arXiv:2512.18364v1 [math.CT] 20 Dec 2025

从摩尔–彭若斯到马尔可夫：经由高斯

Cole Comfort 和 Jean-Simon Pacaud Lemay

2025年12月23日

摘要

马尔可夫范畴是范畴概率论的核心框架。概率论中的许多重要概念都可以用马尔可夫范畴来形式化。特别是，条件概率分布和贝叶斯定理可通过马尔可夫范畴中的条件分布这一概念来刻画。高斯概率论提供了一个带有条件分布的马尔可夫范畴实例，其中条件分布可以通过 Moore-Penrose逆计算。本文在 Moore-Penrose dagger加性范畴上引入高斯构造，从而得到一个带有条件分布的马尔可夫范畴。将高斯构造应用于实矩阵范畴，可以重现高斯概率论这一实例；而将其应用于复矩阵（分别为四元数矩阵）范畴，则可得到新的适当复高斯（分别为四元数高斯）条件分布马尔可夫范畴。此外，我们还刻画了高斯构造中所有可能的条件分布。

致谢。作者谨向 Tobias Fritz、Dario Stein、Matthew Di Meglio 和 Chris Heunen 致谢，感谢他们就本研究项目进行的有益讨论并对项目表示关注。本研究部分由欧盟通过 MSCA SE 项目 QCOMICAL 资助，并在“法国2030计划”框架下通过研究项目 EPIQ ANR-22-PETQ-0007 和 HQI-R&D ANR-22-PNCQ-0002 获得资助。本材料还基于美国空军科学研究办公室通过编号为 FA9550-24-1-0008 的项目所支持的研究工作。

目录

1 引言 2 **2 带条件分布的马尔可夫范畴 3** **3 伴随加法范畴及其矩阵表示 6** **4 高斯构造 8** **5 高斯构造中的条件分布 15** **6 摩尔–彭若斯逆 18** **7 条件分布的其他构造 21**

1 引言

顾名思义，范畴概率论是一个研究领域，旨在运用范畴论帮助研究概率论的基础结构。通过使用范畴工具构建概率论的综合版本，我们可以将模型和结果推广到更一般的情形。范畴概率论自 Lawvere 的研究以来便已存在 [19] 以及 Giry 的研究 [14], ，但这一领域真正兴起是在 2010 年代末，当时 Cho 和 Jacobs 的里程碑式论文问世 [5]。因此，自 2020 年代初以来，范畴概率论已成为一个成熟的领域，也是一个活跃的研究与关注方向。我们邀请读者参阅 Fritz 的论文 [13] ，了解范畴概率论及其有趣历史的精彩介绍。

范畴概率论的主要框架是马尔可夫范畴（定义 2.1），简而言之，它是带有复制与丢弃运算的对称幺半范畴，但映射只保留丢弃运算。Golubtsov [15]和 Fong [12], 曾提出早期的马尔可夫范畴概念，后来 Cho 和 Jacobs 在 [5] 中对其进行了完整定义，称之为仿射复制-丢弃（CD）范畴。在 [13], 中，Fritz 将其改称为马尔可夫范畴，因为马尔可夫核是概率论中的一种基本结构，而马尔可夫核本身构成一个马尔可夫范畴。当然，马尔可夫范畴以俄罗斯数学家安德烈·马尔可夫命名，他因在马尔可夫链方面的奠基性工作而闻名。

概率论中的许多重要概念和结果，都可以用马尔可夫范畴清晰地表述。其中尤为重要的是马尔可夫范畴中的条件分布概念 [13, 第 11] 节。顾名思义，它刻画了条件概率分布的概念。简而言之，给定马尔可夫范畴中一个类型适当的映射，该映射的条件态射（定义 2.3）若存在，便是一种转置映射，它将余域的一个输出作为定义域的输入。我们还可以在带有条件分布的马尔可夫范畴中解释贝叶斯定理——这是概率论中最著名的定理之一 [5, 15]。

拥有所有条件分布是马尔可夫范畴一项非常理想的性质，因为条件分布用途广泛，还能带来其他各种有趣的性质，详情请见 [9, 13] 。马尔可夫范畴中有许多有趣的例子具有条件分布，能够刻画概率论中的各种框架。特别是，有一种称为高斯（例2.4）的马尔可夫范畴具有条件分布，能够刻画高斯概率论，其态射为实高斯条件分布 [13, 例 6]。当然，高斯分布是统计学和概率论中最重要的概念之一，其名称源自享誉不朽的德国数学家卡尔·弗里德里希·高斯。此外，在这个马尔可夫范畴高斯中，可以利用 Moore-Penrose逆计算条件分布。

对于矩阵，Moore-Penrose 逆是一种具有许多实际应用的特殊广义逆，详见 [4]。任意环上的矩阵未必存在 Moore-Penrose逆；但若存在，则它是唯一的。特别是，实数、复数和四元数上的所有矩阵都有 Moore-Penrose逆。这种广义逆以美国数学家 E. Hastings Moore 的名字命名，他最先通过正交投影算子引入了这一概念 [20], ；英国数学家兼物理学家罗杰·彭若斯后来（并不知道 Moore 的研究）通过代数恒等式引入了这一概念 [21]。Moore-Penrose 逆的概念可以推广到其他带有对合的代数结构中，尤其可以推广到伴随范畴。

简而言之，dagger 范畴（定义 3.1）是指其映射配备了对合运算的范畴；该运算会为每个映射产生一个对偶类型的映射。如今，dagger 范畴已得到广泛研究，尤其是在2000年代和2010年代，并且是范畴量子理论基础中的一个基本概念，参见 [17]。在任意 dagger 范畴中，都可以为映射定义 Moore-Penrose 逆的概念（定义 6.1）。Puystjens 和 Robinson 于20世纪80年代在一系列论文中首次引入并研究了 dagger 范畴中的 Moore-Penrose 逆，例如参见 [22], 不过，这一概念多年来大多未受关注。然而，随着伴随范畴理论取得诸多重大进展，Cockett 和第二作者于 [6]重新开展了对 dagger 范畴中 Moore-Penrose 逆的研究。这使得近年来人们对伴随范畴理论中的 Moore-Penrose 逆兴趣大增，例如将其应用于新的范畴量子基础 [11], 图形语言 [2], 在范畴论中发展新的广义逆 [7, 8], 以及研究其在新领域中的应用 [1]。

本文的主要目标是利用摩尔–彭若斯 dagger 范畴理论，将由实高斯条件分布构成的范畴 高斯推广，从而提供带有条件分布的马尔可夫范畴的新例子。为此，我们首先注意到，高斯条件分布（因而也包括 高斯中的映射）都可以完全用实矩阵来描述，而 高斯 中的复合则使用转置和求和。因此，自然的做法是将其推广到 dagger 加性范畴的情形（第 3节），也就是具有相容双积的伴随范畴。进一步的依据是，dagger 加性范畴中的映射具有规范的矩阵表示 [17, （第 2.2 节）, 4], 因此，复合由矩阵乘法给出，而对合由矩阵的共轭转置给出。因此，我们在 dagger 加性范畴上引入高斯构造（第 4 节），由此得到一个

马尔可夫范畴（定理 4.5）。本文的主要结果是，将高斯构造应用于 Moore–Penrose dagger 加性范畴时，可得到一个带有条件分布的马尔可夫范畴（定理 6.5）。将高斯构造应用于实矩阵，可以重新得到 高斯 （例 4.7）；将高斯构造应用于复矩阵，则可得到一个新的、由适当复高斯条件分布构成的马尔可夫范畴（例 4.12）。类似地，将高斯构造应用于四元数矩阵，可得到一个新的、由正规四元数高斯条件分布构成的马尔可夫范畴（例 4.13）。

关于条件分布，我们尚未提及的一个重要事实是：即使一个马尔可夫范畴具有所有条件分布，它们也不一定是唯一的。因此，马尔可夫范畴中的一个映射可能有多个可能的条件分布。由此，摩尔–彭若斯逆只是通过高斯构造建立条件分布的一种可能方式。我们刻画了高斯构造中的所有可能条件分布（第5节），并展示了它们可以完全由基底 dagger 加性范畴中的特殊映射来描述，我们将这些映射称为条件生成元（定义 5.2）。随后我们证明，可以使用较弱版本的摩尔–彭若斯逆（定义 7.1），即一种推广了最小二乘逆的版本 [4, 图 6。1]，，同样在高斯构造中建立条件分布（引理 7.2）。不过，由于摩尔–彭若斯逆（当其存在时）总是唯一的，因此它们为高斯构造中的条件分布提供了一个规范选择。

致谢：作者谨向 Tobias Fritz、Dario Stein、Matthew Di Meglio 和 Chris Heunen 致谢，感谢他们就本研究项目进行的有益讨论并给予关注。

2 带条件分布的马尔可夫范畴

在本背景介绍部分，我们将简要回顾马尔可夫范畴理论的基础知识，包括条件分布的概念。关于马尔可夫范畴和范畴概率论的深入介绍，请参阅 [13]。

我们假设读者熟悉范畴论和对称幺半范畴的基础知识。简而言之，马尔可夫范畴是一种对称幺半范畴，其中每个对象都以相容的方式构成一个余交换余幺半群（即交换幺半群的对偶概念），并且所有映射都保持余单位，但重要的是，它们不一定保持余乘法。为简便起见，本文将采用对称 *strict* 幺半范畴（这对马尔可夫范畴而言并无妨碍，见 [13, 定理 10.17]），因此我们假设幺半积的结合同构和单位同构均为恒等态射。任意范畴记作 $\mathbb{X}$，其对象用大写字母表示，如 A、B、C 或 X、Y、Z；映射用小写字母表示，如 f、g、h 或 p、q、s。同态集记作 $\mathbb{X}(A,B)$，而映射 $f \in \mathbb{X}(A,B)$ 记作箭头 $f\colon A \to B$。复合沿用通常的记号 $\circ$，恒等映射则记作 $\mathsf{id}_A\colon A \to A$。任意对称幺半范畴记作其底层范畴 $\mathbb{X}$，$\otimes$，I，$A_1 \otimes \ldots \otimes A_n$，$A \otimes I = A = A \otimes I$，$_{A\,B} = A \otimes B$，幺 $\to B \otimes A$ 半积、幺半单位和对称自然同构分别记作 swap，。由严格性可写作 和 。我们将对称幺半范畴简称为其底层范畴 $\mathbb{X}$。关于对称幺半范畴及其内部余幺半群的深入介绍，请参阅 [17]。

定义 2。1 *[13, Def 2.1]* *A* 马尔可夫范畴 *is a symmetric monoidal category* $\mathbb{X}$ *equipped with two families of maps (indexed by objects A)* 复制$_A\colon$ $A \to A \otimes A$, *called the* 复制 *or* 余乘法 *and* 删除$_A\colon$ $A \to I$, *calledthe* 删除 *or*余单位 *such that:*

(i) *For each object A,* $(A,$ 复制$_A,$ 删除$_A)$ *is a* 余交换余幺半群 *that is, the following equalities ho ld:*

$$(\mathsf{copy}_A \otimes \mathsf{id}_A) \circ \mathsf{copy}_A = (\mathsf{id}_A \otimes \mathsf{copy}_A) \circ \mathsf{copy}_A$$
$$(\mathsf{del}_A \otimes \mathsf{id}_A) \circ \mathsf{copy}_A = \mathsf{id}_A = (\mathsf{id}_A \otimes \mathsf{del}_A) \circ \mathsf{copy}_A$$
$$\mathsf{swap}_{A,A} \circ \mathsf{copy}_A = \mathsf{copy}_A$$

(ii) 复制 *and* 删除 *are coherent with the monoidal structure, that is, the following equalities hold:*

$$\mathsf{copy}_{A\otimes B} = (\mathsf{id}_A \otimes \mathsf{swap}_{A,B} \otimes \mathsf{id}_B) \circ (\mathsf{copy}_A \otimes \mathsf{copy}_B)$$
$$\mathsf{del}_{A\otimes B} = \mathsf{del}_A \otimes \mathsf{del}_B$$

(iii) d 尔 *is a natural transformation, that is, for every map* $f\colon A \to B$, *the following equality holds :*

$$\mathsf{del}_B \circ f = \mathsf{del}_A$$

熟悉余单子的读者会注意到，要求复制和删除与幺半结构相容，恰好就是要求 $A \otimes B$ 上的余幺半群结构是余单子 A 与 B 在通常意义下的幺半积 [17, 引理 4。8]。此外，要求删除是自然变换，等价于说幺半单位 I 是一个**终对象** [17, 命题 4。15], 这意味着从每个对象到 I都有唯一的映射。在马尔可夫范畴中，这个唯一映射恰好就是 删除$_A$。还要再次强调，虽然映射保持余单位，但映射不一定保持余乘法；换句话说，我们并不要求复制是自然的。保持余乘法的映射称为 *deterministic*。

定义 2。2 *[13, Def 10.1] In a Markov category* $\mathbb{X}$*, a map* $f\colon A \longrightarrow B$ *is* 确定性的 *if the following equalityholds:*

$$\mathsf{copy}_B \circ f = (f \otimes f) \circ \mathsf{copy}_A$$

*We denote the subcategory of deterministic maps by*确定性[$\mathbb{X}$].

