GE超椭圆函数域中的生成元 S

E. Yu. Bunkova

Abstract. 我们将超椭圆函数域定义为：对于一个超椭圆曲线族，该函数域由克莱因函数理论中的某些特殊函数构成，并将其视为有理函数。我们将这一定义与经典定义进行比较，并详细阐述相关结果及其参考文献：亏格为 g 的超椭圆曲线族的超椭圆函数域同构于具有 $3g$ 个生成元的有理函数域。本文的主要结果是，这些生成元之间不存在代数关系。

arXiv:2512.18366v1 [math.CV] 20 Dec 2025

1. 引言

设 $g \in \mathbb{N}$。亏格为 g 的超椭圆函数空间，是从一条仿射部分具有如下形式的曲线出发构造的：

$$\mathcal{V}_\lambda = \{(x,y) \in \mathbb{C}^2 : y^2 = x^{2g+1} + \lambda_4 x^{2g-1} + \lambda_6 x^{2g-2} + \cdots + \lambda_{4g} x + \lambda_{4g+2}\}. \qquad (1)$$

我们用 $\lambda = (\lambda_4, \lambda_6, \ldots, \lambda_{4g}, \lambda_{4g+2}) \in \mathbb{C}^{2g}$表示方程（1）中的参数。通过对参数 λ 进行特化，使方程满足

$$x^{2g+1} + \lambda_4 x^{2g-1} + \lambda_6 x^{2g-2} + \cdots + \lambda_{4g} x + \lambda_{4g+2} = 0$$

没有重根。我们将这类曲线的参数子空间记为 $\mathcal{B}_g$ $\mathcal{B}_g \subset \mathbb{C}^{2g}$ 。

在经典著作中，亏格为 g 的超椭圆函数是从一条带有若干参数 $\lambda \in \mathcal{B}_g$的曲线 (1) 出发构造的，并将曲线 $\mathcal{V}_\lambda$ 的参数集 λ 视为常数。在本文中，我们遵循 [1], 的思路，同时考虑具有形式 (1) 的曲线的整个曲线族及其所有参数 $\lambda \in \mathbb{C}^{2g}$ ，以探究亏格为 g 的超椭圆函数对参数 λ的依赖关系。我们基于超椭圆克莱因函数理论给出相关定义，见§2，以及 [2], [3], [4], [5], [6], [7],和 [8]。请注意，在经典情形下，对于固定参数 $\lambda \in \mathcal{B}_g$ ，这些定义给出的就是超椭圆函数的经典定义，见 [1]；椭圆函数的经典定义另见 [9] 。我们记为 $\mathcal{B}_g = \mathbb{C}^{2g} \setminus \Sigma_g$，其中 Σ_g 是超椭圆曲线族 (1) 的判别式超曲面。

在第 3 节中，我们根据 [4]和 [10]的研究，描述超椭圆函数之间的一些关系。在第 4 节中，我们利用这些关系以及我们在 [11], [12], [13], [14] 的研究成果，证明我们选作超椭圆函数域生成元的 $3g$ 函数之间不存在代数关系。

超椭圆曲线族的形式 (1) 及其对应的函数域曾在 [1]的研究中得到探讨。此外，该研究还考虑了更一般的 (n, s)-曲线情形。本文仅讨论形式 (1) 的情形，即按照 [1]研究中的记号，讨论 $(2, 2g+1)$-曲线的情形。

本文中的所有方程都关于变量的某种分次齐次。通常，变量的指标表示其分次。我们用 $|x|$表示变量 x 的分次。例如，在 (1) 中，我们有 $|x| = 2$、 $|y| = 2g+1$和 $|\lambda_s| = s$，其中 $s \in \{4, 6, \ldots, 4g, 4g+2\}$。

