arXiv:2512.18370v1 [math.AC] 20 Dec 2025

类型 4 的远离型戈伦斯坦数值半群环

TEODOR I. GRIGORESCU

Abstract. 我们对类型为 4 的远离型Gorenstein数值半群环进行了分类。

Introduction

远射戈伦斯坦性质的提出见 [8]，其目的是理解围绕 Gorenstein 性质的科恩-麦考利环空间。

设 $(R, \mathfrak{m})$ 是一个 Cohen-Macaulay 局部环，其典范模为 ω_R。近年来，人们研究了环的性质与 ω_R([2], [4], [5], [6], [7], [8], [9])的迹理想之间的关系。对于一个环 R 以及一个 R- 模 M，M 的迹理想为

$$\operatorname{tr}(M) := \sum_{\varphi \in \operatorname{Hom}_R(M,R)} \operatorname{Im}(\varphi).$$

已知，对于任意 $P \in \operatorname{Spec}(R)$，$R_P$ 不是 Gorenstein 环，当且仅当 $\operatorname{tr}(\omega_R) \subseteq P$([5, 引理 2.1])。特别地，当且仅当 $\operatorname{tr}(\omega_R) = R$ 时，R 是一个 Gorenstein 环。因此，当 $\operatorname{tr}(\omega_R)$ 很大时，环 R 在某种意义上接近 Gorenstein 环，反之亦然。例如，在 [5, 定义 2.2], 中，如果 $\operatorname{tr}(\omega_R) \supseteq \mathfrak{m}$，则将环 R 称为近 *Gorenstein* 。

我们进一步假设 R 是一维的。[6, 命题 A.1]中证明了，若R 是整环，则 $\operatorname{tr}(\omega_R) \supseteq R : R$，其中 R 表示 R 的整闭包，冒号是在 $Q(R)$这一全分式环中取的。受此启发，在 [8], 中，Herzog、Kumashiro 和 Stamate 研究了以下一类环:

定义。 ([8]) 设 R 是一个一维 Cohen-Macaulay 局部环，具有典-范模 ω_R。若环 R 满足 $\operatorname{tr}(\omega_R) = R : R$，则称其为远离戈伦斯坦 。

在 [8, 第 628], 页，作者给出了关于 R 的一些技术条件，在这些条件下，他们得到了远离戈伦斯坦环这一类环的一些良好性质。其中一个条件是存在一个 R-模 $C \simeq \omega_R$，使得

$$R \subseteq C \subseteq \overline{R}. \tag{1}$$

例如，当 R 是整环时，这一结论成立。此时，环 R 是远离戈伦斯坦的，当且仅当 $C^2 = R$，参见 [8, 定理 2.5]。满足 [8, 第 628] 页中技术条件的一大类环是数值半群环。数值半群 H 是 $(\mathbb{N}, +)$ 的子幺半群，且 $\mathbb{N} \setminus H$ 是有限集。若 K 是任意一个域，则

2020 数学学科分类。 13H10, 20M10, 20M25。关键词与短语。 典范模，数值半群，数值半群环，远离戈伦斯坦数值半群环，Cohen-Macaulay 型。

数值半群环 $K[[H]]$ 定义为幂级数环 $K[[t]]$ 的子环 $K[[H]] := K[[t^h : h \in H]]$ 。

（Cohen-Macaulay）型是 Cohen-Macaulay 局部环的一个重要不变量，例如，Gorenstein 环就是型等于 1 的环。关于这一主题的更多背景，请参阅 [1] 。

对于远离戈伦斯坦环，在 [8], 中，作者给出了环的重数关于其型的界。因此，[8, 例 2.9] 证明， $K[[H]]$是一个（Cohen-Macaulay）型为 2 的远离型戈伦斯坦数值半群环，当且仅当 $H = \langle 3,\ 3m+1,\ 3m+2\rangle$，其中 $m \geq 1$。随后，在 [8], 中，作者根据 H的组合结构刻画了 $K[[H]]$ 何时为远离戈伦斯坦环，见定理 1.3。这使他们得以分类那些不具有最小重数的类型 3 远离型戈伦斯坦数值半群环，见 [8, 定理 6.4]。

本文旨在描述类型 4 的远离型戈伦斯坦数值半群环，见定理 2.1。在分类中，我们得到 40 个互不相交的此类族，如表1所示。

在第 1 节中，我们回顾如何将环 $K[[H]]$ 的代数性质，尤其是远射戈伦斯坦性质，转化为数值半群 H 的性质。关键观察是， C 的生成元可以由 H 的伪弗罗贝尼乌斯数得到。随后，我们完成了在 [8], 中得到的类型 3 的远离型戈伦斯坦数值半群环的分类，见定理 1.5。

在第 2 节中，我们从不等式 $5 \leq e(H) \leq 9$ （见命题 1.4）出发，对类型 4 的远离型戈伦斯坦数值半群环进行分类，其中 $e(H)$ 是 H 的重数，即 H 中最小的正元素。对于这一范围内的每个值，根据定理 1.3，典范模 C 有若干种可能性。了解 C 可以得出关于伪弗罗贝尼乌斯数之间相对距离的信息。由此产生了许多需要研究的限制条件集合。其中一些限制条件集合不会产生远离型戈伦斯坦数值半群环，例如定理 2.1 的证明中对应于方程 (8) 的子情形。对于 $e(H)$ 的每个可能值，我们详细说明一个相关的子情形，因为其余情形所采用的技术类似。如表1所示，这 40 个族依赖于一个或两个参数，嵌入维数为 4、5、6 或 7。表1中列出的生成元是极小的，但表 2 中给出的参数值除外。

1. Preliminaries

数值半群 H 是 $(\mathbb{N},+)$ 的子幺半群，且 $\mathbb{N} \setminus H$ 是有限的 .

