arXiv:2512.18404v1 [math.SP] 20 Dec 2025

势属于 L^1 球的 Sturm-Liouville 算子所有节点的显式尖锐界

Jifeng Chu[1], Shuyuan Guo[2], Gang Meng[3], Meirong Zhang[2]

Abstract. 对于经典 Sturm-Liouville 算子，我们将特征函数的所有节点视为势函数 $q \in L^1[0,1]$的非线性泛函，从而证明了这些节点的尖锐界。通过研究在约束 $\|q\|_1 = r$ with $r > 0$ 下使节点$\{T_{i,m}\}$ 最小化或最大化的优化问题，并利用节点关于势的强连续性，我们得到了尖锐界的显式表达式，这些表达式均由初等函数给出。

1. Introduction

Sturm-Liouville问题的研究最初始于Sturm和Liouville在19世纪30年代发表的奠基性论文[27, 28, 29] ，如今已成为微分方程理论中一个重要且广泛的分支。由于相关文献数量庞大，这里仅请读者参阅 [22]了解历史概述，并参阅专著[4, 32, 33] 以获取详细讨论。下面考虑经典的Sturm-Liouville

$$-y'' + q(x)y = \lambda y, \tag{1.1}$$

满足Dirichlet边界条件

$$y(0) = y(1) = 0, \tag{1.2}$$

其中 $q \in \mathcal{L}^1 := L^1[0,1]$ 是一个可积实势函数。根据经典谱理论 $[4, 32, 33]$ ，问题 **(1.1)-(1.2)** 存在一个实特征值序列 $\lambda_m = \lambda_m(q)$，满足

$$\lambda_0 < \lambda_1 < \cdots < \lambda_m < \cdots, \qquad \lambda_m \to \infty \quad (m \to \infty),$$

2000 数学主题分类。主要分类号：2010 34B24、34L40、49J40。关键词和短语。显式尖锐界、节点、Sturm-Liouville算子。Jifeng Chu获得了国家自然科学基金（项目编号：12571168）、上海市科技创新计划（项目编号：23JC1403200）和浙江省自然科学基金（项目编号：Z26A010002）的资助。Gang Meng获得了国家自然科学基金（项目编号：12271509和12471174）以及中央高校基本科研业务费（项目编号：5172023000540）的资助。Meirong Zhang获得了国家自然科学基金（项目编号：11790273）的资助。

对于每个 λ_m，都存在一个相应的实特征函数

$$E_m(x) = E_m(x;q), \qquad m = 0, 1, 2, \cdots .$$

不失一般性，我们将特征函数 $E_m(x)$归一化，使其满足

$$E'_m(0) > 0, \qquad \int_0^1 E_m^2(x)dx = 1.$$

众所周知， $E_0(x)$在 (0，1) 内没有零点；对于 $m \in \mathbb{N} = \{1, 2, \cdots\}$， $E_m(x)$恰有 m 个零点

$$0 < T_{1,m} < T_{2,m} < \cdots < T_{m,m} < 1,$$

这些零点称为问题 (1.1)-(1.2) 的节点 。注意，特征值 $\lambda_m = \lambda_m(q)$、特征函数 $E_m(x) = E_m(x;q)$ 以及节点 $T_{i,\ m} = T_{i,\ m}(q)$ 均由势函数 q 以隐式方式确定。这些节点 $\{T_{i,m}\}$ 是重要的物理量。例如，在振动动力学中，节点表示系统中不发生振动的位置。有关二阶常微分算子节点的定性性质，请参见 [3, 16, 17, 26] 。此外，这些节点的信息在逆谱理论中也很重要。例如，参见 [8, 18, 19, 23]。

本文旨在针对给定的势函数 $q \in \mathcal{L}^1$ 的 L^1 范数，求出问题 (1.1)-(1.2) 的所有节点的显式精确上界和下界。关于不同类型微分算子的特征值、特征值比或特征值间隙的尖锐界，文献中已有许多研究成果，例如参见 [1, 2, 6, 9, 10, 13, 14, 20,30, 34]。这类优化问题在数学分析领域一直颇具吸引力和研究价值，尤其是在谱理论和微分方程理论中。该主题最初源于 Krein 的开创性工作 [21], ，他研究了

$$y'' + \lambda q(x)y = 0$$

通过限制 $q \in L^\infty[0,1]$， $0 \le q \le h$， $\int_0^1 q(x)dx = r$，其中 $0 < r \le h$.

然而，据我们所知，迄今关于常微分算子节点尖锐界的研究结果仍然很少。对于给定的势函数 $q \in L^p[0,1]$的 L^p 范数且满足 $1 < p < \infty$，近期一项工作 [7] 得出了问题 (1.1)-(1.2) 中所有节点位置的最优刻画。具体而言，将第 i个特征函数的第 m个节点视为势函数的泛函，推导出确定极小势函数的临界方程，使该节点达到最小；并由临界方程证明了两种等价刻画，分别表示为关于 4 维或 2 维参数的非线性系统。从理论上讲，对 [7], 中的结果取极限 $p \downarrow 1$，即可得到势函数的 L^1范数给定时节点尖锐界的相关结果。然而，这样做非常困难，因为在 [7] 中无法得到尖锐界的显式表达式，而且 [7] 中的结果包含若干奇异积分。此外，当势函数的 L^1-范数

固定时，我们无法得到临界方程，因为空间 $\mathcal{L}^1$ 即使在弱拓扑下也不具备局部紧性。基于这些原因，本文旨在开发一种不同的方法，以求出所有节点尖锐界的显式表达式。

现在我们陈述优化问题。对于 $r \in (0,\infty)$，令 $B_r := \{q \in \mathcal{L}^1 : \|q\|_1 \le r\}$和 $S_r := \{q \in \mathcal{L}^1 : \|q\|_1 = r\}$ 分别表示 $\mathcal{L}^1$ 中以 0 为中心、半径为 r的球和球面。对于 $m \in \mathbb{N}$ 和 $1 \le i \le m$，我们考虑关于节点的以下优化问题

$$\mathbf{m}_{i,m}(r) := \inf_{q\in B_r} T_{i,m}(q) \equiv \inf_{q\in S_r} T_{i,m}(q), \tag{1.3}$$

$$\mathbf{n}_{i,m}(r) := \sup_{q\in B_r} T_{i,m}(q) \equiv \sup_{q\in S_r} T_{i,m}(q). \tag{1.4}$$

反射 $x \mapsto 1-x$ 导致

$$\mathbf{n}_{i,m}(r) = \sup_{q\in B_r} T_{i,m}(q) = 1 - \inf_{q\in B_r} T_{m-i+1,m}(q) = 1 - \mathbf{m}_{m-i+1,m}(r).$$

显然，（1.3）和（1.4）的解可以得到关于节点位置的以下最优估计

$$\mathbf{m}_{i,m}(\|q\|_1) \le T_{i,m}(q) \le 1 - \mathbf{m}_{m-i+1,m}(\|q\|_1), \quad q \in \mathcal{L}^1.$$

然而，求解优化问题（1.3）并不容易。为了实现我们的目标，并获得问题（1.1）–（1.2）所有节点的尖锐界，我们需要关于特征值 $\{\lambda_m\}$ 及相关特征函数 $\{E_m(x)\}$的三个已知结果。第一个已知结果涉及特征值 $\{\lambda_m\}$的最优估计，由 Wei、Meng 和 Zhang 在 [30, 定理 1.3 和定理 1.5], 中证明，现将其陈述为引理 2.5。第二个已知结果涉及 $\{\lambda_m\}$ 以及与势相关的节点 $\{T_{i,m}\}$ 的强连续性。也就是说，泛函

$$(\mathcal{L}^1, w_1) \to \mathbb{R} : \quad q \to \lambda_m(q), \quad q \to T_{i,m}(q)$$

是连续的，其中 w_1 是空间 $(\mathcal{L}^1, \|\cdot\|_1)$ 中弱收敛的拓扑。第三，由于相关优化问题 (1.3) 和 (1.4) 的解会导出更一般的势函数分布，而这些分布相对于勒贝格测度没有密度，因此需要了解测度微分方程的一些基本事实；在测度微分方程的框架下研究这类问题是很自然的做法。上述三个已知结果都将在第 2 节作为预备结果给出。在第 3 节中，我们首先巧妙地将无限维最小化问题 (1.3) 化为有限维优化问题 (3.28)。然后通过细致分析求出有限维最小化问题 (3.28) 的解，最后基于与势相关的节点 $\{T_{i,m}\}$ 的强连续性，证明最小化问题 (3.28) 的解恰好也是我们的最小化问题 (1.3) 的解。