2. The field of hyperelliptic functions

我们考虑复空间 $\mathbb{C}^g$，并将该空间中的坐标记为 z_s，其中 s 为从 1 到 $2g-1$的奇整数，且 $|z_s| = s$。我们将 $z = (z_1, z_3, \ldots, z_{2g-1})$ 记作 $\in \mathbb{C}^g$。如果向量 $\omega \in \mathbb{C}^g$满足对于所有 $z \in \mathbb{C}^g$，亚纯函数 f在 $\mathbb{C}^g$上都有 $f(z+\omega) = f(z)$，则称其为该函数的一个周期。如果亚纯函数 f 在 $\mathbb{C}^g$中有 $2g$ 个线性无关的周期，则称其为阿贝尔函数。因此，阿贝尔函数是复环面 $\mathbb{C}^g/\Gamma$上的亚纯函数，其中 Γ 是由这些周期构成的格。本文关注 $\mathbb{C}^g$ 中的阿贝尔函数，其周期格由形式为 (1) 的超椭圆曲线确定；定义见 [1]，此类格的显式构造见 [5]或 [11]中的 §2。在这种情况下，环面 $\mathbb{C}^g/\Gamma$ 称为该曲线的雅可比流形（或简称雅可比簇）。超椭圆曲线的雅可比簇的万有丛是丛 $\pi\colon \mathcal{U}_g \to \mathcal{B}_g$，其在 $\lambda \in \mathcal{B}_g$ 上的纤维是曲线 $\mathcal{V}_\lambda$的雅可比簇。亏格为 g 的超椭圆函数是丛 π的全空间 $\mathcal{U}_g$ 上的函数。对每个 $\lambda \in \mathcal{B}_g$ 取此类函数的限制，所得函数都是阿贝尔函数，其周期格由曲线 $\mathcal{V}_\lambda$确定。

我们基于超椭圆克莱因函数理论定义超椭圆函数域，参见 [2], [3], [4], [5], [6], [7], 和 [8]。设 $\sigma(z, \lambda)$ 为亏格 g 的超椭圆西格玛函数。该函数依赖于变量 $z = (z_1, z_3, \ldots, z_{2g-1}) \in \mathbb{C}^g$和参数 $\lambda = (\lambda_4, \lambda_6, \ldots, \lambda_{4g}, \lambda_{4g+2}) \in \mathbb{C}^{2g}$，这些参数对应于曲线 (1) 的参数。令

$$\wp_{k_1,\ldots,k_n} = -\partial_{k_1} \cdots \partial_{k_n} \ln \sigma(z, \lambda), \tag{2}$$

其中 $n \geqslant 2$ 和 $k_s \in \{1, 3, \ldots, 2g-1\}$。根据超椭圆克莱因函数理论（参见 [5] 第 3 章以及 [11], 中的方程 (6.3)），可知函数 $\wp_{k_1,\ldots,k_n}$具有成为超椭圆函数所需的性质，即对每个 $\lambda \in \mathcal{B}_g$，此类函数的限制都是一个阿贝尔函数，其周期格由曲线 $\mathcal{V}_\lambda$确定。当然，任何系数属于 $\mathbb{C}[\lambda]$ 的函数$\wp_{k_1,\ldots,k_n}$ 的有理函数也满足这些性质。遵循文献 [11] 和 [12], 中的做法，我们将系数属于 $\mathbb{C}[\lambda]$ 的$\wp_{k_1,\ldots,k_n}$ 的有理函数定义为超椭圆函数，并将超椭圆函数域记为 $\mathcal{F}$。此定义的依据是，对于任意 $\lambda \in \mathcal{B}_g$，曲线 $\mathcal{V}_\lambda$ 的雅可比簇上的任何阿贝尔函数都等于某个函数从 $\mathcal{F}$ 到该雅可比簇的限制，参见 [1]第 1.1 节中的性质 (3)。根据 [11], 中的推论 6.2，域 $\mathcal{F}$ 同构于 $\mathbb{Q}$上的有理函数域，其生成元为 $3g$ 个 $\wp_{1,k}, \wp_{1,1,k}, \wp_{1,1,1,k}$，其中 $k \in \{1, 3, \ldots, 2g-1\}$。本文第 4 节将给出详细论证。