数值半群的重数定义为 H 是 $e(H) := \min(H \setminus \{0\})$。 H的嵌入维数记为 $v(H)$，等于 H的唯一极小生成集的基数。 H 的弗罗贝尼乌斯数为 $F(H) := \max(\mathbb{Z} \setminus H)$。 H 的伪弗罗贝尼乌斯数集合为

$$PF(H) := \{x \in \mathbb{Z} \setminus H : x + h \in H,\ \forall\, h \in H \setminus \{0\}\}$$

其基数称为 H的型，记为 $r(H)$。注意， $F(H) = \max PF(H)$。

始终有 $e(H) \geq v(H)$。若数值半群 H 满足最小重数 条件，则称其为最小重数数值半群；当 $e(H) = v(H)$ 时即如此。此时，伪弗罗贝尼乌斯数可按如下方式计算。

命题 1.1. [11, 命题 2.20 和命题 3.1] 设 H 是由以下元素最小生成的数值半群 $a_1 < a_2 < ... < a_v$，且其具有最小重数。则 $PF(H) = \{a_2 - a_1, a_3 - a_1, ..., a_v - a_1\}$。

关于数值半群的更多背景知识，请参阅 [11] 。

设 K 是任意一个域。与 H 相关联的半群环为 $K[[H]] := K[[t^h : h \in H]]$，它是幂级数环 $K[[t]]$ 的子环。于是 $K[[H]] = K[[t]]$。

命题 1.2. *(*[3, 练习 21.11]*)* 设 $K[[H]]$ 是一个数值半群环。那么 $C = (t^{F(H)-\alpha} \mid \alpha \in PF(H))$ 是 $K[[H]]$ 的一个典范模，并满足 (1)。

在定理 1.3 中，我们汇集了文献 [8] 中证明的数值半群环具有远射戈伦斯坦性质的各种刻画。

定理 1.3. *(*[8, 定理 2.5、定理 5.1 和命题 6.1]*)* 设 H 是一个数值半群。那么以下陈述等价:

(i) $K[[H]]$是远射戈伦斯坦环; *(ii)* $C^2 = K[[t]]$; *(iii)* $\{0, ..., e(H) - 1\} \subseteq \{2F(H) - \alpha - \beta : \alpha, \beta \in PF(H)\}$; *(iv)* 存在 $n_1 < ... < n_{r(H)} \in \mathbb{N}$，使得 $C = (t^{n_1}, ..., t^{n_{r(H)}})K[[H]]$ 且$\{0, ..., e(H) - 1\} \subseteq \{n_i + n_j : 1 \leq i \leq j \leq r(H)\}$。若这些条件成立，则在 *(iv)* 中不妨设 $n_1 = 0$ 且 $n_2 = 1$。

在 [8], 中，利用罗尔巴赫问题的解，得到了远离型戈伦斯坦数值半群环重数的一个上界。

罗尔巴赫问题。 *(*[10], [12]*)* 对于一个由非负整数构成的有限集合 A，令$n(A)$ 为满足 0, 1, ..., $n(A) - 1 \in A + A$ 且 $n(A) \notin A + A$ 的整数。如果 $0 \notin A$，我们认为 $n(A) = -1$。

罗尔巴赫问题在于确定这些整数

$$\bar{n}(r) := \max \{n(A) : |A| = r\},$$

其中 $r \geq 1$。对于 $r \leq 25$ ([12])，罗尔巴赫问题的解已知，但迄今尚无 $\bar{n}(r)$ 的公式。例如， $\bar{n}(1) = 1$、 $\bar{n}(2) = 3$、 $\bar{n}(3) = 5$ 和$\bar{n}(4) = 9$。

下面的命题根据型给出了远离型戈伦斯坦数值半群环重数的下界和上界。

命题 1.4。 *(*[11, 推论 2.23 和推论 3。2], [8, 推论 5。3]*)* 设 H 是一个型为 $r \geq 2$的远离型戈伦斯坦数值半群环。那么

$$r + 1 \leq e(H) \leq \bar{n}(r),$$

其中 $\bar{n}(r)$是罗尔巴赫问题的解。

此外， $e(H) = r + 1$ 当且仅当 H 具有最小重数。

类型 3 的远离型戈伦斯坦数值半群环的分类已基本在 [8] 中给出。我们补充了 H 具有最小重数的情形。

定理 1.5. *(*[8, 定理 6.4]*)* 设 $K[[H]]$ 为一个类型 *3* 的数值半群环。那么 $K[[H]]$ 是远离戈伦斯坦的，当且仅当 H 属于以下数值半群族之一：

1. $H = \langle 4, 4m+1, 4m+2, 4m+3\rangle$，满足 $m \geq 1$；*2.* $H = \langle 4, 4m+3, 4m+5, 4m+6\rangle$，满足 $m \geq 1$；*3.* $H = \langle 5, 5m+4, 10m+6, 10m+7\rangle$，满足 $m \geq 1$；*4.* $H = \langle 5, 5m+1, 10m+3, 10m+4\rangle$，满足 $m \geq 1$；*5.* $H = \langle 5, 5m+2, 10m+1, 10m+3\rangle$，满足 $m \geq 1$；*6.* $H = \langle 5, 5m+3, 10m+4, 10m+7\rangle$，满足 $m \geq 1$。

证明。 根据 [8] ，当且仅当 H 属于列表中编号为 3 至 6 的某个族时， $K[[H]]$ 是一个非最小重数的类型 3 远射戈伦斯坦环。

假设 $K[[H]]$ 是一个具有最小重数的类型 3 远射戈伦斯坦环。那么，根据命题 1.4， $e(H) = 4$。由定理 1.3，存在 $n \geq 2$ 使得 $C = (1, t, t^n)$ 且 $\{0,1,2,3\} \subseteq \{0,1,n\} + \{0,1,n\}$。因此， $C = (1, t, t^2)$ 或 $C = (1, t, t^3)$。

假设 $C = (1, t, t^2)$。根据命题 1.2， $PF(H) = \{4n+1, 4n+2, 4n+3\}$，其中 $n \geq 0$。那么 $H = \langle 4, 4n+5, 4n+6, 4n+7\rangle$，其中 $n \geq 0$。反过来，很容易验证，对于这样的 H， $C = (1, t, t^2)$。

当 $C = (1, t, t^3)$ 时，根据命题 1.2， $PF(H) = \{4n+3, 4n+5, 4n+6\}$，且$n \geq 0$。于是 $H = \langle 4, 4n+7, 4n+9, 4n+10\rangle$，且 $n \geq 0$。反过来，容易验证，对于这样的 H， $C = (1, t, t^3)$。□

2. The far-flung Gorenstein numerical semigroup rings of type4

在以下定理中，我们对类型 4 的远离型戈伦斯坦数值半群环进行分类。在这一分类中，我们得到 40 个互不相交的此类族，如表1所示。

定理 2.1. 设 $K[[H]]$ 是一个类型 *4* 的数值半群环。那么，当且仅当 H 属于表*1*所列数值半群族之一时， $K[[H]]$是远离戈伦斯坦的。

证明。 假设 $K[[H]]$ 是一个远离戈伦斯坦环。根据命题 1.4， $5 \leq e(H) \leq 9$。对于这些值中的每一个，根据定理 1.3，典范模 C有若干种可能。这些可能性决定了伪弗罗贝尼乌斯数之间的差值。对于每个 C，对 $e(H)$取模进行讨论，可得到 $e(H) - 4$ 种可能的伪弗罗贝尼乌斯数集合，从而产生许多组需要研究的限制条件。这些限制条件中的大多数会产生远离型Gorenstein数值半群，但并非全部如此（参见下文关于情形 $e(H) = 8$的讨论）。各个子情形所用的技巧相似。为简洁起见，我们将针对 $e(H)$的每个可能取值，详细讨论一个子情形。