2. Preliminary results

本节介绍关于特征值和节点的一些已知预备结果，包括特征值的尖锐界、节点的缩放等式，以及测度微分方程的一些事实。

2.1. 测度微分方程。 关于线性测度微分方程 [24, 25, 35] 的特征值和节点，我们需要一些结果。照例，我们用 $\mathcal{M}_0 = \mathcal{M}_0(I) := (C(I) \ \|\cdot\|_\infty)^*$ 表示 $I = [0,1]$ 上的（归一化的拉东）测度空间。除了由全变差范数 $\|\cdot\|_{\mathbf{v}}$ 诱导的通常拓扑外，$\mathcal{M}_0$ 还具有弱*拓扑 w^*，该拓扑通过测度的弱* 收敛来定义。在 w^* 拓扑下，以下结论成立。

引理 2.1。 [24] 设 $\mu_0 \in \mathcal{M}_0$. 则存在一个光滑测度序列 $\{\mu_n\} \subset \mathcal{M}_0 \cap \mathcal{C}^\infty$，使得 $\|\mu_n\|_{\mathbf{v}} = \|\mu_0\|_{\mathbf{v}}$ 且

$$\mu_n \to \mu_0 \ in \ (\mathcal{M}_0, w^*).$$

给定一个测度 $\mu \in \mathcal{M}_0$。我们考虑相应测度微分方程的特征值问题

$$\begin{cases} -\mathrm{d}y^\bullet(x) + y(x)\,\mathrm{d}\mu(x) = \lambda y(x)\,\mathrm{d}x, \\ y(0) = 0, \quad y(1) = 0. \end{cases} \tag{2.1}$$

问题 (2.1) 的特征值结构与常微分方程的特征值结构相似，即问题 (2.1) 有一个实数特征值序列

$$\lambda_0(\mu) < \lambda_1(\mu) < \cdots < \lambda_m(\mu) < \cdots, \qquad \lambda_m(\mu) \to +\infty \quad (m \to \infty).$$

详见 [25, 35]。对于每个 $\lambda_m(\mu)$，令 $E_m(x;\mu)$ 为问题 (2.1) 的一个归一化特征函数，使得 $E_m(x;\mu)$ 的 L^2 范数为 1，并且在某个夹点邻域 $(0,\ \delta)$ 上对 x 为正。对于每个 $m \in \mathbb{N}$，$E_m(x;\ \mu)$ 有 m 个节点

$$0 < T_{1,m}(\mu) < T_{2,m}(\mu) < \cdots < T_{m,m}(\mu) < 1.$$

此外，将这些节点视为测度 $\mu \in \mathcal{M}_0$ 下的泛函，可得到如下强连续性。

引理 *2.2*。 [16, 17] 设给定 $m \in \mathbb{N}$ 和 $1 \le i \le m$。将问题 *(2.1)* 的节点 $T_{i,\,m}(\mu)$ 视为从 $\mathcal{M}_0$ 到 $(0,1) \subset \mathbb{R}$ 的泛函，则其具有如下意义下的强连续性：$T_{i,\,m}(\mu_n) \to T_{i,\,m}(\mu)$，如果 $\mu_n \to \mu \in (\mathcal{M}_0, w^*)$。特别地，对于问题 *(1.1)-(1.2)*，节点 $T_{i,\,m}(q)$ 关于势函数 $q \in (\mathcal{L}^1, w_1)$ 是连续的。

引理 2.3。 [15] 设给定 $m \in \mathbb{N}$ 和 $1 \le i \le m$。则 $T_{i,\,m}(q)$ 在 $q \in (\mathcal{L}^1, \ \|\cdot\|_1)$ 中是连续 *Fr´echet* 可微的。此外，*Fr´echet* 导数为

$$\partial_q T_{i,m}(q)(x) = H_{i,m}(x;q)E_m^2(x;q) \in \mathcal{L}^\infty, \tag{2.2}$$

其中 $H_{i,\ m}(x;\ q)$ 是两步函数

$$H_{i,m}(x;q)=\begin{cases}+a_{i,m}, & x\in[0,T_{i,m}(q)),\\ -b_{i,m}, & x\in[T_{i,m}(q),1],\end{cases}$$

以及两个常数 $a_{i,m}=a_{i,m}(q)\ \ b_{i,m}=b_{i,m}(q)$ 给定为

$$a_{i,m}=\int_{[T_{i,m}(q),1]}\left(\frac{E_m(v;q)}{E'_m(T_{i,m}(q);q)}\right)^2\mathrm{d}v,\quad b_{i,m}=\int_{[0,T_{i,m}(q)]}\left(\frac{E_m(v;q)}{E'_m(T_{i,m}(q);q)}\right)^2\mathrm{d}v.$$

关于 $\mathbf{m}_{i,m}(r)$ 的以下结果可由引理 2.2 和引理 2.3 轻易得到。

引理 2.4. 对于 $r\in(0,\infty)$，$m\in\mathbb{N}$ 和 $1\le i\le m$，有

$$\mathbf{m}_{i,m}(r)\in(0,i/(m+1))\,.$$

证明 对于零势，$T_{i,m}(0)\ =i/(m+1)$。取一个扰动势

$$q_t(x)=\begin{cases}-t, & \text{for } x\in[0,i/(m+1)],\\ 0, & \text{for } x\in(i/(m+1),1],\end{cases}$$

其中 $0<t\ll1$。于是 $q_t\in B_r$，由公式 (2.2) 可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}T_{i,m}(q_t)=-\int_{[0,i/(m+1)]}a_{i,m}E_m^2(x;0)<0.$$

因此 $T_{i,m}(q_t)\ <i/(m+1)$ 对于 $0<t\ll1$。于是 $\mathbf{m}_{i,m}(r)\ <i/(m+1)$。

另一方面，设 $\{q_n\}\subset S_r$ 是一个极小化序列，使得

$$\lim_{n\to\infty}T_{i,m}(q_n)=\mathbf{m}_{i,m}(r).$$

设 $\{q_n\}$ 是这些绝对连续测度的密度

$$\mu_{q_n}(x)=\int_{[0,x]}q_n(t)\,\mathrm{d}t,\quad x\in I. \tag{2.3}$$

于是 $\|\mu_{q_n}\|_{\mathbf{V}}=r$。根据巴拿赫定理，不失一般性，我们可以假设 $\{\mu_{q_n}\}$ 弱 * 收敛到测度 μ_r。因此，由引理 2.2 可得

$$\mathbf{m}_{i,m}(r)=\lim_{n\to\infty}T_{i,m}(q_n)=\lim_{n\to\infty}T_{i,m}(\mu_{q_n})=T_{i,m}(\mu_r).$$

特别是，$\mathbf{m}_{i,\ m}(r)=T_{i,\ m}(\mu_r)\ >0$。 □

2.2. 关于特征值和节点的已知结果。设 $r \in (0, \infty)$ 和 $m \in \mathbb{Z}_+$ 给定。考虑以下与特征值相关的优化问题

$$\mathbf{L}_m(r) := \inf_{q\in S_r} \lambda_m(q) = \inf_{q\in B_r} \lambda_m(q), \quad \mathbf{M}_m(r) := \sup_{q\in S_r} \lambda_m(q) = \sup_{q\in B_r} \lambda_m(q). \tag{2.4}$$

引理 2.5。 [30] 设给定 $r \in (0, \infty)$。则

$$\mathbf{L}_0(r) = \lambda_0\left(-r\delta_{1/2}\right) = \mathbf{Z}^{-1}(r), \qquad \mathbf{M}_0(r) = \lambda_0\left(\eta_r\right) = \mathbf{Y}(r),$$

其中 $\mathbf{Z}$ 是从 $(-\infty, \pi^2]$ 到 $[0, +\infty)$ 的递减微分同胚，定义为

$$\mathbf{Z}(x) = \begin{cases} 2\sqrt{-x}\coth(\sqrt{-x}/2) & for\ x \in (-\infty, 0), \\ 4 & for\ x = 0, \\ 2\sqrt{x}\cot(\sqrt{x}/2) & for\ x \in (0, \pi^2], \end{cases} \tag{2.5}$$