在超椭圆函数域的定义中，参数 λ没有额外的条件，因此可以考虑参数为 $\lambda \in \mathcal{B}_g$以及参数为 $\lambda \in \Sigma_g$的这类函数。例如，对于任意亏格 $g \in \mathbb{N}$，都有 $0 \in \Sigma_g$。我们将在特殊情形 $\lambda = 0$ 中，详述式 (2) 中函数 $\sigma(z, \lambda)$ 的构造。注意，对于 $\lambda \in \Sigma_g$，函数 $f \in \mathcal{F}$ 限制在 $\mathbb{C}^g \times \lambda$ 上不一定是阿贝尔函数，因此它不是经典意义上的超椭圆函数。

让我们将这个定义与较早的函数域定义进行比较，例见 [13], 第 4 节、 [14], 第 1 节、 [15], 第 1 节，或综述 [16], 第 3 节。该定义将函数域 $\mathcal{F}$ 定义为 $\mathbb{C}^g \times \mathcal{B}_g$上的函数域，其中 $f \in \mathcal{F}$在 $\mathbb{C}^g \times \lambda$上的限制是定义在曲线 $\mathcal{V}_\lambda$所确定的周期上的 $\mathbb{C}^g$ 上的阿贝尔函数。该综述指出，这样的函数域同于$\wp_{k_1,\ldots,k_n}$中的有理函数域。然而，这一说法存在反例，例如函数 $f = \exp(\lambda_4)$。

3. Relations in the field of hyperelliptic functions

本节所述关系源自亏格为 g 的超椭圆曲线的雅可比簇上亚纯函数域中生成函数之间的显式代数关系，参见 [4]第 3 节。这里我们给出曲线 $\mathcal{V}_\lambda$ （由式 (1) 定义）的特殊情形下的公式。我们采用全文统一的现代记号。我们用记号 $\delta_{\cdot,\cdot}$ 表示克罗内克 δ 函数。我们令 $\wp_{i,j}=0$表示 $i\geqslant 2g+1$ 或 $j\geqslant 2g+1$。

根据 [4] 中的推论 3.1.2，对于任意 $i\in\{1,3,\dots,2g-1\}$，我们有如下关系：

$$\wp_{1,1,1,i}=6\wp_{1,1}\wp_{1,i}-2\wp_{3,i}+6\wp_{1,i+2}+2\lambda_4\delta_{i,1}. \tag{3}$$

根据 [4] 中的定理 3.2，对于任意 $i,\ j\in\{1,3,\dots,2g-1\}$，我们有如下关系：

$$\begin{aligned}\wp_{1,1,i}\wp_{1,1,j}=4\wp_{1,1}\wp_{1,i}\wp_{1,j}+4\wp_{1,i+2}\wp_{1,j}+4\wp_{1,i}\wp_{1,j+2}-2\wp_{3,i}\wp_{1,j}-2\wp_{1,i}\wp_{3,j}-\\ -2(\wp_{i+4,j}-2\wp_{i+2,j+2}+\wp_{i,j+4})+2\lambda_4(\delta_{i,1}\wp_{1,j}+\wp_{1,i}\delta_{j,1})+2\lambda_{i+j+4}(2\delta_{i,j}+\delta_{i-2,j}+\delta_{i,j-2}).\end{aligned} \tag{4}$$