马尔可夫范畴中的确定性映射构成一个子范畴；由于复制和删除都是确定性的，确定性映射实际上构成一个子马尔可夫范畴 [13, 引理 10.12]。此外，确定性映射的子范畴实际上是一个 *Cartesian* 幺半范畴 [13, 注 10.13], , 也就是说，它是一个对称幺半范畴，其幺半积是通常意义上的积，幺半单位是终对象。

在此，我们或许可以简要介绍一下马尔可夫范畴在概率论中的一些解释——关于这些解释的更深入讨论见 [13]。马尔可夫范畴中的映射 $f\colon A \longrightarrow B$ 被解释为 *Markov kernels*，因此，“具有随机结果的函数”基本上意味着 f 为类型为 A 的每个输入值，都指定一个类型为 B的输出值上的概率分布。现在，删除$_A\colon A \longrightarrow I$ 只是丢弃输入，不产生输出；而复制$_A\colon A \longrightarrow A \otimes A$ 接收一个输入值，并输出该输入的两个副本，且不引入任何随机性。一般来说，对输入的两个副本分别独立地应用马尔可夫核 f，并不等同于先应用马尔可夫核，再复制结果。因此，确定性映射是指其随机输出与自身独立的映射，所以我们可以复制它们。

马尔可夫范畴的一项极为理想的性质是具有 *conditionals*。顾名思义，具有条件分布形式化了条件概率分布这一概念，从而可以在马尔可夫范畴中诠释著名的贝叶斯定理。

定义 2.3 *[13, Def 11.5] In a Markov category* $\mathbb{X}$*, a* 条件态射 *for a map* $f\colon A \longrightarrow B \otimes C$ *is a map of type*$f|_B\colon B \otimes A \longrightarrow C$ *such that the following equality holds:*

$$(\mathsf{id}_B \otimes f|_B) \circ (\mathsf{copy}_B \otimes \mathsf{id}_A) \circ (\mathsf{id}_B \otimes \mathsf{del}_C \otimes \mathsf{id}_A) \circ (f \otimes \mathsf{id}_A) \circ \mathsf{copy}_A = f \tag{1}$$

A 带条件分布的马尔可夫范畴[1] *is a Markov category such that for all objects* A*,* B*, and* C*, every map* $f\colon A \longrightarrow B \otimes C$ *has a conditional.*

当然，对于映射 $f\colon A \longrightarrow B \otimes C$，上述定义可以称为一个 *left* 条件态射，因此我们也可以对称地要求一个 *right* 条件态射 $f|_C\colon A \otimes C \longrightarrow B$，使其满足：

$$(f|_C \otimes \mathsf{id}_C) \circ (\mathsf{id}_A \otimes \mathsf{copy}_C) \circ (\mathsf{id}_A \otimes \mathsf{del}_B \otimes \mathsf{id}_C) \circ (\mathsf{id}_A \otimes f) \circ \mathsf{copy}_A = f \tag{2}$$

不过不难看出，f $_{B\,C} \circ f$ A 的右条件分布恰好是交换映射$\longrightarrow C \otimes B$的左条件分布：与交换映射$_{A\text{预复合. }C}$。因此，拥有所有左条件分布（分别为右条件分布）就意味着拥有所有右条件分布（分别为左条件分布）。本文中我们主要讨论左条件分布，并简称为条件分布。

需要着重指出的是，条件分布是 *not* 唯一的。事实上，给定一个具有条件分布的马尔可夫范畴，当且仅当基范畴是偏序范畴时，条件分布才是唯一的 [13, 命题 11。15], 也就是说，所有平行映射都相等，换言之，每对对象之间至多有一个映射。相反，条件分布在几乎必然相等的意义下是唯一的 [13, 命题 13。7]。这里我们不再回顾几乎必然相等，并邀请感兴趣的读者参阅 [5, 13]。

为了帮助理解（1），引入一些有助于直观理解的记号会很有用。沿用 [13, 记号 2。8], 并借鉴概率论，给定一个映射 $f\colon A_1 \otimes \ldots \otimes A_n \longrightarrow B_1 \otimes \ldots \otimes B_m$，我们将 A_i 解释为已知结果，而将 B_j 解释为联合随机变量／结果。因此，我们可以启发式地写作

[1] 一些参考文献会将具有条件分布作为马尔可夫范畴定义的一部分，例如 [9,定义 2。4]

$f\ b_1 \quad b_m|a_1 \quad a_n \qquad\qquad b_1 \quad b_m \qquad\qquad a_1 \quad a_n \in(,\ldots,$
$A_1 \otimes \ldots \otimes A_n \qquad f \quad A \to B \otimes C \qquad f|_B \quad B \otimes A \to C$
$,\ldots,)$ 表示结果 $(,\ldots,) \in B_1 \otimes \ldots \otimes B_m$ 在 $(,\ldots,)$ 为真的条件下的概率。于是，给定一个映射 $:$，其条件分布 $:$ 可解释为 C 已知 B 结果时的概率分布。因此，(1) 表示 $f(b,c|a) = f(b|a)f|_B(c|b,a)$，这意味着：若 a 为真，结果 (b,c) 的概率等于若 a 为真，结果 b 的概率（不考虑 c）乘以已知 b 时，若 a 为真，结果 c 的概率。现在，若 f 还有一个右条件分布 $f|_C$，那么结合 (1) 和 (2)，我们还可得到 $f|_B(b|c,a)f(c|a) = f(b|a)f|_C(c|b,a)$。在特别取 $A = I$ 的情况下，我们可以将这个等式改写为 $f|_B(b|c)f(c) = f(b)f|_C(c|b)$；若 $f(c) \neq 0$，便可得到著名的贝叶斯定理 $f|_B(b|c) = {}^{f}(b)_{f|_C(c|b)}\, f(c)$。关于马尔可夫范畴中条件分布的更多讨论，读者可参阅 [9, 10, 13]。

如今，带有条件分布的马尔可夫范畴有许多有趣的例子，其中不少体现了概率论的各种重要方面，例如有限集范畴和马尔可夫核 [13, 例 2.5]。对于本文的论述而言，最重要的例子是体现 *Gaussian probability theory* 的马尔可夫范畴。

例 2.4 *Let $\mathbb{R}$ be the field of real numbers. Define* 高斯 *[13, Ex 6] to be the category whose objects are the natural numbers $n \in \mathbb{N}$ and where a map $M\ C\ s \quad n \to m$ is triple consisting of an $m \times n$ $\mathbb{R}$-matrix M a positive$(,\ ,\ ):$, , semidefinite square $m \times m$ $\mathbb{R}$-matrix C and a (column) vector $s \in \mathbb{R}^m$. A map $M\ C\ s \quad n \to m$ represents the $(,\ ,\ ):$ Gaussian conditional distribution of a random variable $Y \in \mathbb{R}^m$ in terms of $X \in \mathbb{R}^n$ as $Y = MX + \xi$, where $\xi \in \mathbb{R}^m$ is Gaussian noise independent from X with expected value $[\xi] = s$ and covariance $\xi = [\,\xi - E[\xi] \quad \xi - E[\xi]\ ^{\mathsf{T}}] =$, E VAR( ) C. Identity maps are given by triples $_n = I_n\ 0\ 0 \quad n \to n$ where I_n is the $n \times n$ identity matrix. While* E ( )( ) id : (, ,) : , *composition is given by:*

$$(N, D, t) \circ (M, C, s) = (NM, NCN^{\mathsf{T}} + D, Ns + t)$$

where is the transpose operator. Composition corresponds to the direct combination of the corresponding Gaussian T 高 *conditional distributions [18, Sec 4.4]. is also a symmetric monoidal category where the monoidal unit is $I = 0$* 斯， *the monoidal product is defined on objects as $n \otimes m = n + m$ and on maps as*

$$(M, C, s) \otimes (N, D, t) = \left(\begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & N \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & D \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} s \\ t \end{bmatrix} \right)$$

and where the symmetry is given by the triple

$$\mathsf{swap}_{n,m} := \left(\begin{bmatrix} 0 & I_m \\ I_n & 0 \end{bmatrix}, 0, 0 \right)$$

高斯 *is a Markov category where the copy and delete are defined as follows:*

$$\mathsf{copy}_n := \left(\begin{bmatrix} I_n \\ I_n \end{bmatrix}, 0, 0 \right) : n \to n + n \qquad \text{删除}_n := (0,\ 0,\ 0) :\ n \to 0$$

The deterministic maps are precisely the triples of the form $M\ 0\ s$ that is the Gaussian$(,\ ,\ ):$ conditional distributions whose covariance is zero meaning that no randomness is involved. $n \to m$ [13, Ex 10.7]. , , 高斯 also has conditionals [13, Ex 11.8]. In particular for a map of type $M\ C\ s \quad n \to m + k$ we may decompose it in block notation, $(,\ ,\ ):$, as follows:

$$(M, C, s) = \left(\begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \\ C_3 & C_4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix} \right)$$

where M_1 is an $m \times n$ matrix, M_2 an $k \times n$ matrix, C_1 an $m \times m$ matrix, C_2 an $m \times k$ matrix, C_3 an $k \times m$ matrix, C_4 an $k \times k$ matrix s_1 a column vector of size m , , and lastly s_2 is a column vector of size k. Then the following mapof type $m + n \to k$ is a conditional for (M, C, s)

$$\left(\begin{bmatrix} C_3 C_1^{\circ} & M_2 - C_3 C_1^{\circ} M_1 \end{bmatrix}, C_4 - C_3 C_1^{\circ} C_2, s_2 - C_3 C_1^{\circ} s_1 \right)$$

where C_1° is the of C_1. Recall that Moore-Penrose inverses are special kinds of generalized Moore-Penrose逆， *inverses that exist for any real matrix. We will review Moore-Penrose inverses in Sec 6 below. However since conditionals are not necessarily unique the Moore-Penrose inverses allows us to build one possible conditional but , there may be others. We will investigate this further in Sec 5.*

3 伴随加法范畴及其矩阵表示

本文的主要目标是通过用一个 *dagger additive category*的映射替代矩阵，推广高斯概率论中的马尔可夫范畴。因此，在本背景部分，我们将回顾伴随加性范畴，特别是它们的矩阵表示。关于 dagger（加性）范畴的深入介绍，读者可参阅 [17]。

定义 3 *on a category $\mathbb{X}$ is a contravariant functor $\mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{X}$ which is the identity on objects and involutive. More concretely a dagger $\dagger$ associates each map f $A \longrightarrow B$ to a chosen map of* **1** *[17, Def 2.34] A* ***dagger*** *$(\ )^\dagger$: , : dual type $f^\dagger$: $B \longrightarrow A$, called the* 伴随 *of f, such that the following equalities hold:*

$$\mathsf{id}_A^\dagger = \mathsf{id}_A \qquad (g \circ f)^\dagger = f^\dagger \circ g^\dagger \qquad (f^\dagger)^\dagger = f \tag{3}$$

A 伴随范畴 *is a pair $(\mathbb{X}, \dagger)$ consisting of a category $\mathbb{X}$ equipped with a dagger $\dagger$.*

需要注意的是，一个范畴可以有多个不同的 dagger。这意味着，范畴上的 dagger 是一种必须加以选择的结构。通常，在上下文明确时，会用其底层范畴来指代伴随范畴。然而，在本文中，我们将遇到具有多个 dagger 的范畴，因此总是将伴随范畴写成有序对。这在第 6 节尤为重要，因为相对于一种 dagger，范畴可能存在 Moore-Penrose 逆，而相对于另一种 dagger 则可能不存在。

现在我们为伴随范畴加入加法结构。首先回顾，预加性范畴 [3, Def 1.2.1]是指一种由阿贝尔群充实的范畴，也就是说，范畴 $\mathbb{X}$ 满足：每个同态集 $\mathbb{X}(A, B)$ 都是阿贝尔群，其二元运算为 $+$：$\mathbb{X}(A, B) \times \mathbb{X}(A, B) \longrightarrow \mathbb{X}(A, B)$，单位元为 $0 \in \mathbb{X}(A, B)$，逆元为 $-$：$\mathbb{X}(A, B) \longrightarrow \mathbb{X}(A, B)$，且复合是群态射，也就是说，以下等式成立：

$$g \circ (f_1 + f_2) \circ h = g \circ f_1 \circ h + g \circ f_2 \circ h \qquad g \circ 0 \circ f = 0$$

对于伴随范畴，我们还要求 dagger 是群同态。

定义 3.2 *A* 匕首预加性范畴 *is a dagger category $(\mathbb{X}, \dagger)$ such that $\mathbb{X}$ is a pre-additive category, where additionally $\dagger$ is a group homomorphism, that is, the following equalities hold:*

$$(f + g)^\dagger = f^\dagger + g^\dagger \qquad 0^\dagger = 0 \qquad (-f)^\dagger = -f^\dagger$$

我们也可以为伴随范畴加入双积。首先回顾，范畴中的**零对象** [3, Def 1.1.1] 是一个既是终对象又是始对象的对象。在预加性范畴中，零对象也可以等价地定义为一个对象 0，使得对于每个对象 A，零态射 0：$A \longrightarrow 0$ 和 0：$0 \longrightarrow A$ 分别是到 0 [3, Prop 1.2.3] 和从 0 [3, Prop 1.2.3] 出发的唯一映射。接下来回顾，**双积** 既是积也是余积，并满足某些相容关系。在预加性范畴中，有限对象族 A_1,..., A_n 的**双积** [3, Def 1.1.1] 是一个对象 $A_1 \oplus \ldots A_n$，带有映射（对所有 $1 \leq j \leq n$） π_j：$A_1 \oplus \ldots A_n \longrightarrow A_j$，称为**投影**，以及 ι_j：$A_j \longrightarrow A_1 \oplus \ldots A_n$，称为**注入**，使得以下等式成立：

$$\pi_j \circ \iota_i = \begin{cases} \mathsf{id}_{A_j} & \text{if } i = j \\ 0 & \text{if } i \neq j \end{cases} \qquad \iota_1 \circ \pi_1 + \ldots + \iota_n \circ \pi_n = \mathsf{id}_{A_1 \oplus \ldots \oplus A_n}$$

空族的双积（如果存在）恰好是一个零对象。于是，**加性范畴** [3, 定义 1.2。6] 是具有所有有限双积的预加性范畴。对于 dagger 范畴， *dagger biproducts* 是投影与注入互为伴随的双积。

定义 3。3 *[17, Def 2.39] A* ***dagger*** 加性范畴 *is a dagger pre-additive category $(\mathbb{X}, \dagger)$ which has allfinite* $\dagger$-双积 *that is, it has all finite biproducts such that the following equality holds (for all finite families ofobjects and all $j \in \mathbb{N}$):*

$$\pi_j^\dagger = \iota_j$$

伴随加法范畴有许多有趣的例子，例如希尔伯特空间范畴 [17, 定义 2.31] 或集合与关系范畴 [17, 定义 2.33]。本文重点关注的主要例子是环上矩阵构成的伴随加法范畴。

例 3.4 *Let R be a (unital and associative, but not necessarily commutative) ring. Define* MAT(R) *to be thecategory of R-matrices, that is, the category whose objects are the natural numbers $n \in \mathbb{N}$ and where a map A: $n \to m$ is an $m \times n$ R-matrix A whose coefficients we denote by $A\ i\ j$, (,) for $1 \le i \le m$ and $1 \le j \le n$. The identity map of n , , is the $n \times n$ identity matrix while composition is given by matrix multiplication so $A \circ B = AB$. For an $m \times n$ matrix A (which is a map of type $n \to m$ let A^{T} be its transpose that is the $n \times m$ matrix (so a map of dual type $m \to n$)) , , (,) (,) (MAT( ) T) , (MAT( ) T) given by $A^{\mathsf{T}}\ i\ j = A\ j\ i$. Then this makes R , into a dagger category. Moreover R , is a dagger additive category where the sum of maps is given by the usual sum of matrices, $(A + B)(i, j) = A(i, j) + B(i, j)$ the zero map is the zero matrix $0\ i\ j = 0$ the negative is the usual negation of a matrix $-A\ i\ j = -A\ i\ j$ and, (,) , , ( )(,) (,), where the biproduct on objects is given by taking the sum $n_1 \oplus \ldots \oplus n_m = n_1 + \ldots + n_m$. Our main example will be, the field of real numbers, when $R = \mathbb{R}$ $\mathbb{R}$. giving us the dagger category of real matrices* (MAT( ),T)

如果底环是带 involution 的环，那么其矩阵范畴还具有另一种由共轭转置给出的 dagger。

例子 3 5 *Recall that an involutive ring is a ring R equipped with a unary operation $R \to \overline{R}$ called the。( ) : ,, involution such that $\overline{x + y} = x + y$ $\overline{xy} = y\ x$ and $\overline{x} = x$. Given an $m \times n$ R-matrix A let A^* denote its ,,,,,,(,) (,) (MAT( )) conjugate transpose that is the $n \times m$ matrix given by $A^*\ i\ j = A\ j\ i$. This makes R * into a dagger category. Moreover R * ,(MAT( )) is also dagger additive category with the same additive structure as in the above example. Our two main examples will be when $R = \mathbb{C}$ the field of complex numbers whose involution is given ,, by complex conjugation, giving us the dagger of complex matrices* (MAT($\mathbb{C}$) $*$) *or when $R = \mathbb{H}$, the skew field ofquaternions, whose involution is given by quaternionic conjugation, giving us the dagger of qauternionic matrices* (MAT($\mathbb{H}$) $*$)。