I. $e(H) = 5$由于 $e(H) = 5 = r + 1$，根据命题 1.4， H 具有最小重数。
根据定理 1.3，存在 $2 \leq n_3 < n_4$ 使得 $C = (1, t, t^{n_3}, t^{n_4})$并且

$$\{0,1,2,3,4\} \subseteq \{0,1,n_3,n_4\} + \{0,1,n_3,n_4\}. \tag{2}$$

TABLE 1. 类型 4 的远离型Gorenstein数值半群

No.	H	$PF(H)$	C
1	$\langle 5, 5m+1, 5m+5x-3, 5m+5x-2, 5m+5x-1\rangle$, $1 \le x \le m$	$\{5m-4, 5m+5x-8, 5m+5x-7, 5m+5x-6\}$	$(1, t, t^2, t^{5x-2})$
2	$\langle 5, 5m+4, 5m+5x+1, 5m+5x+2, 5m+5x+3\rangle$, $1 \le x \le m$	$\{5m-1, 5m+5x-4, 5m+5x-3, 5m+5x-2\}$	$(1,\ t,\ t^2,\ t^{5x-1})$
3	$\langle 5, 5m+2, 5m+5x+1, 5m+5x+3, 5m+5x+4\rangle$, $1 \le x \le m-1$	$\{5m-3, 5m+5x-4, 5m+5x-2, 5m+5x-1\}$	$(1,\ t,\ t^3,\ t^{5x+2})$
4	$\langle 5, 5m+3, 5m+5x-1, 5m+5x+1, 5m+5x+2\rangle$, $1 \le x \le m$	$\{5m-2, 5m+5x-6, 5m+5x-4, 5m+5x-3\}$	$(1,\ t,\ t^3,\ t^{5x-1})$
5	$\langle 6, 6m+5, 12m+7, 12m+8, 12m+9\rangle$, $m \ge 1$	$\{12m+1, 12m+2, 12m+3, 12m+4\}$	$(1,\ t,\ t^2,\ t^3)$
6	$\langle 6, 6m+1, 12m+3, 12m+4, 12m+5\rangle$, $m \ge 1$	$\{12m-4, 12m-3, 12m-2, 12m-1\}$	$(1,\ t,\ t^2,\ t^3)$
7	$\langle 6, 6m+2, 12m+1, 12m+3, 12m+5\rangle$, $m \ge 1$	$\{12m-5, 12m-3, 12m-2, 12m-1\}$	$(1,\ t,\ t^2,\ t^4)$
8	$\langle 6, 6m+4, 12m+5, 12m+7, 12m+9\rangle$, $m \ge 1$	$\{12m-1, 12m+1, 12m+2, 12m+3\}$	$(1,\ t,\ t^2,\ t^4)$
9	$\langle 6, 6m+5, 12m+13, 12m+14, 12m+15\rangle$, $m \ge 1$	$\{12m+4, 12m+7, 12m+8, 12m+9\}$	$(1,\ t,\ t^2,\ t^5)$
10	$\langle 6, 6m+1, 12m-1, 12m+3, 12m+4\rangle$, $m \ge 1$	$\{12m-7, 12m-4, 12m-3, 12m-2\}$	$(1,\ t,\ t^2,\ t^5)$
11	$\langle 6, 6m+4, 12m+3, 12m+5, 12m+7\rangle$, $m \ge 1$	$\{12m-3, 12m-1, 12m+1, 12m+2\}$	$(1, t, t^3, t^5)$
12	$\langle 6, 6m+2, 12m-1, 12m+1, 12m+3\rangle$, $m \ge 1$	$\{12m-7, 12m-5, 12m-3, 12m-2\}$	$(1, t, t^3, t^5)$
13	$\langle 7, 7m+5, 7x+6, 7m+7x+8, 7m+7x+9, 7m+7x+10\rangle$, $m, x \ge 1$ 和 $\frac{m-1}{2} \le x \le m$	$\{7m+7x+1, 7m+7x+2, 7m+7x+3, 7m+7x+4\}$	$(1, t, t^2, t^3)$
14	$\langle 7, 7m+1, 7x+2, 7m+7x+4, 7m+7x+5, 7m+7x+6\rangle$, $1 \le m \le x \le 2m$	$\{7m+7x-4, 7m+7x-3, 7m+7x-2, 7m+7x-1\}$	$(1,\ t,\ t^2,\ t^3)$
15	$\langle 7, 7m+1, 7m+3, 14m+5\rangle$, $m \ge 1$	$\{14m-5, 14m-3, 14m-2, 14m-1\}$	$(1,\ t,\ t^2,\ t^4)$
16	$\langle 7, 7m+4, 7m+5, 14m+6\rangle$, $m \ge 1$	$\{14m-1, 14m+1, 14m+2, 14m+3\}$	$(1, t, t^2, t^4)$
17	$\langle 7, 7m+2, 7m+3, 14m+1\rangle$, $m \ge 1$	$\{14m-6, 14m-3, 14m-2, 14m-1\}$	$(1, t, t^2, t^5)$
18	$\langle 7, 7m+4, 7x+6, 7m+7x+5, 7m+7x+8, 7m+7x+9\rangle$, $m, x \ge 1$ 和 $m-1 \le x \le m$	$\{7m+7x-2, 7m+7x+1, 7m+7x+2, 7m+7x+3\}$	$(1, t, t^2, t^5)$
19	$\langle 7, 7m+3, 7x+6, 7m+7x+8, 7m+7x+11, 7m+7x+12\rangle$, $1 \le m \le x \le 2m$	$\{7m+7x+1, 7m+7x+2, 7m+7x+4, 7m+7x+5\}$	$(1,\ t,\ t^3,\ t^4)$
20	$\langle 7, 7m+1, 7x+4, 7m+7x+2, 7m+7x+3, 7m+7x+6\rangle$, $m, x \ge 1$ 和 $\frac{m-1}{2} \le x \le m$	$\{7m+7x-5, 7m+7x-4, 7m+7x-2, 7m+7x-1\}$	$(1,\ t,\ t^3,\ t^4)$
21	$\langle 7, 7m+3, 7m+4, 14m+5, 14m+9\rangle$, $m \ge 1$	$\{14m-2, 14m-1, 14m+1, 14m+2\}$	$(1, t, t^3, t^4)$