文献 [4] 考虑了具有固定参数 $\lambda\in\mathcal{B}_g$的超椭圆曲线 $\mathcal{V}_\lambda$ 的情形。在这种情况下，关系式 (4) 被视为雅可比簇上的亚纯函数域中生成元之间的关系，即 $\mathcal{V}_\lambda$的函数 $\wp_{i,\ j}$之间的关系，其中 $i,\ j\in\{1,3,\dots,2g-1\}$，且 $\wp_{1,\ 1,\ k}$，其中 $k\in\{1,3,\dots,2g-1\}$。这组函数被视为生成函数，因为对于固定参数 $\lambda\in\mathcal{B}_g$，曲线 $\mathcal{V}_\lambda$ 的雅可比簇上的任意亚纯函数都可以表示为这些生成元的有理函数。曲线的参数 $\lambda\in\mathcal{B}_g$ 被视为关系式 (4) 的参数。

对于依赖于超椭圆曲线族 $\mathcal{V}_\lambda$ 的参数 λ λ 的超椭圆函数（定义见 §2），我们将参数 λ 视为 $\mathcal{F}$ 中的函数。我们利用关系 (4) 以及关系 (3)，将函数 λ_s（其中 $s\in\{4,6,\dots,4g,4g+2\}$ 和 $\wp_{i,\ j}$，且 $i,\ j\in\{3,5,\dots,2g-1\}$）表示为超椭圆函数域中 $3g$ 个生成元 $\wp_{1,\ k}$、$\wp_{1,\ 1,\ k}$、$\wp_{1,\ 1,\ 1,\ k}$（对应 $k\in\{1,3,\dots,2g-1\}$）的函数，见 §4。请注意，与文献 [4]，中的情形不同，超椭圆函数域中生成元 $\wp_{1,\ k}$、$\wp_{1,\ 1,\ k}$、$\wp_{1,\ 1,\ 1,\ k}$（对应 $k\in\{1,3,\dots,2g-1\}$）之间不存在关系，参见本文 §4 中的定理 4.2。

在文献 [10] 的定理 4.1 中，给出了参数 λ 关于 $\mathcal{F}$ 的函数表达式，现代记号和详细证明见 [13] 中的推论 5.2 和引理 5.3。具体而言，我们有如下关系：

$$4\mathbf{m}(\xi)=\mathbf{b}_2(\xi)^2+2\mathbf{b}_3(\xi)(1-\mathbf{b}_1(\xi))+4(\xi^{-1}+2\wp_{1,1})(1-\mathbf{b}_1(\xi))^2, \tag{5}$$

其中

$$\mathbf{b}_1(\xi)=\sum_{i=1}^{g}\wp_{1,2i-1}\xi^i,\qquad \mathbf{b}_2(\xi)=\sum_{i=1}^{g}\wp_{1,1,2i-1}\xi^i,\qquad \mathbf{b}_3(\xi)=\sum_{i=1}^{g}\wp_{1,1,1,2i-1}\xi^i,$$

$$\mathbf{m}(\xi)=\xi^{-1}+\sum_{i=1}^{2g}\lambda_{2i+2}\xi^i,$$

而 ξ 是一个自由参数，因此方程 (5) 给出了关系，可将左端 $s\in\{4,6,\dots,4g,4g+2\}$ 中的参数 λ_s 表示为超椭圆函数域中 $3g$ 生成元 $\wp_{1,\ k}$，$\wp_{1,\ 1,\ k}$，$\wp_{1,\ 1,\ 1,\ k}$ 的多项式。其他能得到相同结果的表达式可见 [12] 中的引理 6.3 以及 [14] 中的推论 5.5。

4. Generators in the field of hyperelliptic functions

[12] 中的定理 4.1 指出，式 (2) 中的所有函数以及曲线 (1) 的所有参数 λ_s，都可以表示为系数属于 $\mathbb{Q}$ 的 $3g$ 生成元 $\wp_{1,\,k}$，$\wp_{1,\,1,\,k}$，$\wp_{1,\,1,\,1,\,k}$ 的多项式。该定理的证明由关系 (3)、(4) 和 (5) 得出。关系 (5) 给出了参数 λ_s 关于我们的 $3g$ 生成元的表达式。利用这些表达式，我们从 (3) 得到 $k \in \{3,5,\ldots,2g-1\}$ 的 $\wp_{3,\,k}$ 的表达式，并从 (4) 得到 $i,\ j \in \{5,7,\ldots,2g-1\}$ 的 $\wp_{i,\,j}$ 表达式。式 (2) 中的所有其他函数要么属于我们的生成元集合，要么可由关系导出，而这些关系又是通过对关系 (3) 和 (4) 关于变量 z_i 求导得到的。