并且 $\mathbf{Y}:\ [0, +\infty) \to [\pi^2, +\infty)$ 是一个递增微分同胚，给定为

$$\mathbf{Y}(x) = \left(\frac{\pi + \sqrt{\pi^2 + 4x}}{2}\right)^2, \tag{2.6}$$

其中 $\kappa\delta_a$ 表示 s 是点 a 处质量为 κ 的狄拉克测度，且 η_r 是定义为 a 的势函数 s

$$\eta_r(x) := \begin{cases} \mathbf{Y}(r), & x \in [\tau_r, 1-\tau_r], \\ 0, & x \in [0, \tau_r) \cup (1-\tau_r, 1], \end{cases}$$

其中常数

$$\tau_r = \frac{\pi}{2\sqrt{\mathbf{Y}(r)}} \in (0, 1/2)\,.$$

此外，对于任意 $m \in \mathbb{N}$，我们有以下伸缩关系

$$\mathbf{L}_m(r) = (m+1)^2\mathbf{L}_0\left(\frac{r}{(m+1)^2}\right) = (m+1)^2\mathbf{Z}^{-1}\left(\frac{r}{(m+1)^2}\right) = \lambda_m(\mu_{m,r}), \tag{2.7}$$

$$\mathbf{M}_m(r) = (m+1)^2\mathbf{M}_0\left(\frac{r}{(m+1)^2}\right) = (m+1)^2\mathbf{Y}\left(\frac{r}{(m+1)^2}\right) = \lambda_m(\eta_{m,r}), \tag{2.8}$$

其中

$$\mu_{m,r}(x) = -\frac{r}{m+1}\sum_{k=0}^{m} \delta_{\frac{2k+1}{2(m+1)}}(x), \tag{2.9}$$

and

$$\eta_{m,r}(x) := \begin{cases} (m+1)^2\mathbf{Y}(r/(m+1)^2), & x \in [\frac{\tau_{m,r}+k}{m+1}, \frac{1-\tau_{m,r}+k}{m+1}],\ k = 0, 1, \cdots, m, \\ 0, & elsewhere, \end{cases} \tag{2.10}$$

with

$$\tau_{m,r} \equiv \frac{\pi}{2\sqrt{\mathbf{Y}(r/(m+1)^2)}} \in \left(0, \frac{1}{2}\right).$$

上述结论可以从区间 $[0,1]$ 推广到任意满足$x_2 - x_1 = T > 0$. 的区间 $[x_1, x_2]$。事实上，设 $r > 0$，并且

$$B_{r,T} := \left\{ q \in \mathcal{L}^1(x_1, x_2) : \|q\|_{1,[x_1,x_2]} \le r \right\}.$$

设 $\lambda_m(q,\ T)$ 为方程 (1.1) 在 Dirichlet边界条件下的最低特征值

$$y(x_1) = y(x_2) = 0.$$

通过类似的论证，我们可以求解相应的优化问题如下

(2.11)

$$\mathbf{L}_m(r,T) := \inf\left\{ \lambda_m(q,T) : \mu \in B_{r,T} \right\} = \lambda_m\Big(\mu_{m,r}(\frac{x-x_1}{x_2-x_1})\Big) = \frac{(m+1)^2}{T^2}\mathbf{Z}^{-1}\left(\frac{Tr}{(m+1)^2}\right),$$

(2.12)

$$\mathbf{M}_m(r,T) := \sup\left\{ \lambda_m(q,T) : \mu \in B_{r,T} \right\} = \lambda_m\Big(\eta_{m,r}(\frac{x-x_1}{x_2-x_1})\Big) = \frac{(m+1)^2}{T^2}\mathbf{Y}\left(\frac{Tr}{(m+1)^2}\right).$$

2.3. 节点和特征值的缩放等式。设 $m \in \mathbb{N}$ 和 $1 \le i \le m$ 已知。对于势函数 $q \in \mathcal{L}^1$，我们有节点 $T = T_{i,\ m}(q) \in (0,\ 1)$。利用 T 将区间 $[0,1]$ 划分为两个子区间 $[0,T]$ 和 $[T,1]$，可得到以下两个子区间上的狄利克雷特征值问题

$$-E_m''(x) + q(x)E_m(x) = \lambda_m(q)E_m(x), \qquad E_m(0) = E_m(T) = 0, \tag{2.13}$$

$$-E_m''(x) + q(x)E_m(x) = \lambda_m(q)E_m(x), \qquad E_m(T) = E_m(1) = 0. \tag{2.14}$$

分别对 (2.13) 和 (2.14) 使用缩放 $x \mapsto Tx$ 和缩放 $x \mapsto T + (1-T)x$，可得到以下两个狄利克雷特征值问题

$$-\hat{y}''(x) + \hat{q}(x)\hat{y}(x) = T^2\lambda_m(q)\hat{y}(x), \qquad \hat{y}(0) = \hat{y}(1) = 0, \tag{2.15}$$

$$-\check{y}''(x) + \check{q}(x)\check{y}(x) = (1-T)^2\lambda_m(q)\check{y}(x), \qquad \check{y}(0) = \check{y}(1) = 0, \tag{2.16}$$

其中

$$\hat{q}(x) := T^2 q(Tx) \in \mathcal{L}^1, \qquad \check{q}(x) := (1-T)^2 q(T + (1-T)x) \in \mathcal{L}^1, \tag{2.17}$$

$$\hat{y}(x) = \hat{y}(x;q) := E_m(Tx), \qquad \check{y}(x) = \check{y}(x;q) := E_m\left(T + (1-T)x\right).$$

由于 $\hat{}y(x)$ 在 $[0,1]$ 中恰有 $i-1$ 个内部零点，且 $\check{}y(x)$ 恰有 $m-i$ 个内部零点，因此根据 (2.15) 和 (2.16)，我们可以推得 $\hat{}q$ 和 $\check{}q$ 具有狄利克雷特征值

$$\lambda_{i-1}(\hat{q}) = T^2\lambda_m(q), \qquad \lambda_{m-i}(\check{q}) = (1-T)^2\lambda_m(q), \tag{2.18}$$

which 可以得到节点与特征值之间如下的缩放等式 es

$$\frac{\lambda_{i-1}(\hat{q})}{T^2} = \frac{\lambda_{m-i}(\check{q})}{(1-T)^2}. \tag{2.19}$$

注意，(2.18) 中的两个等式是狄利克雷特征值的常见缩放等式。

容易看出，上述构造的逆过程同样成立。因此，我们得到以下结果。

引理 2.6. 设 $m \in \mathbb{N}$ 和 $1 \le i \le m$ 已给定。那么对于任意 $q \in \mathcal{L}^1$，有

$$(T, \hat{q}, \check{q}) = (T_{i,m}(q), \hat{q}(\cdot; q), \check{q}(\cdot; q)),$$

它满足缩放等式 (2.19). 反之，设 $\hat{}q$、$\check{}q \in \mathcal{L}^1$ 和 $T \in (0、1)$ 满足缩放等式 (2.19). 那么必定存在一个势函数 $q \in \mathcal{L}^1$，使得 $(T_{i,m}(q), \hat{}q(\cdot; q), \check{}q(\cdot; q)) = (T, \hat{}q, \check{}q)$。

3. Main results

本节将无限维最小化问题 (1.3) 化为一个有限维优化问题。随后，我们证明有限维问题的解，并最终说明这些解正是无限维最小化问题 (1.3) 的解。

3.1. 一个相关的有限维优化问题。对于给定的 $r \in (0, \infty)$ $m \in \mathbb{N}$, $1 \le i \le m$，我们考虑任意满足以下条件的可积势函数 $q \in S_r$： 节点 $T = T_{i,m}(q) \in (0, i/(m+1))$。引入两个非负参数

$$\hat{r} = \hat{r}(q) := \|q\|_{\mathcal{L}^1[0,T]}, \quad \check{r} = \check{r}(q) := \|q\|_{\mathcal{L}^1[T,1]}.$$

显然,

$$\hat{r} + \check{r} = r. \tag{3.1}$$

此外，根据缩放势函数 $\hat{}q$ 和 $\check{}q$ 的等式（2.17），有

$$\|\hat{q}\|_1 = T\hat{r}, \qquad \|\check{q}\|_1 = (1-T)\check{r}.$$

由关于特征值的优化问题（2.4），可得

$$\lambda_{i-1}(\hat{q}) \ge \mathbf{L}_{i-1}(\|\hat{q}\|_1) = \mathbf{L}_{i-1}(T\hat{r}), \quad \lambda_{m-i}(\check{q}) \le \mathbf{M}_{m-i}(\|\check{q}\|_1) = \mathbf{M}_{m-i}((1-T)\check{r}).$$