22	$\langle 7, 7m+2, 7x+4, 7m+7x+1, 7m+7x+3, 7m+7x+5\rangle$, $m, x \ge 1$ 和 $m-1 \le x \le 2m$	$\{7m+7x-6, 7m+7x-4, 7m+7x-2, 7m+7x-1\}$	$(1,\ t,\ t^3,\ t^5)$
23	$\langle 7, 7m+3, 7x+5, 7m+7x+4, 7m+7x+6, 7m+7x+9\rangle$, $m, x \ge 1$ 和 $\frac{m-1}{2} \le x \le m$	$\{7m+7x-3, 7m+7x-1, 7m+7x+1, 7m+7x+2\}$	$(1, t, t^3, t^5)$
24	$\langle 8, 8m+1, 8m+3, 8x+4, 8m+8x+2, 8m+8x+6\rangle$, $1 \le x \le m$	$\{8m+8x-6, 8m+8x-3, 8m+8x-2, 8m+8x-1\}$	$(1, t, t^2, t^5)$
25	$\langle 8, 8m+4, 8x+5, 8x+7, 8m+8x+6, 8m+8x+10\rangle$, $1 \le m \le x$	$\{8m+8x-2, 8m+8x+1, 8m+8x+2, 8m+8x+3\}$	$(1,\ t,\ t^2,\ t^5)$
26	$\langle 8, 8m+3, 8x+6, 8x+7, 8m+8x+12, 8m+8x+13\rangle$, $1 \le m \le x \le 2m$	$\{8m+8x+1, 8m+8x+2, 8m+8x+4, 8m+8x+5\}$	$(1,\ t,\ t^3,\ t^4)$
27	$\langle 8, 8m+3, 8m+6, 8x+7, 8m+8x+9, 8m+8x+12\rangle$, $m, x \ge 1$ 和 $\frac{m-1}{2} \le x \le m-1$	$\{8m+8x+1, 8m+8x+2, 8m+8x+4, 8m+8x+5\}$	$(1, t, t^3, t^4)$
28	$\langle 8, 8m-1, 8m+1, 8x+4, 8m+8x+2, 8m+8x+6\rangle$, $1 \le x \le m-1$	$\{8m+8x-6, 8m+8x-5, 8m+8x-3, 8m+8x-2\}$	$(1, t, t^3, t^4)$
29	$\langle 8, 8m+1, 8x+2, 8x+5, 8m+8x+4, 8m+8x+7\rangle$, $1 \le m \le x \le 2m$	$\{8m+8x-5, 8m+8x-4, 8m+8x-2, 8m+8x-1\}$	$(1,\ t,\ t^3,\ t^4)$
30	$\langle 8, 8m+1, 8m+2, 8x+5, 8m+8x+3, 8m+8x+4\rangle$, $m, x \ge 1$ 和 $\frac{m-1}{2} \le x \le m-1$	$\{8m+8x-5, 8m+8x-4, 8m+8x-2, 8m+8x-1\}$	$(1,\ t,\ t^3,\ t^4)$
31	$\langle 8, 8m+3, 8x+4, 8m+5, 8m+8x+6, 8m+8x+10\rangle$, $1 \le x \le m$	$\{8m+8x-2, 8m+8x-1, 8m+8x+1, 8m+8x+2\}$	$(1, t, t^3, t^4)$
32	$\langle 9, 9m+3, 9m+6, 9x+7, 9x+8\rangle$, $1 \le m \le x$	$\{9m+9x+1, 9m+9x+2, 9m+9x+4, 9m+9x+5\}$	$(1, t, t^3, t^4)$
33	$\langle 9, 9m+3, 9m+6, 9x+7, 18x-9m+8, 18x+10, 18x+13\rangle$, $m \ge 3$ 和 $\frac{2m-1}{3} \le x \le m-1$	$\{18x+1, 18x+2, 18x+4, 18x+5\}$	$(1, t, t^3, t^4)$
34	$\langle 9, 9m+1, 18m-9x-5, 18m-9x-2, 9x+8,\ 18m+5\rangle$, $m,\ x \ge 1$ 和 $\frac{2m-2}{3} \le x \le m-1$	$\{18m-7, 18m-6, 18m-4, 18m-3\}$	$(1, t, t^3, t^4)$
35	$\langle 9, 9m-2, 9m-1, 9m+1, 9x+4, 9m+9x+6\rangle$, $m,\ x \ge 1$ 和 $\frac{m-1}{2} \le x \le m-1$	$\{9m+9x-7, 9m+9x-6, 9m+9x-4, 9m+9x-3\}$	$(1, t, t^3, t^4)$
36	$\langle 9, 9m+1, 18x-9m+11, 18x-9m+14, 9x+8, 18x+13\rangle$, $1 \le m \le x \le \frac{3m-1}{2}$	$\{18x+3, 18x+4, 18x+6, 18x+7\}$	$(1, t, t^3, t^4)$
37	$\langle 9, 9m-1, 9m+1, 9m+2, 9x+5, 9m+9x+3\rangle$, $m, x \ge 1$ 和 $\frac{m-1}{2} \le x \le m-1$	$\{9m+9x-6, 9m+9x-5, 9m+9x-3, 9m+9x-2\}$	$(1, t, t^3, t^4)$
38	$\langle 9, 9m+1, 9x+2, 18x-9m+3, 18x-9m+6,\ 18x+5,\ 18x+8\rangle$, $1 \le m \le x \le 2m$	$\{18x-5, 18x-4, 18x-2, 18x-1\}$	$(1, t, t^3, t^4)$
39	$\langle 9, 9x+3, 9x+6, 9m+1, 9m+2\rangle$, $1 \le x \le m-1$	$\{9m+9x-5, 9m+9x-4, 9m+9x-2, 9m+9x-1\}$	$(1, t, t^3, t^4)$
40	$\langle 9, 9m+3, 9x+4, 9x+5, 9m+6\rangle$, $1 \le m \le x$	$\{9m+9x-2, 9m+9x-1, 9m+9x+1, 9m+9x+2\}$	$(1, t, t^3, t^4)$

因此， $2 \leq n_3 \leq 3$ 且任意 $n_4 > n_3$ 都满足（2）。

若 $n_3 = 2$，则 $C = (1, t, t^2, t^{n_4})$。由于 $r(H) = 4$，我们得到 $n_4 \equiv 3$（模 5）或$n_4 \equiv 4$（模 5），因此 $C = (1, t, t^2, t^{5x-2})$或 $C = (1, t, t^2, t^{5x-1})$，其中 $x \geq 1$。