根据 §2 中 [12], 有理函数域 $\mathcal{F}$ 的定义，可以直接从定理 4.1 得出推论：任意函数 $f \in \mathcal{F}$ 都可以表示为系数属于 $\mathbb{Q}$ 的有理函数，其变量为 $3g$ 个生成元 $\wp_{1,\,k}$，$\wp_{1,\,1,\,k}$，$\wp_{1,\,1,\,1,\,k}$，其中 $k \in \{1,3,\ldots,2g-1\}$。

推论 4.1 (推论 6.2，见 [11])。域 $\mathcal{F}$ 同构于以 $\mathbb{Q}$ 为系数、以 $3g$ 个生成元 $\wp_{1,\,k}$, $\wp_{1,\,1,\,k}$, $\wp_{1,\,1,\,1,\,k}$ 为变量的有理函数域，其中 $k \in \{1,3,\ldots,2g-1\}$。

在下面的定理中，我们考察这些生成元之间的关系。

定理 4.2. 在亏格为 g 的超椭圆函数域 $\mathcal{F}$ 中，对于任意 $3g$ 个函数 $\wp_{1,\,k}$, $\wp_{1,\,1,\,k}$, $\wp_{1,\,1,\,1,\,k}$，它们作为亏格为 g 的超椭圆曲线雅可比簇万有丛全空间 $\mathcal{U}_g$ 上的函数时，彼此之间不存在代数关系，其中 $k \in \{1,3,\ldots,2g-1\}$。

证明可由 [14]中的定理 5.3 和 [4]中的推论 3.2.1 得出。

为了解释 [14]中定理 5.3 的记号，我们将 [14] 中推论 5.2 的陈述稍作记号上的修改，使其与上述定义保持一致。[14] 中的推论 5.2 考虑映射 $\psi\colon\ \mathcal{U}_g \dashrightarrow \mathbb{C}^{\frac{g(g+9)}{2}}$，其中在 $\mathbb{C}^{\frac{g(g+9)}{2}}$ 中，我们用 (b,w,λ) 表示坐标。这里，对于 $b=(b_1,\overline{b_2,b_3})=(b_{1,j},\overline{b_{2,j},b_{3,j}})\in\mathbb{C}^{3g}$，我们有 $j\in\{1,3,\ldots,2g-1\}$；对于 $w=(w_{k,l})\in\mathbb{C}^{\frac{g(g-1)}{2}}$，我们有 $k,l\in\{3,5,\ldots,2g-1\}$，$k\leqslant l$；对于 $\lambda=(\lambda_s)\in\mathbb{C}^{2g}$，我们有 $s\in\{4,6,\ldots,4g,4g+2\}$。我们设

$$\psi:(z,\lambda)\mapsto(b_{1,j},b_{2,j},b_{3,j},w_{k,l},\lambda_s)=(\wp_{1,j},\wp_{1,1,j},\wp_{1,1,1,j},\wp_{k,l},\lambda_s). \tag{6}$$

[14] 中的推论 5.2指出，ψ 的像包含于 $\mathcal{S}_g\subset\mathbb{C}^{\frac{g(g+9)}{2}}$，其中 $\mathcal{S}_g$ 由 $\frac{g(g+3)}{2}$ 个方程确定，这些方程是方程(3)和(4)在映射 ψ 下的像；这些方程在 [14]中有明确给出。