由缩放结果 (2.19) 可得以下不等式

$$\frac{\mathbf{L}_{i-1}(T\hat{r})}{T^2} \le \frac{\mathbf{M}_{m-i}((1-T)\check{r})}{(1-T)^2}, \tag{3.2}$$

其中包含三个量（$\hat{r}$，$\check{r}$，T）。受 (3.1) 和 (3.2) 的启发，我们引入以下函数

(3.3)
$$f(T,\hat{r}) := \mathbf{L}_{i-1}(T\hat{r}) - \left(\frac{T}{1-T}\right)^2 \mathbf{M}_{m-i}\Big((1-T)(r-\hat{r})\Big), \quad (T,\hat{r}) \in \mathcal{D} := (0, i/(m+1)) \times [0,r].$$

接下来我们关注隐函数 $f(T,\hat{r}) = 0$ 的问题，这等价于求解方程

$$\mathbf{L}_{i-1}(T\hat{r}) = \left(\frac{T}{1-T}\right)^2 \mathbf{M}_{m-i}\Big((1-T)(r-\hat{r})\Big). \tag{3.4}$$

由于引理 2.5 中明确给出了$\mathbf{L}_{i-1}$ 和$\mathbf{M}_{m-i}$，因此可以通过方程 (3.4) 以隐式方式根据 $\hat{r}$ 确定 T。

引理 3.1。给定 $r \in (0, \infty)$ $m \in \mathbb{N}$, $1 \le i \le m.$，则存在唯一的 C^1 函数

$$T = \mathcal{T}(\hat{r}) = \mathcal{T}_{i,m,r}(\hat{r}) : [0,r] \to (0, i/(m+1)), \tag{3.5}$$

使得

$$\mathbf{L}_{i-1}(\mathcal{T}(\hat{r})\hat{r}) = \left(\frac{\mathcal{T}(\hat{r})}{1-\mathcal{T}(\hat{r})}\right)^2 \mathbf{M}_{m-i}\Big((1-\mathcal{T}(\hat{r}))(r-\hat{r})\Big), \quad \hat{r} \in [0,r]. \tag{3.6}$$

证明 对于任意固定的 $\hat{r} \in [0,r]$，有

$$\lim_{T \downarrow 0} f(T,\hat{r}) = \mathbf{L}_{i-1}(0) = (i\pi)^2 > 0,$$

and

$$\begin{aligned} f\left(\frac{i}{m+1},\hat{r}\right) &= \mathbf{L}_{i-1}\left(\frac{i\hat{r}}{m+1}\right) - \frac{\left(\frac{i}{m+1}\right)^2}{\left(1-\frac{i}{m+1}\right)^2}\mathbf{M}_{m-i}\left(\frac{i(r-\hat{r})}{m+1}\right) \\ &= (i\pi)^2\left(\frac{\mathbf{L}_{i-1}\left(\frac{i\hat{r}}{m+1}\right)}{(i\pi)^2} - \frac{\mathbf{M}_{m-i}\left(\frac{i(r-\hat{r})}{m+1}\right)}{((m-i+1)\pi)^2}\right). \end{aligned}$$

根据优化问题 (2.4) 的定义，有

$$\frac{\mathbf{L}_{i-1}\left(\frac{i\hat{r}}{m+1}\right)}{(i\pi)^2} \le 1, \qquad \frac{\mathbf{M}_{m-i}\left(\frac{i(r-\hat{r})}{m+1}\right)}{((m-i+1)\pi)^2} \ge 1.$$

注意到，上述不等式中至少有一个是严格不等式，因为 $\{\hat{r}, \check{r}\}$ 中至少有一个不为零。因此

$$f(i/(m+1),\hat{r}) < 0.$$

因此 there e　　至少存在一个解 $T = \mathcal{T}(\hat{r}) = \mathcal{T}_{i,\ m,\ r}(\hat{r}) \in (0,\ \ i/(m+1))$ 使得

$$f(\mathcal{T}(\hat{r}), \hat{r}) = 0.$$

为证明唯一性，现在我们证明

$$\frac{\partial}{\partial T} f(T, \hat{r}) < 0. \tag{3.7}$$

事实上，由（2.5）和（2.7）—（2.8）中的伸缩关系可知

$$\mathbf{L}_{i-1}(T\hat{r}) = i^2 \mathbf{Z}^{-1}\left(T\hat{r}/i^2\right),$$
$$\frac{\partial}{\partial T}\mathbf{L}_{i-1}(T\hat{r}) = \hat{r} \cdot \left(\mathbf{Z}^{-1}\right)'\left(T\hat{r}/i^2\right) \le 0,$$

因为函数 $\mathbf{Z}$ 是递减的。此外，

$$\mathbf{M}_{m-i}\Big((1-T)(r-\hat{r})\Big) = (m-i+1)^2 \mathbf{Y}\left(\frac{(1-T)(r-\hat{r})}{(m-i+1)^2}\right)$$
$$= \left(\frac{(m-i+1)\pi + \sqrt{((m-i+1)\pi)^2 + 4(r-\hat{r})(1-T)}}{2}\right)^2.$$

考虑

$$g(T, \hat{r}) := \sqrt{\left(\frac{T}{1-T}\right)^2 \mathbf{M}_{m-i}\Big((1-T)(r-\hat{r})\Big)}$$
$$= \frac{1}{2}\frac{T}{1-T}\left((m-i+1)\pi + \sqrt{((m-i+1)\pi)^2 + 4(r-\hat{r})(1-T)}\right).$$

那么对于所有 $(T, \hat{r}) \in \mathcal{D}$,

$$\frac{\partial}{\partial T} g(T, \hat{r}) = \frac{1}{2(1-T)^2}\left((m-i+1)\pi + \frac{((m-i+1)\pi)^2 + 2(r-\hat{r})(1-T)(2-T)}{\sqrt{((m-i+1)\pi)^2 + 4(r-\hat{r})(1-T)}}\right) > 0.$$

因此，

$$\frac{\partial}{\partial T} f(T, \hat{r}) = \frac{\partial}{\partial T}\mathbf{L}_{i-1}(T\hat{r}) - 2g(T, \hat{r}) \cdot \frac{\partial}{\partial T} g(T, \hat{r}) < 0.$$

由此，(3.7) 得证。特别地，当 $\hat{r} \in [0, r]$ 固定时，$f(T, \hat{r})$ 关于 $T \in$ 在 (0，1) 上严格递减。因此，我们证明了满足 (3.6) 的隐函数$\mathcal{T}_{i,\ m,\ r}(\hat{r})$ 的唯一性。最后，由 (3.7) 和隐函数定理可知，$\mathcal{T}_{i,\ m,\ r}(\hat{r})$ 关于 $\hat{r}$ 光滑。□

我们来分析函数 $\mathcal{T}_{i,m,r}(\hat{r})$ 对 $\hat{r}$ 以及 (i, m, r) 的依赖关系，包括 $\mathcal{T}_{i,m,r}(\hat{r})$ 关于 $\hat{r}$ 的单调性。由于 $\mathcal{T}_{i,m,\ r}(\hat{r})$ 是以隐式方式定义的，我们引入一个新的自变量 t 来替代 $\hat{r}$。对于 $\hat{r} \in [0, r]$ 和 $\check{r} = r - \hat{r} \in [0, r]$, 我们知道

$T = \mathcal{T}(\hat{r}) = \mathcal{T}_{i,m,r}(\hat{r}) \in (0, i/(m+1))$。利用关系式 (2.7) 和 (2.8)，用于定义 $T = \mathcal{T}_{i,m,r}(\hat{r})$ 的等式 (3.4) 为

$$\mathbf{Z}^{-1}\left(\frac{\mathcal{T}(\hat{r})\cdot\hat{r}}{i^2}\right) = \left(\frac{\mathcal{T}(\hat{r})}{1-\mathcal{T}(\hat{r})}\right)^2 \left(\frac{m-i+1}{i}\right)^2 \mathbf{Y}\left(\frac{(1-\mathcal{T}(\hat{r}))\cdot\check{r}}{(m-i+1)^2}\right) > 0. \tag{3.8}$$

由公式 (2.5) 可得

$$\frac{\mathcal{T}(\hat{r})\cdot\hat{r}}{i^2} \in [0,4), \quad \frac{\mathbf{L}_{i-1}\left(\mathcal{T}(\hat{r})\cdot\hat{r}\right)}{i^2} \in (0,\pi^2].$$

