arXiv:2512.18349v1 [math.LO] 20 Dec 2025

认识你的秩!

BLAISE BOISSONNEAU 和 LASSE VOGEL

Abstract. 我们研究有序域、有序阿贝尔群和线性序的可定义秩。对于任意线性序 Γ，我们构造一个具有阿基米德脊Γ 的有序阿贝尔群 G，以及一个自然值群为 G 的有序域 K，使得 K、G 和 Γ 的可定义秩彼此同构。这回答了 Krapp、Kuhlmann 和第二作者提出的一个问题。

1. Introduction

本文聚焦于 [2], 中提出的若干问题，因此篇幅相对较短。本文建立在“Structures alg´ebriques et ordonn´ees”会议期间的讨论之上；该会议为庆祝 DDG 研讨班成立 40 周年而举办。尽管本文原本被设想为前述论文的配套文章，但它本身内容完整。我们在此重述相关定义以及所需的全部结果。

定义 1.1. 设 $(K,<)$ 是一个有序域。$(K,<)$ 的秩 记作 $\mathrm{rk}(K)$，是 K的所有凸的非平凡赋值环按包含关系排列所成的集合。

我们定义一个等价关系，表示元素属于同一个阿基米德类；具体而言，$a \sim b$当且仅当 $\exists n \in \mathbb{N}$，使得$|a| < n|b|$ 且 $|b| < n|a|$ （其中 $|\cdot|$ 是绝对值）。令 $[\cdot]$ 表示模 ∼的等价类。若 $|a| < |b|$ 且$a \not\sim b$，我们将记作 $[a] > [b]$ （注意这里的反向），而 $[a] + [b]$ 表示 $[ab]$。现在，我们称自然赋值 为 K 的典范投影 $v_{nat}\colon K \to K/\!\sim$。

最后，$(K,<)$的可定义秩 记作 $\mathrm{drk}(K)$，是 K的所有可定义的凸非平凡赋值环组成的集合，并按包含关系排序。

定义 1.2. 设$(G,<)$是一个有序阿贝尔群。$(G,<)$的秩 记作 $\mathrm{rk}(G)$，是 G的所有凸真子群组成的集合，并按包含关系排序。

我们按照上文类似的方式定义一个等价关系，规定元素属于同一个阿基米德类，并按照上文的方式对阿基米德类排序。现在我们将典范投影 $v_G\colon G \mapsto G/\!\sim$ 称为自然赋值。像集 $v_G(G)$ 是一个线性有序集。我们将 $v_G(G \setminus \{0\})$ 称为 G 的阿基米德脊。

日期：2025年12月23日。

最后，$(G,<)$ 的可定义秩记作 $\mathbf{drk}(G)$，它是 G 的所有可定义凸真子群构成的集合，并按包含关系排序。

定义 1.3. 设 $(\Gamma,<)$ 是一个线性序。$(\Gamma,<)$ 的秩 记作 $\mathbf{rk}(\Gamma)$，它是 Γ 的所有真末段构成的集合，并按包含关系排序。

$(\Gamma,<)$ 的可定义秩 记作 $\mathbf{drk}(\Gamma)$，它是 Γ 的所有可定义真末段构成的集合，并按包含关系排序。

上述论文陈述了以下内容：

事实 1.4 ([2, 事实 3。3])。 设 $(K,<)$ 是一个有序域， $G=v_{nat}(K^\times)$是其自然赋值群， $\Gamma=v_G(G\setminus\{0\})$ 是其阿基米德沓。那么，各秩之间存在自然同构：

$$\mathrm{rk}(K)\xrightarrow{\Phi_K}\mathrm{rk}(G)\xrightarrow{\Phi_G}\mathrm{rk}(\Gamma)$$
$$\textit{defined by } \Phi_K(\mathcal{O})=v_{nat}(\mathcal{O}^\times) \textit{ and } \Phi_G(H)=v_G(H\setminus\{0\}).$$

因此，这三种秩的概念完全对应。一个自然的问题是，考察可定义秩时，这一结论有多少仍然成立。在 [2] 中，作者给出了三个可定义秩两两不同构的例子。我们接下来将讨论一些这样的例子，见例 3.3 和 3.7；但更重要的是，也会讨论可定义秩确实同构的例子，见命题 3.5。