定理 4.3 (中的定理 5.3 [14])。投影 $\pi_1\colon\ \mathbb{C}^{\frac{g(g+9)}{2}}\to\mathbb{C}^{3g}$ 到前 $3g$ 个坐标给出了同构 $\mathcal{S}_g\simeq\mathbb{C}^{3g}$。因此，坐标 b 将 $\mathcal{S}_g$ 一致化。

我们在 [13]中的定理 6.2 中重新讨论了这一 [14] 定理。该定理通过一个交换图加以说明

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \mathbb{C}^{\frac{g(g+9)}{2}} & = & \mathbb{C}^{3g}\times\mathbb{C}^{\frac{g(g-1)}{2}}\times\mathbb{C}^{2g}, \\
 & & \uparrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi_1} \\
\mathcal{U}_g & \overset{\psi}{\dashrightarrow} & \mathcal{S}_g & \overset{\sim}{=\!=} & \mathbb{C}^{3g} \\
\downarrow{\scriptstyle \pi} & & & & \downarrow{\scriptstyle p} \\
\mathcal{B}_g & & \hookrightarrow & & \mathbb{C}^{2g}
\end{array} \tag{7}$$

在这里，我们可以根据关系式 (5) 得到多项式映射 p，所有复空间都按照上述说明，根据各自的维数设定坐标。该定理讨论的是图 (7) 的上半部分。

我们回顾一下，$\mathcal{B}_g = \mathbb{C}^{2g} \setminus \Sigma_g$，其中 Σ_g 是超椭圆曲线族 (1) 的判别式超曲面。图 (7) 下半部分的交换性意味着，ψ 的像与多项式映射 p 下 $\Sigma_g \subset \mathbb{C}^{2g}$ 的原像不相交。因此，ψ 在 $\mathcal{S}_g \simeq \mathbb{C}^{3g}$ 中的像包含于 $\mathbb{C}^{3g} \setminus p^{-1}(\Sigma_g)$。

我们回顾一下，在丛 π 中：$\mathcal{U}_g \to \mathcal{B}_g$，位于 $\lambda \in \mathcal{B}_g$ 上的纤维是曲线 $\mathcal{V}_\lambda$ 的雅可比簇。依照 [4]，我们用 $\mathrm{Jac}(\mathcal{V}_\lambda)$ 表示这个雅可比簇，并用 (σ) 表示函数 $\sigma(z, \lambda)$ 在 $\mathrm{Jac}(\mathcal{V}_\lambda)$ 中的零点除子。我们考虑复空间 $\mathbb{C}^{\frac{g(g+3)}{2}}$，依照上文的记号，将坐标记为 (b_1, b_2, w)。这里，对于 (b_1, b_2)，$= (b_{1,j}, b_{2,j}) \in \mathbb{C}^{2g}$，我们有 $j \in \{1, 3, \ldots, 2g-1\}$；对于 $w = (w_{k,l})$，$\in \mathbb{C}^{\frac{g(g-1)}{2}}$，我们有 $k, l \in \{3, 5, \ldots, 2g-1\}$, $k \leqslant l$。根据 [4], 中的推论 3.2.1，映射

$$\varphi : \mathrm{Jac}(\mathcal{V}_\lambda) \setminus (\sigma) \to \mathbb{C}^{\frac{g(g+3)}{2}}, \qquad (z, \lambda) \mapsto (b_{1,j}, b_{2,j}, w_{k,l}) = (\wp_{1,j}, \wp_{1,1,j}, \wp_{k,l})$$

是一个亚纯嵌入。

我们考虑与超椭圆曲线的雅可比簇万有丛 π 相关联的丛 $\pi_0 \colon \mathcal{U}_g^\circ \to \mathcal{B}_g$。丛 π_0 在 $\lambda \in \mathcal{B}_g$ 上的纤维为 $\mathrm{Jac}(\mathcal{V}_\lambda) \setminus (\sigma)$，而 $\mathcal{U}_g^\circ$ 表示丛 π_0 的全空间。注意，由 (6) 给出的映射 ψ 在 $\mathcal{U}_g^\circ$ 上定义良好，因为从方程 (2) 可见，其中涉及的亚纯函数 ψ 的极点属于函数 $\sigma(z, \lambda)$ 在 $\mathrm{Jac}(\mathcal{V}_\lambda)$ 中的零点除子。