注意到 $\mathbf{Z}^{-1}(\lambda)$ 关于 $\lambda \in (-\infty, \pi^2]$ 单调递减，我们可以引入参数

$$t := t\left(\hat{r}\right) = \frac{\sqrt{\mathbf{L}_{i-1}\left(\mathcal{T}(\hat{r})\cdot\hat{r}\right)}}{2i} = \frac{1}{2}\sqrt{\mathbf{Z}^{-1}\left(\frac{\mathcal{T}(\hat{r})\cdot\hat{r}}{i^2}\right)} \in (0,\pi/2]. \tag{3.9}$$

现在我们有三个参数 $\hat{r}, t$ 和 $\mathcal{T}(=\mathcal{T}(\hat{r}))$，它们之间通过以下方式相互关联。由 (3.8)、(3.9) 和 (2.5) 可得

$$\mathcal{T}\hat{r} = 4i^2 t\cot t. \tag{3.10}$$

利用 (3.8) 以及 $\mathbf{Y}$ 的表达式 (2.6)，我们得到第二个等式

$$\begin{aligned} t &= \frac{\mathcal{T}}{2(1-\mathcal{T})}\cdot\frac{m-i+1}{2i}\cdot\left(\pi+\sqrt{\pi^2+\frac{4(1-\mathcal{T})(r-\hat{r})}{(m-i+1)^2}}\right) \\ &= \frac{\mathcal{T}}{2(1-\mathcal{T})}\left(\tilde{\pi}+\sqrt{\tilde{\pi}^2+(1-\mathcal{T})\frac{r-\hat{r}}{i^2}}\right), \end{aligned} \tag{3.11}$$

其中常数 $\tilde{\pi}$ 定义为

$$\tilde{\pi} = \tilde{\pi}_{i,m} := \frac{m-i+1}{2i}\pi \in \left[\frac{\pi}{2m}, \frac{m\pi}{2}\right]. \tag{3.12}$$

三个参数 $(\hat{r}, t, \mathcal{T})$ 对应的方程 (3.10) 和 (3.11) 可按如下方式求解。首先，方程 (3.11) 可化为关于 $\mathcal{T}$ 的二次方程

$$\frac{r-\hat{r}}{i^2}\mathcal{T}^2 + 4t(t+\tilde{\pi})\mathcal{T} - 4t^2 = 0,$$

其正解为

$$\mathcal{T} = \frac{2t}{t+\tilde{\pi}+\sqrt{(t+\tilde{\pi})^2+\frac{r-\hat{r}}{i^2}}}. \tag{3.13}$$

将 (3.13) 代入 (3.10)，我们得到

$$\frac{2t\hat{r}}{t+\tilde{\pi}+\sqrt{(t+\tilde{\pi})^2+\frac{r-\hat{r}}{i^2}}} = 4i^2 t\cot t,$$

这等价于关于 $\hat{r}$ 的一个二次方程

$$\hat{r}^2 + 4i^2 \cot t \,(\cot t - t - \tilde{\pi})\,\hat{r} - 4i^2 r \cot^2 t = 0. \tag{3.14}$$

由于 $\hat{r}$ 非负，方程 (3.14) 可解为

$$\hat{r} = \hat{r}(t) = 2i^2 \cot t \cdot \left(t - \cot t + \tilde{\pi} + \sqrt{(t - \cot t + \tilde{\pi})^2 + \frac{r}{i^2}} \right), \tag{3.15}$$

这是 $t = t(\hat{r})$ 的逆函数的显式表达式。最后，利用 (3.15)，由 (3.10) 可得

$$\mathcal{T} = \frac{2i^2 t}{r} \cdot \left(\sqrt{(t - \cot t + \tilde{\pi})^2 + \frac{r}{i^2}} - (t - \cot t + \tilde{\pi}) \right). \tag{3.16}$$

注意，上述由 (3.15) 和 (3.16) 给出的函数 $\hat{r} = \hat{r}(t)$ 和 $\mathcal{T} = \mathcal{T}(t)$，对区间 $(0, \pi/2]$ 中的 t 均有定义。现在我们计算端点 $\hat{r} = 0$ 和 $\hat{r} = r$ 处 $t(\hat{r})$ 和 $\mathcal{T}_{i,m,r}(\hat{r})$ 的值。

引理 3.2。端点 $\hat{r} = 0, \hat{r} = r$ 处 $t(\hat{r})$ 和 $\mathcal{T}_{i,m,r}(\hat{r})$ 的值可按如下方式计算

$$t(\hat{r})|_{\hat{r}=0} = \pi/2, , \quad \mathcal{T}(\hat{r})|_{\hat{r}=0} = \frac{2i\pi}{(m+1)\pi + \sqrt{((m+1)\pi)^2 + 4r}}, \tag{3.17}$$

$$\mathcal{T}(\hat{r})|_{\hat{r}=r} = \tilde{\mathcal{T}} = \tilde{\mathcal{T}}_{i,m,r} := \mathbf{W}_{i,m}^{-1}(r) \in (0, i/(m+1)), \tag{3.18}$$

and

$$t(\hat{r})|_{\hat{r}=r} = \tilde{\tau} = \tilde{\tau}_{i,m,r} := \frac{\tilde{\pi} \cdot \mathbf{W}_{i,m}^{-1}(r)}{1 - \mathbf{W}_{i,m}^{-1}(r)} \in (0, \pi/2)\,, \tag{3.19}$$

其中，$\mathbf{W}_{i,m} \colon (0, i/(m+1)) \to (0, +\infty)$ 由下式给出

$$\mathbf{W}_{i,m}(T) := \frac{4i^2\tilde{\pi}}{1-T} \cot \frac{\tilde{\pi}T}{1-T} \equiv \frac{2i(m-i+1)\pi}{1-T} \cot \frac{(m-i+1)\pi T}{2i(1-T)}, \tag{3.20}$$

˜以及 (3.18), (3.19) 中的常数 $\mathcal{T}$, $\tilde{\tau}$ 与.....相关

$$\tilde{\tau} = \frac{\tilde{\pi}\tilde{\mathcal{T}}}{1 - \tilde{\mathcal{T}}}, \quad \tilde{\mathcal{T}} = \frac{\tilde{\tau}}{\tilde{\tau} + \tilde{\pi}}. \tag{3.21}$$

此外，通过引入递减微分同胚 $P \colon (0, \pi/2] \to [0, +\infty)$，使其满足

$$P(t) = P_{i,m}(t) := 4i^2\,(t + \tilde{\pi}) \cot t, \tag{3.22}$$

常数 $\tilde{\pi} = \tilde{\pi}_{i,\ m}$ 在 (3.12) 和 $\tilde{\tau} = \tilde{\tau}_{i,\ m,\ r}$ 在 (3.19) 中与 $P\ (\tilde{\tau})\ = r$ 相关，即 *i*。*e.*

$$4i^2(\tilde{\tau} + \tilde{\pi}) \cot \tilde{\tau} = r. \tag{3.23}$$

证明 在 $\hat{r}=0$处，由于 $t\in(0,\ \pi/2]$，根据（3.10）可得 $t=\pi/2$，因此（3.17）的第一个等式成立。利用（3.16）和（3.17），（3.17）的第二个等式显然成立。若 $\hat{r}=r$，则（3.10）和（3.11）可简化为

$$r\mathcal{T}=4i^2t\cot t,\qquad t=\frac{\tilde{\pi}\mathcal{T}}{1-\mathcal{T}}. \tag{3.24}$$

由 (3.24) 的第二个方程可得

$$\mathcal{T}=\frac{t}{t+\tilde{\pi}},$$

于是 (3.24) 的第一个方程变为

$$\mathbf{W}_{i,m}(\mathcal{T})=r.$$

因此 $\mathcal{T}=\mathbf{W}_{i\,m,}^{-1}(r)$。考察 (3.24) 的第二个方程，可得 $t=\tilde{\tau}$。(3.21) 中的关系显然可由 (3.24) 的第二个方程推出。注意，我们可以将 (3.19) 改写为

$$\mathbf{W}_{i,m}^{-1}(r)=\frac{\tilde{\tau}}{\tilde{\tau}+\tilde{\pi}},\quad \mathbf{W}_{i,m}\left(\frac{\tilde{\tau}}{\tilde{\tau}+\tilde{\pi}}\right)=r.$$