加性范畴有一个非常实用的事实：映射具有 *matrix representation* [17, 第 2.2 节。4], 这源于双积同时具有积和余积的泛性质。具体而言，这种矩阵表示意味着，加性范畴中的复合本质上就是矩阵乘法。因此，在加性范畴中，每个映射 $f\colon A_1 \oplus \ldots \oplus A_n \to B_1 \oplus \ldots \oplus B_m$ 都由一族映射唯一确定$f(i, j)\colon A_j \to B_i$如下方左侧所定义，并满足右侧的等式：

$$f(i, j) = \pi_i \circ f \circ \iota_j \qquad\qquad f = \sum_{i,j} \iota_i \circ f(i, j) \circ \pi_j$$

因此， f 可以表示为一个 $m \times n$ 矩阵 [17, 引理 2.26] 其中，第 i行第 j列的项为 $f(i, j)$，因此：

$$f = \Big[f(i, j)\Big] = \begin{bmatrix} f(1,1) & f(1,2) & \ldots & f(1,n) \\ f(2,1) & f(2,2) & \ldots & f(2,n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f(m,1) & f(m,2) & \ldots & f(m,n) \end{bmatrix}$$

此外，加性范畴中的两个映射相等，当且仅当它们具有相同的矩阵表示 [17,推论 2.27]。现在，设有可复合映射 $f\colon \bigoplus_{i=1}^{n} A_i \to \bigoplus_{j=1}^{m} B_j$ 和 $g\colon \bigoplus_{j=1}^{m} B_j \to \bigoplus_{k=1}^{p} C_k$，则它们的复合 $g \circ f\colon \bigoplus_{i=1}^{n} A_i \to \bigoplus_{k=1}^{p} C_k$ 的矩阵表示由矩阵乘法给出 [17, 命题 2.28],

$$g \circ f = \Big[g(k, l)\Big] \circ \Big[f(i, j)\Big] = \left[\sum_{j=1}^{n} g(j, k) \circ f(i, j)\right]$$

而恒等映射 $\mathsf{id}_{A_1 \oplus \ldots \oplus A_m}$ 的矩阵表示恰好是单位矩阵，也就是说，对角线上是恒等态射，其余位置均为零：

$$\mathsf{id}_{A_1 \oplus \ldots \oplus A_m} = \begin{bmatrix} \mathsf{id}_{A_1} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \mathsf{id}_{A_2} & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \mathsf{id}_{A_m} \end{bmatrix}$$

n m n m现在，对于映射 $f\colon \bigoplus A_i \to \bigoplus B_j$ 和 $g\colon \bigoplus A_i \to \bigoplus B_j$，它们的和 $f+g$ 的矩阵表示$i=1$ $j=1$ $i=1$ $j=1$就是矩阵通常加法，也就是逐项相加系数；因此，取逐项相反数即可得到取负映射 $-f$ 的矩阵表示n m；而零映射 $0:\bigoplus A_i \to \bigoplus B_j$ 的矩阵表示$i=1$ $j=1$当然就是零矩阵：

$$f+g=\Big[f(i,j)\Big]+\Big[g(i,j)\Big]=\Big[f(i,j)+g(i,j)\Big]$$
$$-f=-\Big[f(i,j)\Big]=\Big[-f(i,j)\Big]$$
$$0=\begin{bmatrix}0 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 0 & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & 0\end{bmatrix}$$

在 dagger 加性范畴中，对于映射 $f\colon A_1\oplus\ldots\oplus A_m \to B_1\oplus\ldots\oplus B_n$，其伴随 $f^\dagger\colon B_1\oplus\ldots\oplus B_n \to A_1\oplus\ldots\oplus A_m$ 的矩阵表示是 f [17, 引理 2。41]:

$$f^\dagger=\begin{bmatrix}f(1,1)^\dagger & f(2,1)^\dagger & \dots & f(n,1)^\dagger\\ f(1,2)^\dagger & f(2,2)^\dagger & \dots & f(n,2)^\dagger\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ f(1,m)^\dagger & f(2,m)^\dagger & \dots & f(n,m)^\dagger\end{bmatrix}$$

示例 3.6 *For any ring R, notice that in*矩阵(R) *every object n is the biproduct of n-copies of 1, that is, $n=1\oplus\ldots\oplus 1$. Then for a map $A: n\to m$ which is an $m\times n$ matrix A its matrix representation in the additive*:,, *category sense will be precisely A where in particular $\pi_i\circ A\circ\iota_j$ is precisely $A\ i\ j$ the coefficient of A in the i-th*, (,), *row and j-th column seen as a map $1\to 1$ (which is just an element of R seen as a 1×1 matrix).*

4 高斯构造

在本节中，我们介绍 *Gauss construction* 在 dagger 加性范畴上的构造，该构造能生成一个马尔可夫范畴。高斯构造推广了高斯概率论中的例子：将高斯构造应用于实矩阵范畴时，我们会得到例 2.4 中的马尔可夫范畴高斯。

在给出高斯构造的定义之前，我们需要先讨论映射可能是什么样子。以高斯为指引，我们可以清楚地看到，高斯构造中的对象与基 dagger 加性范畴中的对象相同，而高斯构造中的映射则是三元组。三元组的第一个分量是基范畴中的映射，因此我们还需要说明另外两个分量。在高斯中，回想一下，第二个分量是一个半正定方阵。方阵对应自同态，那么半正定性又该如何体现呢？事实证明，在 dagger 范畴中，半正定性可通过 *positive* 映射这一概念来刻画；这种映射是另一个映射与其伴随复合而成的自同态。

定义 **4** $\mathbb{X}$ † *a* † *is an endomorphism $p: A\to A$ such*。**1** *[17, Def 2.34] In a dagger category* (,)-
that there exists a map $\phi: A\to B$ satisfying $p=\phi^\dagger\circ\phi$.
正映射 : :

重要的是 强调，对于一个 †-正映射 p，可能存在不同的映射 ϕ，使得 $p=\phi^\dagger\circ\phi$.

示例 **4 2** *Recall the well-known fact that a real square $n\times n$ matrix A is positive semidefinite if and only if there* *positive maps*。, (MAT( )
exists a real (resp. complex) $m\times n$ matrix B such that $A=B^*B$. Therefore, in correspond precisely to real (resp. complex) positive semidefinite matrices. The same is true for complex (resp.
T) T*quaternionic) matrices thus $*$-positive maps in* $\mathbb{C}$ $*$ *(resp.* $\mathbb{H}$ $*$ *) meaning this time that $A=B^*B$,* (MAT( ))

(MAT( )), , *correspond precisely to complex (resp. quaternionic) positive semidefinite square matrices.*

回想一下，高斯中的映射的第三个分量是一个列向量，我们可以将其视为矩阵范畴中的一种 $1 \to m$ 类型的映射。尽管 1 在我们的矩阵范畴中确实是一个特殊对象，但任意 dagger 加性范畴不一定都具有这样的对象。相反，我们需要固定基范畴中的一个对象，并将从该对象出发的映射作为高斯构造中映射的第三个分量。

现在我们可以给出高斯构造了。因此，本节余下部分中，设 $(\mathbb{X}, \dagger)$ 是一个 dagger 加性范畴，并固定一个对象 $X \in \mathbb{X}$。然后定义 $\mathfrak{G}\left[(\mathbb{X}, \dagger)\right]_X$ 为如下范畴：

(i) $\mathfrak{G}\left[(\mathbb{X}, \dagger)\right]_X$ 的对象与 $\mathbb{X}$ 中的对象相同；*(ii)* $\mathfrak{G}\left[(\mathbb{X}, \dagger)\right]_X$ 中的映射 $F\colon A \to B$ 是一个三元组 $F = (f, p, x)$：$A \to B$，由一个映射 $f\colon A \to B$、一个 $\dagger$-正映射 $p : B \to B$ 和一个映射 $x : X \to B$ 组成；*(iii)* $\mathfrak{G}\left[(\mathbb{X}, \dagger)\right]_X$ 中 A 的恒等映射是三元组 $\mathsf{Id}_A = (\mathsf{id}_A, 0, 0)\colon A \to A$；*(iv)* $A \to B$ 上的 $F = (f, p, x)\colon A \to B$ 与 $B \to C$ 上的 $G = (g, q, y)\colon B \to C$ 的复合定义如下：

$$G \circ F = (g, q, y) \circ (f, p, x) = (g \circ f, q + g \circ p \circ g^\dagger, y + g \circ x) : A \to C$$

引理 4.3 $\mathfrak{G}\left[(\mathbb{X}, \dagger)\right]_X$ *is category.*

Proof: 我们首先需要说明复合和恒等态射为何定义良好，特别是需要处理第二个分量，并解释它为何是 $\dagger$-正的。显然，每个零映射 0 都是 $\dagger$-正的，因为 $0 = 0^\dagger \circ 0$，因此恒等映射在 $\mathfrak{G}\left[(\mathbb{X}, \dagger)\right]_X$ 中定义良好。接下来谈复合，我们需要说明为何 $\dagger$-正映射之和仍是 $\dagger$-正的。在一般的 dagger 预加性范畴中，情况未必如此！不过，在 dagger 加性范畴中，dagger 双积可以解决这个问题；在这种情况下，$\dagger$-正映射之和确实是 $\dagger$-正的。为此，考虑两个 $\dagger$-正映射 $\phi\colon A \to A$ 和 $\psi\colon A \to A$，其中 $\phi = \alpha^\dagger \circ \alpha$，对某个 $\alpha\colon A \to B$ 成立，且 $\psi = \beta^\dagger \circ \beta$，对某个 $\beta\colon A \to C$ 成立。因此，考虑映射 $\left[\begin{smallmatrix}\alpha\\ \beta\end{smallmatrix}\right]\colon A \to B \oplus C$，我们计算得：

$$\begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\end{bmatrix}^\dagger \circ \begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\alpha^\dagger & \beta^\dagger\end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\end{bmatrix} = \alpha^\dagger \circ \alpha + \beta^\dagger \circ \beta = \phi + \psi$$

因此，在存在 $\dagger$-双积的情况下，$\dagger$-正映射之和仍然是 $\dagger$-正映射。因此，$\mathfrak{G}\left[(\mathbb{X},\ \dagger)\right]_X$ 中的复合是良定义的。现在很容易看出，$\mathfrak{G}\left[(\mathbb{X},\ \dagger)\right]_X$ 中的复合满足结合律和单位律，因为 $\mathbb{X}$ 中的复合和加法满足结合律和单位律，$\dagger$ 是一个反变函子，而且复合和 $\dagger$ 保持加法结构。因此我们得出结论，$\mathfrak{G}\left[(\mathbb{X},\ \dagger)\right]_X$ 确实是一个范畴。□

接下来，我们在 $\mathfrak{G}\left[(\mathbb{X},\ \dagger)\right]_X$ 上定义一个幺半结构。为此，回顾一下，每个加性范畴都是一个对称幺半范畴，其幺半结构由有限双积给出。具体而言，幺半积是双积 $\oplus$，在对象上的定义就是 $A \oplus B$；对于映射 $f\colon A \to B$ 和 $g\colon C \to D$，它们的双积 $f \oplus g\colon A \oplus C \to B \oplus D$ 则表示为一个对角矩阵：

$$f \oplus g = \begin{bmatrix} f & 0 \\ 0 & g \end{bmatrix}$$

幺半单位是零对象 0，而自然对称同构 $\mathsf{swap}^{\oplus}_{A,\,B}\colon A \oplus B \to B \oplus A$ 是 he2×2 置换交换映射矩阵：

$$\mathsf{swap}^{\oplus}_{A,B} = \begin{bmatrix} 0 & \mathsf{id}_B \\ \mathsf{id}_A & 0 \end{bmatrix}$$

由此，我们现在可以在 $\mathfrak{G}\left[(\mathbb{X},\ \dagger)\right]_X$ 上定义一个对称幺半群结构。因此，将对象上的幺半积 $\otimes$ 定义为 $A \otimes B = A \oplus B$，并将映射上的幺半积 $F = (f,\ p,\ s)\colon A \to B$ 和 $G = (g,\ q,\ t)\colon C \to D$ 定义如下：

$$\begin{aligned} F \otimes G = \ & (f, p, x) \otimes (g, q, y) = (f \oplus g, p \oplus q, \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}) \\ = \ & \left(\begin{bmatrix} f & 0 \\ 0 & g \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} p & 0 \\ 0 & q \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) : A \otimes B \to C \otimes D \end{aligned}$$

幺半单位将是 $\mathbb{X}$, $I = 0$ 的零对象。自然对称同构 $\mathsf{swap}_{A,\ B}$: $A \otimes B \to B \otimes A$ 定义为以下三元组:

$$\mathsf{swap}_{A,B} = \left(\mathsf{swap}^{\oplus}_{A,B}, 0, 0\right) = \left(\begin{bmatrix} 0 & \mathsf{id}_B \\ \mathsf{id}_A & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) : A \otimes B \to B \otimes A$$

引理 4.4 $\mathfrak{G}\left[(\mathbb{X}, \dagger)\right]_X$ *is a symmetric monoidal category.*

Proof: 我们首先需要说明映射的幺半积为何定义良好。这是因为 -正映射的 $\overset{\dagger}{\to} D$ $p = \alpha^\dagger \circ \alpha$ $\overset{\dagger}{\alpha}$ $A \to W$ $q = \beta^\dagger \circ \beta$ $\overset{\dagger}{\beta}$ $C \to V$ p $A \to B$ q C-双积确实是 -正的。为此，考虑 -正映射 : 和 : ，其中某个映射 : 满足 ，且某个映射 : 满足 。接着考虑映射 $\alpha \oplus \beta$: $A \oplus C \to W \oplus V$。我们很容易看出:

$$\begin{aligned}(\alpha \oplus \beta)^\dagger \circ (\alpha \oplus \beta) = & \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix}^\dagger \circ \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha^\dagger & 0 \\ 0 & \beta^\dagger \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix} \\ = & \begin{bmatrix} \alpha^\dagger \circ \alpha & 0 \\ 0 & \beta^\dagger \circ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p & 0 \\ 0 & q \end{bmatrix} = p \oplus q\end{aligned}$$

因此， $p \oplus q$是 $\dagger$-正的。由此， $\mathfrak{G}\left[(\mathbb{X}, \dagger)\right]_X$中的幺半积定义良好。显然，自然对称同构也定义良好，因此 $\mathfrak{G}\left[(\mathbb{X}, \dagger)\right]_X$ 上的对称幺半群结构定义良好。

接下来我们需要证明 $\otimes$ 具有函子性。由于 $\mathsf{id}_{A\oplus B} = \mathsf{id}_A \oplus \mathsf{id}_B$，不难看出 $\mathrm{Id}_{A\otimes B} = \mathrm{Id}_A \otimes \mathrm{Id}_B$。为了证明 $\otimes$ 也保持复合，我们需要用到下面这些在任意 dagger 加性范畴中成立的恒等态射:

$$\begin{aligned}(g \oplus k) \circ (f \oplus h) &= (g \circ f) \oplus (k \circ h) & (f \oplus g)^\dagger &= f^\dagger \oplus g^\dagger \\ (g \oplus f) + (k \oplus h) &= (g + k) \oplus (f + h) & (f \oplus g) \circ \begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} f \circ h \\ g \circ k \end{bmatrix}\end{aligned}$$