令 $\phi = \pi_1 \circ \psi$。由于 π_1 是到前三个坐标的投影，由 (6) 可得

$$\phi : (z, \lambda) \mapsto (b_{1,j}, b_{2,j}, b_{3,j}) = (\wp_{1,j}, \wp_{1,1,j}, \wp_{1,1,1,j}). \tag{8}$$

现在，为了证明定理 4.2，我们考虑如下图

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{U}_g^\circ & \xrightarrow{\phi} & \mathbb{C}^{3g} \setminus p^{-1}(\Sigma_g) & \hookrightarrow & \mathbb{C}^{3g} \\ \downarrow{\scriptstyle \pi} & & \downarrow{\scriptstyle p} & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ \mathcal{B}_g & = & \mathcal{B}_g & \hookrightarrow & \mathbb{C}^{2g} \end{array} . \tag{9}$$

固定 $\lambda \in \mathcal{B}_g$。根据 [4], 中的推论 3.2.1，映射 φ，因此映射 ϕ 在纤维 $\lambda \in \mathcal{B}_g$ 上的限制，是一个亚纯嵌入。因此，映射 ϕ 给出了从 $\mathcal{U}_g^\circ$ 到 $\mathbb{C}^{3g} \setminus p^{-1}(\Sigma_g) \subset \mathbb{C}^{3g}$ 的纤维逐点亚纯嵌入。注意，根据 Dubrovin–Novikov 定理，见 [17], ，空间 $\mathcal{U}_g$ 与 $\mathbb{C}^{3g}$ 双有理等价，因此其维数为 $3g$。更直接的理解方式是，$\mathrm{Jac}(\mathcal{V}_\lambda)$ 作为商空间 $\mathbb{C}^g$ 除以一个格，是 g 维的；而 $\mathcal{B}_g$ 是 $\mathbb{C}^{2g}$ 的一个 $2g$ 维子集。在将 $\mathcal{U}_g^\circ$ 嵌入 $\mathbb{C}^{3g}$ 的映射 ϕ 中，$\mathbb{C}^{3g}$ 中的坐标 b 被映射为 $3g$ 函数 $\wp_{1,k}, \wp_{1,1,k}, \wp_{1,1,1,k}$，其中 $k \in \{1, 3, \ldots, 2g-1\}$，因此这些函数作为 $\mathcal{U}_g^\circ$ 上的函数之间不存在代数关系。定理 4.2 得证。

文献 [14] 在求解超椭圆函数的求导问题时，实质上用到了这一结果。在 [14] 第6节中，求域 $\mathcal{F}$中函数的导数这一问题被转化为求 $\mathbb{C}^{3g}$中的多项式向量场这一问题。在相关构造中，函数 $3g\wp_{1,k}, \wp_{1,1,k}, \wp_{1,1,1,k}$（其中 $k \in \{1, 3, \ldots, 2g-1\}$）被选作域 $\mathcal{F}$ 的生成元，并假设它们代数独立。我们得到以下结果：

定理 4.4。亏格为 g 的超椭圆曲线族(1) 的超椭圆函数域 $\mathcal{F}$ 同构于关于 $\mathbb{C}^{3g}$的有理函数域。

我们来考察图 (9) 的左侧部分

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{U}_g^\circ & \xrightarrow{\phi} & \mathbb{C}^{3g}\backslash p^{-1}(\Sigma_g)\ . \\ \downarrow{\scriptstyle \pi} & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ \mathcal{B}_g & = & \mathcal{B}_g \end{array} \tag{10}$$