利用 (3.20) 和 (3.22)，等式 (3.23) 即得。 □

引理 3.3. 函数 $\hat{r}=\hat{r}(t)$ 是从 $[\tilde{\tau},\pi/2]$ 到 $[0,r]$的递减微分同胚。事实上，有

$$\frac{\mathrm{d}\hat{r}(t)}{\mathrm{d}t}<0,\quad t\in[\tilde{\tau},\pi/2]. \tag{3.25}$$

证明 由 (3.10)，$\hat{r}=\hat{r}(t)$ 满足

$$\mathcal{T}(\hat{r}(t))\hat{r}(t)=4i^2t\cot t,\qquad t\in[\tilde{\tau},\pi/2],$$

其中 $\mathcal{T}(\hat{r})=\mathcal{T}_{i,\ m,\ r}(\hat{r})$ 是一个 C^1 函数。对上述等式关于t求导，可得

$$\left(\mathcal{T}(\hat{r}(t))+\left.\frac{\mathrm{d}\mathcal{T}(\hat{r})}{\mathrm{d}\hat{r}}\right|_{\hat{r}=\hat{r}(t)}\right)\cdot\frac{\mathrm{d}\hat{r}(t)}{\mathrm{d}t}=2i^2\frac{\sin(2t)-2t}{\sin^2t}<0,\quad t\in[\tilde{\tau},\pi/2].$$

因此 $\mathrm{d}\hat{r}(t)\ \mathrm{d}t$ 不改变符号。利用（3.15），容易得到

$$\left.\frac{\mathrm{d}\hat{r}(t)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=\pi/2}=-i^2\left(\pi+2\tilde{\pi}+\sqrt{(\pi+2\tilde{\pi})^2+\frac{4r}{i^2}}\right)<0.$$

因此，我们证明了所需的不等式（3.25）。 □

回顾一下，$\mathcal{T}(t)=\mathcal{T}_{i,\ m,\ r}(t)$ 由式 (3.16) 给出。直接计算可得其导数

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{T}}{\mathrm{d}t}=f(t)\cdot h(t),\qquad t\in[\tilde{\tau},\pi/2], \tag{3.26}$$

其中

$$f(t)=\frac{2i^2}{r}\frac{\sqrt{\left(t-\cot t+\tilde{\pi}\right)^2+\frac{r}{i^2}}-\left(t-\cot t+\tilde{\pi}\right)}{\sqrt{\left(t-\cot t+\tilde{\pi}\right)^2+\frac{r}{i^2}}\left(\sqrt{\left(t-\cot t+\tilde{\pi}\right)^2+\frac{r}{i^2}}+t\left(2+\cot^2 t\right)\right)}>0,\quad t\in[\tilde{\tau},\pi/2],$$

and

$$h(t):=h_{i,m,r}(t)=\left(t-\cot t+\tilde{\pi}\right)^2+\frac{r}{i^2}-t^2\left(2+\cot^2 t\right)^2,\quad t\in[\tilde{\tau},\pi/2]\,. \tag{3.27}$$

注意，函数 h 在区间 $[\tilde{\tau},\pi/2]$ 上可能变号。此外，由 (3.26) 和引理 3.3 可知，下述结论成立。

引理 3.4. 这些函数

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{T}_{i,m,r}(t)}{\mathrm{d}t}\quad and\quad h_{i,m,r}(t)$$

在每个 $t\in[\tilde{\tau},\pi/2]$ 处符号相同，而这些函数

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{T}_{i,m,r}(\hat{r})}{\mathrm{d}\hat{r}}\quad and\quad h_{i,m,r}(t)$$

当 $\hat{}r$ 和 t 通过 $\hat{}r=\hat{}r(t)$ 对应时，符号相反。

考虑以下有限维优化问题

$$T_{i,m,r}:=\min_{\hat{r}\in[0,r]}\mathcal{T}_{i,m,r}(\hat{r})=\mathcal{T}_{i,m,r}(\hat{r}_{i,m,r}). \tag{3.28}$$

将证明，最小化问题 (3.28) 的解在两种情形 $i\le\frac{m+1}{2}$ 和 $i>\frac{m+1}{2}$ 下有所不同。后一种情形更复杂，也更精确。首先考虑情形 $i\le\frac{m+1}{2}$。

引理 3.5。 假设(r,m,i) 满足

$$i\le\frac{m+1}{2}. \tag{3.29}$$

则函数 $\mathcal{T}_{i,\ m,\ r}(\hat{}r)$ 关于$\hat{}r\in[0,r]$单调递减。因此，$\hat{}r_{i,\ m,\ r}=r$ 和

$$T_{i,m,r}=\mathcal{T}_{i,m,r}(r)=\tilde{\mathcal{T}}=\mathbf{W}^{-1}_{i,m}(r). \tag{3.30}$$

证明 令 $t\in[\tilde{\tau},\pi/2)$ ，即 $\hat{}r=\hat{}r(t)\in(0,\ r]$。由 (3.14)，我们有

$$-2\cot t\cdot(t+\tilde{\pi})=2\frac{r-\hat{r}}{\hat{r}}\cot^2 t-\frac{\hat{r}}{2i^2},$$

此处 $\hat{r} = \hat{r}(t) \in (0,\ r]$ 是 t 的一个函数，由 (3.15) 给出。由 (3.27) 可得

$$\begin{aligned} h_{i,m,r}(t) &= -2\cot t \cdot (t+\tilde{\pi}) + (t+\tilde{\pi})^2 + \cot^2 t - t^2\left(4 + 4\cot^2 t + \cot^4 t\right) + \frac{r}{i^2} \\ &= 2\frac{r-\hat{r}}{\hat{r}}\cot^2 t - \frac{\hat{r}}{2i^2} + (t+\tilde{\pi})^2 + \cot^2 t - t^2\left(4 + 4\cot^2 t + \cot^4 t\right) + \frac{r}{i^2} \\ &= (\tilde{\pi} - t)(\tilde{\pi} + 3t) + \left(\frac{2r-\hat{r}}{2i^2} - 4(t\cot t)^2\right) + \left(1 - (t\cot t)^2 + 2\frac{r-\hat{r}}{\hat{r}}\right)\cot^2 t \\ &=: I_1 + I_2 + I_3. \end{aligned}$$

由条件 (3.29)，可得

$$\tilde{\pi} = \frac{m-i+1}{2i}\pi \geq \frac{\pi}{2}.$$

由于 $t\cot\ t$ 在 $[\tilde{\tau}, \pi/2]$ 中递减，因此 $0 < t\cot\ t < 1$，从而

$$I_1 = (\tilde{\pi} - t)(\tilde{\pi} + 3t) > 0, \quad t \in [\tilde{\tau}, \pi/2).$$

对于第二项 I_2，由 (3.5) 和 (3.10) 可得

$$\frac{\hat{r}}{2i^2} = \frac{1}{T}\cdot 2t\cot t > \frac{m+1}{i}\cdot 2t\cot t \geq 4t\cot t, \quad t \in [\tilde{\tau}, \pi/2).$$

由于 $\hat{r} \in [0, r]$，我们得到

$$I_2 = \frac{2r-\hat{r}}{2i^2} - 4(t\cot t)^2 \geq \frac{\hat{r}}{2i^2} - 4(t\cot t)^2 > 4t\cot t - 4(t\cot t)^2 > 0, \quad t \in [\tilde{\tau}, \pi/2).$$

同理，我们还可得到

$$I_3 = \left(1 - (t\cot t)^2 + 2\frac{r-\hat{r}}{\hat{r}}\right)\cot^2 t > 0, \quad t \in [\tilde{\tau}, \pi/2).$$

因此我们得出

$$h_{i,m,r}(t) > 0, \qquad t \in [\tilde{\tau}, \pi/2).$$

此外，很容易验证，$h_{i,m,r}(t) = 0$ 当且仅当

$$i = \frac{m+1}{2}, \quad t = \pi/2.$$

由引理 3.4 可知，$\mathcal{T}_{i,m,r}(\hat{r})$ 关于 $\hat{r} \in [0, r]$ 严格递减。因此 $\hat{r}_{i,m,r} = r$ 且 (3.30) 成立。□

