, 0)\}$，于是细内部 $I_E = E$，因此，I_E在 1-细拓扑中的连通分支也为 $B((0, 0), 1)$ 和$B((2, 0), 1)$，与定理 1.1 一致1.1。

在这种情况下，$\operatorname{int} I_E = E$ 在度量拓扑中的连通分支是两个圆盘，但正如我们在前一个例子中所看到的，考虑 $\operatorname{int} I_E$ 并不总是可行。另一方面，如果我们考虑 I_E 或 I_E，它们分别等于$E \cup \{(1,\ 0)\}$ 和 E，二者在度量拓扑中都是连通的。

或者，我们可以考虑测度拓扑，在这种拓扑下，集合 A 是开集，当且仅当 $\Theta(X \setminus A, x) = 0$ 对所有 $x \in A$ (如定义 2.11中所述)。然而，在这种拓扑下，I_E 本身会是一个连通开集。

这些例子促使我们考虑 1-细拓扑。

2.9 超极小函数

本节记录并证明一些关于超极小函数的结果。

在本小节中，符号 Ω 始终表示X的非空开子集。我们用 $\mathrm{BV}_c(\Omega)$ 表示具有紧支集于 Ω 中的函数 $\varphi \in \mathrm{BV}(\Omega)$ 的类，即 $\operatorname{spt}\varphi \Subset \Omega$。

定义 2.47。 若 $u \in \mathrm{BV}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ 满足对所有$\varphi \in \mathrm{BV}_c(\Omega)$，则称其为 Ω 中的 **1-极小函数** 。

$$\|Du\|(\operatorname{spt}\varphi) \le \|D(u+\varphi)\|(\operatorname{spt}\varphi). \tag{2.48}$$

我们称 $u \in \mathrm{BV}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ 在 Ω 中是 **1-超极小函数**，如果对所有非负的 $\varphi \in \mathrm{BV}_c(\Omega)$，(2.48) 都成立。我们称 $u \in \mathrm{BV}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ 在 Ω 中是 **1-次极小函数**，如果对所有非正的 $\varphi \in \mathrm{BV}_c(\Omega)$，(2.48) 都成立；或者等价地，如果 $-u$ 在 Ω 中是 1-超极小函数。

给定一个函数 $\psi\colon \Omega \to \mathbb{R}$, 其中 Ω 有界，且 $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(X)$ 满足 $\|Df\|(X) < \infty$，我们定义容许函数类

$$\mathcal{K}_{\psi,f}(\Omega) := \{u \in \mathrm{BV}_{\mathrm{loc}}(X) :\ u \ge \psi \text{ in } \Omega \text{ and } u = f \text{ in } X \setminus \Omega\}.$$

上述（不）等式均按几乎处处意义理解，因为 BV 函数仅在相差一个 $\mathfrak{m}$-测度为零的集合的意义下定义。显然，对每个 $u \in \mathcal{K}_{\psi,\ f}(\Omega)$，$\|Du\|(X) < \infty$ 。

定义 2.49。 我们称 $u \in \mathcal{K}_{\psi,f}(\Omega)$ 是 $\mathcal{K}_{\psi,f}(\Omega)$-障碍问题的一个解，如果对于所有 $v \in \mathcal{K}_{\psi,f}(\Omega)$，$\|Du\|(X) \le \|Dv\|(X)$。如果对某个 $E \subset X$，$u = \chi_E$ 且 u 是一个解，我们也称集合 E 是一个解。

以下事实可直接由定义得出。

命题 2.50。 如果 $u \in \mathcal{K}_{\psi,\ f}(\Omega)$ 是 $\mathcal{K}_{\psi,\ f}(\Omega)$-障碍问题的解，则 u 是 1-超极小函数，定义在 Ω 中。

回顾 $u^\wedge$ 和 $u^\vee$ 在（2.8）和（2.9）中的下近似极限与上近似极限。

定理 2.51 ([29, 定理 3.11])。 设 u 是定义在 Ω 中的 1-超极小函数。则 $u^\wedge\colon \Omega \to (-\infty, \infty]$ 是下半连续的。

引理 2.52 ([29, 引理 3.6])。 若 $x \in X$, $0 < r < R < \frac{1}{8}$ 直径 X，且 $A \subset B(x, r)$，则存在 $E \subset B(x, R)$，它是 $\mathcal{K}_{A,0}(B(x, R))$-障碍问题的一个解，并满足

$$P(E, X) \le \operatorname{cap}_1(A, B(x, R)).$$

关于 F 的拓扑分支，我们有以下结果（注意，这与命题2.44 密切相关）。

命题 2.53 ([23, 命题 5.13])。 设 X 为测地的。令 $F \subset \Omega$ 为相对闭集合，使得 $\chi_F = \chi_F^\vee$ 是 1-次极小函数于 Ω中。记 F的具有非零 $\mathfrak{m}$-测度的连通分支（在度量拓扑中）为 F_1、F_2、.....则 $F = \bigcup_{j=1}^{\infty} F_j$，且每个 χ_{F_k} 都是 1-次极小函数于 Ω中。此外，对于每个球 $B(y,r) \subset \Omega$，满足 $0 < r < \frac{1}{4}$直径 X，每个与 $B(y, r/2)$ 相交的连通分支 F_k满足

$$\frac{\mathfrak{m}(F_k \cap B(y,r))}{\mathfrak{m}(B(y,r))} \geq C_1^{-1},$$

其中 $1 \leq C_1 < \infty$仅取决于 C_d、 C_P 和 λ；因此这样的连通分支少于 $C_1 + 1$个。

根据定理2.51，注意，对于 Ω 中的 1-次极小函数 χ_F，函数 $\chi_F^\vee$ 是上半连续的，因此代表元的选择 $\chi_F = \chi_F^\vee$ 对应于选择集合 F 为相对闭集。

最后，我们得到弱 Harnack 不等式的以下推论。

引理 2.54 ([23, 引理 5.9])。 设 $B = B(x,R)$ 是一个球，且满足 $0 < R < \frac{1}{32}$直径 X，并假设 $W \subset B$。令 $V \subset 4B$ 为 $\mathcal{K}_{W,0}(4B)$-障碍问题的一个解（其存在性由引理 *2.52*保证）。那么对所有 $y \in 3B \setminus 2B$,

$$\chi_V^\vee(y) \leq C_2 R \frac{\mathrm{cap}_1(W, 4B)}{\mathfrak{m}(B)}$$

其中某个有限常数 $C_2 = C_2(C_d, C_P, \lambda) \geq 1$。

基本假设： 本文中我们始终假设 $(X, d, \mathfrak{m})$ 是一个至少包含两个点的完备度量空间，并配备了倍增 Radon 测度 $\mathfrak{m}$，且满足 1-Poincar´e 不等式。

3 构造一个度量测度空间

为了证明关于本质连通分支和 1-细拓扑的主要结果，事实证明，给定一个在 x 处 1-薄的集合 V 以及一个较小的半径 $r > 0$，将 $B(x,r) \setminus V$视为一个自身具有新度量的度量空间，会很有用。在 [23] 中发展的技术在此处也很有用。

在度量空间 (Z, d) 中，我们定义 **Mazurkiewicz 度量** （这里的连通性当然是相对于度量 d-拓扑而言）

$$d_M(x,y) := \inf\{\text{直径 } F\colon\ F \subset Z \text{是一个包含 } x,y\}, \quad x,y \in Z, \tag{3.1}$$

其中直径 $F := \sup\{d(z,w)\colon z, w \in F\}$。注意，如果空间 (Z, d) 是测地的，那么 $d = d_M$；反之通常不成立（考虑赋予度量 $\widehat{d}(x,y) = |x-y|^\beta$ 的 $\mathbb{R}$， $\beta \in (0,1)$）。

下面的命题证明了 强边界 上存在一点。在 [23, 推论 3。8], 中，该结果是在假设 ν （全局）满足倍增条件下得到的，但从证明中可以清楚地看出，只需满足稍弱一些的倍增假设，如下所示。此外，在 [23] 中，假设 Z 是完备的，但可以将其替换为假设 $B(y,\ 6r)$ 是紧的。 —

命题 3.2. 考虑一个度量测度空间 (Z,d,ν)，其中 ν 是一个 *Borel* 正则外测度。假设 $d_M = d$。设 $y \in Z$, $r > 0$，并令 $E \subset Z$ 为一个 ν-可测集合，使得

$$0 < \nu(E \cap B(y,r)) < \nu(B(y,r)).$$

假设 $B(\overline{y}, 6r)$ 是紧的，并且 ν 具有倍增性质

$$\nu(B(x,2s)) \le \widehat{C}_d \nu(B(x,s))$$

每当 $x \in B(y, 6r)$ 且 $0 < s \le r$ 时。则存在一点 $x \in B(y, 6r)$，使得

$$\frac{1}{4\widehat{C}_d^{12}} \le \liminf_{s\to 0} \frac{\nu(E \cap B(x,s))}{\nu(B(x,s))} \le \limsup_{s\to 0} \frac{\nu(E \cap B(x,s))}{\nu(B(x,s))} \le 1 - \frac{1}{4\widehat{C}_d^{12}}. \tag{3.3}$$

在我们的设定中，空间 Z （作为一个集合）将是一个连通集 $F \subset X$。度量 $\backsim d$ 本身将是 Mazurkiewicz 度量（连通性是在度量 d-拓扑中）

$$d_M^F(x,y) := \inf\{\text{直径 } K\colon K \subset F\text{是一个包含 } x,y\}, \quad x,y \in F \text{ 的连通集} \quad .$$

以下是 [23,引理 6.1] 的一个变体。

引理 3.4. 设 $B(x_0, R) \subset X$ 是一个球，且 $F \subset B(x_0, R)$ 是一个在 $B(x_0, R)$ 中相对闭的连通集。此外，假设对于任意满足 $B(x, r) \subset B(x_0, R)$ 的 $x \in F$ 和 $r > 0$，与 $B(x, r/2)$ 相交的 $B(x, r) \cap F$ 的连通分支只有有限个。

那么 d_M^F 是 F 上的一个度量，使得 $d \le d_M^F$, d_M^F 在 F 上诱导的拓扑与 d 相同，并且 $(d_M^F)_M = d_M^F$。

注意，明确地，对于 x, $y \in F$,

$$(d_M^F)_M(x,y) = \inf\{\operatorname{diam}_{d_M^F} K : K \subset F \text{ is a } d_M^F\text{-connected set containing } x,y\}.$$

证明。 我们验证 d_M^F 是一个度量。显然，对于所有 x, $y \in F$，都有

$$d_M^F(x,y) \le \operatorname{diam} F < \infty.$$

显然，对所有 $x \in F$, $d \le d_M^F$and $d_M^F(x,x) = 0$。若 $d_M^F(x,y) = 0$，则 $d(x,y) = 0$, 因此 $x = y$。显然，对所有 $x,y \in F$，还有 $d_M^F(x,y) = d_M^F(y,x)$。最后，取$x,y,z \in F$。取一个包含 x,y的连通集 $K_1 \subset F$，以及一个包含 y,z的连通集 $K_2 \subset F$。那么 $K_1 \cup K_2 \subset F$是一个包含 x,z的连通集，因此

$$d_M^F(x,z) \le \operatorname{diam}(K_1 \cup K_2) \le \operatorname{diam}(K_1) + \operatorname{diam}(K_2).$$

对 K_1 和 K_2取下确界，我们得到三角不等式成立。因此，d_M^F 是 F上的一个度量。

为了证明由 d 和 d_M^F 在 F 上诱导的拓扑相同，取关于 d 的 $x_j \to x$ 中的一个序列。任取一个充分小的 $\varepsilon > 0$，使得 $B(x, \varepsilon/2) \subset B(x_0, R)$。考虑与 $B(x, \varepsilon/2)$ 相交的 $B(x, \varepsilon/4)$ 的连通分支。根据假设，这样的连通分支只有有限多个。其中不包含 x 的每一个都与 x 保持非零距离（因为 F 是相对闭的），因此当 j 足够大时，每个 x_j 都属于包含 x 的连通分支；将其记为 F_1。对于这样的 j，我们有

$$d_M^F(x_j, x) \le \operatorname{diam} F_1 \le \varepsilon.$$

我们得出，关于 d_M^F 的 $x_j \to x$ 也是如此。由于已有 $d \le d_M^F$，因此拓扑相同。

如果 $x, y \in F$ 和 $\varepsilon' > 0$，我们可以取一个包含 x 和 y 的连通集 K，其直径为 $K < d_M^F(x, y) + \varepsilon'$。由于拓扑相同，集合 K 在度量空间 (F, d_M^F) 中仍然是一个连通集，并且对于每个 $z, w \in K$，

$$d_M^F(z, w) \le \operatorname{diam} K < d_M^F(x, y) + \varepsilon'.$$

由此可得 $\operatorname{diam}_{d_M^F} K \le d_M^F(x, y) + \varepsilon'$，因此 $(d_M^F)_M(x, y) \le d_M^F(x, y) + \varepsilon'$，这说明 $(d_M^F)_M = d_M^F$。 □

我们将依赖以下 *Cartan*性质，它本身也值得独立研究。由于其证明相当冗长，我们将把证明以及对该性质的一些讨论推迟到第 8节。

回顾一下，根据我们的基本假设，我们有 $\mathfrak{m}(X) > 0$ (可能是 ∞)，并且对每个 $x \in X$，都有 $\mathfrak{m}(\{x\}) = 0$ （例如参见推论 3.9]）。

定理 3.5. 设 $W \subset X$ 为开集，并设 $x \in X \setminus W$ 满足 W 在 x 处是1-薄的。选取 $0 < R < \frac{1}{32}$ 直径 X 充分小，使得

$$\frac{\mathfrak{m}(B(x, 2R))}{\mathfrak{m}(X)} < C_0^{-1} \tag{3.6}$$

and

$$\sup_{0<r\le R} \frac{\operatorname{cap}_1(W \cap B(x, r), B(x, 2r))}{\operatorname{cap}_1(B(x, r), B(x, 2r))} < C_0^{-1}, \tag{3.7}$$