定理 4.5。 由(8) 定义的映射 ϕ 在图(10)中给出了一个纤维逐点亚纯嵌入。对于每个 $\lambda \in \mathcal{B}_g$， 它将雅可比簇$(\mathcal{V}_\lambda)\backslash(\sigma)$ 映入 $p^{-1}(\lambda)$。

References

[1] V. M. Buchstaber, D. V. Leikin, 关于参数族（n, s）-曲线上阿贝尔函数参数微分问题的解, 《函数分析与其应用》, 42:4（2008年）, 268–278。.[2] F. Klein, 《论超椭圆西格玛函数》, 《数学年刊》32（1888年）, 351–380。[3] H. F. Baker, 《论超椭圆西格玛函数》, 《美国数学杂志》20（1898年）, 301–384。[4] V. M. Buchstaber, V. Z. Enolskii, D. V. Leikin, 《超椭圆克莱因函数及其应用》, 《孤子、几何与拓扑：十字路口》, 《数学科学进展》, 美国数学学会译丛, 179:2, 普罗维登斯, 罗得岛州, 1997年, 1–34。[5] V. M. Buchstaber, V. Z. Enolskii, D. V. Leikin, 《克莱因函数、超椭圆雅可比簇及其应用》, 《数学与数学物理评论》10:2, Gordon and Breach, 伦敦, 1997年, 3–120。[6] V. M. Buchstaber, V. Z. Enolskii, D. V. Leikin, 《多维西格玛函数》, arXiv: 1208.0990, 2012年, 267页。[7] V. M. Buchstaber, V. Z. Enolski, D. V. Leykin, σ-函数: 新旧结果, 《可积系统与代数几何》, 第2卷, 《伦敦数学学会讲义丛书》第459号, 剑桥大学出版社, 2020年, 175–214。[8] V. M. Buchstaber, 《多维西格玛函数及其应用》, Victor Enolski（1945–2019）, 《美国数学学会通报》67:11（2020年）, 1756–1760。[9] E. T. Whittaker, G. N. Watson, 《现代分析教程》, 第4版（1927年）的重印本, 第2卷: 超越函数, 剑桥大学出版社, 剑桥, 1996年。[10] V. M. Buchstaber, S. Yu. Shorina, KdV层级的 w-函数, 《几何、拓扑与数学物理》, 美国数学学会译丛, 第2辑, 212, 美国数学学会, 普罗维登斯, 罗得岛州, 2004年, 41–66。[11] V. M. Buchstaber, E. Yu. Bunkova, 《关于参数和周期对超椭圆函数求导的公式》, 《斯捷克洛夫数学研究所论文集》325（2024年）, 60–73。[12] E. Yu. Bunkova, V. M. Buchstaber, 《超椭圆函数微分的显式公式》, 《数学札记》114:6（2023年）, 1159–1170。[13] E. Yu. Bunkova, V. M. Buchstaber, 《参数化科特韦格–德弗里斯层级与超椭圆西格玛函数》, 《函数分析与其应用》56:3（2022年）, 169–187。[14] E. Yu. Bunkova, 《亏格3超椭圆函数的微分》, 《欧洲数学杂志》4:1（2018年）, 93–112。[15] V. M. Buchstaber, E. Yu. Bunkova, 《超椭圆西格玛函数与阿德勒–莫泽多项式》, 《函数分析与其应用》55:3（2021年）, 179–197。[16] V. M. Buchstaber, A. V. Mikhailov, 《可积多项式哈密顿系统与平面代数曲线的对称幂》, 《俄罗斯数学综述》76:4（2021年）, 587–652。[17] B. A. Dubrovin, S. P. Novikov, 《科特韦格–德弗里斯方程与斯图姆–刘维尔方程的周期问题及其与代数几何的关系》, 《苏联科学院学报》219:3（1974年）, 531–534; 英文译文发表于《苏联数学学报》15（1974年）。

Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia电子邮箱地址: bunkova@mi-ras.ru