利用这些恒等态射，我们计算得到:

$$\begin{aligned}&(G \otimes K) \circ (F \otimes H) = \big((g, q, y) \otimes (k, u, w)\big) \circ \big((f, p, x) \otimes (h, r, z)\big) \\ &= \left(g \oplus k, q \oplus u, \begin{bmatrix} y \\ w \end{bmatrix}\right) \circ \left(f \oplus h, p \oplus r, \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix}\right) \\ &= \left((g \oplus k) \circ (f \oplus h), (q \oplus u) + (g \oplus k) \circ (p \oplus r) \circ (g \oplus k)^\dagger, \begin{bmatrix} y \\ w \end{bmatrix} + (g \oplus k) \circ \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix}\right) \\ &= \left((g \oplus k) \circ (f \oplus h), (q \oplus u) + (g \oplus k) \circ (p \oplus r) \circ (g^\dagger \oplus k^\dagger), \begin{bmatrix} y \\ w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g \circ x \\ k \circ z \end{bmatrix}\right) \\ &= \left((g \circ f) \oplus (k \circ h), (q \oplus u) + \Big((g \circ p \circ g^\dagger) \oplus (k \circ r \circ k^\dagger)\Big), \begin{bmatrix} y + g \circ x \\ w + k \circ z \end{bmatrix}\right) \\ &= \left((g \circ f) \oplus (k \circ h), (q + g \circ p \circ g^\dagger) \oplus (u + k \circ r \circ k^\dagger), \begin{bmatrix} y + g \circ x \\ w + k \circ z \end{bmatrix}\right) \\ &= (g \circ f, q + g \circ p \circ g^\dagger, y + g \circ x) \otimes (k \circ h, u + k \circ r \circ k^\dagger, w + k \circ z) \\ &= \big((g, q, y) \circ (f, p, x)\big) \otimes \big((k, u, w) \circ (h, r, z)\big) = (G \circ F) \otimes (K \circ H)\end{aligned}$$

因此， $\otimes$ 确实具有函子性。接下来，由于交换映射$^{\oplus}_{B\ ,\ A}$ $\circ$交换映射$^{\oplus}_{A\ ,\ B}$ $=$ 恒等态射$_{A\oplus B}$，可得交换映射$_{B,\ A}$ $\circ$交换映射$_{A,\ B}$ $=$ 恒等态射$_{A\otimes B}$。剩下的是证明自然性。为此，我们利用对称映射在任意 dagger 加性范畴中满足的以下恒等式:

$$(f \oplus g) \circ \mathsf{swap}_{A,B} = \mathsf{swap}_{D,C} \circ (g \oplus f) \qquad \mathsf{swap}^{\oplus\ \dagger}_{A,B} = \mathsf{swap}^{\oplus}_{B,A}$$

$$\mathsf{swap}^{\oplus}_{C,D} \circ \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

然后我们计算得:

$$\begin{aligned}
&\mathsf{swap}_{D,C} \circ (G \otimes F) = \Big(\mathsf{swap}^{\oplus}_{C,D}, 0, 0\Big) \circ \big((g,q,y) \otimes (f,p,x)\big) \\
&= \Big(\mathsf{swap}^{\oplus}_{C,D}, 0, 0\Big) \circ \left(g \oplus f, q \oplus p, \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix}\right) \\
&= \left(\mathsf{swap}^{\oplus}_{D,C} \circ (g \oplus f), 0 + \mathsf{swap}^{\oplus}_{D,C} \circ (q \oplus p) \circ \mathsf{swap}^{\oplus\,\dagger}_{D,C}, 0 + \mathsf{swap}^{\oplus}_{C,D} \circ \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix}\right) \\
&= \left((f \oplus g) \circ \mathsf{swap}^{\oplus}_{A,B}, \mathsf{swap}^{\oplus}_{D,C} \circ (q \oplus p) \circ \mathsf{swap}^{\oplus}_{C,D}, \mathsf{swap}^{\oplus}_{C,D} \circ \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix}\right) \\
&= \left((f \oplus g) \circ \mathsf{swap}^{\oplus}_{A,B}, (p \oplus q) \circ \mathsf{swap}^{\oplus}_{D,C} \circ \mathsf{swap}^{\oplus}_{C,D}, \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) \\
&= \left((f \oplus g) \circ \mathsf{swap}^{\oplus}_{A,B}, (p \oplus q), \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) \\
&= \left((f \oplus g) \circ \mathsf{swap}^{\oplus}_{A,B}, (p \oplus q) + 0, \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + 0\right) \\
&= \left((f \oplus g) \circ \mathsf{swap}^{\oplus}_{A,B}, (p \oplus q) + (f \oplus g) \circ 0 \circ (f \oplus g)^{\dagger}, \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + (f \oplus g) \circ 0\right) \\
&= \left(f \oplus g, p \oplus q, \begin{bmatrix} s \\ t \end{bmatrix}\right) \circ \Big(\mathsf{swap}^{\oplus}_{A,B}, 0, 0\Big) = (F \otimes G) \circ \mathsf{swap}_{A,B}
\end{aligned}$$

因此，交换映射确实是一个自然同构，且是自身的逆。因此，我们得出结论： $\mathfrak{G}\left[(\mathbb{X},\ \dagger)\right]_X$ 确实是一个对称幺半范畴。
□

为了证明 $\mathfrak{G}\left[(\mathbb{X},\ \dagger)\right]_X$ 是一个马尔可夫范畴，我们还需要给出交换余幺半群结构。为此，我们利用这样一个事实：在加性范畴中，关于双积，每个对象都具有典范且唯一的余交换余幺半群结构。对于每个对象 $A \in \mathbb{X}$，令 Δ_A：$A \to A \oplus A$ 为双积的典范对角映射，其定义如下:

$$\Delta_A = \begin{bmatrix} \mathsf{id}_A \\ \mathsf{id}_A \end{bmatrix}$$

接着，将映射 copy_A：$A \to A \otimes A$ 定义为 $\mathfrak{G}\left[(\mathbb{X},\ \dagger)\right]_X$ 中的如下三元组:

$$\mathsf{copy}_A = (\Delta_A, 0, 0) = \left(\begin{bmatrix} \mathsf{id}_A \\ \mathsf{id}_A \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right)$$

另外，将映射 del_A：$A \to 0$ 定义为 $\mathfrak{G}\left[(\mathbb{X},\ \dagger)\right]_X$ 中的如下三元组:

$$\mathsf{del}_A = (0, 0, 0)$$

定理 4.5 $\mathfrak{G}\left[\ (\mathbb{X},\ \dagger)\ \right]_X$ *is a Markov category.*

PROOF: 根据构造，复制和删除都是 $\mathfrak{G}\left[(\mathbb{X},\ \dagger)\right]_X$ 中定义良好的映射。现在回忆一下，对于每个对象 $A \in \mathbb{X}$，$(A,\ \Delta_A,\ 0)$ 都是 $\mathbb{X}$ 中的余交换余幺半群。因此可以推出，$(A,\ \text{复制}_A,\ \text{删除}_A)$ 是 $\mathfrak{G}\left[(\mathbb{X},\ \dagger)\right]_X$ 中的余交换余幺半群。此外，由于：

$$\Delta_{A\oplus B} = (\mathsf{id}_A \oplus \mathsf{swap}^{\oplus}_{A,B} \oplus \mathsf{id}_B) \circ (\Delta_A \otimes \Delta_B)$$

因此，copy 和 del 也与 $\mathfrak{G}\left[(\mathbb{X},\ \dagger)\right]_X$ 中的幺半结构相协调。最后，显然有 $\mathsf{del}_B \circ F = \mathsf{del}_A$，因此 $\mathfrak{G}\left[(\mathbb{X},\ \dagger)\right]_X$ 中的每个映射都保持删除，故 0 是 $\mathfrak{G}\left[(\mathbb{X},\ \dagger)\right]_X$ 中的终对象。因此我们得出结论：$\mathfrak{G}\left[(\mathbb{X},\ \dagger)\right]_X$ 确实是一个马尔可夫范畴。□

需要注意的是，尽管 0 是 $\mathbb{X}$ 中的零对象，但它在 $\mathfrak{G}\left[(\mathbb{X},\ \dagger)\right]_X$ 中仅是终对象，不一定是始对象。事实上，对于任意 $\dagger$-正映射 $p\colon B \to B$ 以及任意映射 $x\colon X \to B$，我们有 $(0,\ p,\ x)\colon 0 \to B$ 是 $\mathfrak{G}\left[(\mathbb{X},\ \dagger)\right]_X$ 中的一个映射。

现在我们证明，高斯构造中的确定性映射恰好是正分量为零的映射。

引理 4.6 *A map $F = (f, p, x)$ in $\mathfrak{G}\left[(\mathbb{X}, \dagger)\right]_X$ is deterministic if and only if $p = 0$.*

PROOF: 在加性范畴中，以下等式成立：

$$\Delta_B \circ f = (f \oplus f) \circ \Delta_A \qquad\qquad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = (x \oplus y) \circ \Delta_X$$

一方面，我们计算得：

$$\begin{aligned}
\mathsf{copy}_B \circ F =\ & (\Delta_B, 0, 0) \circ (f, p, x) \\
=\ & (\Delta_B \circ f, 0 + \Delta_B \circ p \circ \Delta_B^\dagger, 0 + \Delta_B \circ x) \\
=\ & ((f \oplus f) \circ \Delta_A, (p \oplus p) \circ \Delta_B \circ \Delta_B^\dagger, (x \oplus x) \circ \Delta_X) \\
=\ & ((f \oplus f) \circ \Delta_A, (p \oplus p) \circ \Delta_B \circ \Delta_B^\dagger, (x \oplus x) \circ \Delta_X)
\end{aligned}$$

另一方面，我们也计算得：

$$\begin{aligned}
(F \otimes F) \circ \mathsf{copy}_A =\ & \big((f, p, x) \otimes (f, p, x)\big) \circ (\Delta_A, 0, 0) \\
=\ & \left(f \oplus f, p \oplus p, \begin{bmatrix} x \\ x \end{bmatrix}\right) \circ (\Delta_A, 0, 0) \\
=\ & \left((f \oplus f) \circ \Delta_A, (p \oplus p) + (f \oplus f) \circ 0 \circ (f \oplus f)^\dagger, \begin{bmatrix} x \\ x \end{bmatrix} + (f \oplus f) \circ 0\right) \\
=\ & \big((f \oplus f) \circ \Delta_A, p \oplus p, (x \oplus x) \circ \Delta_X\big)
\end{aligned}$$

因此我们得到以下两个等式：

$$\begin{aligned}
(F \otimes F) \circ \mathsf{copy}_A &= \big((f \oplus f) \circ \Delta_A, (p \oplus p), (x \oplus x) \circ \Delta_X\big) \\
\mathsf{copy}_B \circ F &= ((f \oplus f) \circ \Delta_A, (p \oplus p) \circ \Delta_B \circ \Delta_B^\dagger, (x \oplus x) \circ \Delta_X)
\end{aligned}$$

因此，如果 $p = 0$，我们显然有 $(F \otimes F) \circ \text{复制}_A = \text{复制}_B \circ F$。因此，$F = (f,\ 0,\ x)$ 是确定性的。反过来，如果 $F = (f,\ p,\ x)$ 是确定性的，那么 $(F \otimes F) \circ \text{复制}_A = \text{复制}_B \circ F$，这尤其意味着 $p \oplus p = (p \oplus p) \circ \Delta_B \circ \Delta_B^\dagger$。现在用矩阵表示，这给出如下结果：

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} p & 0 \\ 0 & p \end{bmatrix} = p \oplus p = (p \oplus p) \circ \Delta_B \circ \Delta_B^\dagger &= \begin{bmatrix} p & 0 \\ 0 & p \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} \mathsf{id}_B \\ \mathsf{id}_B \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} \mathsf{id}_B \\ \mathsf{id}_B \end{bmatrix}^\dagger \\
&= \begin{bmatrix} p & 0 \\ 0 & p \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} \mathsf{id}_B \\ \mathsf{id}_B \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} \mathsf{id}_B^\dagger & \mathsf{id}_B^\dagger \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p & 0 \\ 0 & p \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} \mathsf{id}_B \\ \mathsf{id}_B \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} \mathsf{id}_B & \mathsf{id}_B \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$= \begin{bmatrix} p & 0 \\ 0 & p \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} \mathsf{id}_B & \mathsf{id}_B \\ \mathsf{id}_B & \mathsf{id}_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p & p \\ p & p \end{bmatrix}$$

因此 $\left[\begin{smallmatrix} p & 0 \\ 0 & p \end{smallmatrix}\right] = \left[\begin{smallmatrix} p & p \\ p & p \end{smallmatrix}\right]$，这进而意味着 $p = 0$。

□

对实矩阵范畴应用高斯构造，可以重新得到实高斯概率论的例子。我们所说的马尔可夫范畴同构，是指 Fritz 意义下马尔可夫范畴的 2-范畴中的一个同构 [13, 节 10], ，也就是说，它是一个严格保留幺半结构和余幺半群结构的范畴同构。

例 4。7 *Consider* (MAT(ℝ)，T) *and take* $X = 1$. *Then we have an isomorphism of Markov categories* $\mathfrak{G}\left[(\text{MAT}(\mathbb{R}),\ \text{T})\right]_1 \cong$ 高斯。

在上面的例子中，我们选择 $X = 1$ 作为高斯构造中的基对象；不过，很自然会问，如果把另一个 $n \in \mathbb{N}$作为基对象，会发生什么。实际上有两种情况： $n = 0$ 以及 $n \geq 1$。确实，注意到 $n = 0$ 是零对象；另一方面，当 $n \geq 1$时，它是由 n 个 **1**, $n = 1 \oplus \ldots \oplus 1$构成的双积。因此，我们现在将说明以零对象或对象的双积为基对象进行高斯构造时会得到什么。

首先考虑零对象 0 的情况。由于 0 是始对象，因此从 0 出发的映射只有一个，即零映射 $0\colon\ 0 \to B$。因此， $\mathfrak{G}\left[(\mathbb{X}, \dagger)\right]_0$ 中的每个映射都是形如 $F = (f, p, 0)$ 的三元组。因此，在这种情况下，我们可以将映射视为二元组，而不是三元组。于是定义 $\mathfrak{P}\left[(\mathbb{X}, \dagger)\right]$ 为一个范畴，其对象与 $\mathbb{X}$ 的对象相同；其中， $\mathfrak{P}\left[(\mathbb{X}, \dagger)\right]$ 中的映射 $F\colon A \to B$ 是一个二元组 $F = (f, p)\colon A \to B$，由映射 $f\colon A \to B$ 和一个 †-正映射 $p\colon B \to B$ 组成。复合、恒等态射、幺半结构和余幺半群结构的定义与高斯构造中的定义相同，但忽略映射的第三个分量。

引理 4 8 $\mathfrak{P}\left[\ \mathbb{X}\ \dagger\ \right]$ *is a Markov category and moreover we have an isomorphism of Markov categories* $\mathfrak{P}\left[\ \mathbb{X}\ \dagger\ \right] \cong$。 $\mathfrak{G}\left[\ \mathbb{X}\ \dagger\ \right]_0$.