其中

$$C_0 := (20 C_{SP} C_2 C_S C_d^{1+2\lceil \log_2(2\lambda)\rceil})^{2Q}.$$

记 $B := B(x, R)$。设$\chi_V = \chi_V^{\wedge}$是$\mathcal{K}_{W\cap B,\,0}(4B)$-障碍问题的一个解（由引理*2.52*保证）。则 V 是开集，包含于 $2B$，$\chi_V^{\wedge} = 1$在 $W \cap B$中 $\chi_V^{\vee}(x) = 0$，并且

$$\lim_{r\to 0} \frac{\operatorname{cap}_1(V \cap B(x, r), B(x, 2r))}{\operatorname{cap}_1(B(x, r), B(x, 2r))} = 0. \tag{3.8}$$

本质上，该定理表明：如果障碍集 W 在 x处是 1-薄的，那么超极小函数 V也是如此。

现在我们得到关于构造度量测度空间的以下结果；这是 [23, 命题 6。6]的一个变体。我们用 $B_F(y,r)$ F表示d_M^F中相对于度量定义的开球。

当 X 是测地的时，在 1-Poincar´e 不等式中，我们可以取 $\lambda = 1$，例如参见[8, 定理 4.39]。这可能会改变常数 C_P；每当我们假设 X是测地的， C_P所指的就是对应于选择 $\lambda = 1$的常数。

命题 3.9。假设 X 是测地的。设 $x_0 \in X$，令 $W \subset X$ 为在 x_0处 *1*-细的开集，并选取$0 < R < \frac{1}{32}$ 直径 X 充分小，使得 —

$$\frac{\mathfrak{m}(B(x_0, 2R))}{\mathfrak{m}(X)} < C_0^{-1}$$

and

$$\sup_{0<r\le R} \frac{\operatorname{cap}_1(W \cap B(x_0,r), B(x_0,2r))}{\operatorname{cap}_1(B(x_0,r), B(x_0,2r))} < \frac{1}{C_0 C_1 C_d C_P}.$$

记 $B := B(x_0, R)$。于是我们可以找到开集 V，满足 $W \cap B \subset V \subset 2B$，并且以下结论成立：记 F 为包含 x_0的 $B(x_0, R) \setminus V$的连通分支；则$x_0 \in$细内部 F；

$$\operatorname{cap}_1(\tfrac{1}{2}B \setminus F, B) \le 9C'C_r \operatorname{cap}_1(W \cap B, 2B); \tag{3.10}$$

空间$(F, d_M^F, \mathfrak{m})$是一个局部完备度量空间，具有$(d_M^F)_M = d_M^F$，且其拓扑继承自(X, d, μ)； $\mathfrak{m}$ 在 F中是一个具有倍增性质的博雷尔正则外测度

$$\mathfrak{m}(B_F(y, 2r)) \le C_1 C_d^2 \, \mathfrak{m}(B_F(y, r))$$

每当 $B(y, r) \subset B(x_0, R)$ 满足 $y \in F$时，对于这样的球， $B(y, r)$ 也满足

$$\frac{\mathfrak{m}(B_F(y,r))}{\mathfrak{m}(B(y,r))} \ge (C_1 C_d)^{-1}. \tag{3.11}$$

证明。 取一个解 $\chi_V = \chi_V^\wedge$，它是$\mathcal{K}_{W\cap B,\,0}(4B)$-障碍问题的解。由定理3.5 可知 $V \subset 2B$ 是开集，而 V 在 x_0处是1-薄，因此由（2.30），也有

$$x_0 \in \text{fine-int}(X \setminus V). \tag{3.12}$$

由引理2.52，我们还知道

$$P(V, X) \le \operatorname{cap}_1(W \cap B, 4B) \le \operatorname{cap}_1(W \cap B, 2B) < \frac{\operatorname{cap}_1(B, 2B)}{C_0 C_1 C_d C_P}. \tag{3.13}$$

此外，由（2.26）可得

$$\operatorname{cap}_1(V, 4B) \le C_r \operatorname{cap}_{\mathrm{BV}}^\vee(V, 4B) \le C_r P(V, X). \tag{3.14}$$

记 F 为包含 $B \setminus V$ x_0的连通分支； F 是 B的相对闭子集。根据命题2.50 和命题2.53 (其中 $\Omega = B(x_0, R)$)

我们知道，$\chi_F = \chi_F^\vee$是 $B(x_0, R)$中的1-次极小函数，且 $B(x_0, R) \setminus V$是其连通分支 $\bigcup_j F_j$ 的并集，其中可以选取 $F = F_1$，使得与 $B(x_0, R/2)$相交的每个连通分支 F_j 都满足

$$\frac{\mathfrak{m}(F_j)}{\mathfrak{m}(B(x_0, R))} \geq C_1^{-1},$$

因此， $C_1 + 1$ 这样的连通分支少于。假设除 F_1之外，至少还存在一个这样的连通分支。由命题 2.44 和相对等周不等式可知（请回忆，在 Poincar´e 不等式中，现在我们有 $\lambda = 1$）

$$\begin{aligned} P(X \setminus V, B(x_0, R)) &= \sum_j P(F_j, B(x_0, R)) \\ &\geq C_1^{-1} C_P^{-1} \frac{\mathfrak{m}(B(x_0, R))}{R}, \end{aligned}$$

这与（3.13）和（2.23）矛盾。因此

$$B(x_0, R/2) \cap F = B(x_0, R/2) \setminus V. \tag{3.15}$$

于是，由（3.12）可知， $x_0 \in$细内部 F。此外，

$$\begin{aligned} \operatorname{cap}_1(\tfrac{1}{2}B \setminus F, B) &\leq 9C' \operatorname{cap}_1(\tfrac{1}{2}B \setminus F, 4B) \quad \text{by (2.22)} \\ &= 9C' \operatorname{cap}_1(\tfrac{1}{2}B \cap V, 4B) \quad \text{by (3.15)} \\ &\leq 9C'C_r \operatorname{cap}_1(W \cap B, 2B) \quad \text{by (3.14), (3.13),} \end{aligned}$$

这就是（3.10）。

假设 $y \in F$和 $0 < r \leq R$足够小，使得 $B(y, r) \subset B(x_0, R)$。我们知道， χ_F是 $B(x_0, R)$ 中的一个 1- 次极小函数，因此它也是 $B(y, r) \subset B(x_0, R)$ 中的 1- 次极小函数。再次应用命题 2.53 可知， $F \cap B(y, r)$ 是其各个连通分支 $\bigcup_j F_j'$的并集，且每个与 $B(y, r/2)$ 相交的连通分支 F_j'都满足

$$\frac{\mathfrak{m}(F_j')}{\mathfrak{m}(B(y, r))} \geq C_1^{-1} \tag{3.16}$$

因此，这样的连通分支少于 $C_1 + 1$ 。现在，由引理 3.4 可知，$(F, d_M^F, \mathfrak{m})$ 是一个局部完备度量空间， $d \leq d_M^F$，由 d 和 d_M^F 诱导的拓扑相同，因此该拓扑继承自 (X, d, μ)，且 $(d_M^F)_M = d_M^F$。注意， $\mathfrak{m}$ 限制在集合 F 上仍是博雷尔正则外测度，见 [20, 引理 3.3。11]。由于 d 和 d_M^F 诱导的拓扑相同， $\mathfrak{m}$ 在度量测度空间 $(F, d_M^F, \mathfrak{m})$ 中仍是博雷尔正则外测度。

对于任意球 $B(y, r) \subset B(x_0, R)$ 且 $y \in F$，由（3.16）可得

$$\frac{\mathfrak{m}(B_F(y, 2r))}{\mathfrak{m}(B(y, r))} \geq C_1^{-1},$$

因此，事实上

$$\frac{\mathfrak{m}(B_F(y,2r))}{\mathfrak{m}(B(y,2r))} \geq (C_1C_d)^{-1}.$$

我们得出，当 $B(y,\ r) \subset B(x_0,\ R)$ 时，有

$$\frac{\mathfrak{m}(B_F(y,r))}{\mathfrak{m}(B(y,r))} \geq (C_1C_d)^{-1},$$

这就是（3.11）。此外，我们还有

$$\frac{\mathfrak{m}(B_F(y,2r))}{\mathfrak{m}(B_F(y,r))} \leq C_1C_d\frac{\mathfrak{m}(B(y,2r))}{\mathfrak{m}(B(y,r))} \leq C_1C_d^2,$$

从而得到所需的倍增性质。 □

我们还有命题 3.9的如下变式。

命题 3.17. 假设 X 是测地的。设 $x_0 \in X$，设 $W \subset X$ 是一个开集，设 $0 < R < \frac{1}{32}$ 直径 X，并记 $B = B(x_0, R)$。假设

$$\frac{\operatorname{cap}_1(W \cap B, 2B)}{\operatorname{cap}_1(B, 2B)} < \frac{1}{C_0C_1C_dC_P}.$$

那么我们可找到一个开集 V，使得 $W \cap B \subset V \subset 2B$，并且满足以下条件：记 F 为 $B(x_0, R) \setminus V$ 的连通分支中，在与 $B(x_0, R/2)$ 相交的各连通分支里，具有最大 $\mathfrak{m}$-测度的连通分支；则

$$\operatorname{cap}_1(\tfrac{1}{2}B \setminus F, B) \leq 9C'C_r \operatorname{cap}_1(W \cap B, 2B); \tag{3.18}$$

空间 $(F, d_M^F, \mathfrak{m})$ 是一个局部完备度量空间，且 $(d_M^F)_M = d_M^F$，$\mathfrak{m}$ 在 F 上是具有倍增性质的博雷尔正则外测度

$$\mathfrak{m}(B_F(y,2r)) \leq C_1C_d^2\,\mathfrak{m}(B_F(y,r))$$

每当 $B(y,r) \subset B(x_0, R)$ 满足 $y \in F$ 时，对于这样的球 $B(y,r)$ 也成立

$$\frac{\mathfrak{m}(B_F(y,r))}{\mathfrak{m}(B(y,r))} \geq (C_1C_d)^{-1}.$$

证明。证明与命题3.9的证明完全相同，只需相应删去提及 fine-int$(X \setminus V)$ 或 fine-int F的句子。注意，我们仍有 $V \subset 2B$，这可直接仿照定理3.5证明的第一段得到。

□

4 精细拓扑局部连通

本节证明 1-细拓扑是局部连通的。在前几节中，我们在假设 X 是测地空间的前提下发展了部分理论。然而，这是一个标准事实：这一假设并不十分严格。事实上，作为一个配备倍增测度且满足 Poincar´e 不等式的完备度量空间，X 是准凸的；也就是说，对于任意两点 $x, y \in X$，存在一条曲线 $\gamma\colon [0, \ell_\gamma] \to X$，使得 $\gamma(0) = x$，$\gamma(\ell_\gamma) = y$，且 $\ell_\gamma \le Cd(x, y)$，其中C 仅依赖于 C_d 和 C_P，例如参见 [8, 定理 4.32]。因此，对度量作双 Lipschitz 变换可得到一个测地空间，该空间仍然完备，测度仍为倍增测度，且满足 1-Poincar´e 不等式（见 [8,第 4.7]节）。

引理 4.1. *1-精细拓扑在双 Lipschitz 度量变换下保持不变。*

证明。考虑另一个度量 d'，使得对于所有 x、$y \in X$，以及某个有限的 $L \ge 1$，有 $L^{-1}d(x, y) \le d'(x, y) \le Ld(x, y)$。记关于$d'$ 的容量为 cap_1'。注意，如果 g 是空间 $(X, d', \mathfrak{m})$ 中函数 u 的上梯度，那么 Lg 是 $(X, d, \mathfrak{m})$ 中 u 的上梯度。回顾 (2.22)，我们有

$$\begin{aligned}\mathrm{cap}_1(A \cap B(x, r), B(x, 2r)) &\le C'(1 + 2L^2)\,\mathrm{cap}_1(A \cap B(x, r), B(x, 2L^2 r))\\ &\le C'(1 + 2L^2)\,\mathrm{cap}_1(A \cap B'(x, Lr), B'(x, 2Lr))\\ &\le LC'(1 + 2L^2)\,\mathrm{cap}_1'(A \cap B'(x, Lr), B'(x, 2Lr)).\end{aligned}$$

反向不等式的证明类似。这表明，集合 $A \subset X$ 在空间 $(X, d, \mathfrak{m})$ 中是 1-薄的，当且仅当它在空间 $(X, d', \mathfrak{m})$ 中是 1-薄的。 □

引理 4.2。 双侧性在度量的双 *Lipschitz* 变换下保持不变；若 X 相对于两个度量都是各向同性的，则有限周长集合的本质连通分支也保持不变。

证明。 容易看出，有限周长和测度论边界在度量的双 Lipschitz 变换下保持不变，而豪斯多夫测度 $\mathcal{H}$在这种变换下仍然相互可比。因此，双侧性显然保持不变。

若 X 相对于两个度量都是各向同性的，则由引理 2.42 可知，有限周长集合的本质连通分支也保持不变。 □

命题 4.3。 1-精细拓扑由一族 1-精细连通集构成的基生成。

证明。 由引理4.1，我们可以假设 X 是测地的。在此假设下，此处及后续证明中，诸如 C_d 和 C_P 等常数均指测地空间中的常数，这些常数可能与原空间中的不同；并且我们可以假设 $\lambda = 1$。