现在我们考虑第二种情况

$$i > \frac{m+1}{2}, \tag{3.31}$$

从而得到

$$\tilde{\pi} = \tilde{\pi}_{i,m} = \frac{m-i+1}{2i}\pi < \frac{\pi}{2}.$$

根据引理 3.4，可知确定函数$h_{i,\,m,\,r}$在 $[\tilde{\tau}, \pi/2]$上的符号十分重要。首先考虑右端点 $t = \pi/2$。由（3.27）和引理 3.4，可得

$$h_{i,m,r}(\pi/2) = \frac{r - R_{i,m}}{i^2}, \tag{3.32}$$

其中

$$R_{i,m} := \frac{\pi^2}{4}\left((2i)^2 - (m+1)^2\right) > 0.$$

由引理 3.4 和 (3.32) 可得以下结果。

引理 3.6. 假设(i, m) 满足(3.31)。则

$$h_{i,m,r}\left(\pi/2\right) \leqslant 0 \iff r \leqslant R_{i,m} \iff \left.\frac{\mathrm{d}\mathcal{T}_{i,m,r}\left(\hat{r}\right)}{\mathrm{d}\hat{r}}\right|_{\hat{r}=0} \geqslant 0,$$
$$h_{i,m,r}\left(\pi/2\right) \geqslant 0 \iff r \geqslant R_{i,m} \iff \left.\frac{\mathrm{d}\mathcal{T}_{i,m,r}\left(\hat{r}\right)}{\mathrm{d}\hat{r}}\right|_{\hat{r}=0} \leqslant 0.$$

此外，这些等价不等式同时取等号。符号“ $\iff$”表示“当且仅当”。

除了初等函数 $P(t) = P_{i,m}(t)$ 和 $h(t) = h_{i,m,r}(t)$ 外，在后续证明中我们还会遇到另外四个初等函数，即

$$U : (0, \pi/2] \to \mathbb{R}, \quad H : (0, \pi/2] \to \mathbb{R}, \quad g : (0, \pi/2] \to \mathbb{R}, \quad F : (0, \pi/2) \to \mathbb{R}$$

定义为

$$U(t) := U_{i,m}(t) = t + t\cot^2 t - \cot t - \tilde{\pi}, \tag{3.33}$$

$$H(t) = H_{i,m}(t) := (t + \cot t + \tilde{\pi})^2 - \left(2t + t\cot^2 t\right)^2, \tag{3.34}$$

$$g(t) = g_{i,m}(t) := -\cot t + \frac{2t^2 \cot t}{\sin^2 t} - \frac{t}{\sin^2 t} + \tilde{\pi}, \tag{3.35}$$

$$F(t) := \left(t + t\cot^2 t - \cot t\right)\left(t + t\cot^2 t + 3\cot t + \pi\right) + 4t\cot t - \frac{3}{4}\pi^2. \tag{3.36}$$

显然， U 是递增函数。我们还可以验证， H 是递减函数，且 g 是递减函数，因为通过直接计算可得，对于所有 $t \in (0,\ \pi/2)$,

$$\begin{aligned} H'(t) &\leq \frac{2}{\sin^2 t}\left(-\cot t\cos^2 t - 4t - t\cot^2 t + 4t^2\cot t + 2t^2\cot^3 t\right) \\ &< \frac{2}{\sin^2 t}\left(-\cot t\cos^2 t - t\cot^2 t + 2t^2\cot^3 t\right) \\ &= \frac{2\cot^2 t}{\sin^2 t}\left(-\frac{1}{2}\sin 2t - t + 2t^2\cot t\right) \\ &< 0, \end{aligned}$$

and

$$g'(t) = \frac{t}{\sin^4 t}\left(3\sin 2t - 2t - 4t\cos^2 t\right) < 0.$$

此外， U 有唯一零点

$$t_0 = t_{0,i,m} := U^{-1}(0) \in (0, \pi/2), \tag{3.37}$$

且 g 也有唯一零点

$$t_1 = t_{1,i,m} := g^{-1}(0) \in (0, \pi/2). \tag{3.38}$$

注意，这两个常数仅依赖于 $(i,\ m)$。最后，可以验证 F 有唯一零点

$$\tau := F^{-1}(0) \in (0, \pi/2). \tag{3.39}$$

对于左端点 $t = \tilde{\tau}$，我们有以下结果。

引理 3.7。 假设 (i, m) 满足 (3.31)。则有

$$\begin{cases} h_{i,m,r}(\tilde{\tau}_{i,m,r}) \geq 0 \iff r \geq P_{i,m}\left(t_{0,i,m}\right), \\ h_{i,m,r}(\tilde{\tau}_{i,m,r}) \leq 0 \iff r \leq P_{i,m}\left(t_{0,i,m}\right). \end{cases}$$

此外，这些等价不等式同时取等号。函数$h_{i,\ m,\ r}$, $P_{i,\ m}$ 以及常数 $\tilde{\tau}_{i,\ m,\ r}$, $t_{0,\ i,\ m}$ 分别如 (3.27),(3.22) 和(3.19), (3.37) 所示。

证明 分别记 $h_{i,\ m,\ r}$， $P_{i,\ m}$， $\tilde{\tau}_{i,\ m,\ r}$， $t_{0,\ i,\ m}$ 为 h， P， $\tilde{\tau}$， t_0 。根据关系式 (3.23), 我们将函数 $h(t)$ 修改为

$$H(t) = \left(t - \cot t + \tilde{\pi}\right)^2 + 4\left(t + \tilde{\pi}\right)\cot t - t^2\left(2 + \cot^2 t\right)^2.$$

由 (3.23)、(3.27) 和 (3.34),

$$H(\tilde{\tau}) = h(\tilde{\tau}).$$

由 (3.33)、(3.34) 和 (3.37),

$$H(t_0) = 0.$$

由于 $P(t)$ 和 $H(t)$ 严格递减，我们知道

$$r \geq P(t_0) \iff \tilde{\tau} = P^{-1}(r) \leq t_0 \iff h(\tilde{\tau}) = H(\tilde{\tau}) \geq H(t_0) = 0.$$

类似地，

$$r \leq P(t_0) \iff \tilde{\tau} \geq t_0 \iff h(\tilde{\tau}) \leq 0.$$

现在证明完成。 □

我们还需要了解导数 $h'(t)$ 在端点 $t = \tilde{\tau}_{i,m,r}$ 处的信息。注意到

$$h'(t) = 2\left(2 + \cot^2 t\right) g(t). \tag{3.40}$$

引理 3.8. 假设 (i, m) 满足 (3.31)。那么

$$h'_{i,m,r}(\tilde{\tau}_{i,m,r}) \geqslant 0 \iff r \geqslant P_{i,m}(t_{1,i,m}),$$

$$h'_{i,m,r}(\tilde{\tau}_{i,m,r}) \leqslant 0 \iff r \leqslant P_{i,m}(t_{1,i,m}).$$

此外，这些等价不等式同时取等号。函数$g_{i,m}$，$P_{i,m}$ 以及常数 $\tilde{\tau}_{i,m,r}$，$t_{1,i,m}$ 分别如 (3.35), (3.22) 和 (3.19),(3.38) 中所述。

证明 我们只证明第一个等价关系，另一个类似。按照引理 3.7 的做法，在记号的下标中省略 i, m。由于 $P(t)$ 严格递减，由 (3.21) 可知，$r \geq P(t_1)$ 当且仅当 $\tilde{\tau} = P^{-1}(r) \leq t_1$。由此，根据 t_1 的定义以及 g 的性质，它也等价于 $g(\tilde{\tau}) \geqslant 0$。□

对于上述三个与引理 3.6、引理 3.7 和引理 3.8 中 r 的取值范围相关的重要常数 $R_{i,m}$、$P_{i,m}(t_{0,i,m})$ 以及 $P_{i,m}(t_{1,i,m})$，我们有如下观察。

引理 *3.9.* 假设（i，m）满足（*3.31*）。则 $P_{i,m}(t_{1,i,m}) < R_{i,m}$ 以及 $P_{i,m}(t_{1,i,m}) < P_{i,m}(t_{0,i,m})$。此外，令（*3.39*）中的 $\tau \in (0, \pi/2)$，则有

$$P_{i,m}(t_{0,i,m}) - R_{i,m} \begin{cases} < 0, & t_{0,i,m} \in (0, \tau), \\ = 0, & t_{0,i,m} = \tau, \\ > 0, & t_{0,i,m} \in (\tau, \pi/2). \end{cases}$$

证明 固定 i，m，并分别将 $P_{i,m}$，$t_{0,i,m}$，$t_{1,i,m}$ 记为 P，t_0，t_1。由（3.38）可得

$$\tilde{\pi} = \cot t_1 + \frac{t_1}{\sin t_1^2} - \frac{2t_1^2 \cot t_1}{\sin^2 t_1}.$$

通过使用此代换和（3.22），

$$P(t_1) - R_{i,m} = i^2 \left(\tilde{\pi}^2 + (4\cot t_1 + \pi) \cdot \tilde{\pi} + 4t_1 \cot t_1 - \frac{3}{4}\pi^2\right) = d(t_1),$$

其中函数 $d(t)$ 在 $(0,\ \pi/2)$ 上定义为

$$d(t) := \left(\cot t + \frac{t}{\sin t^2} - \frac{2t^2\cot t}{\sin^2 t}\right)\left(5\cot t + \frac{t}{\sin^2 t} - \frac{2t^2\cot t}{\sin^2 t} + \pi\right) + 4t\cot t - \frac{3}{4}\pi^2.$$

可以验证，对于 $t \in (0, \pi/2)$，$d(t) < 0$。特别地，$d(t_1) < 0$.