(,),(,)(,)

示例 4。9 *Recall that the zero object in* MAT(ℝ) *is* $n = 0$. *Then* $\mathfrak{P}\left[(\text{MAT}(\mathbb{R}),\ \text{T})\right] \cong \mathfrak{G}\left[(\text{MAT}(\mathbb{R}),\ \text{T})\right]_0$ *captures centered Gaussian conditional distributions where the expected value of the Gaussian noise is fixed to be* 0 *so in* , , , *define* 高斯 *other words centred Gaussian conditional distributions. Indeed* $_0$ *to be the category whose objects are the natural numbers* $n \in \mathbb{N}$ *and where a map is a pair* $M\ C$ $n \to m$ *consisting of an* $m \times n$ ℝ*-matrix* M *and a positive*(,)：, , E *semidefinite square* $m \times m$ ℝ*-matrix* C. *We interpret this pair as a centered Gaussian conditional distribution of a random variable* $Y = MX + \xi$ *where* $\xi \in \mathbb{R}^m$ *is Gaussian noise independent from* X *with expected value* $[\xi] = 0$.(MAT( ) T) 高斯 *Then* $\mathfrak{P}\left[\quad \mathbb{R}\ ,\ \right] \cong \quad _0$.

现在考虑当我们取基对象为双积 $X_1 \oplus \ldots \oplus X_n$ 时会发生什么。根据余积的余泛性质，映射 $X_1 \oplus \ldots \oplus X_N \to B$完全由 n 个映射 $X_j \to B$ 决定。因此，我们可以将 $\mathfrak{G}\left[(\mathbb{X}, \dagger)\right]_{X_1 \oplus \ldots \oplus X_n}$ 中的映射改为解释为 $2 + n$ 元组。于是定义 $\mathfrak{G}\left[(\mathbb{X}, \dagger)\right]_{X_1, \ldots, X_n}$ 为如下范畴：其对象与 $\mathbb{X}$ 的对象相同，而映射 $F\colon A \to B$ 属于 $\mathfrak{G}\left[(\mathbb{X}, \dagger)\right]_{X_1, \ldots, X_n}$，是一个 $2 + n$ 元组 $F = \ f\ p\ x_1 \quad x_n \quad A \to B \qquad f \quad A \to B \quad \dagger \qquad p \quad B \to B \qquad n \qquad x_j \quad X_j$(,,,. ..,): $\to B$ 由一个映射 :、一个 -正映射 :，以及映射 : $(1 \leq j \leq n)$ 组成。复合、恒等态射、幺半结构和余幺半群结构，按照映射前两个参数中的高斯构造以及其余 n 个参数中映射的定义来定义。

引理 4 10 $\mathfrak{G}\left[\ \mathbb{X}\ \dagger\ \right]_{X_1\ \ldots\ X_n}$ *is a Markov category and we have an isomorphism of Markov categories* $\mathfrak{G}\left[\ \mathbb{X}\ \dagger\ \right]_{X_1\ \ldots\ X_n} \cong$。 $\mathfrak{G}\left[\ \mathbb{X}\ \dagger\ \right]_{X_1 \oplus \ldots \oplus X_n}$.

(,) , , (,) , , (,)

例 4。11 *For* $k \geq 1$, *which is a biproduct* $k = 1 \oplus \ldots \oplus 1$ *in* MAT(ℝ) *we have that* $\mathfrak{G}\left[(\text{MAT}(\mathbb{R}), \text{T})\right]_k \cong$ $\mathfrak{G}\left[\quad \mathbb{R}\ ,\ \right]_{1\ \ldots\ 1}$ *which we can interpret as* k *Gaussian conditional distributions which differ only by their Gaus-*(MAT( ) T),,,,高斯 *sian noises who have the same covariance but possibly different expected values. Indeed define* $_k$ *to be the category whose objects are the natural numbers* $n \in \mathbb{N}$ *and where a map is an* k*-tuple* $M\ C\ s_1\ \ldots\ s_k$ (,,,,): $n \to m$ *consisting of an* $m \times n$ ℝ*-matrix* M *a positive semidefinite square* $m \times m$ ℝ*-matrix* C *and* k *(column) vector* $s_1\ \ldots$,,,, $s_k \in \mathbb{R}^m$.,,, *We interpret this tuple as Gaussian distributions of random variables* $Y_1 = MX_1 + \xi_1 \ \ldots\ Y_k = MX_k + \xi_k$ *where each* $\xi_j \in \mathbb{R}^m$ *is Gaussian noise independent from* X_j *with* $\mathrm{E}[\xi_j] = s_j$ *but which all have the same covariance matrix* VAR$[\xi_1] = \ldots =$ VAR $[\xi_k] = C$. *Then we have that* $\mathfrak{G}\left[(\text{MAT}(\mathbb{R}), \text{T})\right]_k \cong$ 高斯$_k$.

当然，引入高斯构造的主要目的是构造新的马尔可夫范畴。现在，让我们将高斯构造应用于复矩阵，并解释它如何对应于 *proper* 复高斯条件分布。

示例 4。12 *Define* 高斯$_p^{\mathbb{C}} := \mathfrak{G}\left[(\mathsf{MAT}(\mathbb{C})\ *)\right]_1$. *By Thm 4.5,* 高斯$_p^{\mathbb{C}}$ *is a Markov category. Just as the maps in* 高斯 *were interpreted as real Gaussian distributions, we claim that maps in* 高斯$_p^{\mathbb{C}}$ *correspond to certain* 复高斯分布 *. Indeed, recall that a complex Gaussian random variable* ζ *is determined by its expectation* $\mathsf{E}[\zeta]$, *its covariance and* 伪协方差

$$\mathsf{VAR}(\zeta) := \mathsf{E}[(\zeta - E[\zeta])(\zeta - E[\zeta])^*], \quad \mathsf{PVAR}(\zeta) := \mathsf{E}[(\zeta - E[\zeta])(\zeta - E[\zeta])^{\mathsf{T}}].$$

A complex Gaussian distribution ζ *is* 适当 *[23, Def 2.1] when its pseudocovariance is zero,* $\mathsf{PVAR}(\zeta) = 0$. *Therefore, arbitrary morphisms* $M\ C\ s \quad n \longrightarrow m$ *in* $\ {}_p^{\mathbb{C}}$ *are interpreted as proper complex Gaussian conditional distributions* $(,,)$: 高斯 E, $Y = MX + \zeta$ *where* $\zeta \in \mathbb{C}^m$ *is a complex Gaussian random variable with* $[\zeta] = s \quad \zeta = C$ *and* $\zeta = 0$. $\mathsf{VAR}()$, $\mathsf{PVAR}()$ *When moreover, the variance is zero, then such a proper complex Gaussian distribution is said to be* 圆对称 *[23, Result 2.11] so that it is invariant under the action of the complex unit circle. As such the morphisms* , $(\mathsf{MAT}())$ *in* $\mathfrak{P}\left[\ \mathbb{C}\ *\ \right]$ *are precisely the circularly symmetric complex Gaussian conditional distributions.*

现在我们也将高斯构造应用于四元数矩阵，这将产生某些 *quaternionic Gaussian distributions* 。

示例 4 13 *Define* $\ {}_p^{\mathbb{H}} = \mathfrak{G}\left[\ \mathbb{H}\ *\ \right]_1$. *Just as the maps in* $\ {}_p^{\mathbb{C}}$ *were interpreted as proper complex* 。 *Gaussian distributions we claim that maps in* $\ {}_p^{\mathbb{H}}$ *correspond to the quaternionic analogue. This time a quater-* 高斯 : (MAT( )) 高斯，高斯，*nionic Gaussian distribution is determined by its expectation, its covariance, and its three* 互补协方差 *[24, Sec III.A.],*

which are quaternionic analogues of the complex pseudocovariance. So given a quaternion randomvariable $\zeta \in \mathbb{H}^m$, *with expectation* $\mathsf{E}[\zeta]$, *its covariance and complementary covariances, for all* $\eta \in \{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$, *are given by:*

$$\mathsf{VAR}(\zeta) := \mathsf{E}\left[(\zeta - \mathsf{E}[\zeta])(\zeta - \mathsf{E}[\zeta])^*\right], \ \mathsf{PVAR}_\eta(\zeta) := \mathsf{E}\left[(\zeta - \mathsf{E}[\zeta])\left((\zeta - \mathsf{E}[\zeta])^{(\eta)}\right)^*\right],$$

where given a quaternionic matrix A, $A^{(\eta)}$ *is the quaternionic matrix given by linearly extending the conjugation* ($-^{(\eta)}\ \ \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{H}$ *given by* $q \mapsto -\eta q \eta$. *A quaternionic Gaussian distribution is called* ^{2} *when all three com-*) : 适当，PVAR ( ) PVAR ( ) *plementary covariances vanish [24, Sec III.D] so that* $_{\mathbf{i}}\,\zeta = {}_{\mathbf{j}}\,\zeta = {}_{\mathbf{k}}\,\zeta = 0$. *Thus a general* PVAR ( ) *morphism* (M, C, s) : $n \longrightarrow m$ *in* 高斯$_p^{\mathbb{H}}$ *can be interpreted as a proper quaternionic Gaussian conditional distribu-tion* $Y = MX + \zeta$, *where* $\zeta \in \mathbb{H}^m$ *is a quaternionic Gaussian random variable with* $\mathsf{E}[\zeta] = s$, $\mathsf{VAR}(\zeta) = C$, *and* PVAR $_\eta\,\zeta = 0$ *for all* $\eta \in \{\ ,\ ,$ *the variance is zero then such a proper quaternion Gaussian dis-* ( ) **ijk**$\}$. *When moreover, tribution is invariant under a canonical action of the quaternion unit sphere [24, Lemma 9]. As such the morphisms in* $\mathfrak{P}\left[\ \mathbb{Q}\ *\ \right]$ *are precisely the quaternionic Gaussian conditional distributions.* (MAT( )) 球对称

更一般地，通过将高斯构造应用于环 R 上的矩阵，可以得到一个马尔可夫范畴，进而探究这是否能重新获得关于 R 上高斯分布的一些既有理论，或者是否能为研究此类分布开辟新的途径。当然，并非每个 dagger 加性范畴都是环上的矩阵范畴，因此，研究将高斯构造应用于非矩阵范畴的实例（例如希尔伯特空间范畴）时，能够得到哪些概率框架，也会很有意思。

我们以简要讨论高斯构造的函子性来结束本节。对于伴随加法范畴 $(\mathbb{X}, \dagger)$ 和 $(\mathbb{Y}, \dagger)$，它们之间的 *dagger additive functor* 是一个函子 $\mathcal{F}\colon\ \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{Y}$，它是一个 dagger 函子 [16, Def 2.3], ，也就是说，它保持 dagger $\mathcal{F}(-^\dagger) = \mathcal{F}(-)^\dagger$，并且是一个加性函子 [3, Prop 1.3.4], ，这意味着它保持有限双积（在典范同构意义下） [17, Def 2.22] ，或者等价地说，它保持同态集的群结构 [3, Def 1.3.1]。另一方面，对于马尔可夫范畴 $\mathbb{C}$ 和 $\mathbb{D}$， *Markov functor* [13, 10.14] 是一个强对称幺半函子 [17, Def 1.29] ，它保持余幺半群结构（在幺半函子的幺半同构意义下）。现在，对于一个 dagger 加性函子$\mathcal{F}\colon (\mathbb{X}, \dagger) \longrightarrow (\mathbb{Y}, \dagger)$，对任意对象 $X \in \mathbb{X}$，定义函子 $\mathfrak{G}[\mathcal{F}]_X\colon\ \mathfrak{G}\left[(\mathbb{X}, \dagger)\right]_X \longrightarrow \mathfrak{G}\left[(\mathbb{Y}, \dagger)\right]_{\mathcal{F}(x)}$，其在对象上的作用为 $\mathfrak{G}[\mathcal{F}]_X(A) = \mathcal{F}(A)$，在映射上的作用为 $\mathfrak{G}[\mathcal{F}]_X(f, p, x) = \left(\mathcal{F}(f)\ \mathcal{F}(p)\ \mathcal{F}(x)\right)$。

[2]我们注意到，在几乎所有信号处理文献中，四元数高斯分布似乎是最常用的；为方便起见，通常假定正规四元数高斯分布的期望为零。然而，如 [24, 脚注 2], 所述，我们上面给出的具有非平凡期望的正规四元数高斯分布定义很容易推出。

引理 **4 14** *If* $\mathcal{F}$ $\mathbb{X}\dagger \to \mathbb{Y}\dagger$ *is a dagger additive functor then for any object* $X \in \mathbb{X}$ $\mathfrak{G}[\mathcal{F}]_X$ $\mathfrak{G}\left[\mathbb{X}\dagger\right]_X \circ : \to \mathfrak{G}\left[\mathbb{X}\dagger\right]_{\mathcal{F}X}$ *is a Markov functor.*
(,) (,) ,,: (,)(,)()

显然，高斯构造由此给出一个从带有选定对象的 dagger 加性范畴的（2-）范畴到马尔可夫范畴的（2-）范畴的（2-）函子。现在，若我们希望不必选定对象，由于 dagger 加性函子保持零对象（在同构意义下）和零映射，因此，如果 $\mathcal{F}\colon (\mathbb{X},\ \dagger) \to (\mathbb{Y},\ \dagger)$ 是一个 dagger 加性函子，那么 $\mathfrak{P}[\mathcal{F}]\colon \mathfrak{P}\left[(\mathbb{X},\ \dagger)\right] \to \mathfrak{P}\left[(\mathbb{Y},\ \dagger)\right]$ 就是一个马尔可夫函子，其在对象上的定义为 $\mathfrak{P}[\mathcal{F}](A) = \mathcal{F}(A)$，在映射上的定义为 $\mathfrak{P}[\mathcal{F}](f,\ p) = \big(\mathcal{F}(f)\ \mathcal{F}(p)\big)$。因此，$\mathfrak{P}$ 构造给出一个从实际的 dagger 加性范畴（2-）范畴到马尔可夫范畴（2-）范畴的（2-）函子。

5 高斯构造中的条件分布

本节将刻画高斯构造中所有可能的条件分布，并说明它们完全由基范畴中的一个映射决定，该映射与高斯构造中映射的正分量相容。我们称这样的映射为 *conditional generator*，并将证明，高斯构造中的条件分布与基范畴中的条件生成元之间存在双射对应。

在本节中，设 $(\mathbb{X},\ \dagger)$ 是一个 dagger 加性范畴，并固定一个对象 $X \in \mathbb{X}$。首先考虑 $\mathfrak{G}\left[(\mathbb{X},\ \dagger)\right]_X$ 中的一个映射，我们可以对其取条件态射，即一个类型为 $F\colon A \to B \otimes C$ 的映射，属于 $\mathfrak{G}\left[(\mathbb{X},\ \dagger)\right]_X$。于是 F 是一个三元组，由一个类型为 $A \to B \oplus C$ $\dagger$ $B \oplus C \to B \oplus C$ X 的映射、一个正映射 $\to B \oplus C$ 和一个广义点组成。因此，利用矩阵表示，它是一个由一个矩阵、一个矩阵和一个矩阵组成的三元组，其系数是以下类型的映射：

F 2×1 2×2 2×1

$$F = \left(\begin{bmatrix} f : A \to B \\ g : A \to C \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \alpha : B \to B & \beta : C \to B \\ \gamma : B \to C & \delta : C \to C \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} s : X \to B \\ t : X \to C \end{bmatrix} \right)$$