考虑一个 1-细开集 $U \subset X$。固定 $x_0 \in U$。由引理 2.35，我们找到一个开集 $W \supset X \setminus U$，它在 x_0处是 1-薄的。选取 $0 < R < \frac{1}{32}$ 直径 X充分小，使得

$$\frac{\mathfrak{m}(B(x_0, 2R))}{\mathfrak{m}(X)} < C_0^{-1}$$

and

$$\sup_{0<r\le R} \frac{\operatorname{cap}_1(W \cap B(x_0, r), B(x_0, 2r))}{\operatorname{cap}_1(B(x_0, r), B(x_0, 2r))} < \frac{1}{C_0 C_1 C_d C_P}.$$

记 $B = B(x_0, R)$，我们可以选取一个连通集 $F \subset B \setminus W$如命题3.9所示。我们知道 $x_0 \in$ 细内部 F。我们将证明 F是 1-细连通的。

反设 F 不是 1-细连通的。那么存在 $F \subset V_1 \cup V_2$，其中 V_1、$V_2 \subset B$（x_0、R）是 1-细开集，且 $V_1 \cap V_2 = \emptyset$，并且 $V_1 \cap F$和$V_2 \cap F$ 均非空。由于 F（在度量 d-拓扑中连通，因而在 d_M^F-拓扑中也连通），存在一个边界点 $y \in \partial_F V_1$，即度量空间（F，d_M^F）中集合 V_1 的边界上的一点。令 $s > 0$ 足够小，使得B（y，$7s$）$\subset B$（x_0，R）。存在点 $z_1 \in B_F$（y，s）$\cap V_1$ 以及 $z_2 \in B_F$（y，s）$\cap V_2$。由（2.28）和（3.11），我们有

$$\lim_{r\to 0} \frac{\mathfrak{m}(V_1 \cap B_F(z_1, r))}{\mathfrak{m}(B_F(z_1, r))} = 1 \quad \text{and} \quad \lim_{r\to 0} \frac{\mathfrak{m}(V_2 \cap B_F(z_2, r))}{\mathfrak{m}(B_F(z_2, r))} = 1.$$

Thus

$$0 < \frac{\mathfrak{m}(V_1 \cap B_F(y, s))}{\mathfrak{m}(B_F(y, s))} < 1.$$

由命题3.9 可知 $\mathfrak{m}$具有倍增性质

$$\mathfrak{m}(B_F(z, 2r)) \le C_1 C_d^2\, \mathfrak{m}(B_F(z, r))$$

对于每个 $z \in B(y, 6s)$ 和 $0 < r \le s$ 都成立，因此对每个 $z \in B_F(y, 6s)$ 和$0 < r \le s$ 也成立。此外，在空间 (F, d_M^F) 中，$B_F(y, 6s)$ 是集合$B(y, 6s)$ 的闭子集，而该集合在 (X, d) 中是紧的；由于两个拓扑相同，它在 (F, d_M^F) 中也紧。因此，$B_F(y, 6s)$ 是紧的。于是由命题 3.2 可知，存在一点$z \in B_F(y, 6s)$（特别是，$z \in F$），使得

$$\frac{1}{4(C_1 C_d^2)^{12}} \le \liminf_{r\to 0} \frac{\mathfrak{m}(V_1 \cap B_F(z, r))}{\mathfrak{m}(B_F(z, r))} \le \limsup_{r\to 0} \frac{\mathfrak{m}(V_1 \cap B_F(z, r))}{\mathfrak{m}(B_F(z, r))} \le 1 - \frac{1}{4(C_1 C_d^2)^{12}}.$$

由（3.11），可得

$$\frac{1}{4(C_1 C_d^2)^{13}} \le \liminf_{r\to 0} \frac{\mathfrak{m}(V_1 \cap B(z, r))}{\mathfrak{m}(B(z, r))} \le \limsup_{r\to 0} \frac{\mathfrak{m}(V_1 \cap B(z, r))}{\mathfrak{m}(B(z, r))} \le 1 - \frac{1}{4(C_1 C_d^2)^{13}}.$$

同样的不等式对 V_2 也成立。由（2.28）可知 $z \notin V_1 \cup V_2$，这就导致矛盾。因此 F 是 1-细连通的。

我们得出，对于每个 $x \in U$，都可以找到一个 1-细连通集合 $F_x \subset U$，使得 $x \in$ 细内部 F_x。令 V为包含 x的 U 的 1-细连通分支。现在必然有 V 是 1-细开集。□

命题 4.4。 令 $E \subset X$ 为一个有限周长集。在 1-精细拓扑中，细内部 I_E 的连通分支，以及它们的任意并，都是有限周长集。

证明。 具有有限周长的集合在双 Lipschitz 变换下显然保持不变，测度论内部也是如此 I_E。根据引理 4.1，1-细拓扑也保持不变。根据第4节开头的讨论，不妨假设 X 是测地的。

根据命题 4.3，我们知道，细内部 I_E 在1-细拓扑中的连通分支也是1-细开集。由于（2.28）每个连通分支的测度都非零，因此它们至多可数多个，从而我们得到连通分支分解

$$\text{fine-int}\, I_E = \bigcup_j V_j, \tag{4.5}$$

其中并集或者是有限的，或者是可数的。令 $V' = V_k$ 对于某个 k。假设$x \in \partial^1 V'$。根据刻画（2.31），我们知道 $x \in b_1 V' \subset b_1 I_E \subset I_E$[1]。如果点 x 属于某个其他的连通分支 V''，则可推出

$$\limsup_{r\to 0} \frac{\text{cap}_1(B(x,r)\cap V', B(x,2r))}{\text{cap}_1(B(x,r), B(x,2r))} \le \limsup_{r\to 0} \frac{\text{cap}_1(B(x,r)\setminus V'', B(x,2r))}{\text{cap}_1(B(x,r), B(x,2r))} = 0,$$

这与 $x \in b_1 V'$ 的事实矛盾。总之， $x \in X \setminus \bigcup_j V_j$，也就是说， $x \notin$ 细内部 I_E，因此 $x \in I_E \setminus$细内部 $I_E = \partial^1 I_E$。我们得出 $\partial^1 V' \subset \partial^1 I_E$。由定理 2.37 可知 $\mathcal{H}($ $\partial^1 I_E) < \infty$，因此 $\mathcal{H}(\partial^1 V') < \infty$ 也成立。根据 (2.28)，我们有 $V' \subset I_{V'}$。另一方面，若 $y \in I_{V'}$，则再次由 (2.28) 可知 y 不属于任何其他集合 V_j，因此

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}(I_{V'} \setminus V') &= \mathcal{H}(I_{V'} \setminus \text{fine-int}\, I_E) \\
&\le \mathcal{H}(I_{\text{fine-int}\, I_E} \setminus \text{fine-int}\, I_E) \quad \text{by (4.5)} \\
&= \mathcal{H}(I_E \setminus \text{fine-int}\, I_E) \quad \text{by Proposition 2.39} \\
&= 0
\end{aligned}$$

再应用命题2.39。由引理 2.40 可得

$$\mathcal{H}(\partial^1 V' \Delta \partial^1 I_{V'}) = 0.$$

因此 $\mathcal{H}(\partial^1 I_{V'}) < \infty$。现在由定理 2.37，可推出 V' 是一个有限周长集。

由（2.38）和（2.13），对于每个 j 我们得到 $\mathcal{H}\left(\partial^1 I_{V_j} \setminus \Sigma_\gamma V_j\right) = 0$。每个点 x至多属于少于 $1/\gamma + 1$ 个集合 $\Sigma_\gamma V_j$。因此

$$\sum_j \mathcal{H}(\partial^1 I_{V_j}) = \sum_j \mathcal{H}(\Sigma_\gamma V_j) \le (1/\gamma + 1)\mathcal{H}(\partial^1 I_E).$$

由（2.14）可得

$$\sum_j P(V_j, X) \le C_d(1/\gamma + 1)\mathcal{H}(\partial^1 I_E) < \infty. \tag{4.6}$$

因此，对于任意并集 $\bigcup_{j\in I} V_j$，利用次可加性（2.4）可得

$$P\Big(\bigcup_{j\in I} V_j, X\Big) \le \sum_{j\in I} P(V_j, X) \le C_d(1/\gamma+1)\mathcal{H}(\partial^1 I_E) < \infty.$$

证明完毕。 □

现在我们得到命题 4.3 的如下改进。

定理 4.7。 1-精细拓扑由有限周长的1-精细连通集构成的基生成。

证明。 取一个 1-细开集 $V' \subset X$。固定 $x_0 \in V'$。根据引理 2.35，我们找到一个开集 $W \supset X \setminus V'$，它在 x_0 处是 1-薄的。取 $0 < R < \frac{1}{32}$ 直径 $\mathcal{X}$ 足够小，使得

$$\frac{\mathfrak{m}(B(x_0, 2R))}{\mathfrak{m}(X)} < C_0^{-1}$$

and

$$\sup_{0<r\le R} \frac{\mathrm{cap}_1(W\cap B(x_0,r), B(x_0,2r))}{\mathrm{cap}_1(B(x_0,r), B(x_0,2r))} < C_0^{-1}.$$

由余面积公式 (2.5)，我们知道 $P(B(x_0, s)\ X) < \infty$ 对几乎处处的 $s > 0$ 成立，因此我们还可以假设 $P(B(x_0, R/2)\ X) < \infty$。按照惯例，记 $B = B(x_0, R)$。取 $\chi_V = \chi_V^\wedge$ 的 $\mathcal{K}_{W\cap B}$, 0$(4B)$-障碍问题的一个解；根据定理 3.5，我们有 $V \subset 2B$ 是开集，并且 V 在 x_0 处是 1-薄的，因此由 (2.30)， $x_0 \in$细内部$(X \setminus V)$。根据引理 2.52，我们还知道

$$P(V, X) \le \mathrm{cap}_1(W\cap B, 4B) < \infty.$$

由（2.3）， $E := \frac{1}{2}B \setminus V$是一个有限周长集，且具有 $x_0 \in$细内部 E。由（2.28）我们知道，细内部 $E \subset I_E$，因此细内部 $E \subset$细内部 I_E。所以同样有$x_0 \in$ 细内部 I_E。由命题 4.4 我们知道，细内部的 1-细连通分支 I_E 包含 x_0 是一个有限周长集。最后，

$$\text{fine-int}\, I_E \subset \overline{E} \subset \overline{\tfrac{1}{2}B} \setminus V \subset V'.$$

因此细内部 I_E 是所需的基集合。 □

我们还注意到以下结果。

命题 4.8。 设 $E \subset X$ 是一个有限周长集，满足 $\mathfrak{m}(E) < \infty$，并将细内部 I_E 写成其1-细连通分支的并

$$\text{fine-int}\, I_E = \bigcup_j V_j.$$

Then

$$\sum_j \mathrm{Cap}_1(V_j) < \infty.$$

证明。由（2.34）和命题 2.39，每个集合 V_j 都是 1-拟开集，因此我们可以找到开集 G_j，使得每个 $V_j \cup G_j$ 都是开集，且 $\mathrm{Cap}_1(G_j) < 2^{-j}$。对于每个 $j \in \mathbb{N}$，我们可以找到一个函数 $u_j \in N^{1,1}(X)$，使得 $0 \le u_j \le 1$, $u_j \ge 1$ 属于 G_j，并且 $\|u_j\|_{N^{1,1}(X)} < 2^{-j}$。那么 $u_j \in$ 也属于有界变差类 $\mathrm{BV}(X)$，并且

$$\|u_j\|_{L^1(X)} + \|Du_j\|(X) < 2^{-j},$$

并且根据余面积公式（2.5）和卡瓦列里原理，我们可以找到 $t \in (0,1)$ 使得

$$\mathfrak{m}(\{u_j > t\}) + P(\{u_j > t\}, X) < 2^{-j}.$$

注意，$V_j \cup \{u_j > t\}$ 包含 $V_j \cup G_j$，而 $V_j \cup G_j$ 是 V_j的一个邻域。于是

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cap}_{\mathrm{BV}}(V_j \cup G_j) &\le \mathfrak{m}(V_j \cup \{u_j > t\}) + P(V_j \cup \{u_j > t\}, X) \\
&\le \mathfrak{m}(V_j) + \mathfrak{m}(\{u_j > t\}) + P(V_j, X) + P(\{u_j > t\}, X) \\
&\le \mathfrak{m}(V_j) + P(V_j, X) + 2^{-j},
\end{aligned}$$

因此根据（2.25），

$$\begin{aligned}
\sum_j \mathrm{Cap}_1(V_j) &\le C_r' \sum_j \mathrm{Cap}_{\mathrm{BV}}(V_j \cup G_j) \\
&\le C_r' \sum_j (\mathfrak{m}(V_j) + P(V_j, X) + 2^{-j}) \\
&\le C_r' \big(\mathfrak{m}(E) + 1 + \sum_j P(V_j, X)\big) \\
&< \infty
\end{aligned}$$

根据（4.6）。 □

5 精细连通分支是本质连通分支

本节证明，1-细连通分支与有限周长集合的本质连通分支一致。

我们先给出以下引理。

引理 5.1. 设 $0 < \delta < 1/(15C_d^2C'C'')$、$x \in X$ 和 $A_1, A_2 \subset X$ 是互不相交的集合，且

$$\lim_{r\to 0} \frac{\mathrm{cap}_1(B(x,r) \setminus (A_1 \cup A_2), B(x,2r))}{\mathrm{cap}_1(B(x,r), B(x,2r))} = 0,$$

and

$$\limsup_{r\to 0} \frac{\mathrm{cap}_1(A_1 \cap B(x,r), B(x,2r))}{\mathrm{cap}_1(B(x,r), B(x,2r))} > 5C_d^2C'C''\delta$$

and

$$\limsup_{r\to 0} \frac{\mathrm{cap}_1(A_2 \cap B(x,r), B(x,2r))}{\mathrm{cap}_1(B(x,r), B(x,2r))} > 5C_d^2C'C''\delta.$$