若 $n_3 = 3$，则 $C = (1, t, t^3, t^{n_4})$。由于 $r(H) = 4$，我们得到 $n_4 \equiv 2$（模 5）或$n_4 \equiv 4$（模 5），因此 $C = (1, t, t^3, t^{5x+2})$或 $C = (1, t, t^3, t^{5x-1})$，其中 $x \geq 1$。

假设 $C = (1, t, t^2, t^{5x-2})$，其中 $x \geq 1$。根据命题 1.2，$PF(H) = \{a, a+5x-4, a+5x-3, a+5x-2\}$，其中 $a \geq 1$。由于 $PF(H)$ 中的元素模 5 的非零值各不相同，因此得到 $PF(H) = \{5n+1, 5n+5x-3, 5n+5x-2, 5n+5x-1\}$，其中 $n \geq 0$。根据命题 1.1，$H = \langle 5, 5n+6, 5n+5x+2, 5n+5x+3, 5n+5x+4\rangle$。令 $m = n+1$，得到 $H = \langle 5, 5m+1, 5m+5x-3, 5m+5x-2, 5m+5x-1\rangle$，其中 $m \geq 1$。

由于 H 具有最小重数，我们得到 $v(H) = 5$。在数值半群$\langle 5, 5m+1\rangle$中，模 5 同余于 2、3、4 的最小非零元素分别是 $2(5m+1)$、$3(5m+1)$ 和 $4(5m+1)$。于是 $5m+5x-3, 5m+5x-2, 5m+5x-1 \notin \langle 5, 5m+1\rangle$当且仅当 $5m+5x-3 \leq 2(5m+1) - 5$、$5m+5x-2 \leq 3(5m+1) - 5$ 以及$5m+5x-1 \leq 4(5m+1) - 5$，而这些条件合起来等价于 $x \leq m$。

因此， $H = \langle 5, 5m+1, 5m+5x-3, 5m+5x-2, 5m+5x-1\rangle$（其中 $1 \leq x \leq m$）是一个最小重数数值半群。根据命题 1.1，$PF(H) = \{5m-4, 5m+5x-8, 5m+5x-7, 5m+5x-6\}$，所以 $C = (1, t, t^2, t^{5x-2})$。这给出了表1中的第一个族。

其余三个可能的模 C 分别构成表1中的第二、第三和第四个族。

II. $e(H) = 6$

根据定理 1.3，C是以下 $K[[H]]$-模之一：$(1, t, t^2, t^3)$、$(1, t, t^2, t^4)$、$(1, t, t^2, t^5)$、$(1, t, t^3, t^4)$或$(1, t, t^3, t^5)$。

假设 $C = (1, t, t^2, t^3)$。那么，由于 $PF(H)$ 中的元素模 6 后具有互不相同的非零值，

$$\begin{aligned} PF(H) &= \{6n+1, 6n+2, 6n+3, 6n+4\} \text{ or} \\ PF(H) &= \{6n+2, 6n+3, 6n+4, 6n+5\}, \end{aligned} \tag{3}$$

其中 $n \geq 0$。

我们将详细说明方程 (3) 中的子情形。

考察 H 在模 6 的每个同余类中的最小非零元素，存在 $m \geq 1$ 使得 $H = \langle 6, 6n+7, 6n+8, 6n+9, 6n+10, 6m+5\rangle$ 和$6m-1 \notin H$。

H 的伪弗罗贝尼乌斯数是 $\mathbb{Z} \setminus H$ 中关于偏序 $\leq_H$ 极大的元素。因此，由于 $6m-1 \notin H \cup PF(H)$，我们得到

$$\begin{cases} 6n+1-(6m-1) \in H \text{ or} \\ 6n+2-(6m-1) \in H \text{ or} \\ 6n+3-(6m-1) \in H \text{ or} \\ 6n+4-(6m-1) \in H, \end{cases}$$

因此，通过模 6 论证，我们推得

$$\begin{cases} 6n+1-(6m-1)\geq 6n+8 \text{ or} \\ 6n+2-(6m-1)\geq 6n+9 \text{ or} \\ 6n+3-(6m-1)\geq 6n+10 \text{ or} \\ 6n+4-(6m-1)\geq 6m+5, \end{cases}$$

这等价于

$$n \geq 2m. \tag{4}$$

由于 $6n+10=2(6m+5)+6(n-2m)$，我们可以从 H 的生成元中删去 $6n+10$，因此

$$H=\langle 6, 6m+5, 6n+7, 6n+8, 6n+9\rangle.$$

设 $p\geq 0$ 是一个满足 $6p+4\in\langle 6, 6m+5\rangle$ 的整数，这意味着存在整数 $a,b\geq 0$ 使得 $6p+4=6a+(6m+5)b$。对模 6 进行推理，得到 $b\geq 2$，因此 $6p+4\geq 2(6m+5)$，等价地， $p\geq 2m+1$。反过来，容易验证，对于这样的 p，前一个方程有解 $a,b\geq 0$。

我们知道 $6n+4\notin H$，这等价于 $6n+4\notin\langle 6, 6m+5\rangle$。因此，根据上面的讨论， $n\leq 2m$。利用 (4)，得到 $n=2m$。

因此 $H=\langle 6,\ 6m+5,\ 12m+7,\ 12m+8,\ 12m+9\rangle$，其中 $m\geq 1$。

反过来，容易验证，对于这样的 H， $PF(H)=\{12m+1, 12m+2, 12m+3, 12m+4\}$。

这就完成了子情形 (3)，并给出了表1中的第五个族。

当 $e(H)=6$时，有 5 个可能的模 C，且每个模都有两种可能的模 6 伪弗罗贝尼乌斯数集合。在这 10 种可能性中，只有 8 种会产生远散戈伦斯坦数值半群，即表1中编号 5 至 12 的族。结果表明，模 $(1,\ t,\ t^3,\ t^4)$ 不会产生任何重数为 6 的远离型Gorenstein数值半群。

III. $e(H)=7$

根据定理 1.3， C是以下 $K[[H]]$-模之一：$(1,\ t,\ t^2,\ t^3)$，$(1,\ t,\ t^2,\ t^4)$，$(1,\ t,\ t^2,\ t^5)$，$(1,\ t,\ t^3,\ t^4)$或$(1,\ t,\ t^3,\ t^5)$。