今天的讨论需要一些能保证可定义秩同构的结果。具体来说，我们重述如下命题：

命题 1.5 ([2, 引理 5。5])。 设$(K,<)$ 是一个有序域，且 $G=v_{nat}(K^\times)$。若 v_{nat} 是亨塞尔的，则 $\Phi_K(\mathrm{drk}(K))$ 是 $\mathrm{drk}(G)$ 的一个末段。

由此可知， $\Phi_K(\mathbf{drk}(K))=\mathbf{drk}(G)$，当且仅当凸子群 $\{0\}$ 属于 $\Phi_K(\mathbf{drk}(K))$；这又当且仅当赋值环 $\mathcal{O}_{nat}$ 属于 $\mathbf{drk}(K)$，也就是说：

推论 1.6。 设$(K,<)$ 是一个具有亨塞尔自然赋值的有序域，且 $G=v_{nat}(K^\times)$。那么 $\Phi_K(\mathrm{drk}(K))=\mathrm{drk}(G)$ 当且仅当 v_{nat} 可定义。[1]

现在，我们已经准备好着手处理今天的主题了。我们将聚焦于 [2] 中提出的三个问题：

问题 1.7 ([2, 问题 7.3])。 给定一个有序集 $(C,<)$，何时可以构造一个有序域 K，使得 $\mathbf{drk}(\Gamma)\simeq(C,<)$、$\Phi_G^{-1}(\mathbf{drk}(\Gamma))=\mathbf{drk}(G)$ 且 $\Phi_K^{-1}(\mathbf{drk}(G))=\mathbf{drk}(K)$，其中 $G=v_{nat}(K^\times)$ 且 $\Gamma=v_G(G\setminus\{0\})$?

[1]这一结果曾在 [2] 的早期版本中陈述。此后，作者改进了他们的结果，主要是对亨塞尔对象何时可定义进行了分类。我们仅依赖于此处陈述的结果。

问题 1.8 ([2, 问题 7.4])。给定一个有序集 $(\Gamma, <)$，何时可以构造一个有序域 K，使得 $v_G(G \setminus \{0\}) = \Gamma$，$\Phi_K(\mathrm{drk}(K)) = \mathrm{drk}(G)$ 且 $\Phi_G(\mathrm{drk}(G)) = \mathrm{drk}(\Gamma)$，其中 $G = v_{nat}(K^\times)$?

问题 1.9. 设 $(\Gamma, <)$ 是一个有序集。末段 $\Delta \subseteq \Gamma$ 可定义的必要条件是什么? [2]

我们通过以下构造，部分回答问题 1.7，并完整回答问题 1.8:

答案 1.10. 设 $(\Gamma, <)$ 是一个线性序。设 $G = \sum_\Gamma \mathbb{Z}$ 且 $K = \mathbb{R}((G))$。则 $v_{nat} = (K^\times) = G$, $v_G(G \setminus \{0\}) = \Gamma$, $\Phi_K(\mathrm{drk}(K)) = \mathrm{drk}(G)$ 以及 $\Phi_G(\mathrm{drk}(G)) = \mathrm{drk}(\Gamma)$。

这个构造证明，问题 1.8 的答案是“总是”；而问题 1.7 的答案则取决于对哪些线性序 $(C, <)$ 能成为某个线性序的可定义秩进行分类。请注意，这样的分类或多或少就是问题 1.9 的答案。

现在我们将介绍这一构造。之后，我们会讨论一些例子，展示问题 1.9 的答案实际上有多复杂。

2. 脊

为了研究有序阿贝尔群的可定义秩，我们回顾一下 Gurevich 和 Schmitt 提出的脊形式体系。其内容摘自 Schmitt 的特许任职资格论文，见 [3]。

我们建议读者直接跳到事实 2.5，因为对于今天余下的讨论而言，这是唯一相关的结果。

定义 2.1. 设 G是一个有序阿贝尔群，且设 $g \in G$。我们用“$C \lhd G$”表示 C 是 G 的一个凸子群（允许 $C = \{0\}$和 $C = G$）。我们定义以下凸子群:

- $A(g) = \bigcup \{C \lhd G \mid g \notin C\}$ 是一个不包含 g的最大凸子群,
- $B(g) = \bigcap \{C \lhd G \mid g \in C\}$ 是包含 g 的最小凸子群。

我们立即指出，g 和 h属于同一个阿基米德类，当且仅当 $A(g) = A(h)$，因此 $v_G(G \setminus \{0\})$也可以等价地视为族 $\{A(g) \mid g \in G \setminus \{0\}\}$。

设 $n \geqslant 2$。如果有序阿贝尔群 H 的任意一个包含至少 n 个点的区间都包含一个 n-可除点，我们就称 H 是 n-正则的。最后定义:

- $A_n(g) = \bigcap \{C \lhd A(g) \mid B(g)/C$ 是 n-正则的$\}$，因此将该族称为 $\{A_n(g) \mid g \in G \setminus \{0\}\}$ G的“n-正则秩”，并且

[2]这个问题在 [2] 的旧版本中也曾出现过，但在最新版本中已被删除。

- $F_n(g) = \bigcup\{C \lhd G \mid C \cap (g + nG) = \emptyset\}$， g的 n-基底；它是最大的凸子群，模掉该子群后， g 不是n可除的。

当 $g = 0$ 时， $A_n(g)$ 的定义会遇到一个边界情况；在这种情况下，而且仅在这种情况下，我们取 $A_n(g) = \emptyset$，它不是凸子群。

同理，如果 g 是 n-可除的，我们取 $F_n(g) = \emptyset$。

为便于记号，我们还定义 $E_n(g) = \{h \in G \mid F_n(h) \subseteq F_n(g)\}$、$E_n^*(g) = \{h \in G \mid F_n(h) \subsetneq F_n(g)\}$，以及 $F_n^*(g) = E_n(g)/E_n^*(g)$。

事实 2.2。对于每个 $n \geqslant 2$， A_n 和 F_n 都是 G 的一致可定义凸子群。因此，集合

$$Sp_n(G) = \{A_n(g) \mid g \in G \setminus \{0\}\} \cup \{F_n(g) \mid g \in G \setminus nG\}$$

在 G 中可解释。

我们为 $Sp_n(G)$ 配备序关系 $\subseteq$ 以及各种颜色；具体如下：

定义 2.3。 n-脊是 G 的集合 $Sp_n(G)$，并配备：

- 一个二元关系符号 $<$，解释为 $\subsetneq$，
- 一元谓词 A 和 F，解释为：当且仅当存在某个 $g \in G$，使得 $A(x)$ 当且仅当 $x = A_n(g)$；对 F 也类似，
- 一个一元谓词 D，解释为：当且仅当 G/x 是离散的（也就是说， G/x中存在一个最小正元素）， $D(x)$
- 一元谓词 $\alpha_{p,\ k,\ m}$，其中 p是整除 n 的素数， k 是满足 $0 \leqslant k < v_p(n)$ 的整数，而 m 是任意整数，解释为 $\alpha_{p,\ k,\ m}(x)$ 当且仅当 $\alpha_{p,\ k}(F_n^*(g)) \geqslant m$，其中 α 是 Szmielev 不变量，也就是说，

$$\alpha_{p,k}(H) = \dim_{\mathbb{F}_p}((p^k H)[p]/(p^{k+1}H)[p])$$

其中 $K[p]$是群 K 的 p-扭元。

对我们而言，这些颜色大多无关紧要。因此，我们建议不要花太多时间去剖析上面的定义或下面的定义。

定义 2.4。语言 $\mathcal{L}^3_{OG}$ 是一种由以下部分组成的多排序语言：

- 一个类型 G 表示有序阿贝尔群，配备：– 有序阿贝尔群的语言 $\{0, +, -, <\}$，– 一元谓词$M_{n,k}$，用于 $k > 0$和 $n \geqslant 0$，其解释为：$M_{n,k}(g)$ 当且仅当 $G/A_n(g)$ 是离散的，且 $g + A_n(g)$ 等于最小正元素的 k 倍；– 一元谓词 $D_{p,r,i}$，对每个素数 p 和任意整数 r, i，其解释为：$D_{p,r,i}(g)$ 当且仅当 g 是 p^r-可除的，或 $g + E^*_{p^r}(g)$ 在 $F^*_{p^r}(g)$ 中是 p^i- 可除的。