Then

$$\limsup_{r\to 0}\frac{\min\{\mathrm{cap}_1(A_1\cap B(x,r),B(x,2r)),\mathrm{cap}_1(A_2\cap B(x,r),B(x,2r))\}}{\mathrm{cap}_1(B(x,r),B(x,2r))}>\delta.$$

证明。 对于所有充分小的 $r>0$，我们有

$$\frac{\mathrm{cap}_1(A_1\cap B(x,r),B(x,2r))}{\mathrm{cap}_1(B(x,r),B(x,2r))}+\frac{\mathrm{cap}_1(A_2\cap B(x,r),B(x,2r))}{\mathrm{cap}_1(B(x,r),B(x,2r))}>\frac{2}{3}.$$

因此，我们可以找到任意小的 $R>0$ 和 $r\in[R/2,R]$，使得

$$\frac{\mathrm{cap}_1(A_1\cap B(x,R),B(x,2R))}{\mathrm{cap}_1(B(x,R),B(x,2R))}>5C_d^2C'C''\delta$$

and

$$\frac{\mathrm{cap}_1(A_2\cap B(x,r),B(x,2r))}{\mathrm{cap}_1(B(x,r),B(x,2r))}>5C_d^2C'C''\delta.$$

由 (2.23) 可得,

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{cap}_1(A_2\cap B(x,R),B(x,2R))}{\mathrm{cap}_1(B(x,R),B(x,2R))}\\&\geq(C_d^2C'')^{-1}\frac{\mathrm{cap}_1(A_2\cap B(x,r),B(x,2R))}{\mathrm{cap}_1(B(x,r),B(x,2r))}\\&\geq(5C_d^2C'C'')^{-1}\frac{\mathrm{cap}_1(A_2\cap B(x,r),B(x,2r))}{\mathrm{cap}_1(B(x,r),B(x,2r))}\quad\text{by (2.22)}\\&>\delta.\end{aligned}$$

由于 $R>0$ 可以任意小，因此结论成立。 □

回忆测度密度的记号 $\Theta(E,\ x)$，见 (2.10)。

定理 5.2. 假设 X 具有双侧性。设 $E\subset X$ 满足$P(E,\ X)<\infty$。那么，集合 E 不可分解，当且仅当细内部 I_E 是 *1*-细连通的。

证明。 由引理 4.1和引理 4.2，并回忆双侧性蕴含空间是各向同性的（见 [4, 引理 6.2]），我们可以假设 X 是测地的。由命题 2.39，存在一个 $\mathcal{H}$-零测集合 $N\subset X$ 使得

$$\text{fine-int}\,I_E=I_E\setminus N. \tag{5.3}$$

第 1 部分。 设 $V':=$ 细内部 I_E 是 1-细连通的。我们证明 E 是不可分解的。

反之，假设存在 $V'=G\cup H$，使得对于某些集合 G、H，有 $G\cap H=\emptyset$、$\mathfrak{m}(G)>0$、$\mathfrak{m}(H)>0$，且 $P(V',X)=P(G,X)+P(H,X)$。在不改变前一句所给任何性质的前提下，我们可以在一个 $\mathfrak{m}$-测度为零的集合上修改 G 和 H，从而从 H 中移除所有满足 $\Theta^*(H,x)<1/2$ 的点 x，并将它们加入 G，反之亦然。由 (2.28) 可知

对于所有 $x \in V$， $\Theta(V,\ x) = 1$，因此我们得到集合 G 和 H，使得对于所有 $x \in G$，$\Theta^*(G,\ x) \geq 1/2$，且对于所有 $x \in H$， $\Theta^*(H,\ x) \geq 1/2$。

取 $x_0 \in G$。由于 $V' = G \cup H$，我们知道

$$\lim_{r\to 0} \frac{\mathrm{cap}_1(B(x_0,r) \setminus (G \cup H), B(x_0,2r))}{\mathrm{cap}_1(B(x_0,r), B(x_0,2r))} = 0.$$

由 $\Theta^*(G,\ x_0) \geq 1/2 > 0$，根据（2.28）可得

$$\limsup_{r\to 0} \frac{\mathrm{cap}_1(G \cap B(x_0,r), B(x_0,2r))}{\mathrm{cap}_1(B(x_0,r), B(x_0,2r))} > 0. \tag{5.4}$$

假设我们有

$$\limsup_{r\to 0} \frac{\mathrm{cap}_1(H \cap B(x_0,r), B(x_0,2r))}{\mathrm{cap}_1(B(x_0,r), B(x_0,2r))} > 0. \tag{5.5}$$

由引理 5.1，对于某个 $\delta > 0$

$$\limsup_{r\to 0} \frac{\min\{\mathrm{cap}_1(G \cap B(x,r), B(x,2r)), \mathrm{cap}_1(H \cap B(x,r), B(x,2r))\}}{\mathrm{cap}_1(B(x,r), B(x,2r))} > \delta. \tag{5.6}$$

我们断言

$$\limsup_{r\to 0} \frac{\mathrm{cap}_1((\partial^* H \cap \partial^* G) \cap B(x_0,r), B(x_0,2r))}{\mathrm{cap}_1(B(x_0,r), B(x_0,2r))} > 0. \tag{5.7}$$

反之，假设

$$\lim_{r\to 0} \frac{\mathrm{cap}_1((\partial^* H \cap \partial^* G) \cap B(x_0,r), B(x_0,2r))}{\mathrm{cap}_1(B(x_0,r), B(x_0,2r))} = 0.$$

由（2.36）可知，以下两者至少有一个成立： $x_0 \notin \partial^* H \cap \partial^* G$ 或 $\mathrm{Cap}_1(\{x_0\}) = 0$ （也可能两者都成立）。

情形 a： $x_0 \notin \partial^* H \cap \partial^* G$。由引理 2.35，可找到一个开集 W 包含$\partial^* H \cap \partial^* G$ 和 $X \setminus (G \cup H)$，使得 W 在 x_0 处也是 1-薄的。选取 $0 < R <_{1\ 32}$ 直径 X 足够小，使得

$$\frac{\mathfrak{m}(B(x_0,2R))}{\mathfrak{m}(X)} < C_0^{-1}$$

and

$$\sup_{0<r\leq R} \frac{\mathrm{cap}_1(W \cap B(x_0,r), B(x_0,2r))}{\mathrm{cap}_1(B(x_0,r), B(x_0,2r))} < \min\left\{\frac{\delta}{9C_d^2 C_r C' C''}, \frac{1}{C_0 C_1 C_d C_P}\right\},$$

同时，利用 $B = B(x_0, R)$，根据（5.6），我们可以安排使得

$$\frac{\mathrm{cap}_1(H \cap \frac{1}{2}B, B)}{\mathrm{cap}_1(\frac{1}{2}B, B)} > \delta \quad \text{and} \quad \frac{\mathrm{cap}_1(G \cap \frac{1}{2}B, B)}{\mathrm{cap}_1(\frac{1}{2}B, B)} > \delta. \tag{5.8}$$

然后，我们可以选择一个集合 $F \subset B$，如命题 3.9 中所述。特别地，我们知道 $x_0 \in$ 细内部 F。根据（3.10）和（2.23），我们知道

$$\frac{\operatorname{cap}_1(\frac{1}{2}B \setminus F, B)}{\operatorname{cap}_1(\frac{1}{2}B, B)} \leq \frac{9C'C_r \operatorname{cap}_1(W \cap B, 2B)}{(C''C_d^2)^{-1} \operatorname{cap}_1(B, 2B)} \leq \delta.$$

由（2.32），也有

$$\frac{\operatorname{cap}_1(\overline{\frac{1}{2}B \setminus F}^1, B)}{\operatorname{cap}_1(\frac{1}{2}B, B)} \leq \delta.$$

结合（ 5 8 $x \in \frac{1}{2}B \cap H \cap$ F $y \in$.），我们便得到点 $\frac{1}{2}B \cap G \cap$ F $\Theta^* H x \geq 1/2$ $\Theta X \setminus F x = 0$ 2 28
细内部和细内部。现在（,），而（,）由（.）可知，因此 $\mathfrak{m}(H \cap F) > 0$。类似地 $\mathfrak{m}(G \cap F) > 0$。情形 a 得证。

情形 b： $\operatorname{Cap}_1(\{x_0\}) = 0$。由引理 2.35，我们找到一个开集 W' 包含（$\partial^* H \cap \partial^* G$）$\setminus \{x_0\}$ 和 $X \setminus (G \cup H)$，使得 W' 在 x_0处也为 1-薄。取$0 < R < \frac{1}{32}$ 直径 X 充分小，使得

$$\sup_{0<r\leq R} \frac{\operatorname{cap}_1(W' \cap B(x_0, r), B(x_0, 2r))}{\operatorname{cap}_1(B(x_0, r), B(x_0, 2r))} < \min\left\{\frac{\delta}{18C_d^2 C_r C' C''}, \frac{1}{C_0 C_1 C_d C_P}\right\},$$

而结合 $B = B(x_0, R)$，由 (5.6)，

$$\frac{\operatorname{cap}_1(H \cap \frac{1}{2}B, B)}{\operatorname{cap}_1(\frac{1}{2}B, B)} > \delta \quad \text{and} \quad \frac{\operatorname{cap}_1(G \cap \frac{1}{2}B, B)}{\operatorname{cap}_1(\frac{1}{2}B, B)} > \delta. \tag{5.9}$$

利用 $\operatorname{Cap}_1(\{x_0\}) = 0$，由 (2.24) 和 (2.19) 可选取 $W := W' \cup B(x_0, s)$，其中 $s > 0$ 充分小，且仍然

$$\frac{\operatorname{cap}_1(W \cap B, 2B)}{\operatorname{cap}_1(B, 2B)} < \min\left\{\frac{\delta}{9C_d^2 C_r C' C''}, \frac{1}{C_0 C_1 C_d C_P}\right\}.$$

于是我们可以选取一个集合 $F \subset B$，如命题 3.17 所述。由 (3.18) 和 (2.23) 可知

$$\frac{\operatorname{cap}_1(\frac{1}{2}B \setminus F, B)}{\operatorname{cap}_1(\frac{1}{2}B, B)} \leq \frac{9C'C_r \operatorname{cap}_1(W \cap B, 2B)}{(C''C_d^2)^{-1} \operatorname{cap}_1(B, 2B)} \leq \delta.$$

由 (2.32)，还可得

$$\frac{\operatorname{cap}_1(\overline{\frac{1}{2}B \setminus F}^1, B)}{\operatorname{cap}_1(\frac{1}{2}B, B)} \leq \delta.$$

结合这一点与 (5 9 $x \in \frac{1}{2}B \cap H \cap$ F $y \in$.)，可得点 $\frac{1}{2}B \cap G \cap$ F $\Theta^* H x \geq 1/2$ $\Theta X \setminus F x = 0$ 2 28
fine-int 和 fine-int。现在 (,)，而根据 (,)，有 (.)，因此 $\mathfrak{m}(H \cap F) > 0$。类似地，$\mathfrak{m}(G \cap F) > 0$。情形 b 的证明至此完成。

将空间 $(F, d_M^F, \mathfrak{m})$ 中的上密度记为 Θ_F^*。定义两个新集合 G', H'，如下：

$$G' := \{x \in F : \Theta_F^*(G, x) \geq 1/2\} \quad \text{and} \quad H' := \{x \in F \setminus G' : \Theta_F^*(H, x) \geq 1/2\}.$$

于是 $G' \cup H' = F$，根据勒贝格微分定理（该定理适用，因为测度 $\mathfrak{m}$ 在 $(F, d_M^F, \mathfrak{m})$ 中是局部加倍的（例如参见 [20, 第 77页]），可得$\mathfrak{m}(G \Delta G') = 0$ 且 $\mathfrak{m}(H \Delta H') = 0$。因此 $\mathfrak{m}(G') > 0$ 且 $\mathfrak{m}(H') > 0$。

由 F的连通性，存在一个边界点 $y \in \partial_F H' = \partial_F G'$。取 $s > 0$充分小，使得 $B(y, 7s) \subset B(x_0, R)$。根据 G' 和 H'的定义，

$$0 < \frac{\mathfrak{m}(B_F(y,s) \cap G')}{\mathfrak{m}(B_F(y,s))} < 1.$$

由命题3.9 可知 $\mathfrak{m}$具有倍增性质

$$\mathfrak{m}(B_F(z,2r)) \le C_1 C_d^2 \, \mathfrak{m}(B_F(z,r))$$

对每个 $z \in B(y, 6s)$ 和 $0 < r \le s$，进而对每个 $z \in B_F(y, 6s)$ 以及$0 < r \le s$。此外，$B_F(y, 6s)$ 是紧的。于是由命题3.2，可找到一点 $z \in B_F(y, 6s)$，使得

$$\frac{1}{4(C_1 C_d^2)^{12}} \le \liminf_{r \to 0} \frac{\mathfrak{m}(G' \cap B_F(z,r))}{\mathfrak{m}(B_F(z,r))} \le \limsup_{r \to 0} \frac{\mathfrak{m}(G' \cap B_F(z,r))}{\mathfrak{m}(B_F(z,r))} \le 1 - \frac{1}{4(C_1 C_d^2)^{12}},$$

且对 H'也有相同的不等式。由 (3.11) 且由于 $\mathfrak{m}(G \Delta G') = 0$，我们得到

$$\frac{1}{4(C_1 C_d^2)^{13}} \le \liminf_{r \to 0} \frac{\mathfrak{m}(G \cap B(z,r))}{\mathfrak{m}(B(z,r))} \le \limsup_{r \to 0} \frac{\mathfrak{m}(G \cap B(z,r))}{\mathfrak{m}(B(z,r))} \le 1 - \frac{1}{4(C_1 C_d^2)^{13}},$$