此外，由于第二个分量是 $\dagger$-正的，因此存在一个映射类型为 $[\,\phi\ \psi\,]\colon B \oplus C \to D$ 的映射，以及映射 $\phi\colon B \to D$ 和 $\psi\colon C \to D$，使得：

$$\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi & \psi \end{bmatrix}^\dagger \circ \begin{bmatrix} \phi & \psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi^\dagger \\ \psi^\dagger \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} \phi & \psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi^\dagger \circ \phi & \phi^\dagger \circ \psi \\ \psi^\dagger \circ \phi & \psi^\dagger \circ \psi \end{bmatrix}$$

这意味着 α 和 δ 都是 $\dagger$-正映射，并且 $\gamma = \beta^\dagger$ 也成立。因此，我们的映射 $F\colon A \to B \otimes C$ 具有如下形式：

$$F = \left(\begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \beta^\dagger & \delta \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} s \\ t \end{bmatrix} \right)$$

另一方面，F 的一个潜在条件态射可以是 $\mathfrak{G}\left[(\mathbb{X},\ \dagger)\right]_X$ 中类型为 $G\colon B \otimes A \to C$ 的映射，它是一个三元组，由一个类型为 $B \oplus A \to C$ 的映射、一个 $\dagger$-正映射 $C \to C$ 和一个广义点 $X \to C$ 组成。用矩阵表示时，G 是一个由一个 1×2 矩阵和两个 1×1 矩阵组成的三元组，它们的系数为：

$$G = \left(\begin{bmatrix} m : B \to C & k : A \to C \end{bmatrix}, \eta : C \to C, u : X \to C \right)$$

其中 η 是 $\dagger$-正的。现在我们证明，若 G 是 F 的条件态射，则 G 中的每个映射都可以用 F 和 m 的数据表示。

引理 5.1 *Suppose that* $G = \left(\begin{bmatrix} m & k \end{bmatrix}, \eta, u\right)$ *is a conditional of* $F = \left(\begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \beta^\dagger & \delta \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} s \\ t \end{bmatrix} \right)$. *Then the following equalities hold:*

$$k = g - m \circ f \qquad m \circ \alpha = \beta^\dagger \qquad \eta = \delta - m \circ \beta \qquad u = t - m \circ s$$

Proof: 假设 G 是 F 的条件态射，也就是说，以下等式成立：

$$(\mathsf{Id}_B \otimes G) \circ (\mathsf{copy}_B \otimes \mathsf{Id}_A) \circ (\mathsf{Id}_B \otimes \mathsf{del}_C \otimes \mathsf{Id}_A) \circ (F \otimes \mathsf{Id}_A) \circ \mathsf{copy}_A = F$$

我们先将左侧的每个分量写成一个三元组：

$$\begin{aligned}
\mathsf{Id}_B \otimes G &= (\mathsf{id}_B, 0, 0) \otimes \left(\begin{bmatrix} m & k \end{bmatrix}, \eta, u \right) \\
&= \left(\begin{bmatrix} \mathsf{id}_B & 0 & 0 \\ 0 & m & k \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \eta \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ u \end{bmatrix} \right), \\
\mathsf{copy}_B \otimes \mathsf{Id}_A &= \left(\begin{bmatrix} \mathsf{id}_B \\ \mathsf{id}_B \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) \otimes (\mathsf{id}_A, 0, 0) \\
&= \left(\begin{bmatrix} \mathsf{id}_B & 0 \\ \mathsf{id}_B & 0 \\ 0 & \mathsf{id}_A \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right), \\
\mathsf{Id}_B \otimes \mathsf{del}_C \otimes \mathsf{Id}_A &= (\mathsf{id}_B, 0, 0) \otimes (0, 0, 0) \otimes (\mathsf{id}_A, 0, 0) \\
&= \left(\begin{bmatrix} \mathsf{id}_B & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathsf{id}_A \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right), \\
F \otimes \mathsf{Id}_A &= \left(\begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \beta^\dagger & \delta \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} s \\ t \end{bmatrix} \right) \otimes (\mathsf{id}_A, 0, 0) \\
&= \left(\begin{bmatrix} f & 0 \\ g & 0 \\ 0 & \mathsf{id}_A \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \alpha & \beta & 0 \\ \beta^\dagger & \delta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} s \\ t \\ 0 \end{bmatrix} \right), \\
\mathsf{copy}_A &= \left(\begin{bmatrix} \mathsf{id}_A \\ \mathsf{id}_A \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right).
\end{aligned}$$

让我们逐部分将它们组合起来，细节留给读者作为练习验证。因此，我们可以先计算：

$$\begin{aligned}
(F \otimes \mathsf{Id}_A) \circ \mathsf{copy}_A &= \left(\begin{bmatrix} f & 0 \\ g & 0 \\ 0 & \mathsf{id}_A \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \alpha & \beta & 0 \\ \beta^\dagger & \delta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} s \\ t \\ 0 \end{bmatrix} \right) \circ \left(\begin{bmatrix} \mathsf{id}_A \\ \mathsf{id}_A \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) \\
&= \left(\begin{bmatrix} f \\ g \\ \mathsf{id}_A \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \alpha & \beta & 0 \\ \beta^\dagger & \delta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} s \\ t \\ 0 \end{bmatrix} \right)
\end{aligned}$$

于是我们得到：

$$\begin{aligned}
&(\mathsf{Id}_B \otimes \mathsf{del}_C \otimes \mathsf{Id}_A) \circ \left(\begin{bmatrix} f \\ g \\ \mathsf{id}_A \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \alpha & \beta & 0 \\ \beta^\dagger & \delta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} s \\ t \\ 0 \end{bmatrix} \right) \\
= &\left(\begin{bmatrix} f \\ \mathsf{id}_A \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \alpha & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} \mathsf{id}_B & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \mathsf{id}_A \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} s \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \left(\begin{bmatrix} f \\ \mathsf{id}_A \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} s \\ 0 \end{bmatrix} \right)
\end{aligned}$$

接着我们计算:

$$
\begin{aligned}
&(\mathsf{copy}_B \otimes \mathsf{Id}_A) \circ \left(\begin{bmatrix} f \\ \mathsf{id}_A \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} s \\ 0 \end{bmatrix} \right) \\
&= \left(\begin{bmatrix} \mathsf{id}_B & 0 \\ \mathsf{id}_B & 0 \\ 0 & \mathsf{id}_A \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) \circ \left(\begin{bmatrix} f \\ \mathsf{id}_A \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} s \\ 0 \end{bmatrix} \right) \\
&= \left(\begin{bmatrix} f \\ f \\ \mathsf{id}_A \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \alpha & \alpha & 0 \\ \alpha & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} s \\ s \\ 0 \end{bmatrix} \right)
\end{aligned}
$$

最后，我们终于得到:

$$
\begin{aligned}
&(\mathsf{Id}_Z \otimes G) \circ \left(\begin{bmatrix} f \\ f \\ \mathsf{id}_A \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \alpha & \alpha & 0 \\ \alpha & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} s \\ s \\ 0 \end{bmatrix} \right) \\
&= \left(\begin{bmatrix} \mathsf{id}_B & 0 & 0 \\ 0 & m & k \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \eta \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ u \end{bmatrix} \right) \circ \left(\begin{bmatrix} f \\ f \\ \mathsf{id}_A \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \alpha & \alpha & 0 \\ \alpha & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} s \\ s \\ 0 \end{bmatrix} \right) \\
&= \left(\begin{bmatrix} f \\ m \circ f + k \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \alpha & \alpha \circ m^\dagger \\ m \circ \alpha & \eta + m \circ \alpha \circ m^\dagger \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} s \\ u + m \circ s \end{bmatrix} \right)
\end{aligned}
$$

因此我们得到:

$$
\begin{aligned}
&(\mathsf{Id}_B \otimes G) \circ (\mathsf{copy}_B \otimes \mathsf{Id}_A) \circ (\mathsf{Id}_B \otimes \mathsf{del}_C \otimes \mathsf{Id}_A) \circ (F \otimes \mathsf{Id}_A) \circ \mathsf{copy}_A \\
&\quad = \left(\begin{bmatrix} f \\ m \circ f + k \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \alpha & \alpha \circ m^\dagger \\ m \circ \alpha & \eta + m \circ \alpha \circ m^\dagger \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} s \\ u + m \circ s \end{bmatrix} \right)
\end{aligned} \tag{4}
$$

那么，由于 G 是 F的条件态射，以下等式成立:

$$
\left(\begin{bmatrix} f \\ m \circ f + k \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \alpha & \alpha \circ m^\dagger \\ m \circ \alpha & \eta + m \circ \alpha \circ m^\dagger \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} s \\ u + m \circ s \end{bmatrix} \right) = \left(\begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \beta^\dagger & \delta \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} s \\ t \end{bmatrix} \right)
$$

特别地，这意味着 $m \circ f + k = g$、 $m \circ \alpha = \beta^\dagger$、 $\eta + m \circ \alpha \circ m^\dagger = \delta$和 $u + m \circ s = t$。现在，由于 α 是†-正的，我们有 $\alpha^\dagger = \alpha$，因此 $m \circ \alpha = \beta^\dagger$ 意味着 $\alpha \circ m^\dagger = \beta$，从而我们也得到 $\eta + m \circ \beta = \delta$。然后在适当的位置作减法并重新整理，便得到所需的 $k = g - m \circ f$、 $m \circ \alpha = \beta^\dagger$、 $\eta = \delta - m \circ \alpha \circ m^\dagger$和 $u = t - m \circ s$。□

前面的引理告诉我们，若 $G\colon B \otimes A \to C$是 $F\colon A \to B \otimes C$的条件态射，那么 F的每个分量以及 G的 $B \to C$ 分量，都能完全确定 G的其他分量。因此，我们可以问：为了构造 F的条件态射，基范畴上的映射 $B \to C$需要满足什么条件? 事实证明，我们只需要求它与 F的 †-正分量满足两个简单的相容条件。我们将这样的映射称为†-正映射的 *conditional generator*。

定义 5。2 *Given a †-positive map* $\left[\begin{smallmatrix} \alpha & \beta \\ \beta^\dagger & \delta \end{smallmatrix}\right]\colon \quad B \oplus C \to B \oplus C$ *in* $(\mathbb{X},\ \dagger)$ *a* 条件生成元 *for this*

†-positive map is a map $m\colon \ B \to C$ *in* $\mathbb{X}$ *such that:*

(i) $m \circ \alpha = \beta^\dagger$(ii)

$\delta - m \circ \beta$ *is †-positive.*

引理 5.3 *Let* $F = \left(\begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \beta^\dagger & \delta \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} s \\ t \end{bmatrix} \right) : A \longrightarrow B \otimes C$ *be a map in* $\mathfrak{G}\left[(\mathbb{X}, \dagger)\right]_X$, *and let* $m : B \longrightarrow C$ *be a conditional generator for* $\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \beta^\dagger & \delta \end{bmatrix}$. *Then define the map* $G_m : B \otimes A \longrightarrow C$ *in* $\mathfrak{G}\left[(\mathbb{X}, \dagger)\right]_X$ *as the triple:*

$$G_m = \left(\begin{bmatrix} m & g - m \circ f \end{bmatrix}, \delta - m \circ \beta, t - m \circ s \right) \tag{5}$$

Then G_m *is a conditional of* F.

PROOF: 由于 m 是条件生成元，$\delta - m \circ \beta$ 是 †-正的，因此 G_m 是 $\mathfrak{G}\left[(\mathbb{X}, \dagger)\right]_X$ 中的良定义映射。现在我们需要证明（1）成立。首先，由于 α 是 †-正的，且 $m \circ \alpha = \beta^\dagger$，我们也有 $\alpha \circ m^\dagger = \beta$。现在，令 $k = g - m \circ f$，$\eta = \delta - m \circ \beta$，并令 $u = t - m \circ s$，利用（4），计算得：

$$\begin{aligned}
&(\mathsf{Id}_B \otimes G_m) \circ (\mathsf{copy}_B \otimes \mathsf{Id}_A) \circ (\mathsf{Id}_B \otimes \mathsf{del}_C \otimes \mathsf{Id}_A) \circ (F \otimes \mathsf{Id}_A) \circ \mathsf{copy}_A \\
&= \left(\begin{bmatrix} f \\ m \circ f + k \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \alpha & \alpha \circ m^\dagger \\ m \circ \alpha & \eta + m \circ \alpha \circ m^\dagger \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} s \\ u + m \circ s \end{bmatrix} \right) \\
&= \left(\begin{bmatrix} f \\ m \circ f + g - m \circ f \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \alpha & \alpha \circ m^\dagger \\ m \circ \alpha & \delta - m \circ \beta + m \circ \beta \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} s \\ t - m \circ s + m \circ s \end{bmatrix} \right) \\
&= \left(\begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \alpha & \alpha \circ m^\dagger \\ m \circ \alpha & \delta \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} s \\ t \end{bmatrix} \right) = \left(\begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \beta^\dagger & \delta \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} s \\ t \end{bmatrix} \right) = F
\end{aligned}$$

因此 G_m 满足（1），于是 G_m 是 F的条件态射。 □

结合上述两个引理可知，高斯构造中的条件分布与基范畴中的条件生成元相对应。

定理 5.4 *For a map* $F = \left(\begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \beta^\dagger & \delta \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} s \\ t \end{bmatrix} \right) : A \longrightarrow B \otimes C$ *in* $\mathfrak{G}\left[(\mathbb{X}, \dagger)\right]_X$, *conditionals of* F *are in bijective correspondence with conditional generators of* $\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \beta^\dagger & \delta \end{bmatrix}$. *Explicitly:*

(i) *If* $G = \left(\begin{bmatrix} m & k \end{bmatrix}, \eta, u \right)$ *is a conditional of* F *then* m *is a conditional generator of* $\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \beta^\dagger & \delta \end{bmatrix}$; (ii) *If* m *is a conditional generator of* $\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \beta^\dagger & \delta \end{bmatrix}$, *then* G_m *as defined in (5) is a conditional of* F; *and these constructions are inverses of each other.*

PROOF: 引理 5.3 精确地告诉我们如何从条件生成元构造条件分布。现在我们证明反向结论。如果 F有一个条件态射 $G = \left(\begin{bmatrix} m & k \end{bmatrix}, \eta, u \right)$，那么根据引理 5.1，这意味着 $m \circ \alpha = \beta^\dagger$ 和 $\eta = \delta - m \circ \beta$。然而，由于 η 是 †-正的（因为 G 是 $\mathfrak{G}\left[(\mathbb{X}, \dagger)\right]_X$ 中的一个映射），因此 $\delta - m \circ \beta$ 是 †- 正的。由此可见，m 5 1 $G = \left(\begin{bmatrix} m & g - m \circ f \end{bmatrix} \ \delta - m \circ \beta \ t - m \circ s \right) =$ G_m 确实是一个条件生成元。此外，引理 . 还告诉我们，，，这意味着上述构造互为逆。 □

因此，高斯构造中的映射 F 存在条件分布，当且仅当其 †-正分量存在条件生成元 m。此外，F 的每个条件分布都具有 G_m 这种形式，其中某个条件生成元可取相应值。现在需要强调的是，与条件分布一样，条件生成元未必存在；即使存在，也未必唯一。