– 一元谓词 $E_{p,r,k}$，对每个素数 p和任意整数 r,k，其解释为 $E_{p,r,k}(g)$ 当且仅当存在 $h \in G$，使得 $F_{p^r}(g) = A_{p^r}(h)$，$G/A_{p^r}(h)$ 是离散的，$h + A_{p^r}(h)$ 是其最小正元素，且 $F_{p^r}(g - kh) \subsetneq F_{p^r}(g)$；

•并且对于每个 n，都有一个类型 S_n，对应于 n-脊，并按上述方式配备关系 $<$ 和谓词 A、F、D（我们不喜欢它们），以及 $\alpha_{p,\,k,\,m}$，用于 p^{k+1} 可除 n 和 m 任意。

此外，我们在此语言中加入函数符号 A_n 和 F_n，每个 n 都有一个；它们从主类型 G 映射到类型 S_n，其解释显而易见。

请注意，此语言是有序阿贝尔群语言的可定义／可解释扩张。

定义此语言的唯一目的如下：

事实 2.5。在此语言中，有序阿贝尔群理论从主类型 G 消去量词。因此，由于类型 S_n 是闭的，每个脊 $Sp_n(G)$ 都是“纯的，且对参数具有控制”（见 [4, 第 1.1 节。1]）；特别地，$Sp_n(G)$ 中任何可在完整的有序阿贝尔群语言中定义的子集，实际上都可在纯着色线性序 $Sp_n(G)$中定义。

3. The construction

现在，我们已经准备好构造一个有序阿贝尔群和一个有序域，使其具有我们所要求的确切可定义秩。我们将首先构造这个群，并将其构造为字典序和，即：

定义 3.1。设 $(\Gamma, <)$ 是一个线性序。设 $(G_i)_{i\in\Gamma}$ 是一个有序阿贝尔群序列。于是我们定义 $G = \sum_{i\in\Gamma} G_i$ 如下：作为集合，它是 G_i 的笛卡尔积中仅包含有限支撑序列的子集，也就是说，当且仅当 $\{i \in \Gamma \mid g_i \neq 0\}$ 为有限集时，$g \in G$。它配备逐坐标群运算，并按字典序排列：当且仅当存在 $\exists i \in \Gamma$ 使得 $g_i > h_i$，且对所有 $j < i$ 都有 $g_j = h_j$。

命题 3.2。设 $(\Gamma, <)$ 是一个线性序，并设 $G = \sum_\Gamma \mathbb{Z}$。则 $v_G(G \setminus \{0\}) \simeq \Gamma$，并且（在此同一意义下）$\Phi_G(\mathrm{drk}(G)) = \mathrm{drk}(\Gamma)$。

证明。首先请注意，G 的凸子群恰好是$\sum_\Delta \mathbf{Z}$ 的形式，其中 Δ 是 Γ 的一个末段——按照约定，以空集为指标的和等于 $\{0\}$。

设 $g \in G \setminus \{0\}$。设 $i \in \Gamma$ 为 g 中不为 0 的最大坐标。则对于所有 $n \geqslant 2$，都有 $A(g) = A_n(g) = \sum_{\Gamma_{>i}} \mathbf{Z}$。因此，我们可以通过同构 $i \mapsto \sum_{\Gamma_{>i}} \mathbf{Z}$ 将 Γ 与 $v_G(G \setminus \{0\})$ 识别起来。

设 $g \in G \setminus nG$。设 $i \in \Gamma$ 为 g 中不属于 $n\mathbb{Z}$ 的最大坐标。则 $F_n(g) = \sum_{\Gamma_{>i}} \mathbb{Z}$。

这意味着 $(Sp_n(G) \subseteq)$ 与 $(\Gamma, <^{inv})$ 同构（注意这里的反向），同构映射为 $\Gamma \to Sp_n(G)$, $i \mapsto \sum_{\Gamma_{>i}} \mathbb{Z}$。计算$Sp_n$中的颜色后，我们很快就会发现所有点的颜色都相同，因此可以直接将 $Sp_n(G)$ 视为一个线性序。