假设 $C=(1,\ t,\ t^2,\ t^3)$。那么 $PF(H)=\{7n+1, 7n+2, 7n+3, 7n+4\}$ 或 $PF(H)=\{7n+2, 7n+3, 7n+4, 7n+5\}$ 或 $PF(H)=\{7n+3, 7n+4, 7n+5, 7n+6\}$，其中 $n\geq 0$。我们将详细讨论子情形

$$PF(H)=\{7n+1, 7n+2, 7n+3, 7n+4\}. \tag{5}$$

考虑 H 在模 7 的每个同余类中的最小非零元素，存在 $m,x\geq 1$，使得 $H=\langle 7, 7n+8, 7n+9, 7n+10, 7n+11, 7m+5, 7x+6\rangle$ 和 $7m-2, 7x-1\notin H$。由于 $7m-2\notin H\cup PF(H)$，我们得到

$$\begin{cases} 7n+1-(7m-2)\in H \text{ or} \\ 7n+2-(7m-2)\in H \text{ or} \\ 7n+3-(7m-2)\in H \text{ or} \\ 7n+4-(7m-2)\in H, \end{cases}$$

因此，在模 7 意义下进行论证，我们推知

$$\begin{cases} 7n+1-(7m-2) \geq 7n+10 \text{ or} \\ 7n+2-(7m-2) \geq 7n+11 \text{ or} \\ 7n+3-(7m-2) \geq 7m+5 \text{ or} \\ 7n+4-(7m-2) \geq 7x+6, \end{cases}$$

这等价于

$$n \geq 2m \text{ or } n \geq m+x. \tag{6}$$

类似地，由于 $7x-1 \notin H \cup PF(H)$，我们得到

$$n \geq m+x. \tag{7}$$

结合 (6) 和 (7)，我们得到 $n \geq m+x$。于是可以写成 $7n+11 = 7(n-m-x) + (7m+5) + (7x+6)$，因此

$$H = \langle 7, 7n+8, 7n+9, 7n+10, 7m+5, 7x+6 \rangle.$$

设 $p \geq 0$ 是一个整数，使得 $7p+4 \in \langle 7, 7m+5, 7x+6 \rangle$，这意味着存在整数 $a, b, c \geq 0$，使得 $7p+4 = 7a+(7m+5)b+(7x+6)c$。我们模 7 进行讨论。若 $c=0$，则 $b \geq 5$，因此 $7p+4 \geq 5(7m+5)$。若 $b=0$，则$c \geq 3$，因此 $7p+4 \geq 3(7x+6)$。若 $b, c \geq 1$，则 $7p+4 \geq (7m+5)+(7x+6)$。因此$p \geq \min\{5m+3, 3x+2, m+x+1\}$。反过来，容易验证，对于这样的 p，前一个方程有解 $a, b, c \geq 0$。

我们知道，$7n+4 \notin H$，这等价于 $7n+4 \notin \langle 7, 7m+5, 7x+6 \rangle$。因此，根据上文的讨论，$n \leq \min\{5m+2, 3x+1, m+x\} \leq m+x$。由于 $n \geq m+x$，我们得到 $n = m+x$。

类似地，对于 $PF(H)$ 中其余的元素，我们得到：$7n+1 \notin H$ 当且仅当 $n \leq \min\{3m+1, 6x+4, 2m+2x+2\}$，$7n+2 \notin H$当且仅当 $n \leq \min\{6m+3, 5x+3, 2m+x+1\}$，以及 $7n+3 \notin H$当且仅当 $n \leq \min\{2m, 4x+2, m+2x+1\}$。

将 $n = m+x$ 代入前面的不等式，得到

$$\begin{cases} m+x \leq 2m \\ m+x \leq 3x+1, \end{cases}$$

这等价于 $\frac{m-1}{2} \leq x \leq m$。

因此 $H = \langle 7, 7m+5, 7x+6, 7m+7x+8, 7m+7x+9, 7m+7x+10 \rangle$，其中 $m, x \geq 1$ 和 $\frac{m-1}{2} \leq x \leq m$。

反过来，容易验证 $PF(H) = \{7m+7x+1, 7m+7x+2, 7m+7x+3, 7m+7x+4\}$。

这就完成了子情形（5），并给出了表中的第十三族 1.

当 $e(H) = 7$ 时，有 5 个可能的模 C，且每个模都对应三种模 7 的伪弗罗贝尼乌斯数集合。在这 15 种可能性中，只有 11 种能产生远散戈伦斯坦数值半群，即表 1 中的第 13 至第 23 族。

IV. $e(H) = 8$根据定理 1.3，C是以下某个 $K[[H]]$-模：$(1, t, t^2, t^5)$ 或 $(1, t, t^3, t^4)$。

假设 $C = (1, t, t^2, t^5)$。那么 $PF(H) = \{8n+1, 8n+4, 8n+5, 8n+6\}$ 或 $PF(H) = \{8n+2, 8n+5, 8n+6, 8n+7\}$ 或 $PF(H) = \{8n+6, 8n+9, 8n+10, 8n+11\}$ 或 $PF(H) = \{8n+7, 8n+10, 8n+11, 8n+12\}$，其中 $n \geq 0$。

我们将详细说明子情形

$$PF(H) = \{8n+1, 8n+4, 8n+5, 8n+6\}. \tag{8}$$

存在 m，x，$y \geq 1$，使得 $H = \langle 8,\ 8n+9,\ 8n+12,\ 8n+13,\ 8n+14,\ 8m+2,\ 8x+3,\ 8y+7\rangle$ 且 $8m-6,\ 8x-5,\ 8y-1 \notin H$。由于 $8m-6 \notin H \cup PF(H)$，我们得到

$$\begin{cases} 8n+1-(8m-6) \in H \text{ or} \\ 8n+4-(8m-6) \in H \text{ or} \\ 8n+5-(8m-6) \in H \text{ or} \\ 8n+6-(8m-6) \in H \end{cases}$$

so

$$\begin{cases} 8n+1-(8m-6) \geq 8y+7 \text{ or} \\ 8n+4-(8m-6) \geq 8m+2 \text{ or} \\ 8n+5-(8m-6) \geq 8x+3 \text{ or} \\ 8n+6-(8m-6) \geq 8n+12 \end{cases}$$

这等价于

$$n \geq m+y \text{ or } n \geq 2m-1 \text{ or } n \geq m+x-1. \tag{9}$$

类似地，由于 $8x-5 \notin H \cup PF(H)$，我们得到

$$n \geq m+x-1 \text{ or } n \geq 2x-1 \tag{10}$$

并且，由于 $8y-1 \notin H \cup PF(H)$，我们得到

$$n \geq m+y \text{ or } n \geq 2y. \tag{11}$$

结合 (9)、(10) 和 (11)，消去冗余子情况后，我们剩下四种可能：

i) $n \geq m+y$ 和 $n \geq m+x-1$ ii) $n \geq m+y$ 和 $n \geq 2x-1$ iii) $n \geq 2m-1$、$n \geq 2x-1$ 和 $n \geq 2y$ iv) $n \geq m+x-1$ 和 $n \geq 2y$。