6 Moore-Penrose 逆

马尔可夫范畴高斯具有条件分布；其中，条件分布的一种规范选取可以利用 *Moore-Penrose inverse* 构造。本节将这一结果推广到 *Moore-Penrose dagger categories* 的情形，说明将高斯构造应用于 Moore-Penrose dagger加性范畴后，所得范畴是一个具有条件分布的马尔可夫范畴，这也是本文的主要结果。

我们先回顾 dagger 范畴中的 Moore-Penrose 逆；dagger 范畴是一种特殊的 *generalized inverse* 映射结构。关于 Moore-Penrose dagger（加性）范畴的更深入介绍，请参阅 [6, 11]。

定义 6。1 *[6, Def 2.3] In a dagger category* $(\mathbb{X}, \dagger)$ *a* ***Moore-Penrose逆*** *of a map* $f\colon\ A \longrightarrow B$ *is a mapof dual type* $f^\circ\colon\ B \longrightarrow A$ *such that the following equalities hold:*

[MP.1] $f \circ f^\circ \circ f = f$ **[MP.2]** $f^\circ \circ f \circ f^\circ = f^\circ$

[MP.3] $\left(f \circ f^\circ\right)^\dagger = f \circ f^\circ$ **[MP.4]** $\left(f^\circ \circ f\right)^\dagger = f^\circ \circ f$

If f *has a Moore-Penrose inverse, we say that* f *is* ***Moore-Penrose可逆*** *or simply* ***摩尔–彭若斯***. *A* ***Moore-Penrose dagger*** **（加法）范畴** *is a dagger (additive) category such that every map is Moore-Penrose.*

在任意 dagger 范畴中，Moore-Penrose 逆不一定存在；但如果 Moore-Penrose 逆确实存在，那么根据 *unique* [6, 引理 2。4], 因此，我们可以谈论映射的 *the* Moore-Penrose逆。由此，对于 dagger 范畴而言，具有 Moore-Penrose 性质是一种性质，而非结构。

例 6。2 *It is well-known that complex matrices and real matrices have Moore-Penrose inverses. Indeed, givena* $n \times m$ *complex matrix* A*, there exists a unique complex matrix* A° *of size* $m \times n$ *such that* $AA^\circ A = A$*,* $A^\circ AA^\circ = A^\circ$*,* $\left(AA^\circ\right)^* = AA^\circ$ *and* $\left(A^\circ A\right)^* = A^\circ A$*. When* A *is a real matrix, then its Moore-Penrose inverse* A° *will also be a real matrix, and in this case* $\left(AA^\circ\right)^* = AA^\circ$ *and* $\left(A^\circ A\right)^* = A^\circ A$*. See* (MAT(ℂ), †) *[4] for various ways of computing the Moore-Penrose inverse. Therefore it follows that* $\mathbb{C}$ *and* $\mathbb{R}$*, with* $* = \mathrm{id}$*, are Moore-Penrose dagger additive categories*[3] *[6, Ex 2.9]. Similarly, quaternionic matrices also have Moore-Penrose inverses [25, Thm 5.2] therefore* $\mathbb{H}$ *with* $* = \mathrm{id}$ *is a Moore-Penrose dagger additive category as well.* (MAT(ℍ), †)

现在，我们着手证明主要目标：在高斯构造中，我们总能利用 Moore-Penrose 逆构造条件分布。根据定理 5.4，只需说明如何利用 Moore-Penrose 逆构造条件生成元。为此，我们首先证明，在 Moore-Penrose dagger 加性范畴中，条件生成元的一条公理可以省略。

引理 6.3 *In a Moore-Penrose dagger additive category* $(\mathbb{X}, \dagger)$ *a map* $m\colon\ B \longrightarrow C$ *is a conditional generator of a* $\dagger$*-positive map* $\left[\begin{smallmatrix} \alpha & \beta \\ \beta^\dagger & \delta \end{smallmatrix}\right]\colon\ B \oplus C \longrightarrow B \oplus C$ *if and only if* $m \circ \alpha = \beta^\dagger$.

Proof: 按定义，$\Rightarrow$ 方向显然成立。对于 $\Leftarrow$ 方向，假设 $m \circ \alpha = \beta^\dagger$。那么，要证明 m 是条件生成元，我们需要证明 $\delta - m \circ \beta$ 是 $\dagger$-正的。为此，首先回顾上一节中的说明：由于 $\left[\begin{smallmatrix} \alpha & \beta \\ \beta^\dagger & \delta \end{smallmatrix}\right]$ 是 $\dagger$-正的，这意味着存在一个映射 $[\,\phi\ \psi\,]\colon\ B \oplus C \longrightarrow D$，以及映射 $\phi\colon\ B \longrightarrow D$ 和 $\psi\colon\ C \longrightarrow D$，使得下列等式成立：

$$\alpha = \phi^\dagger \circ \phi \qquad \delta = \psi^\dagger \circ \psi \qquad \beta^\dagger = \psi^\dagger \circ \phi \qquad \beta = \phi^\dagger \circ \psi \tag{6}$$

现在，由于我们处于 Moore-Penrose dagger 范畴中，还注意到根据 [6, 引理 2.7.(v)], 下述等式也成立：

$$\alpha^\circ = \phi^\circ \circ \phi^{\circ\dagger} \tag{7}$$

这将是证明 $\delta - m \circ \beta$ 是 $\dagger$-正的关键。现在，由于 α 是 $\dagger$-正的且 $m \circ \alpha = \beta^\dagger$，我们还得到 $\alpha \circ m^\dagger = \beta$。然后利用上述关于 α 和 ϕ 的 Moore-Penrose 逆的恒等式，我们计算得：

$$\begin{aligned} m \circ \beta &= m \circ \alpha \circ m^\dagger = m \circ \alpha \circ \alpha^\circ \circ \alpha \circ m^\dagger = \beta^\dagger \circ \alpha^\circ \circ \beta \\ &= \psi^\dagger \circ \phi \circ \phi^\circ \circ \phi^{\circ\dagger} \circ \phi^\dagger \circ \psi = \psi^\dagger \circ \phi \circ \phi^\circ \circ \left(\phi \circ \phi^\circ\right)^\dagger \circ \psi \\ &= \psi^\dagger \circ \phi \circ \phi^\circ \circ \phi \circ \phi^\circ \circ \psi = \psi^\dagger \circ \phi \circ \phi^\circ \circ \psi \end{aligned}$$

Th我们得到 $m \circ \beta = \psi^\dagger \circ \phi \circ \phi^\circ \circ \psi$。现在考虑映射 $\chi := (\mathrm{id}_B - \phi \circ \phi^\circ) \circ \psi$。然后我们计算：

$$\chi^\dagger \circ \chi = \left((\mathrm{id}_B - \phi \circ \phi^\circ) \circ \psi\right)^\dagger \circ (\mathrm{id}_B - \phi \circ \phi^\circ) \circ \psi$$

[3]需要注意的是，此处 dagger 的选择很重要，因为 (MAT(ℂ), T) 并非摩尔–彭若斯 [6, 例 2。10]。

$$
\begin{aligned}
&= \psi^\dagger \circ (\mathsf{id}_B - \phi \circ \phi^\circ)^\dagger \circ (\mathsf{id}_B - \phi \circ \phi^\circ) \circ \psi \\
&= \psi^\dagger \circ \left(\mathsf{id}_B^\dagger - (\phi \circ \phi^\circ)^\dagger\right) \circ (\mathsf{id}_B - \phi \circ \phi^\circ) \circ \psi \\
&= \psi^\dagger \circ \left(\mathsf{id}_B - \phi \circ \phi^\circ\right) \circ (\mathsf{id}_B - \phi \circ \phi^\circ) \circ \psi \\
&= \psi^\dagger \circ \left(\mathsf{id}_B - \phi \circ \phi^\circ - \phi \circ \phi^\circ + \phi \circ \phi^\circ \circ \phi \circ \phi^\circ\right) \circ \psi \\
&= \psi^\dagger \circ \left(\mathsf{id}_B - \phi \circ \phi^\circ - \phi \circ \phi^\circ + \phi \circ \phi^\circ\right) \circ \psi \\
&= \psi^\dagger \circ \left(\mathsf{id}_B - \phi \circ \phi^\circ\right) \circ \psi \\
&= \psi^\dagger \circ \psi - \psi^\dagger \circ \phi \circ \phi^\circ \circ \psi \\
&= \delta - m \circ \beta
\end{aligned}
$$

因此， $\delta - m \circ \beta$ 是 †-正的，因而 m 是条件生成元。 □

感谢引理 6.3，我们可以轻松展示如何使用 Moore-Penrose逆构造条件生成元。

命题 6 4 *In a Moore-Penrose dagger additive category* $\mathbb{X}$ † $B \oplus C \longrightarrow B \oplus C$ *is* †*-positive then.*

it has a conditional generator $m = \beta^\dagger \circ \alpha^\circ$.

(,) *if* $\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \beta^\dagger & \delta \end{bmatrix}$: ,

PROOF: 由引理 6.3，只需证明 $m \circ \alpha = \beta^\dagger$。与前一个证明一样，由于 $\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \beta^\dagger & \delta \end{bmatrix}$ 是 †-正的，这意味着存在一个映射 $[\phi \ \psi] : \ B \oplus C \longrightarrow D$，以及映射 $\phi : \ B \longrightarrow D$ 和 $\psi : \ C \longrightarrow D$，使得（6）中的等式成立。然后利用 [**MP**。**1**], [**MP**。**3**], 和（7），我们计算：

$$
\begin{aligned}
m \circ \alpha = \beta^\dagger \circ \alpha^\circ \circ \alpha = \psi^\dagger \circ \phi \circ \phi^\circ \circ \phi^{\circ\dagger} \circ \phi^\dagger \circ \phi = \psi^\dagger \circ \phi \circ \phi^\circ \circ (\phi \circ \phi^\circ)^\dagger \circ \phi \\
= \psi^\dagger \circ \phi \circ \phi^\circ \circ \phi \circ \phi^\circ \circ \phi = \psi^\dagger \circ \phi \circ \phi^\circ \circ \phi = \psi^\dagger \circ \phi = \beta^\dagger
\end{aligned}
$$

因此 $m \circ \alpha = \beta^\dagger$，从而 $m = \beta^\dagger \circ \alpha^\circ$ 是一个条件生成元。 □

现在我们可以陈述本文的主要结果。

定理 6。**5** *Given a Moore-Penrose dagger additive category* $(\mathbb{X}, \ \dagger)$ *and any object* $X \in \mathbb{X}$, $\mathfrak{G}\left[(\mathbb{X}, \ \dagger)\right]_X$ *is a Markov category with conditionals. In particular, given a map* $F = \left(\begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix}, \ \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \beta^\dagger & \delta \end{bmatrix}, \ \begin{bmatrix} s \\ t \end{bmatrix}\right) : \ A \longrightarrow B \otimes C$ *in* $\mathfrak{G}\left[(\mathbb{X}, \ \dagger)\right]_X$, *themap* $F|_B : \ B \otimes A \longrightarrow C$ *defined as the triple:*

$$
F|_B = \left(\begin{bmatrix} \beta^\dagger \circ \alpha^\circ & g - \beta^\dagger \circ \alpha^\circ \circ f \end{bmatrix}, \delta - \beta^\dagger \circ \alpha^\circ \circ \beta, t - \beta^\dagger \circ \alpha^\circ \circ s\right) \tag{8}
$$

is a conditional of F.

PROOF: 由命题 6.4，我们知道 $\beta^\dagger \circ \alpha^\circ$ 是 $\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \beta^\dagger & \delta \end{bmatrix}$ 的条件生成元。因此，由引理 5.3，可得 F具有一个条件态射 $G_{\beta^\dagger \circ \alpha^\circ}$，如式（5）所定义，它恰好就是 $F|_B$。因此，我们得出结论： $\mathfrak{G}\left[\ (\mathbb{X}, \ \dagger)\ \right]_X$是一个具有条件分布的马尔可夫范畴。□

示例 6 6 *Applying Theorem 6.5 to real matrices recaptures the fact that* $\mathfrak{G}\left[\quad \mathbb{R}\ , \quad\right]_1 \cong$ *has con-*。(MAT( )T) 高斯 ,,(,) *ditionals (Ex 2.4) which was of course our main motivating example. Furthermore we also get that* $\mathfrak{P}\left[\right]^{\mathbb{X}\dagger}$ $\mathfrak{G}\left[\ \mathbb{X}\ \dagger\ \right]_0$ *and* $\mathfrak{G}\left[\quad \mathbb{R}\ , \quad\right]_k \cong \quad_k$ *are also Markov categories with conditionals.* (,) (MAT( ) T) 高斯

示例 6 7 *Applying Theorem 6.5 to complex matrices implies that the Markov category of proper complex Gaus-*。,高斯: (MAT( )),, *sian conditional distributions* $\mathfrak{G}\left[\quad \mathbb{C}\ * \right]_1$ *has conditionals. Similarly the Markov category of circu-larly symmetric complex Gaussian conditional distributions* $\mathfrak{P}\quad \mathbb{C}\ * \cong \mathfrak{G}\left[\quad \mathbb{C}\ * \right]_0$,(MAT()) (MAT( )),

also has conditionals. ,(MAT( ))

Similarly for any $n \in \mathbb{N}$ *the Markov category* $\mathfrak{G}\left[\quad \mathbb{C}\ * \right]_n$ *has conditionals.*

例子 6 8 *Applying Theorem 6.5 to quaternionic matrices gives us that the Markov category of proper quater-*。 , (MAT( )): *nionic Gaussian conditional distrubtions* $\mathfrak{G}\left[\quad \mathbb{H}\ * \right]_1 = \quad_p^{\mathbb{H}}$ *has conditionals. Similarly the Markov cat-*高斯, , *egory of spherically symmetric quaternionic Gaussian conditional distributions,* $\mathfrak{P}(\mathrm{MAT}(\mathbb{H})\ *) \cong \mathfrak{G}\left[(\mathrm{MAT}(\mathbb{H})\ *)\right]_0$, *also has conditionals. Similarly for any* $n \in \mathbb{N}$ *the Markov category* $\mathfrak{G}\left[\quad \mathbb{H}\ * \right]_n$ *has conditionals.* , (MAT( ))

将高斯构造应用于其他摩尔–彭若斯 dagger 加性范畴的例子，会很有意思。例如，我们可以将高斯构造应用于非矩阵类的摩尔–彭若斯 dagger 加性范畴，例如偏极化阿贝尔簇范畴 [1], ，从而为代数几何与概率论之间建立一条潜在的新联系。

条件分布的另外 7 种构造

在上一节中，我们展示了如何使用 Moore-Penrose 逆，在高斯构造中构建条件态射。然而，眼尖的读者可能已经注意到，为此我们并不需要 Moore-Penrose 逆的全部能力！本节将说明，如何使用稍弱的广义逆，在高斯构造中构建条件态射。我们首先在 dagger 范畴中介绍（i, j, k）-广义逆 [4, 定义 6.2。4] 的对应概念。

定义 7。1 *Let* $\{i_1 < \ldots < i_j\} \subseteq \{1 < 2 < 3 < 4\}$. *Then in a dagger category* $(\mathbb{X}, \dagger)$ *a* ***[MP.**i_1, .., i_j**]-逆** *of a map* $f : A \to B$ *is a map of dual type* $f^\bullet : B \to A$ *which satisfies* ***[MP.**i_1**]**, ... ***[MP.**i_j**]**.