且对 H也有相同的不等式。因此，我们找到了一个属于 $\partial^* G \cap \partial^* H \cap F$的点，这与情形 a 和 b 中 F的构造矛盾。因此 (5.7) 成立。由 (2.21)，特别得到 $\mathcal{H}(\partial^* H \cap \partial^* G) > 0$，这与引理 2.42(i) 给出的$P(V', X) = P(G, X) + P(H, X)$矛盾。因此 (5.5) 不成立；又因我们有 $x_0 \in$细内部$(G \cup H)$，故得到 $x_0 \in$细内部 G。于是 $G =$细内部 G，同理$H =$细内部 H。现在，V'是1-细开集G 和 H的不交并，这与 V' 在1-细拓扑中连通这一事实矛盾。

因此，E 是不可分解的。

第 2 部分。

现在我们考虑这一蕴含关系：如果 E 是不可分解的，那么 fine-int I_E 就是 1-细连通的。首先，我们做一些一般性的观察。

正如（4.5）中一样，我们有

$$\text{fine-int}\, I_E = \bigcup_j V_j, \tag{5.10}$$

其中 V_j是两两不相交的 1-细开、1-细连通集。考虑由这些集合组成的两个并集，分别记为 $V' = \bigcup_{j \in I} V_j$和 $V'' = \bigcup_{j \in I'} V_j$，其中 $I \cap I' = \emptyset$。由命题4.4，V'和 V''都是有限周长集。令 N^* 为 $\mathcal{H}$的一个 V'-零测例外集，V'' 根据双侧性性质的定义。

假设 $x \in (\partial^* V' \cap \partial^* V'') \setminus (N \cup N^*)$。由双侧性可得 $x \in I_{V' \cup V''}$，因此 $x \in I_{\text{fine-int}\, I_E} = I_E$(回忆命题 2.39)。由于我们已有

$x \notin N$，我们得到 $x \in$细内部 I_E(回忆 (5.3))。由 (5.10) 可知 x必属于某个集合 V_k，该集合不包含在并集 V'和 V''中，进而由 (2.28) 可得$x \in I_{V_k}$。然而，这与同时满足 $x \in \partial^* V'$这一事实矛盾；回忆一下， V'、V''、V_k两两不相交。

由此得出 $\mathcal{H}(\partial^* V' \cap \partial^* V'') = 0$。根据引理 2.42 我们知道

$$P(V' \cup V'', X) = P(V', X) + P(V'', X).$$

因此，若 (5.10) 中的并集包含多个集合 V_j，则有

$$P\Big(\bigcup_j V_j, X\Big) = P\Big(\bigcup_{j \neq \{k\}} V_j, X\Big) + P(V_k, X), \tag{5.11}$$

这表明 $\bigcup_j V_j$是可分解的。因此，若 E是不可分解的，则 fine-int I_E是1-细连通的。

□

定理 5.12. 假设 X 具有双侧性。设 $E \subset X$ 满足$P(E, X) < \infty$。那么，1-细连通分支 $\{V_j\}$是fine-int I_E的不可分解子集，并且满足

$$P(E, X) = \sum_j P(V_j, X).$$

换言之，集合 V_j 是fine-int I_E的本质连通分支 .

证明。 根据定理 5.2，每个 V_j 都是不可分解的。反复应用 (5.11)，可得

$$\sum_j P(V_j, X) \leq P\Big(\bigcup_j V_j, X\Big),$$

而相反的不等式由（2.4）推出。因此我们有

$$P(E, X) = P\Big(\bigcup_j V_j, X\Big) = \sum_j P(V_j, X).$$

□

定理 5.12 给出了 E的本质连通分支存在性的新证明；回顾定理2.43。

定理 *1.1*的证明。 这立即由定理 5.2 和 5.12推出 . □

例 5.13。 考虑由下式定义的"3-蜘蛛" S_3

$$S_3 := \{o\} \sqcup (R_1 \cup R_2 \cup R_3), \quad \text{where } R_j := \{j\} \times (0, \infty) \text{ for } j = 1, 2, 3.$$

这里，点 o 是 S_3的原点，而 R_1，R_2，R_3 是 S_3的射线；对于每个 $j = 1$，2，3，我们将 o 与 $(j, 0)$ 等同。我们考虑距离

$$d((j, s), (k, t)) := \begin{cases} |s - t| & \text{if } j = k, \\ t + s & \text{if } j \neq k. \end{cases}$$

那么 $(S_3,\ d,\ \mathcal{H}^1)$ 是一个完备、倍增（事实上是阿尔福斯 1-正则）的空间，满足 1-Poincar´e 不等式。正如 [11, 引理 1。27], 所指出的，这个空间是各向同性的。然而，它不具有双侧性；考虑 $E_1 = R_1,\ E_2 = R_2$，因此 $o \in \partial^* E_1 \cap \partial^* E_2$，但同时 $\Theta(X \setminus (E_1 \cup E_2)\ o) = 1/3 > 0$。

现在考虑 $E := E_1 \cup E_2$。这是一个不可分解集（详情见 [11, 引理 1.26]）。然而，现在 $I_E = E \setminus \{0\}$，因此细内部 $I_E = I_E$，且该集合在 1-细拓扑中的连通分支为 E_1 和 E_2。

这表明，定理 5.12中关于双侧性的假设不能去除。

6 精细域

我们将前几节中发展的技巧用于证明关于 1-细域的一些结果，也就是说，1-细拓扑中的连通 1-细开集。$1 < p < \infty$ 情形下的精细域已在 [7, 31], 中研究（此前的相关工作也可参见其中的参考文献）。

回顾定义 2.11中的测度拓扑定义。在 [31, 第225], 页中，提出了这样一个问题（在 $1 < p < \infty$的情形下）：一个 p-细域是否也是测度拓扑域。现在，我们可以在 $p = 1$的情形下回答这个问题。

定理 6.1。 假设 $V' \subset X$ 是一个1-细域。那么 V' 也是一个测度拓扑域。

证明。 由（2.28）， V' 在测度拓扑中是开集。

为了证明 V' 在测度拓扑中连通，反设存在 $V' \subset G \cup H$，其中 $G = I_G$、$H = I_H$ 是集合，且 $G \cap H = \emptyset$、 $\mathfrak{m}(G \cap V') > 0$、$\mathfrak{m}(H \cap V') > 0$。再次使用（2.28），事实上可以假设 G、$H \subset V'$。接下来，我们逐字沿用定理 5.2 第 1 部分的证明，从第 10 行（“取$x_0 \in G$...”）到第 -7 行（“因此（5.7）成立。”）。事实上，（5.7）与 x_0 属于 1-细开集 $V' \subset I_G \cup I_H$这一事实矛盾。然后我们得出结论（与定理 5.2 第 1 部分证明的最后几行一样），即（5.5）不成立；又因为 $x_0 \in$细内部$(G \cup H)$，所以 $x_0 \in$细内部 G。因此 $G =$细内部G，同理 $H =$细内部H。现在， V'是1-细开集 G 和 H的不交并，这与V' 在1-细拓扑中连通这一事实矛盾。

□

定理 [31] 指出，在 $1 < p < \infty$ 的情况下，对于一个 p-细域$V' \subset \mathbb{R}^n$ 以及一个 Cap$_p$-零测集合 $N \subset \mathbb{R}^n$，集合 $V' \setminus N$ 也是一个 p-细域。现在我们证明在 $p = 1$ 的情况下类似的结果。回顾定义 2.27 中 1-基 $b_1 A$的定义。

定理 6.2。 假设 $V' \subset X$ 是一个1-细域，并且 $N \subset V'$ 满足$\mathrm{Cap}_1(N) = 0$。那么 $V' \setminus N$ 也是一个1-细域。

证明。 由引理 4.1及其上方的讨论，我们可以假设 X 是测地的。由（2.20）和（2.21），可知 $V' \setminus N$ 也是 1-细开的。剩下要证明的是 $V' \setminus N$ 是 1-细连通的。

反之，假设存在不相交的 1-细开集 V_1，$V_2 \subset X$，使得 $V_1 \cup V_2 \supset V' \setminus N$。如果

$$N = (N \setminus b_1 V_1) \cup (N \setminus b_1 V_2),$$

于是，注意到 $b_1 N = \emptyset$ 由（2.21），我们可以定义 $V_1' := V_1 \cup (N \setminus b_1 V_2)$ 以及$V_2' := V_2 \cup (N \setminus b_1 V_1)$，它们是互不相交的 1-细开集，且 $V' = V_1' \cup V_2'$，这就产生矛盾。

因此，我们可以假设存在 $x_0 \in N$ 和 $\delta > 0$，使得

$$\limsup_{r \to 0} \frac{\operatorname{cap}_1(V_1 \cap B(x_0, r), B(x_0, 2r))}{\operatorname{cap}_1(B(x_0, r), B(x_0, 2r))} > 5 C_d^2 C' C'' \delta$$

and

$$\limsup_{r \to 0} \frac{\operatorname{cap}_1(V_2 \cap B(x_0, r), B(x_0, 2r))}{\operatorname{cap}_1(B(x_0, r), B(x_0, 2r))} > 5 C_d^2 C' C'' \delta.$$

由引理 2.35，我们可以找到一个开集 $W' \supset (X \setminus V') \cup (N \setminus \{x_0\})$，它在$x_0$ 处是 1-薄的。取 $0 < R < \frac{1}{32}$ 直径 X 使得

$$\sup_{0 < r \le R} \frac{\operatorname{cap}_1(W' \cap B(x_0, r), B(x_0, 2r))}{\operatorname{cap}_1(B(x_0, r), B(x_0, 2r))} < \min\left\{ \frac{\delta}{9 C_d^2 C_r C' C''}, \frac{1}{C_0 C_1 C_d C_P} \right\};$$

记 $B = B(x_0, R)$，由引理 5.1 可同时得到

$$\frac{\min\{\operatorname{cap}_1(V_1 \cap \frac{1}{2}B, B), \operatorname{cap}_1(V_2 \cap \frac{1}{2}B, B)\}}{\operatorname{cap}_1(\frac{1}{2}B, B)} > \delta. \tag{6.3}$$

由（2.20）可得 $\mathcal{H}(\{x_0\}) = 0$，因此由（2.21）、（2.19），我们可以取 $W := W' \cup B(x_0, s)$，其中 $s > 0$ 充分小，且仍然

$$\frac{\operatorname{cap}_1(W \cap B, 2B)}{\operatorname{cap}_1(B, 2B)} < \min\left\{ \frac{\delta}{9 C_d^2 C_r C' C''}, \frac{1}{C_0 C_1 C_d C_P} \right\}.$$

我们找到一个连通集 $F \subset B \setminus W \subset V'$ 由命题3.17给出；我们有

$$\begin{aligned} \operatorname{cap}_1(\tfrac{1}{2}B \setminus F, B) &\le 9 C' C_r \operatorname{cap}_1(W \cap B, 2B) \quad \text{by (3.18)} \\ &< \frac{\delta}{C_d^2 C''} \operatorname{cap}_1(B, 2B) \\ &\le \delta \operatorname{cap}_1(\tfrac{1}{2}B, B) \quad \text{by (2.23)}. \end{aligned}$$

我们有 $F \subset V_1 \cup V_2$，根据 (6.3) 和上文，$V_1 \cap F$和 $V_2 \cap F$均非空。由于 F 是连通的（在度量 d拓扑中连通，因此在d_M^F拓扑中也连通），存在一个边界点 $y \in \partial_F V_1$，即度量空间 (F, d_M^F) 中集合 V_1 的边界上的一点。取足够小的 $s > 0$，使得 $B(y, 7s) \subset B(x_0, R)$。由 (2.28) 和 (3.11)，我们有

$$0 < \frac{\mathfrak{m}(V_1 \cap B_F(y, s))}{\mathfrak{m}(B_F(y, s))} < 1.$$

根据命题 3.9 我们知道 $\mathfrak{m}$具有倍增性质

$$\mathfrak{m}(B_F(z,2r)) \le C_1 C_d^2\, \mathfrak{m}(B_F(z,r))$$

对每个 $z \in B(y,6s)$ 以及 $0 < r \le s$，再对每个 $z \in B_F(y,6s)$ 以及$0 < r \le s$。此外， $B_F(y,6s)$ 是紧集。根据命题 3.2，我们可以找到一点 $z \in B_F(y,6s)$（特别地， $z \in F$），使得

$$\frac{1}{4(C_1C_d^2)^{12}} \le \liminf_{r\to 0} \frac{\mathfrak{m}(V_1 \cap B_F(z,r))}{\mathfrak{m}(B_F(z,r))} \le \limsup_{r\to 0} \frac{\mathfrak{m}(V_1 \cap B_F(z,r))}{\mathfrak{m}(B_F(z,r))} \le 1 - \frac{1}{4(C_1C_d^2)^{12}}.$$

由（3.11），可得

$$\frac{1}{4(C_1C_d^2)^{13}} \le \liminf_{r\to 0} \frac{\mathfrak{m}(V_1 \cap B(z,r))}{\mathfrak{m}(B(z,r))} \le \limsup_{r\to 0} \frac{\mathfrak{m}(V_1 \cap B(z,r))}{\mathfrak{m}(B(z,r))} \le 1 - \frac{1}{4(C_1C_d^2)^{13}}.$$

同样的不等式对 V_2 也成立。由（2.28）可知 $z \notin V_1 \cup V_2$，这与我们已有的 $F \subset V_1 \cup V_2$ 矛盾。因此 $V' \setminus N$ 是 1- 细连通的。 □

命题 6.4. 考虑集合的递减序列 $G_i \subset X$, $G_{i+1} \subset G_i$ 对所有 $i \in \mathbb{N}$，且 $\mathrm{Cap}_1(G_i) \to 0$。令 $V' \subset X$ 为一个1-精细域。则存在一个1-精细域的递增序列 $V_i \subset V' \setminus G_i$，使得

$$\mathrm{Cap}_1\left(V' \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} V_i\right) = 0.$$