考虑 $(\Gamma, <)$ 中一个非平凡的可定义末段 Δ。与之对应的 $(Sp_n(G) \subseteq)$ 的初始段 ∇ 也是可定义的。现在，“$F_n(g) \in \nabla$”是关于 g 的一阶公式，因此

$$\sum_{\Delta} \mathbb{Z} = \bigcup \{F_n(g) \mid g \in G, F_n(g) \in \nabla\}$$

是可定义的。

现在考虑 G 中一个可定义的凸子群 $H = \sum_{\Delta} \mathbb{Z}$。那么$\{F_n(g) \mid F_n(g) \subseteq H\}$ 也是可定义的。这意味着，与 Δ 对应的 $Sp_n(G)$的初始段 ∇ 是可定义的。根据纯性（见事实 2.5），这是 $Sp_n(G)$的一个可定义集合，它与Γ^{inv}同构，因此末段 Δ 在$(\Gamma, <)$中是可定义的。□

例 3.3。设 Γ 是一个线性序，且 $\Delta \subseteq \Gamma$ 是一个不可 定义的末段。那么， $G = \sum_{\Gamma \setminus \Delta} \mathbb{Z}_{(2)} \oplus \sum_{\Delta} \mathbb{Z}_{(3)}$ 的可定义秩严格大于 $\mathrm{drk}(\Gamma)$，也就是说，$\Phi_G^{-1}(\mathrm{drk}(\Gamma))$ 是 $\mathrm{drk}(G)$ 的真子集。

设 Γ 是一个线性序，且 $G = \sum_{\Gamma} \mathbb{Q}$。那么，$\mathrm{drk}(G)$ 严格小于 $\mathrm{drk}(\Gamma)$，也就是说， $\Phi_G(\mathrm{drk}(G))$ 是 $\mathrm{drk}(\Gamma)$ 的真子集。

结合这两个例子，我们可以轻易构造出一个有序阿贝尔群，使得 $\mathrm{drk}(G)$ 和 $\mathrm{drk}(\Gamma)$ 无法通过 Φ_G 相互嵌入。

现在我们构造一个具有上述自然值群且可定义秩完全相同的有序域。我们将把它构造为一个哈恩域:

定义 3.4. 设 k 是一个有序域， G 是一个有序阿贝尔群。我们将有序域 $k((G))$ 构造为由具有良序支撑的形式幂级数 $\left\{\sum_{g \in G} a_g t^g \;\middle|\; a_g \in K\right\}$ 组成的域，也就是说，$\{g \in G \mid a_g \neq 0\}$ 是 G的一个良序子集。我们规定，当且仅当 $\sum_{g \in G} a_g t^g > 0$ 时， t 是无穷小正元；也就是说， $a_{g_0} > 0$, 其中 $g_0 = \min(\{g \in G \mid a_g \neq 0\})$。

在这样的域中，由 $v(\sum_{g \in G} a_g t^g) = g_0$ 定义的赋值，其中 $g_0 = \min(\{g \in G \mid a_g \neq 0\})$ 如上所述，是一个亨泽尔赋值，其赋值群为 G ，剩余域为 k。如果 k 作为有序域是阿基米德的，那么该赋值就是 $k((G))$ 上的自然赋值 v_{nat}。

命题 3.5。 设 Γ 为线性序， $G = \sum_{\Gamma}\mathbb{Z}$ 如上所述。那么 $K = \mathbb{R}((G))$ 具有 $v_{nat}(K^{\times}) = G$ ，且 $\Phi_K(\mathrm{drk}(K)) = \mathrm{drk}(G)$ （因此也具有 $\mathrm{drk}(\Gamma)$）。

证明。 由于 R 是阿基米德的，显然 $v_{nat}(K^{\times}) = G$ 。根据上文， v_{nat} 也是亨塞尔的。由推论 1.6，我们只需证明 v_{nat} 是可定义的。

我们采用 [1], 中发展的方法，特别是以下事实:

事实 3.6 ([1, 定理 2。21])。 设 (K, v) 是一个等特征 *0* 的亨塞尔赋值域。那么，当且仅当剩余域Kv 和赋值群 vK 不是“可共同扩充”的时， v 才是可定义的；也就是说，不存在非平凡的有序阿贝尔群 Δ ，使得 $Kv \preccurlyeq Kv((\Delta))$ 和$vk \preccurlyeq vK \oplus \Delta$ 同时成立。

在我们的情形中，这样的 Δ 必须满足 R $\preccurlyeq$R((Δ))。根据关于实闭域的经典结果，这迫使 Δ 为可除的。

现在， G （ Γ 非空）满足 $\forall g(g \neq 0 \to \exists h(|h| \leqslant |g| \wedge h \notin nG))$，对于 $n \geqslant 2$而言。这意味着任何具有 $G \preccurlyeq G \oplus \Delta$ 的 Δ 也会具有这一性质，尤其是不会是可除的。

因此， G与 R 不可共同扩充，而 v_{nat} 是可定义的。 □

这给出了一个例子，其中域、赋值群和阿基米德脊之间的可定义秩保持不变。我们之前给出了赋值群与阿基米德脊之间的可定义秩不同的例子。现在我们给出证明每种情况都可能出现的例子:

例 3.7。 设 Γ 为一个线性序， $\Delta \subseteq \Gamma$ 为一个不可定义的末段。设 $G = \sum_{\Gamma\setminus\Delta}\mathbb{Z}_{(2)} \oplus \sum_{\Delta}\mathbb{Z}_{(3)}$ 且 $K = \mathrm{R}((G))$。则 $\mathrm{drk}(K) = \mathrm{drk}(G) \neq \mathrm{drk}(\Gamma)$。

设 $K = \mathrm{R}((\mathrm{Q}))$, $G = v_{nat}(K^{\times}) = \mathrm{Q}$ 且 $\Gamma = v_G(G \setminus \{0\})$。则 $\mathrm{drk}(K) \neq \mathrm{drk}(G) = \mathrm{drk}(\Gamma)$。

设 $K = ((\mathrm{Q} \oplus \mathrm{Q}))$, $G = v_{nat}(K^{\times}) = \mathrm{Q} \oplus \mathrm{Q}$ 且 $\Gamma = v_G(G \setminus \{0\})$。则 $\mathrm{drk}(K) \neq \mathrm{drk}(G) \neq \mathrm{drk}(\Gamma)$。

4. An answer, a partial answer, and a non-answer

推论 4.1 (问题 1.8 的答案)。 给定一个有序集 $(\Gamma, <)$，总可以构造一个有序域 K ，使得 $v_G(G \setminus \{0\}) = \Gamma$, $\Phi_K(\mathrm{drk}(K)) = \mathrm{drk}(G)$ 且 $\Phi_G(\mathrm{drk}(G)) = \mathrm{drk}(\Gamma)$，其中$G = v_{nat}(K^{\times})$。也就是说， $K = \mathbb{R}((\sum_{\Gamma}\mathbb{Z}))$。

推论 *4.2*（问题 *1.7* 的部分答案）。给定一个有序集 $(C, <)$。假设存在一个线性序 $(\Gamma, <)$，使得 $\mathrm{drk}(\Gamma) \simeq (C, <)$。那么可以构造一个有序域 K ，使得 $\mathrm{drk}(\Gamma) \simeq (C, <)$， $\Phi_G^{-1}(\mathrm{drk}(\Gamma)) = \mathrm{drk}(G)$，并且 $\Phi_K^{-1}(\mathrm{drk}(G)) = \mathrm{drk}(K)$，其中 $G = v_{nat}(K^{\times})$ 且 $\Gamma = v_G(G \setminus \{0\})$。也就是说， $K = \mathrm{R}((\sum_{\Gamma}Z))$。

要完全回答问题 1.7，就需要彻底刻画哪些线性序 $(C, <)$ 可以作为线性序 $(\Gamma, <)$ 的可定义秩；尤其是，这将给出问题 1.9 的答案。从某种意义上说，以下就是一个答案：