当然请注意， **[MP.1,2,3,4]**-逆恰好就是摩尔–彭若斯逆。我们将特别关注 **[MP.1,3]**-逆。请注意，尽管摩尔–彭若斯逆是唯一的， **[MP.1,3]**-逆却不一定唯一。事实上，请注意，摩尔–彭若斯逆始终是一个 **[MP.1,3]**-逆；然而，即使在 Moore-Penrose dagger 范畴中，一个映射 f 也可能具有一个 **[MP.1,3]**- 逆 $f^\bullet$，而该逆并非其摩尔 – 彭若斯逆 f°。例如，对于复矩阵， **[MP.1,3]**-逆对应于 *least squares inverses* [4, 图 6。1] ，它用于给出最小二乘解 [4, 定义 2.1。1], ，并且一个复矩阵可能具有多个最小二乘逆。

我们的目标是展示如何在高斯构造中使用 **[MP.1,3]**-逆来构造条件态射。在本节余下部分中，我们将在一个 dagger 加性范畴 $(\mathbb{X}, \dagger)$ 中进行讨论。

引理 7。2 *Let* $\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \beta^\dagger & \delta \end{bmatrix} : B \oplus C \to B \oplus C$ *be a* $\dagger$*-positive map in* $(\mathbb{X}, \dagger)$ *such that there is a map* $[\,\phi\ \psi\,] : B \oplus C \to D$ *such that* $\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \beta^\dagger & \delta \end{bmatrix} = [\,\phi\ \psi\,]^\dagger \circ [\,\phi\ \psi\,]$ *for which* $\phi : B \to D$ *has a* ***[MP.1**, 3**]**-inverse $\phi^\bullet : D \to B$. *Then* $m = \psi^\dagger \circ \phi^{\bullet\dagger}$ *is a conditional generator of* $\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \beta^\dagger & \delta \end{bmatrix}$.

Proof: 本证明中的计算与引理6.3 的证明类似，但存在一些细微差别。现在根据假设，回顾一下 ϕ 和 ψ 满足（6）。同样根据假设， $\phi^\bullet$ 是一个 **[MP。1,3]**-逆ϕ 意味着它满足以下条件：

$$\phi \circ \phi^\bullet \circ \phi = \phi \qquad\qquad (\phi \circ \phi^\bullet)^\dagger = \phi \circ \phi^\bullet$$

我们需要证明 $m = \psi^\dagger \circ \phi^{\bullet\dagger}$ 满足成为条件生成元的两个必要性质。首先计算：

$$m \circ \alpha = \psi^\dagger \circ \phi^{\bullet\dagger} \circ \phi^\dagger \circ \phi = \psi^\dagger \circ (\phi \circ \phi^\bullet)^\dagger \circ \phi = \psi^\dagger \circ \phi \circ \phi^\bullet \circ \phi = \psi^\dagger \circ \phi = \beta^\dagger$$

因此， $m \circ \alpha = \beta^\dagger$ 正如所期望的那样。接下来，我们需要证明 $\delta - m \circ \beta$ 是 $\dagger$-正的。和之前一样，由于 $m \circ \alpha = \beta^\dagger$, 我们也得到 $\beta = \alpha \circ m^\dagger$。因此计算：

$$\begin{aligned} m \circ \beta &= m \circ \alpha \circ m^\dagger = m \circ \phi^\dagger \circ \phi \circ m^\dagger = \psi^\dagger \circ \phi^{\bullet\dagger} \circ \phi^\dagger \circ \phi \circ \phi^\bullet \circ \psi \\ &= \psi^\dagger \circ (\phi \circ \phi^\bullet)^\dagger \circ \phi \circ \phi^\bullet \circ \psi\psi^\dagger \circ \phi \circ \phi^\bullet \circ \phi \circ \phi^\bullet \circ \psi = \psi^\dagger \circ \phi \circ \phi^\bullet \circ \psi \end{aligned}$$

Th我们 $m \circ \beta = \psi^\dagger \circ \phi \circ \phi^\bullet \circ \psi$。接着考虑映射 $\zeta = (\mathsf{id}_B - \phi \circ \phi^\bullet) \circ \psi$。因此，我们计算 tha t:

$$\begin{aligned} \zeta^\dagger \circ \zeta = &\ \left((\mathsf{id}_B - \phi \circ \phi^\bullet) \circ \psi\right)^\dagger \circ (\mathsf{id}_B - \phi \circ \phi^\bullet) \circ \psi \\ = &\ \psi^\dagger \circ (\mathsf{id}_B - \phi \circ \phi^\bullet)^\dagger \circ (\mathsf{id}_B - \phi \circ \phi^\bullet) \circ \psi \\ = &\ \psi^\dagger \circ \left(\mathsf{id}_B^\dagger - (\phi \circ \phi^\bullet)^\dagger\right) \circ (\mathsf{id}_B - \phi \circ \phi^\bullet) \circ \psi \\ = &\ \psi^\dagger \circ \left(\mathsf{id}_B - \phi \circ \phi^\bullet\right) \circ (\mathsf{id}_B - \phi \circ \phi^\bullet) \circ \psi \\ = &\ \psi^\dagger \circ \left(\mathsf{id}_B - \phi \circ \phi^\bullet - \phi \circ \phi^\bullet + \phi \circ \phi^\bullet \circ \phi \circ \phi^\bullet\right) \circ \psi \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \psi^\dagger \circ \left(\mathsf{id}_B - \phi \circ \phi^\bullet - \phi \circ \phi^\bullet + \phi \circ \phi^\bullet\right) \circ \psi \\
&= \psi^\dagger \circ \left(\mathsf{id}_B - \phi \circ \phi^\bullet\right) \circ \psi \\
&= \psi^\dagger \circ \psi - \psi^\dagger \circ \phi \circ \phi^\bullet \circ \psi \\
&= \delta - m \circ \beta
\end{aligned}
$$

因此 $\delta - m \circ \beta$ 确实是 †-正的。因此，我们得出结论： $m = \psi^\dagger \circ \phi^{\bullet\dagger}$ 是一个条件生成元。 □

因此可知，若底层 dagger 范畴中的每个映射都有一个 [**MP.1,3**]-逆，则高斯构造就有条件分布。

命题 7.3 *If every map in* $\mathbb{X}$ † *admits a* [**1 3**]*-inverse then for every object* $X \in \mathbb{X}$ $\mathfrak{G}\left[\ \mathbb{X}\ \dagger\ \right]_X$ *is a Markov category with conditionals.*

(,) ***MP.,,,***(,)

当然，摩尔–彭若斯 dagger 加性范畴中的每个映射都有一个 [**MP.1,3**]-逆，即摩尔–彭若斯逆。不过，必须再次强调，某个映射可能有一个 [**MP.1,3**]-逆，但它并非摩尔–彭若斯逆。因此，引理 7.2 通常会产生一个不同于命题 6.4中条件生成元的条件生成元。这是意料之中的，因为条件分布远非唯一。不过，如果我们在引理 [**MP.1,3**]-逆的位置上使用摩尔–彭若斯逆来应用引理 7.2，就能重新得到命题 6.4中我们最喜欢的条件生成元。

引理 7.4 *Suppose that* $(\mathbb{X}, \dagger)$ *is Moore-Penrose. Let* $\left[\begin{smallmatrix} \alpha & \beta \\ \beta^\dagger & \delta \end{smallmatrix}\right]$ *be a* †*-positive map in* $(\mathbb{X}, \dagger)$*. Then for any map* $[\,\phi\ \psi\,]$ *such that* $\left[\begin{smallmatrix} \alpha & \beta \\ \beta^\dagger & \delta \end{smallmatrix}\right] = [\,\phi\ \psi\,]^\dagger \circ [\,\phi\ \psi\,]$*, we have that* $\beta^\dagger \circ \alpha^\circ = \psi^\dagger \circ \phi^{\circ\dagger}$*.*

Proof: 利用 [**MP.2**],(6) 和 (7)，我们很容易计算得到：

$$
\begin{aligned}
\beta^\dagger \circ \alpha^\circ = \psi^\dagger \circ \phi \circ \phi^\circ \circ \phi^{\circ\dagger} = \psi^\dagger \circ (\phi \circ \phi^\circ)^\dagger \circ \phi^{\circ\dagger} \\
= \psi^\dagger \circ (\phi^\circ \circ \phi \circ \phi^\circ)^\dagger = \psi^\dagger \circ \phi^{\circ\dagger}
\end{aligned}
$$

因此 $\beta^\dagger \circ \alpha^\circ = \psi^\dagger \circ \phi^{\circ\dagger}$ 如所要求。 □

我们特意强调了条件生成元和条件分布通常并不唯一；本文最后给出一类适当的正映射，它们具有唯一的条件生成元。

引理 7.5 *Take a Moore-Penrose dagger category* $(\mathbb{X}, \dagger)$ *with a* †*-positive map* $\left[\begin{smallmatrix} \alpha & \beta \\ \beta^\dagger & \delta \end{smallmatrix}\right]$ *such that* α *is an isomorphism. Then* $\beta^\dagger \circ \alpha^{-1}$ *is its unique conditional generator. Therefore for every object* $X \in \mathbb{X}$ *if* $F = \left(\left[\begin{smallmatrix} f \\ g \end{smallmatrix}\right] \ \left[\begin{smallmatrix} \alpha & \beta \\ \beta^\dagger & \delta \end{smallmatrix}\right] \ \left[\begin{smallmatrix} s \\ t \end{smallmatrix}\right]\right)$ *,,,, is a map in* $\mathfrak{G}\left[\ \mathbb{X}\ \dagger\ \right]_X$ *then* $F|_B$ *as defined in (8) is its unique conditional.*

(,),

Proof: 回想一下，在 Moore-Penrose dagger 范畴中，同构的 Moore-Penrose 逆就是它的逆[6, 引理 2.7.(ii)]。因此，由于 α 是一个同构，我们有 $\alpha^\circ = \alpha^{-1}$。所以根据引理 6.3，我们知道 $\beta^\dagger \circ \alpha^{-1}$ 是一个条件生成元。现在，若另有一个条件生成元 m，那么根据定义，我们有 $m \circ \alpha = \beta^\dagger$。然而，由于 α 是一个同构，我们得到 $m = \beta^\dagger \circ \alpha^{-1}$，因此得出结论： $\beta^\dagger \circ \alpha^{-1}$ 是唯一的条件生成元。命题的其余部分也随之成立。□

参考文献

[1] R. Auffarth. 阿贝尔簇之间态射的伪逆：阿贝尔簇之间态射的伪逆。 *CUBO, A Mathematical Journal*, 27(2):179–189，2025。[2] R. Booth、T. Carette 和 C. Comfort。图形辛代数。 *arXiv preprint arXiv:2401.07914*, 2024。[3] F. Borceux。 *Handbook of categorical algebra: Categories and structures*，第 2 卷。剑桥大学出版社，1994。[4] S. Campbell 和 C. Meyer。 *Generalized inverses of linear transformations*。SIAM，2009。

[5] K. Cho 和 B. Jacobs。通过字符串图实现解体与贝叶斯逆变换。 *Mathematical Structures in Computer Science* 29 7 938 971, 2019 , ( ): – 。

[6] R. Cockett 和 J.-S. P. Lemay。Moore–Penrose 匕首范畴。载于 Shane Mansfield、Benoˆıt Valiron 和 Vladimir Zamdzhiev 编，《第二十届国际会议论文集》 *Quantum Physics andLogic*，法国巴黎，2023年7月17日至21日，第 384 卷 *Electronic Proceedings in Theoretical Computer Science*，第 171–186 页。开放出版协会，2023。[7] R. Cockett、J.-S. P. Lemay 和 P. V. Srinivasan。范畴中的 Drazin 逆。 *Theory and Applications of Categories* 43 14 455 519, 2024 , ( ): – 。

[8] R. Cockett、J.-S. P. Lemay 和 P. V. Srinivasan。匕首-Drazin 逆。载于 Alejandro D´ıaz-Caro、Ognyan Oreshkov 和 Ana Bel´en Sainz 编，《第 22 届国际会议论文集》 *Quantum Physics and Logic* 14 2025 18 2025, 426 *Electronic Proceedings in Theoretical Computer Science* 301 316 2025 ，保加利亚瓦尔纳，7月–7月，第 卷，第 – 页。开放出版协会，。[9] Elena Di Lavore、Mario Román、Pawel Sobocinski。部分马尔可夫范畴。，。[10] Elena Di Lavore、Mario Román、Pawel Sobocinski 和 Mark Szeles。部分马尔可夫范畴中的序。，。[11] A. D. Fairbanks 和 P. Selinger。收缩映射范畴中的迹。载于 Alejandro D´ıaz-Caro、Ognyan Oreshkov 和 Ana Bel´en Sainz 编，《第 22 届国际会议论文集》 *Quantum Physics and Logic* 14 2025 18 2025, 426 *Electronic Proceedings in Theoretical Computer Science* 79 99 2025 ，保加利亚瓦尔纳，7月–7月，第 卷，第 – 页。开放出版协会，。[12] B. Fong。因果理论：贝叶斯网络的范畴论视角。硕士论文，牛津大学，2012。[13] T. Fritz。马尔可夫核、条件独立性和充分统计量定理的综合方法。*Advances in Mathematics*，370:107239，2020。[14] M. Giry。概率论的范畴论方法。载于 *Categorical Aspects of Topology and Analysis: Proceedings of an International Conference Held at Carleton University Ottawa August 11–15 1981* 68 85 ，，，，第 – 页。Springer，2006。[15] P. V. Golubtsov。作为信息变换器理论背景的幺半群 Kleisli 范畴。 *Inf. Process*，2 1 62( ): – 84，2002。[16] C. Heunen 和 M. Karvonen。dagger 范畴上的单子。 *Theory and Applications of Categories*，31(35):1016–1043，2016。[17] C. Heunen 和 J. Vicary。 *Categories for Quantum Theory: an introduction*。牛津大学出版社，2019。[18] S. Lauritzen 和 F. Jensen。基于条件高斯分布的稳定局部计算。 *Statistics and Computing* 11 2 191 203, 2001 , ( ): – 。

[19] F. W. Lawvere。概率映射范畴。 *preprint*，1962。[20] E. H. Moore。论一般代数矩阵的倒数。 *Bull. Am. Math. Soc.*，26:394–395，1920。[21] R. Penrose。矩阵的广义逆。载于 *Mathematical proceedings of the Cambridge philosophical society* 51, 406 413 1955 ，第 卷，第 – 页。剑桥大学出版社，。[22] R. Puystjens 和 D. w. Robinson。具有因子分解的态射的摩尔–彭若斯逆。 *Linear Algebra and its Applications* 40 129 141, 1981 , : – 。[23] P. J. Schreier 和 L. L. Scharf。 *Statistical Signal Processing of Complex-Valued Data: The Theory of Improper and Noncircular Signals* 2010 。剑桥大学出版社，二月。[24] J. Via、D. Ramirez 和 I. Santamaria。四元数随机向量的正规性与广义线性处理。*IEEE Transactions on Information Theory*，56(7):3502–3515，2010年7月。[25] Q. W. Wang 和 C. L. Yang。矩阵方程的再非负定解 $axb = c$ *Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae* 39 1 7 13, 1998 。， ( ): – 。