证明。 序列 $G_i^{\,1}$ 也是递减的，并且由（2.32）可知 $\mathrm{Cap}_1(G_i^{\,1}) \to 0$。对于每个 $x \in V' \setminus \bigcap_{i\in\mathbb{N}} \overline{G_i^{\,1}}$，记 $V_{x,i}$为包含 x 的 $V' \setminus G_i^{\,1}$ 的 1-细域递增序列。由命题 4.3，1-细拓扑是局部连通的。因此，集合 $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} V_{x,i}$ 是 1-细域；对于不同的 $x \in V' \setminus \bigcap_{i\in\mathbb{N}} G_i^{\,1}$，它们要么重合，要么两两不相交，并且它们的并集为 $V' \setminus \bigcap_{i\in\mathbb{N}} G_i^{\,1}$。将这些互不相同的集合记为 $\{V_k\}_k$（它们必然构成有限或可数的集族，不过这一点并非必需）。如果对于给定的 k，我们有

$$\mathrm{Cap}_1(V' \setminus V_k) > 0,$$

那么 V_k 和 $\bigcup_{j\neq k} V_j$ 是两个不相交的 1-细开集，其并集为 $V' \setminus \bigcap_{i\in\mathbb{N}} G_i^{\,1}$。然而，由定理 6.2 可知 $V' \setminus \bigcap_{i\in\mathbb{N}} G_i^{\,1}$ 是 1-细连通的，这就导致矛盾。因此 $\mathrm{Cap}_1(V' \setminus V_k) = 0$，这意味着对于某个（事实上，对所有）$x \in V' \setminus \bigcap_{i\in\mathbb{N}} G_i^{\,1}$，我们有 $V_{x,i} \subset V' \setminus G_i$ 是一个具有

$$\mathrm{Cap}_1\left(V' \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} V_{x,i}\right) = 0.$$

□

我们注意到，借助我们所建立的理论，也可以将 [7] 从 $1 < p < \infty$ 推广到整个范围 $1 \le p < \infty$，但我们将把这留待未来工作。

7 度量拓扑下的本质连通分支

本节将证明，有限周长集的本质连通分支也可以通过通常的度量拓扑得到，尽管这种方式不那么简洁。

首先注意，度量拓扑比 1-细拓扑更弱，因此连通集更多。因此，我们不考虑有限周长集 E （或者说，其测度论内部 I_E）的（度量拓扑下的）连通分支，而是去掉一个 1-容量较小的集合 G ，然后考虑 $I_E \setminus G$ 的连通分支。

更确切地说，我们按以下方式定义任意集合 U 的准连通分支 。

定义 7.1 （1-准连通分支）。 设 $U \subset X$ ，并考虑集合的一个递减序列 $G_i \subset X$，对所有 $i \in \mathbb{N}$，均有 $G_{i+1} \subset G_i$ ，且 $\mathrm{Cap}_1(G_i) \to 0$。接着考虑 $U \setminus G_i$ 的（度量拓扑下的）连通分支 $\{W_{i,k}\}_k$。如有必要，通过重新编号，我们可以使每个 $W_{i,k}$ 关于 i 单调递增。然后考虑

$$E_k := \bigcup_{i=1}^{\infty} W_{i,k}.$$

我们称这样的集合 E_k 为极小的，是指对于任意其他递减序列 G_i' ，满足 $\mathrm{Cap}_1(G_i') \to 0$，以及相应的集合 $E_{k'}' := \lim^{i\to\infty} W_{i,\,k'}'$，对每个 k 都存在 k' 使得

$$\mathrm{Cap}_1(E_k \setminus E_{k'}') = 0.$$

如果这些集合存在，我们将那些另外满足 $\mathrm{Cap}_1(E_k) > 0$的极小集合 E_k 称为 U的 **1-准连通分支**。

现在我们证明本节的主要结果。为简便起见，假设$\mathfrak{m}(E) < \infty$。

定理 7.2。 设 X 具有双侧性。令 $E \subset X$ 满足$P(E, X) < \infty$ 且 $\mathfrak{m}(E) < \infty$。则 I_E 的 1-准连通分支与 细内部 I_E的 1-细连通分支在模去Cap_1-零集的意义下重合，因而也与 E的本质连通分支重合。

证明。 由（2.34） ， I_E是细内部 I_E与一个 Cap_1-零集 N的并。将细内部 I_E 写成其 1-细连通分支的并

$$\text{fine-int}\, I_E = \bigcup_j V_j.$$

考虑一个递减序列 G_i' ，满足 $\mathrm{Cap}_1(G_i') \to 0$，以及 $I_E \setminus G_i'$ 的连通分支（在度量拓扑中） $\{W_{i,k'}'\}_{k'}$。根据命题 6.4，对于每个 j，存在一个关于 i 递增的 1-细域序列 $V_{i,\,j} \subset V_j \setminus G_i'$，使得

$$\mathrm{Cap}_1\left(V_j \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} V_{i,j}\right) = 0.$$

每个集合 $V_{i,\ j}$ 都是 1-细连通的，因而也是连通的，所以我们有 $\bigcup_{i=1}^{\infty} V_{i,\ j}$ 包含于集合 $\bigcup_{i=1}^{\infty} W'_{i,\ k'} = E'_{k'}$ 中的某一个。因此， V_j 包含于集合 $E'_{k'}$ 中（除去 Cap_1-零集）。换言之，集合 $E'_{k'}$ 是集合 V_j 的并（除去 Cap_1-零集；此外可能还要加上 N 的一个子集，但该子集是 Cap_1- 零的）。

反之，根据命题 2.39 和（2.34），我们知道每个集合 $X\setminus(I_{V_j}\cup\partial^* V_j)$ 都是 1-拟开集；此外，根据定理 1.1和引理 2.42，对于所有 $j\neq k$，都有 $\mathcal{H}(\partial^* V_j\cap\partial^* V_k)=0$。存在开集 $H_{i,j}$，使得每个 $(I_{V_j}\cup\partial^* V_j)\setminus H_{i,j}$ 都是闭集，且 $\mathrm{Cap}_1(H_{i,j})<2^{-j}/i$。令 G_i 为包含该集合的一个开集

$$N\cup\bigcup_j H_{i,j}\cup\bigcup_{j=N_i+1}^{\infty} V_j\cup\bigcup_{j\neq k}\partial^* V_j\cap\partial^* V_k;$$

通过选取充分大的 N_i，根据命题 4.8 ，我们可以确保 $\mathrm{Cap}_1(G_i)<1/i$。由于 $G_i\supset H_{i,j}$，对于每个 $i\in\mathbb{N}$，我们有

$$(I_{V_j}\cup\partial^* V_j)\setminus G_i=\big((I_{V_j}\cup\partial^* V_j)\setminus H_{i,j}\big)\cap(X\setminus G_i).$$

由此可知，集合 $\{(I_{V_j}\cup\partial^* V_j)\setminus G_i\}_{j=1}^{N_i}$ 具有三个性质：首先，它们是闭集（因为它们是闭集的交集）。其次，它们两两不相交，因为 G_i 包含 $\bigcup_{j\neq k}\partial^* V_j\cap\partial^* V_k$，并且对于 $j\neq k$， I_{V_j} 不可能与 $I_{V_k}\cup\partial^* V_k$ 相交。第三，它们的并集包含 $I_E\setminus G_i$，因为根据（2.28），这等于细内部 $I_E\setminus G_i$ 和 $V_j\subset I_{V_j}$。因此， $\{(I_{V_j}\cup\partial^* V_j)\setminus G_i\}_{j=1}^{N_i}$ 是一个两两不相交的紧集有限集族，其并集包含 $I_E\setminus G_i$。于是， $I_E\setminus G_i=\bigcup_j V_j\setminus G_i$ 的每个连通分支都包含于某个 $I_{V_j}\cup\partial^* V_j$ 中，事实上也包含于某个 V_j 中。将这些连通分支记为 $W_{i,k}$，并定义 $E_k:=\bigcup_{i=1}^{\infty} W_{i,k}$。每个 E_k 都包含于某个 V_j 中。

结合证明的第一部分，我们得出集合 E_k 与集合 V_j在模 Cap_1-零测集的意义下相同，且按照定义 7.1的意义，它们是极小的。根据定理 1.1 ，集合 V_j 与 E的本质连通分支相同。

□

8 Cartan性质

精细位势理论中一个众所周知的性质是所谓的 Cartan性质。在 $1<p<\infty$ 的情形下，这一性质广为人知，参见例如 [32]。在度量测度空间的框架下， [10] 证明了该性质的弱版本， [9]证明了强版本。在 $p=1$ 的情形下，第二作者在 [29]证明了该性质的弱版本。

本节我们证明在 $p=1$ 情形下的强版本；它与弱版本的区别在于，只需要一个超极小化函数 $u=\chi_E$，而弱版本则需要有限个（通常为两个）超极小化函数。命题 3.9 中，强版本至关重要。

我们将用到以下针对有限周长集的余面积不等式和“粘贴结果”。

命题 8.1 ([1, 命题 5。1])。 对于任意球 $B(x,\ R)$ 和博雷尔集 $A \subset X$，有

$$\int_0^R \mathcal{H}(\partial B(x,r) \cap A)\, \mathrm{d}r \leq 2\, \mathfrak{m}(B(x,R) \cap A).$$

引理 8.2 ([2, 引理 3.5])。 设 $E \subset X$ 是 X 中的有限周长集，且$x \in X$。对于几乎处处的 $r > 0$，集合 $E \setminus B(x,r)$ 在 X 中具有有限周长，并且满足

$$P(E \setminus B(x,r), \partial B(x,r)) \leq \frac{d}{ds}\, \mathfrak{m}(B(x,s) \cap E)\Big|_{s=r}.$$

回想一下，根据我们的基本假设，有 $\mathfrak{m}(X) > 0$ （可能 ∞），并且对每个 $x \in X$ 都有$\mathfrak{m}(\{x\}) = 0$ （例如参见 [8, 推论 3.9]）。我们在此重述该定理。

定理 8.3。 设 $W \subset X$ 为开集，且 $x \in X \setminus W$ 满足 W 在x处是1-薄的。取 $0 < R < \frac{1}{32}$ 直径 X 足够小，使得

$$\frac{\mathfrak{m}(B(x,2R))}{\mathfrak{m}(X)} < C_0^{-1} \tag{8.4}$$

and

$$\sup_{0<r\leq R} \frac{\mathrm{cap}_1(W \cap B(x,r), B(x,2r))}{\mathrm{cap}_1(B(x,r), B(x,2r))} < C_0^{-1}, \tag{8.5}$$

其中

$$C_0 := (20 C_{SP} C_2 C_S C_d^{1+2\lceil \log_2(4\lambda)\rceil})^{2Q}.$$

记作 $B\colon = B(x,\ R)$。设 $\chi_V = \chi_V^\wedge$是 $\mathcal{K}_{W\cap B,\ 0}(4B)$-障碍问题的解（由引理 *2.52*保证）。则 V 是开集，包含于 $2B$，$\chi_V^\wedge = 1$在 $W \cap B$，$\chi_V^\vee(x) = 0$，并且

$$\lim_{r\to 0} \frac{\mathrm{cap}_1(V \cap B(x,r), B(x,2r))}{\mathrm{cap}_1(B(x,r), B(x,2r))} = 0. \tag{8.6}$$

证明。 设 χ_V 是 $\mathcal{K}_{W\cap B,\ 0}(4B$-障碍问题的一个解，由引理2.52给出。由引理 2.54 我们知道，对所有 $y \in 3B \setminus 2B$,

$$\begin{aligned}
\chi_V^\vee(y) \leq C_2 R \frac{\mathrm{cap}_1(W \cap B, 4B)}{\mathfrak{m}(B)} &\leq C_2 R \frac{\mathrm{cap}_1(W \cap B, 2B)}{\mathfrak{m}(B)} \\
&\leq C_2 C_d \frac{\mathrm{cap}_1(W \cap B, 2B)}{\mathrm{cap}_1(B, 2B)} \quad \text{by (2.23)} \\
&< 1,
\end{aligned}$$

因此 $\chi_V^\vee = 0$ 属于 $3B \setminus 2B$。事实上，$\chi_V^\vee = 0$ 属于 $4B \setminus 2B$，否则我们可以从 $4B \setminus 3B$中移除 V的部分，从而减小 $P(V,\ X)$。因此 $\chi_V^\vee = 0$属于 $X \setminus 2B$。
在证明中，我们将经常使用（2.23）中的第二个不等式，并且不再每次都提及它。

根据定理 2.51，函数 $\chi_V^\wedge$ 在 $4B$上是下半连续的。通过在一个零测集上重新定义 V，使得 $\chi_V = \chi_V^\wedge$，我们可得 $V \subset 2B$ 是开集。

根据引理 2.52和假设（8.5），我们有

$$P(V,X) \le C_0^{-1}\operatorname{cap}_1(B(x,R),B(x,2R)) \le C_d C_0^{-1}\frac{\mathfrak{m}(B(x,R))}{R}. \tag{8.7}$$

由（2.7），我们还有

$$\mathfrak{m}(V) \le 2C_S R P(V,X) \le 2C_S C_d C_0^{-1}\,\mathfrak{m}(B(x,R)). \tag{8.8}$$

为证明最后一个断言（8.6），我们考虑两种情形，并将其进一步细分为子情形。在每种情形中，我们的思路都是假设（8.6）不成立，并由此与 V 是一个解这一事实导出矛盾。

情形 1. 假设 $\Theta^*(V,x) > 0$；换言之，我们有

$$\limsup_{r\to 0}\frac{\mathfrak{m}(V\cap B(x,r))}{\mathfrak{m}(B(x,r))} =: \kappa > 0.$$