事实 4.3 ([1, 命题 2。27])。 线性序C的末段 I 可定义，当且仅当有序对$(C \setminus I, I)$ 不是“可共同扩充”的；也就是说，不存在非空线性序 X 使得 $C \setminus I \preccurlyeq C \setminus I + X$且 $X \preccurlyeq X + I$。

然而，尽管这完整刻画了线性序的可定义末段，它仍是一个非答案：对于给定的某个线性序的特定末段，要证明它不可共同扩充，可能与直接证明其可定义性一样困难，正如我们将在例 4.5 中看到的那样。

关于更具体的问题——判定给定的线性序 C 是否为某个线性序 Γ的可定义秩——下面给出一个此类 C 必须满足的条件，但它远非充分条件。

引理 4.4。 设$(\Gamma, <)$ 为一个线性序，且 $C = \mathrm{drk}(\Gamma)$。则C 没有稠密部分；更具体地说，对于 C中的任意 $a < b$ ，存在 $d \in [a, b)$ 使得 d 有一个后继；类似地，也存在$(a, b]$ 使得 d' 有一个前驱。

证明。令 $a < b$ 属于 C。根据定义， a 和 b 是 Γ的非空末段，且 $\exists \gamma \in a \setminus b$。对于任意这样的 γ，令 $d = \Gamma_{\geqslant \gamma} = \{x \in \Gamma \mid x \geqslant \gamma\}$ 和 $d' = \Gamma_{>\gamma}$。d 和 d' 都是 Γ的可定义末段， $a \leqslant d < d' \leqslant b$，且 d' 是 d的后继。□

为说明这个条件并不充分，考虑$C = \sum_{\mathbb{Q}} 3$；它满足上述条件，但不是某个线性序的可定义秩。

最后，我们讨论一些可定义和不可定义末段的例子。

例4.5. 给定一个序列 $a \in \mathbb{N}^\omega$，我们考虑线性序$\Gamma_a = \sum_{k \in \omega} (\mathbb{Q} + a_k + 2)$。不难看出，$(\Gamma_a, <)$解释了 a。

考虑 $\Gamma_{0,\ 0,\ \ldots} + \Gamma^{inv}_{0\,0,\ \ldots\ldots}$。中间的分割（对应的末段）不可定义，因为数对 $(\Gamma_{0,\ 0,\ \ldots\ldots},\ \Gamma^{inv}_{0\,0,\ \ldots\ldots})$ 可由 $\sum_{k \in \mathbb{Z}} \mathbb{Q} + 2$共同扩充。

考虑 $\Gamma_{0,\ 0,\ \ldots} + \Gamma^{inv}_{1\,1,\ \ldots\ldots}$。现在中间的分割是可定义的，因为$\Gamma^{inv}_{1\,1,\ \ldots\ldots}$ 是由 3 个点组成的离散序列集合的右闭包。

现在考虑 $\Gamma_\pi + \Gamma^{inv}_e$，其中 π 和 e 分别是π 和 e 在十进制下的数字序列。中间的分割可定义吗？例如，如果 π 是正规数，而 e 不是，或者反过来，答案就是肯定的。答案很可能是否定的，因为这两个数的数字中都没有任何模式可以将它们区分开来。但这是数论中的一个开放问题。

或者，也可以考虑 a π 的二进制数字序列，以及 π 的三进制数字。现在，在 $\Gamma_a + \Gamma^{inv}_b$中间的分割

例如，如果 π 在三进制表示中有无穷多个 2，或者如果“11”在 π 的二进制表示中只出现有限次，而在 π 的三进制表示中出现无穷多次，等等，那么中间的分割就是可定义的。这仍然是数论中的一个开放问题。

采用这种编码后，显然，要完全一般地回答问题 1.9，因而也回答问题 1.8，将会非常困难。

References

[1] B. Boissonneau, A. De Mase, F. Jahnke 和 P. Touchard。Growing spines: Ad infinitum et ad infinitesimalia，2025。arXiv:2512.04932。[2]L. S. Krapp, S. Kuhlmann 和 L. Vogel。可定义秩，2025。arXiv:2506.00443。[3] P. H. Schmitt。有序阿贝尔群模型论，1982。教授资格论文。[4] P. Touchard。亨泽尔赋值域中的负担。《纯粹与应用逻辑年刊》，174(10):103318，2023。