我们研究 i)。我们注意到 $8n+9 = 8(n-m-y)+(8m+2)+(8y+7)$ 和 $8n+13 = 8(n-m-x+1)+(8m+2)+(8x+3)$，因此 $H = \langle 8,\ 8n+12,\ 8n+14,\ 8m+2,\ 8x+3,\ 8y+7\rangle$。

令 $p \geq 0$ 为一个整数。当且仅当 $p \geq \min\{3x+1, 7y+6, m+y+1, 3m+x+1, x+2y+2\}$ 时，可以验证 $8p+1 \in \langle 8,\ 8m+2,\ 8x+3,\ 8y+7\rangle$。

我们知道 $8n+1 \notin H$，这等价于 $8n+1 \notin \langle 8,\ 8m+2,\ 8x+3,\ 8y+7\rangle$。因此，根据上面的讨论，

$$n \leq \min\{3x, 7y+5, m+y, 3m+x, x+2y+1\} \leq m+y. \tag{12}$$

由于 $n \geq m+y$，我们得到 $n = m+y$。

类似地，$8n+5 \notin H$ 当且仅当

$$n \leq \min\{7x+1, 3y+1, m+x-1, 3m+y, 2x+y\} \leq m+x-1. \tag{13}$$

由于 $n \geq m+x-1$，我们得到 $n = m+x-1$。

由于 $n = m + y$ 和 $n = m + x - 1$，我们得到 $y = x - 1$。

同理， $8n + 4 \notin H$ 当且仅当

$$n \leq \min\{2m - 1, 4x, 4y + 2, 2x + 2y + 1, m + x + y\} \tag{14}$$

且 $8n + 6 \notin H$ 当且仅当

$$n \leq \min\{3m - 1, 2x - 1, 2y, 2m + x + y\}. \tag{15}$$

将 $n = m + x - 1$ 和 $y = x - 1$ 代入不等式 (12)、(13)、(14) 和 (15)，得到

$$\begin{cases} m + x - 1 \leq 2m - 1 \\ m + x - 1 \leq 2x - 2, \end{cases}$$

矛盾。

因此，不存在满足条件 i 的远离戈伦斯坦数值半群).

对剩余的子情形 ii)、iii) 和 iv) 也进行了类似的讨论。

我们没有找到满足 (8) 的远离型Gorenstein数值半群。

总体而言，当 $e(H) = 8$ 时，两个可能的模 C 生成了表1中编号为24至31的各族。

V. $e(H) = 9$根据定理 1.3， $C =$(

$1, t, t^3, t^4$)。

那么 $PF(H) = \{9n + 1, 9n + 2, 9n + 4, 9n + 5\}$ 或 $PF(H) = \{9n+2, 9n+3, 9n+5, 9n+6\}$ 或 $PF(H) = \{9n+3, 9n+4, 9n+6, 9n+7\}$ 或$PF(H) = \{9n+4, 9n+5, 9n+7, 9n+8\}$ 或 $PF(H) = \{9n+7, 9n+8, 9n+10, 9n+11\}$，其中 $n \geq 0$。

我们将对该子情形作一些详细说明

$$PF(H) = \{9n + 1, 9n + 2, 9n + 4, 9n + 5\}. \tag{16}$$

存在 m， x， y， $z \geq 1$ 使得 $H = \langle 9,\ 9n + 10,\ 9n + 11,\ 9n + 13,\ 9n + 14,\ 9m + 3,\ 9x + 6,\ 9y + 7,\ 9z + 8\rangle$ 以及 $9m - 6,\ 9x - 3,\ 9y - 2,\ 9z - 1 \notin H$。由于 $9m - 6 \notin H \cup PF(H)$，我们得到

$$\begin{cases} 9n + 1 - (9m - 6) \in H \text{ or} \\ 9n + 2 - (9m - 6) \in H \text{ or} \\ 9n + 4 - (9m - 6) \in H \text{ or} \\ 9n + 5 - (9m - 6) \in H \end{cases}$$

so

$$\begin{cases} 9n + 1 - (9m - 6) \geq 9y + 7 \text{ or} \\ 9n + 2 - (9m - 6) \geq 9z + 8 \text{ or} \\ 9n + 4 - (9m - 6) \geq 9n + 10 \text{ or} \\ 9n + 5 - (9m - 6) \geq 9n + 11 \end{cases}$$

这等价于

$$n \geq m + y \text{ or } n \geq m + z. \tag{17}$$

同理，由于 $9x - 3 \notin H \cup PF(H)$，我们得到

$$n \geq x + y \text{ or } n \geq x + z. \tag{18}$$

由于 $9y-2 \notin H \cup PF(H)$，我们得到

$$n \geq m+y \text{ or } n \geq x+y \text{ or } n \geq 2y \tag{19}$$

并且，由于 $9z-1 \notin H \cup PF(H)$，我们得到

$$n \geq m+z \text{ or } n \geq x+z. \tag{20}$$

结合 (17)、(18)、(19) 和 (20)，剔除冗余子情况后，剩下三种可能：

i) $n \geq m+y$ 和 $n \geq x+z$
ii) $n \geq m+z$ 和 $n \geq x+y$
iii) $n \geq m+z$、$n \geq x+z$ 和 $n \geq 2y$。

我们研究 i)。我们观察到 $9n+10 = 9(n-m-y)+(9m+3)+(9y+7)$ 和 $9n+14 = 9(n-x-z)+(9x+6)+(9z+8)$，因此 $H = \langle 9,\ 9n+11,\ 9n+13,\ 9m+3,\ 9x+6,\ 9y+7,\ 9z+8\rangle$。

设 $p \geq 0$ 为一个整数。可以验证，$9p+1 \in \langle 9,\ 9m+3,\ 9x+6,\ 9y+7,\ 9z+8\rangle$ 当且仅当 $p \geq \min\{4y+3, 8z+7, m+y+1, m+2z+2, 2x+y+2, 2x+2z+3, y+6z+6,\ x+2y+z+3\}$。

我们知道 $9n+1 \notin H$，这等价于 $9n+1 \notin \langle 9,\ 9m+3,\ 9x+6,\ 9y+7,\ 9z+8\rangle$。因此，根据上述讨论，$9n+1 \notin H$ 当且仅当

$$n \leq \text{最小值}\ \{4y+2, 8z+6, m+y, m+2z+1, 2x+y+1, 2x+2z+2, y+6z+5, x+2y+z+2\} \leq m+y. \tag{21}$$