情形 1a. 假设 $\kappa > C_0^{-1/2}$。

我们找到 $0 < r < R/2$，使得

$$\frac{\mathfrak{m}(V\cap B(x,r/4\lambda))}{\mathfrak{m}(B(x,r/4\lambda))} > C_0^{-1/2}.$$

选择最小的 $j\in\mathbb{N}$ 使得（由（8.4）可知这是可能的）

$$\frac{\mathfrak{m}(V\cap B(x,(4\lambda)^{j-1}r))}{\mathfrak{m}(B(x,(4\lambda)^{j-1}r))} \le C_0^{-1/2}.$$

记作 $(4\lambda)^{j-1}r = s$，我们有

$$\frac{\mathfrak{m}(V\cap B(x,s))}{\mathfrak{m}(B(x,s))} \le C_0^{-1/2} \tag{8.9}$$

and

$$C_0^{-1/2} < \frac{\mathfrak{m}(V\cap B(x,s/4\lambda))}{\mathfrak{m}(B(x,s/4\lambda))} \le C_d^{\lceil\log_2(4\lambda)\rceil}C_0^{-1/2}.$$

注意，若有 $s\ge R$，则可推出

$$\begin{aligned}\mathfrak{m}(V) \ge \mathfrak{m}(V\cap B(x,s/4\lambda)) &\ge C_0^{-1/2}\,\mathfrak{m}(B(x,s/4\lambda))\\ &\ge C_0^{-1/2}C_d^{-\lceil\log_2(4\lambda)\rceil}\,\mathfrak{m}(B(x,s))\\ &\ge C_0^{-1/2}C_d^{-\lceil\log_2(4\lambda)\rceil}\,\mathfrak{m}(B(x,R)),\end{aligned}$$

这与8.8中对 C_0 的选取相矛盾。因此 $s < R$。

根据相对等周不等式（2.6），

$$\begin{aligned}C_0^{-1/2}\,\mathfrak{m}(B(x,s/(4\lambda))) &\le \mathfrak{m}(V\cap B(x,s/(4\lambda)))\\ &\le 2C_{SP}\frac{s}{4\lambda}\left(\frac{\mathfrak{m}(V\cap B(x,s/4\lambda))}{\mathfrak{m}(B(x,s/4\lambda))}\right)^{1/Q}P(V,B(x,s/2))\\ &\le C_{SP}\frac{s}{\lambda}C_0^{-1/2Q}C_d^{\lceil\log_2(4\lambda)\rceil/Q}P(V,B(x,s/2)).\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned} P(V, B(x, s/2)) &\geq \lambda C_0^{-1/2+1/2Q} C_{SP}^{-1} C_d^{-\lceil \log_2(4\lambda) \rceil (1+1/Q)} \frac{\mathfrak{m}(B(x,s))}{s} \\ &> 4C_d C_0^{-1/2} \frac{\mathfrak{m}(B(x,s))}{s} \end{aligned}$$

根据 C_0的选取，由引理 8.2 可得 $s' \in (s/2, s)$ 使得

$$P(V \setminus B(x,s'), \partial B(x,s')) \leq 2\frac{\mathfrak{m}(V \cap B(x,s))}{s} \leq 2C_0^{-1/2} \frac{\mathfrak{m}(B(x,s))}{s} \quad \text{by (8.9)}.$$

此外，由引理 2.52 及假设（8.5），我们可找到 $D \subset B(x, 2s)$，其中包含 $B(x,s) \cap W$，使得

$$P(D, X) \leq C_0^{-1} \operatorname{cap}_1(B(x,s), B(x,2s)) \leq C_0^{-1} C_d \frac{\mathfrak{m}(B(x,s))}{s}.$$

我们希望将解 V与竞争者 $D \cup (V \setminus B(x,s'))$ 进行比较。首先利用周长的测度性质，然后再利用次可加性（2.3），可得

$$\begin{aligned} &P(D \cup (V \setminus B(x,s')), X) - P(V, X) \\ &\quad = P(D \cup (V \setminus B(x,s')), B(x,s')) - P(V, B(x,s')) \\ &\qquad + P(D \cup (V \setminus B(x,s')), \partial B(x,s')) - P(V, \partial B(x,s')) \\ &\qquad\quad + P(D \cup (V \setminus B(x,s')), X \setminus \overline{B(x,s')}) - P(V, X \setminus \overline{B(x,s')}) \\ &\quad \leq P(D \cup (V \setminus B(x,s')), B(x,s')) - P(V, B(x,s/2)) \\ &\qquad + P(D \cup (V \setminus B(x,s')), \partial B(x,s')) \\ &\qquad\quad + P(D, X \setminus \overline{B(x,s')}) + P(V \setminus B(x,s'), X \setminus \overline{B(x,s')}) - P(V, X \setminus \overline{B(x,s')}) \\ &\quad = P(D, B(x,s')) - P(V, B(x,s/2)) \\ &\qquad + P(D \cup (V \setminus B(x,s')), \partial B(x,s')) \\ &\qquad\quad + P(D, X \setminus \overline{B(x,s')}) \\ &\quad \leq P(D, B(x,s')) - P(V, B(x,s/2)) \\ &\qquad + P(D, \partial B(x,s')) + P(V \setminus B(x,s'), \partial B(x,s')) \\ &\qquad\quad + P(D, X \setminus \overline{B(x,s')}) \\ &\quad = P(D, X) - P(V, B(x,s/2)) + P(V \setminus B(x,s'), \partial B(x,s')) \end{aligned}$$

再次利用测度性质即可得出。

我们将其记录如下:

$$\begin{aligned} &P(D \cup (V \setminus B(x,s')), X) - P(V, X) \\ &\quad \leq P(D, X) - P(V, B(x,s/2)) + P(V \setminus B(x,s'), \partial B(x,s')). \end{aligned} \tag{8.10}$$

结合前面的估计，我们得到

$$\begin{aligned} P(D \cup (V \setminus B(x,s')), X) - P(V, X) &\leq 3C_0^{-1/2} C_d \frac{\mathfrak{m}(B(x,s))}{s} - 4C_d C_0^{-1/2} \frac{\mathfrak{m}(B(x,s))}{s} \\ &< 0. \end{aligned}$$

这与 V 是 $\mathcal{K}_{W\cap B,\ 0}(4B)$-障碍问题的解这一事实相矛盾。

情形 1b. 假设 $\kappa \le C_0^{-1/2}$。

情形 1b(i)。假设

$$0 = \liminf_{r\to 0} \frac{\mathfrak{m}(V\cap B(x,r))}{\mathfrak{m}(B(x,r))} < \limsup_{r\to 0} \frac{\mathfrak{m}(V\cap B(x,r))}{\mathfrak{m}(B(x,r))}. \tag{8.11}$$

回顾一下，“上极限”的值记作 κ。定义 $\delta > 0$ 为

$$\delta := \min\left\{ \frac{\kappa}{C_d^{\lceil \log_2(4\lambda)\rceil}}, \frac{1}{(4C_{SP})^Q C_d^{Q+\lceil \log_2(4\lambda)\rceil(1+Q)}} \right\}. \tag{8.12}$$

固定一个充分小的 $r > 0$，使得

$$\sup_{0<r'\le r} \frac{\mathrm{cap}_1(W\cap B(x,r'), B(x,2r'))}{\mathrm{cap}_1(B(x,r'), B(x,2r'))} < \delta, \tag{8.13}$$

而

$$\frac{\mathfrak{m}(V\cap B(x,r))}{\mathfrak{m}(B(x,r))} \le \frac{\delta}{2}.$$

由于 $\delta \le \kappa/C_d^{\lceil \log_2(4\lambda)\rceil}$，我们可以选取满足条件的最小 $j\in\mathbb{N}$

$$\frac{\mathfrak{m}(V\cap B(x,(4\lambda)^{-j}r))}{\mathfrak{m}(B(x,(4\lambda)^{-j}r))} > \frac{\delta}{2}.$$

令 $s:=(4\lambda)^{-j+1}r$。则

$$\frac{\mathfrak{m}(V\cap B(x,s))}{\mathfrak{m}(B(x,s))} \le \frac{\delta}{2}$$

and

$$\frac{\delta}{2} < \frac{\mathfrak{m}(V\cap B(x,s/4\lambda))}{\mathfrak{m}(B(x,s/4\lambda))} \le C_d^{\lceil \log_2(4\lambda)\rceil}\frac{\delta}{2}.$$

因此，由相对等周不等式（2.6），

$$\begin{aligned}
\frac{\delta}{2}\,\mathfrak{m}(B(x,s/4\lambda)) &\le \mathfrak{m}(V\cap B(x,s/4\lambda)) \\
&\le 2C_{SP}\frac{s}{4\lambda}\left(\frac{\mathfrak{m}(V\cap B(x,s/4\lambda))}{\mathfrak{m}(B(x,s/4\lambda))}\right)^{1/Q} P(V,B(x,s/2)) \\
&\le 2C_{SP}\frac{s}{4\lambda}\delta^{1/Q}C_d^{\lceil \log_2(4\lambda)\rceil/Q} P(V,B(x,s/2)),
\end{aligned}$$

从而

$$P(V,B(x,s/2)) \ge 4C_d\delta\frac{\mathfrak{m}(B(x,s))}{s}$$

根据 δ 在（8.12）中的选取。

由引理 8.2 可得 $s' \in (s/2,\ s)$，使得

$$P(V \setminus B(x,s'), \partial B(x,s')) \le 2\frac{\mathfrak{m}(V \cap B(x,s))}{s} \le \delta \frac{\mathfrak{m}(B(x,s))}{s}.$$

此外，由（8.13）和引理 2.52，我们可以找到 $D \subset B(x,\ 2s)$，使其包含 $B(x,\ s) \cap W$，且满足

$$P(D,X) \le \mathrm{cap}_1(W \cap B(x,s), B(x,2s)) \le C_d \delta \frac{\mathfrak{m}(B(x,s))}{s}.$$

由（8.10），可得

$$\begin{aligned}
&P(D \cup (V \setminus B(x,s')), X) - P(V,X) \\
&\quad \le P(D,X) - P(V, B(x,s/2)) + P(V \setminus B(x,s'), \partial B(x,s')) \\
&\quad \le C_d \delta \frac{\mathfrak{m}(B(x,s))}{s} - 4C_d\delta \frac{\mathfrak{m}(B(x,s))}{s} + \delta \frac{\mathfrak{m}(B(x,s))}{s} \\
&\quad < 0 \quad \text{by (8.12)}.
\end{aligned}$$

这与 V 是 $\mathcal{K}_{W\cap B,\ 0}(4B)$-障碍问题的解这一事实矛盾。

情形 1b(ii)。或者，假设

$$\limsup_{r\to 0} \frac{\mathfrak{m}(V \cap B(x,r))}{\mathfrak{m}(B(x,r))} \le C_0^{-1/2}$$

而

$$\liminf_{r\to 0} \frac{\mathfrak{m}(V \cap B(x,r))}{\mathfrak{m}(B(x,r))} = \varepsilon > 0. \tag{8.14}$$

选择 $0 < r \le R$，使得

$$\sup_{0<r'\le r} \frac{\mathrm{cap}_1(W \cap B(x,r'), B(x,2r'))}{\mathrm{cap}_1(B(x,r'), B(x,2r'))} < \frac{\varepsilon}{C_d} \tag{8.15}$$

and

$$\varepsilon/2 \le \inf_{0<r'\le r} \frac{\mathfrak{m}(V \cap B(x,r'))}{\mathfrak{m}(B(x,r'))} \le \sup_{0<r'\le r} \frac{\mathfrak{m}(V \cap B(x,r'))}{\mathfrak{m}(B(x,r'))} < 2C_0^{-1/2}. \tag{8.16}$$

我们找到一个半径 $0 < s \le r$，使得

$$\frac{\mathfrak{m}(V \cap B(x,s))}{\mathfrak{m}(V \cap B(x,s/4\lambda))} \le 2C_d^{\lceil \log_2(4\lambda)\rceil}; \tag{8.17}$$

如果这样的半径不存在，那么对于所有 $0 < s \le r$，我们都有

$$\frac{\mathfrak{m}(V \cap B(x,s))}{\mathfrak{m}(V \cap B(x,s/4\lambda))} > 2C_d^{\lceil \log_2(4\lambda)\rceil} \ge 2\frac{\mathfrak{m}(B(x,s))}{\mathfrak{m}(B(x,s/4\lambda))},$$

然后

$$\frac{\mathfrak{m}(V\cap B(x,r))}{\mathfrak{m}(B(x,r))}>2\frac{\mathfrak{m}(V\cap B(x,r/4\lambda))}{\mathfrak{m}(B(x,r/4\lambda))}>\ldots>2^j\frac{\mathfrak{m}(V\cap B(x,r/(4\lambda)^j))}{\mathfrak{m}(B(x,r/(4\lambda)^j))},$$

其中，最后一项趋于 ∞，当 $j\to\infty$ 时，由于（8.14），这就产生了矛盾。因此（8.17）成立，并由相对等周不等式（2.6），

$$\begin{aligned}\mathfrak{m}(V\cap B(x,s/4\lambda))&\le 2C_{SP}\frac{s}{4\lambda}\left(\frac{\mathfrak{m}(V\cap B(x,s/4\lambda))}{\mathfrak{m}(B(x,s/4\lambda))}\right)^{1/Q}P(V,B(x,s/2))\\&\le 2^{1+1/Q}C_{SP}\frac{s}{4\lambda}C_0^{-1/2Q}P(V,B(x,s/2)),\end{aligned}$$

因此

$$P(V,B(x,s/2))\ge 10C_d^{\lceil\log_2(4\lambda)\rceil}\frac{\mathfrak{m}(V\cap B(x,s/4\lambda))}{s}$$