由于 $n \geq m+y$，我们得到 $n = m+y$。

类似地，$9n+5 \notin H$ 当且仅当

$$n \leq \min\{2y, 4z+2, 2m+z, x+z, y+2z+1\} \leq x+z. \tag{22}$$

由于 $n \geq x+z$，我们得到 $n = x+z$。

由于 $n = m+y$ 且 $n = x+z$，我们得到 $z = m+y-x$。

同理，当且仅当 $9n+2 \notin H$

$$\text{当且仅当 } n \leq \min\{8y+5, 7z+5, 2m+2y+1, m+z, x+2y+1, 2x+z+1, 3y+z+2, x+y+2z+2\} \text{ 和 } 9n+4 \notin H \tag{23}$$

$$n \leq \min\{7y+4, 5z+3, 2m+y, 2m+2z+1, x+y, x+2z+1, 2y+z+1\}. \tag{24}$$

将 $n = m+y$ 和 $z = m+y-x$ 代入不等式 (21)、(22)、(23) 和 (24)，得到

$$\begin{cases} m+y \leq 2y \\ m+y \leq 4m+4y-4x+2 \\ m+y \leq 2m+y-x \\ m+y \leq x+y \\ m+y \leq m+3y-x+1 \\ m+y \leq 2m+3y-2x+1, \end{cases}$$

这等价于

$$\begin{cases} x = m \\ y \geq m. \end{cases}$$

因此 $z = m+y-x = y$。

由于 $9n+11=(9m+3)+(9z+8)$ 且 $9n+13=(9x+6)+(9y+7)$，我们得到 $H=\langle 9, 9m+3, 9m+6, 9y+7, 9y+8\rangle$，其中 $1\le m\le y$。

反之，容易验证，对于这样的 H, $PF(H)=\{9m+9y+1, 9m+9y+2,\ 9m+9y+4,\ 9m+9y+5\}$。

对其余子情形也进行了类似的讨论。

总之，当 $e(H)=9$ 时，模 $(1,\ t,\ t^3,\ t^4)$ 给出了表1中的第32至40族。□

表1中给出的数值半群的生成元通常是最小的。对于最小重数的族（编号1–4）、依赖一个参数的族（编号5–12、15–17、21），以及族32、39和40，这一点很容易验证。对于其余情况，经过逐一分析后，我们在表2中总结了哪些族中 x和 m 的生成元不是最小的，以及哪些生成元可以舍弃。

TABLE 2. 表1中非极小生成的各族

No.	对于以下情形，非极小生成	非极小生成元
13	$x=\frac{m-1}{2}$	$7m+5$
	$x=m$	$7m+7x+10$
14	$x=m$	$7m+7x+4$
	$x=2m$	$7x+2$
18	$x=m-1$	$7m+7x+5$
	$x=m$	$7m+7x+8$
19	$x=m$	$7m+7x+12$
	$x=2m$	$7x+6$
20	$x=\frac{m-1}{2}$	$7m+1$
	$x=m$	$7m+7x+2$
22	$x=m-1$	$7m+7x+1$
	$x=2m$	$7x+4$
23	$x=\frac{m-1}{2}$	$7m+3$
	$x=m$	$7m+7x+6$
24	$x=m$	$8m+8x+2, 8m+8x+6$
25	$x=m$	$8m+8x+10$
26	$x=m$	$8m+8x+12, 8m+8x+13$
	$x=2m$	$8x+6$
27	$x=\frac{m-1}{2}$	$8m+6$
28	$x=m-1$	$8m+8x+6$
29	$x=m$	$8m+8x+4, 8m+8x+7$
	$x=2m$	$8x+2$
30	$x=\frac{m-1}{2}$	$8m+2$
31	$x=m$	$8m+8x+6, 8m+8x+10$
33	$x=\frac{2m-1}{3}$	$9m+6, 9x+7$
34	$x=\frac{2m-2}{3}$	$18m-9x-2$
	$x=m-1$	$18m+5$
35	$x=\frac{m-1}{2}$	$9m-1$
	$x=m-1$	$9m+9x+6$
36	$x=\frac{3m-1}{2}$	$18x-9m+11$
37	$x=\frac{m-1}{2}$	$9m+1$
38	$x=m$	$18x+5,\ \ 18x+8$
	$x=2m$	$9x+2,\ \ 18x-9m+3$

致谢。我们衷心感谢在 GAP 中使用 numericalsgps 软件包进行计算。

我们谨此感谢 Dumitru Stamate 和 Mihai Cipu 向我们介绍远扩张戈伦斯坦环，并向我们提出这个问题。

作者部分获得了研究、创新与数字化部的一项资助，该资助由 CNCS - UEFISCDI 提供，项目编号为 PN-III-P1-1.1-TE-2021- 1633，属于 PNCDIIII 项目。

这项工作是作者在布加勒斯特大学博士论文的一部分。

References

[1] W. Bruns, J. Herzog，《科恩-麦考利环》，修订版，剑桥高级数学研究丛书，第39卷，剑桥大学出版社，剑桥，1998年。[2] H. Dao, T. Kobayashi, R. Takahashi，典范模的迹理想、*Ext*模的湮灭子，以及接近戈伦斯坦环的环类，《纯粹与应用代数杂志》225（2021），论文编号106655。[3] D. Eisenbud，从代数几何视角看交换代数，施普林格，1995年。.[4]O. Esentepe，一维几乎戈伦斯坦环上的上同调湮灭，arXiv:2510.05720。[5] J. Herzog, T. Hibi, D.I. Stamate，典范模的迹，《以色列数学杂志》233（2019）133–165。[6] J. Herzog, T.Hibi, D.I.Stamate，数值半群环的典范迹理想与剩余，《半群论坛》103(2)（2021）550–566。[7] J. Herzog, S. Kumashiro，一维情形下典范模迹的余长度上界，《数学档案》119（2022），237–246。[8] J. Herzog, S. Kumashiro, D. I. Stamate，一维科恩-麦考利环中典范模的微小迹理想，《代数学杂志》619（2023）626–642。[9] R. Isobe, S. Kumashiro，根据迹理想刻画几乎戈伦斯坦环，arXiv:2510.20170。[10] H. Rohrbach，对加法数论的贡献，《数学杂志》42（1937）1–30。[11] J.C. Rosales, P.A. Garc´ıa-S´anchez，数值半群，施普林格，2009年。[12] N.J.A. Sloane，整数数列在线百科全书，https://oeis. org/A123509。

Teodor I. Grigorescu, Faculty of Mathematics and Computer Science, University of Bucharest, Str. Academiei 14, Bucharest 010014, Romania电子邮箱地址：teodor 999@yahoo.com -