根据 C_0 的选取。由引理 8.2 可得 $s'\in(s/2,s)$，使得

$$P(V\setminus B(x,s'),\partial B(x,s'))\le 2\frac{\mathfrak{m}(V\cap B(x,s))}{s}\le 4C_d^{\lceil\log_2(4\lambda)\rceil}\frac{\mathfrak{m}(V\cap B(x,s/4\lambda))}{s}$$

由（8.17）。此外，由（8.15）和引理 2.52 可找到 $D\subset B(x,2s)$，包含$W\cap B(x,s)$，使得

$$P(D,X)\le \mathrm{cap}_1(W\cap B(x,s),B(x,2s))\le\varepsilon\frac{\mathfrak{m}(B(x,s))}{s}.$$

由（8.10），可得

$$\begin{aligned}&P(D\cup(V\setminus B(x,s')),X)-P(V,X)\\&\quad\le P(D,X)-P(V,B(x,s/2))+P(V\setminus B(x,s'),\partial B(x,s'))\\&\quad\le\varepsilon\frac{\mathfrak{m}(B(x,s))}{s}-10C_d^{\lceil\log_2(4\lambda)\rceil}\frac{\mathfrak{m}(V\cap B(x,s/4\lambda))}{s}\\&\qquad\quad+4C_d^{\lceil\log_2(4\lambda)\rceil}\frac{\mathfrak{m}(V\cap B(x,s/4\lambda))}{s}\\&\quad\le\varepsilon\frac{\mathfrak{m}(B(x,s))}{s}-6C_d^{\lceil\log_2(4\lambda)\rceil}\frac{\mathfrak{m}(V\cap B(x,s/4\lambda))}{s}\\&\quad<-2\varepsilon\frac{\mathfrak{m}(B(x,s))}{s}\quad\text{by (8.16)}\\&\quad<0.\end{aligned}$$

这与 V 是 $\mathcal{K}_{W\cap B,\,0}(4B)$- 障碍问题的解这一事实相矛盾。

情况 2。我们现在已经排除了情形 $\Theta^*(V,x)>0$，因此可以假设 $\Theta(V,x)=0$。

再假设成立，以导出另一个矛盾：

$$\limsup_{r\to0}\frac{P(V,B(x,r))}{\mathfrak{m}(B(x,r))/r}=:\delta>0.$$

那么选择 $0 < s < R$，使得

$$\sup_{0<r\le s} \frac{\mathfrak{m}(V \cap B(x,r))}{\mathfrak{m}(B(x,r))} < \frac{\delta}{5C_d} \tag{8.18}$$

and

$$\sup_{0<r\le s} \frac{\mathrm{cap}_1(W \cap B(x,r), B(x,2r))}{\mathrm{cap}_1(B(x,r), B(x,2r))} < \frac{\delta}{5C_d^2}$$

并且

$$\frac{P(V, B(x,s/2))}{\mathfrak{m}(B(x,s/2))/s} > \delta.$$

由引理 8.2 和（8.18），可得 $s' \in (s/2,\ s)$ 使得

$$P(V \setminus B(x,s'), \partial B(x,s')) \le 2\frac{\mathfrak{m}(V \cap B(x,s))}{s} < \frac{2\delta}{5C_d}\frac{\mathfrak{m}(B(x,s))}{s}.$$

此外，由引理 2.52 可找到 $D \subset B(x,\ 2s)$ 包含 $W \cap B(x,\ s)$ 使得

$$P(D,X) \le \mathrm{cap}_1(W \cap B(x,s), B(x,2s)) \le \frac{\delta}{5C_d}\frac{\mathfrak{m}(B(x,s))}{s}.$$

由（8.10），可得

$$\begin{aligned}
&P(D \cup (V \setminus B(x,s')), X) - P(V,X)\\
&\quad \le P(D,X) - P(V, B(x,s/2)) + P(V \setminus B(x,s'), \partial B(x,s'))\\
&\quad \le \frac{\delta}{5C_d}\frac{\mathfrak{m}(B(x,s))}{s} - \frac{\delta}{C_d}\frac{\mathfrak{m}(B(x,s))}{s} + \frac{2\delta}{5C_d}\frac{\mathfrak{m}(B(x,s))}{s}\\
&\quad < 0.
\end{aligned}$$

这与 V 是一个解这一事实矛盾。

我们得出结论：

$$\lim_{r\to 0} \frac{P(V, B(x,r))}{\mathfrak{m}(B(x,r))/r} = 0.$$

由 $\mathfrak{m}$的倍增性质可得

$$\lim_{r\to 0} \frac{P(V, B(x,2r))}{\mathfrak{m}(B(x,r))/r} = 0.$$

根据命题 8.1，对于每个 $r > 0$ 我们找到 $s_r \in [r, 2r)$，使得

$$\mathcal{H}(\partial(B(x,s_r) \cap (I_V \cup \partial^* V)) \le 2\frac{\mathfrak{m}((I_V \cup \partial^* V) \cap B(x,2r))}{r} = 2\frac{\mathfrak{m}(V \cap B(x,2r))}{r}.$$

容易验证，

$$\partial^*(V \cap B(x,s_r)) \subset (\partial^* V \cap B(x,s_r)) \cup (\partial B(x,s_r) \cap (I_V \cup \partial^* V)). \tag{8.19}$$

结合定理2.15 和（2.14），

$$\begin{aligned}
&P(V\cap B(x,s_r),X)\\
&\quad\le C_d\mathcal{H}(\partial^*(V\cap B(x,s_r)))\\
&\quad\le C_d\mathcal{H}(\partial^*V\cap B(x,2r))+C_d\mathcal{H}(\partial B(x,s_r)\cap(I_V\cup\partial^*V))\quad\text{by (8.19)}\\
&\quad\le \alpha^{-1}C_dP(V,B(x,2r))+2C_d\frac{\mathfrak{m}(V\cap B(x,2r))}{r},
\end{aligned}$$

然后，由于 $\Theta(V,\ x)=0$，我们得到

$$\lim_{r\to0}\frac{\mathrm{cap}^{\vee}_{\mathrm{BV}}(V\cap B(x,s_r),B(x,2r))}{\mathfrak{m}(B(x,r))/r}\le\lim_{r\to0}\frac{P(V\cap B(x,s_r),X)}{\mathfrak{m}(B(x,r))/r}=0.$$

由（2.26）和（2.23），我们得到

$$\lim_{r\to0}\frac{\mathrm{cap}_1(V\cap B(x,r),B(x,2r))}{\mathrm{cap}_1(B(x,r),B(x,2r))}=0.$$

这就完成了该定理的证明。 □

参考文献

[1] L. Ambrosio, 《倍增度量测度空间中有限周长集的精细性质》, 《变分法、非光滑分析及相关主题》。Set-Valued Anal. 10 (2002年), no. 2-3, 111–128. 7, 35[2] L. Ambrosio, 《Ahlfors正则度量测度空间中有限周长集的一些精细性质》, Adv. Math. 159 (2001), no. 1, 51–67. 35[3] L. Ambrosio, V. Caselles, S. Masnou, and J.-M. Morel, 《有限周长集的连通分支及其在图像处理中的应用》, 《欧洲数学会杂志》3 (2001), no. 1, 39–92. 1[4] L. Ambrosio, N. Fusco, and D. Pallara, 《有界变差函数与自由间断问题》。牛津数学专著。克拉伦登出版社，牛津大学出版社，纽约，2000。4, 25[5] L. Ambrosio, M. Miranda, Jr., and D. Pallara, 《倍增度量测度空间中的特殊有界变差函数》, 《变分法：E. De Giorgi数学遗产专题》, 1–45，Quad. Mat., 14，数学系，那不勒斯第二大学，卡塞塔，2004。7, 8 [6] L. Ambrosio and M. Scienza, 《卡诺群中的周长局部性与链式法则》, Annali di Matematica Pura ed Applicata 189 (2010年), no.4, 661–678. 8[7] A. Bj¨orn and J. Bj¨orn, 《拟连通集和精细连通集上精细梯度为零的函数的唯一性结果》, Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (5) 21 (2020年), 293–301. 30, 32

[8]A. Bj¨orn and J. Bj¨orn, 《度量空间上的非线性位势理论》, EMS数学专著丛书, 17。欧洲数学会（EMS）, 苏黎世, 2011年。xii+403页。4, 5, 6, 8, 9, 16, 17, 20, 35[9] A. Bj¨orn, J. Bj¨orn, and V. Latvala, 《度量空间精细拓扑的Cartan、Choquet和Kellogg性质》, J. Anal. Math. 135 (2018年), no. 1, 59–83. 34[10] A. Bj¨orn, J. Bj¨orn, and V. Latvala, 《度量空间 p- 精细拓扑的弱Cartan性质》, Indiana Univ. Math. J. 64 (2015年), no. 3, 915–941. 34[11] P. Bonicatto, E. Pasqualetto, and T. Rajala, 《倍增度量测度空间中的有限周长不可分解集》, Calc. Var. Partial Differential Equations 59 (2020年), no. 2, Paper No. 63, 39 pp. 1, 8, 11, 12, 30[12] F. Cagnetti, M. Colombo, G. De Philippis, and F. Maggi, 《本质连通性与高斯对称化的刚性问题》, 《欧洲数学会杂志》19 (2017年), no. 2, 395–439. 2[13] F. Cagnetti, M. Colombo, G. De Philippis, and F. Maggi, 《Steiner周长不等式等号情形的刚性》, 《分析与偏微分方程》7 (2014年), no. 7, 1535—1593. 2[14] A. Di Castro, M. Novaga, B. Ruffini, and E. Valdinoci, 《非局部定量等周不等式》, Calc. Var. Partial Differential Equations 54 (2015年), no. 3, 2421–2464. 2[15] H. Federer, 《几何测度论》, 《数学科学基础丛书》, 第153卷, 施普林格出版社纽约公司, 纽约, 1969年 xiv+676 页。1, 4, 7[16] M. Giaquinta, G. Modica, and J. Souˇcek, 《变分法中的笛卡尔流。I. 笛卡尔流》, 《数学成果与边界》(3), 37[《数学与相关领域成果》。第三辑。现代数学概览丛书]施普林格出版社, 柏林, 1998年。xxiv+711 页。1[17] P. Haj-lasz, 《度量测度空间上的Sobolev空间》。热核与流形、图及度量空间上的分析（巴黎, 2002年）, 173–218, 《当代数学》, 338, 美国数学会, 普罗维登斯, 罗得岛州, 2003年。3[18]H. Hakkarainen and J. Kinnunen, 《度量空间中的BV-容量》, 《数学手稿》132 (2010年), no. 1-2, 51–73. 9 [19] J. Heinonen and P. Koskela, 《受控几何度量空间中的拟共形映射》, 《数学学报》181 (1998年), no. 1, 1–61. 3

[20] J. Heinonen、P. Koskela、N. Shanmugalingam 和 J. Tyson，《度量测度空间上的 Sobolev 空间：一种基于上梯度的方法》，New Mathematical Monographs，第27卷。剑桥大学出版社，剑桥，2015年。xii+434 页。18、28[21] J. Kinnunen、R. Korte、N. Shanmugalingam 和 H. Tuominen，《度量空间中通过装箱不等式研究勒贝格点与容量》，Indiana Univ. Math. J. 57 (2008)，第1期，401–430。9[22] R. Korte 和 P. Lahti，《度量空间中的相对等周不等式与有限周长的充分条件》，Ann. Inst. H. Poincar´é Anal. Non Lin´éaire 31 (2014)，第1期，129–154。5[23] P. Lahti，《有限周长集的一种新 Federer 型刻画》，Arch. Ration. Mech. Anal. 236 (2020)，第2期，801–838。12、14、15、17[24] P. Lahti，《度量空间中有限周长集的 Federer 风格刻画》，Calc. Var. Partial Differential Equations，2017年10月，56:150。10、11[25] P. Lahti，《关于有限周长不可分解集的一则注记》，Adv. Calc. Var. 16 (2023)，第3期，559–570。1、12[26] P. Lahti，《度量空间上 BV 函数的精细连续性概念》，Potential Anal. 46 (2017)，第2期，279–294。10[27] P. Lahti，《度量空间中的容量与1-严格子集》，Nonlinear Anal. 192 (2020)，111695，29页。9[28] P. Lahti，《度量空间中有限周长集的 Federer刻画》，《分析与偏微分方程》13 (2020)，第5期，1501–1519。7[29] P. Lahti，《度量空间中 p =1 的超极小函数与弱Cartan性质》，J. Anal. Math. 140 (2020)，第1期，55–87。10、13、34[30] P. Lahti，《度量空间中当$p = 1$ 时精细拓扑的 Choquet 性质与 Kellogg 性质》，J. Math. Pures Appl. (9) 126 (2019)，195–213。10[31] V. Latvala，《关于精细连通性的一个定理》，Potential Anal. 12 (2000)，第3期，221–232。30[32] J. Mal´ý 和 W. Ziemer，《椭圆偏微分方程解的精细正则性》，Mathematical Surveys and Monographs，第51卷。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，1997年。xiv+291 页。34[33] M. Miranda, Jr.，《“良好”度量空间上的有界变差函数》，J. Math. Pures Appl. (9) 82 (2003)，第8期，975–1004。4、5[34] N. Shanmugalingam，《牛顿空间：将 Sobolev 空间扩展到度量测度空间》，Rev. Mat. Iberoamericana 16(2) (2000)，243–279。4

地址：

Paolo Bonicatto，特伦托大学数学系，Via Sommarive 14，38123 特伦托，意大利，paolo.bonicatto@unitn.it

Panu Lahti，中国科学院数学与系统科学研究院，北京 100190，中华人民共和国，panulahti@amss.ac.cn

Enrico Pasqualetto，数学与统计系，邮政信箱 35（MaD），FI-40014 于韦斯屈莱大学，芬兰，enrico.e.pasqualetto@jyu.fi