为证明 $P_{i,\ m}(t_{1,\ i,\ m}) < P_{i,\ m}(t_{0,\ i,\ m})$，由于 $P(t)$ 严格递减，我们只需证明 $t_1 > t_0$。由 (3.37)、(3.38) 以及函数 U 和 g的性质，只需满足

$$\cot t + \frac{t}{\sin^2 t} - \frac{2t^2\cot t}{\sin^2 t} < t + t\cot^2 t - \cot t, \quad t \in (0, \pi/2),$$

这很容易验证。

利用 (3.22)、(3.37) 并代入 $\tilde{\pi}$，可得

$$P(t_0) - R_{i,m} = i^2 F(t_0),$$

其中函数 F 如 (3.36) 所示。与 (3.39) 中定义的 F 的零点 τ 相比，有$F(t) < 0$在 $(0,\ \tau)$ 上成立，并且 $F(t) > 0$在 $(\tau,\ \pi/2)$ 上成立。至此，证明完成。□

注 3.10。通过直接计算，很容易看出

$$F(0.5) < 0, \qquad F(0.52) > 0.$$

因此 $\tau \in (0.5, 0.52)$。此外，对于 $t_{0,i,m} \in (0, \tau) \subset (0, 0.52)$，

$$\tilde{\pi}_{i,m} < 0.52 + 0.52\cot^2 0.52 - \cot 0.52 < 0.36,$$

利用 (3.37) 以及 U 递增这一事实。此外，$P_{i,m}(t_{0,i,m}) - R_{i,m}$ 可能为负，也可能为正。

引入一个常数

$$\overline{r}_{i,m} := P_{i,m}(t_{0,i,m}) > 0. \tag{3.41}$$

引理 3.11. 设 $m \in \mathbb{N}$、$1 \le i \le m$ 和 $r_{i,m}$ 为 (3.41)中给出的常数。如果

$$i > \frac{m+1}{2} \quad and \quad r \ge \overline{r}_{i,m},$$

then

$$T_{i,m,r} = \mathcal{T}_{i,m,r}(r) = \mathbf{W}_{i,m}^{-1}(r),$$

其中函数 $\mathbf{W}_{i,m}$ 由 (3.20)给出。

证明 我们固定 i，m，并在所有记号的下标中省略它们。我们只需证明

$$\min_{\hat{r}\in[0,r]} \mathcal{T}(\hat{r}) = \mathcal{T}(\hat{r})|_{\hat{r}=r}. \tag{3.42}$$

由引理 3.9 可知，$r \geq P(t_0) > P(t_1)$。根据引理 3.7 和引理 3.8，可得 $h(\tilde{\tau}) \geq 0$ 以及 $h'(\tilde{\tau}) > 0$。根据 (3.40) 和函数 g 的性质，可以推知 h 在 $[\tilde{\tau}, t_1]$ 上严格递增，在 $[t_1, \pi/2]$上严格递减。

我们首先考虑这种情况

$$r \geq R_{i,m}.$$

由引理 3.6 可知 $h(\pi/2) \geq 0$，因此在 $[\tilde{\tau}, \pi/2]$ 上有 $h(t) \geq 0$；结合引理 3.4，可得式 (3.42) 成立。

现在我们考虑这种情况

$$\overline{r}_{i,m} < R_{i,m} \quad \text{and} \quad r \in [\overline{r}_{i,m}, R_{i,m}].$$

由引理 3.6 可知 $h(\pi/2) < 0$。由引理 3.4 可知，$\mathcal{T}(\hat{r})$ 作为 $\hat{r} \in [0, r]$ 的函数，在 $\hat{r} = 0$ 或 $\hat{r} = r$ 处取得最小值。事实上，存在 $\hat{r}^* \in (0, r)$，使得 $\mathcal{T}(\hat{r})$ 在 $[0, \hat{r}^*]$ 上递增，并在 $[\hat{r}^*, r]$ 上递减。

回忆一下，为了得到 (3.42)，我们只需证明 $\mathcal{T}(0) = \mathcal{T}(\hat{r})|_{\hat{r}=r} = \tilde{\mathcal{T}}$

$$\mathcal{T}(0) > \tilde{\mathcal{T}} = \mathbf{W}_{i,m}^{-1}(r).$$

由于 $\mathbf{W}(\cdot)$ 是递减的，因此只需证明

$$r > \mathbf{W}(\mathcal{T}(0)). \tag{3.43}$$

回忆一下，

$$\tilde{\pi} = \tilde{\pi}_{i,m} = \frac{(m+1)\pi}{2i} - \frac{\pi}{2}, \quad \frac{(m+1)\pi}{2i} = \tilde{\pi} + \frac{\pi}{2}.$$

Then

$$\mathcal{T}(0) = \frac{\pi}{\frac{(m+1)\pi}{2i} + \sqrt{\left(\frac{(m+1)\pi}{2i}\right)^2 + \frac{r}{i^2}}} = \frac{\pi}{\tilde{\pi} + \frac{\pi}{2} + \sqrt{\left(\tilde{\pi} + \frac{\pi}{2}\right)^2 + \frac{r}{i^2}}},$$

$$\mathbf{W}_{i,m}(\mathcal{T}(0)) = \frac{4i^2\tilde{\pi}}{1 - \mathcal{T}(0)} \cot \frac{\tilde{\pi}\mathcal{T}(0)}{1 - \mathcal{T}(0)} = K_{i,r}(\tilde{\pi}),$$

其中函数 $K_{i,r}(u)$ 定义为

$$K_{i,r}(u) := 4i^2 \left(u + \frac{u\pi}{u - \frac{\pi}{2} + \sqrt{\left(u + \frac{\pi}{2}\right)^2 + \frac{r}{i^2}}} \right) \cot \frac{u\pi}{u - \frac{\pi}{2} + \sqrt{\left(u + \frac{\pi}{2}\right)^2 + \frac{r}{i^2}}}.$$

那么，所需的不等式 (3.43) 等价于

$$K_{i,r}(\tilde{\pi}_{i,m}) < r. \tag{3.44}$$

根据引理 3.9 和注 3.10，有 $\tilde{\pi}_{i,\ m} \in (0，\ 0。36)$。对于 $u \in (0，\ 0。36)$，我们引入另一个变量

$$v = \frac{u\pi}{u - \frac{\pi}{2} + \sqrt{\left(u + \frac{\pi}{2}\right)^2 + \frac{r}{i^2}}}. \tag{3.45}$$

注意，对于 $u \in (0，\ 0．36)$，v 的变化范围为

$$v \in J_u := \left[\frac{u\pi}{u + \frac{\pi}{2}}, \frac{u\pi}{u - \frac{\pi}{2} + \sqrt{\left(u + \frac{\pi}{2}\right)^2 + \frac{r}{i^2}}}\right].$$

因此，变量 $(u，\ v)$ 属于以下定义域

$$\Omega = \Omega_{i,r} := \{(u, v) : u \in\in (0, 0.36),\ v \in J_u\}.$$

B利用 (3.45) 中的变量 u 和 v，函数 $K_{i,\ r}(u)$ 可化简为

$$K_{i,r}(u) = 4i^2(u + v)\cot v.$$

由 (3.45) 解出 r，得到

$$r = i^2\left(\frac{u^2\pi^2}{v^2} - 2u\pi - \frac{2u^2\pi}{v} + \frac{u\pi^2}{v}\right).$$

因此，不等式 (3.44) 可由以下不等式推出

$$4i^2(u + v)\cot v < i^2\left(\frac{u^2\pi^2}{v^2} - 2u\pi - \frac{2u^2\pi}{v} + \frac{u\pi^2}{v}\right).$$

那么，当满足以下条件时，(3.44) 成立

$$f(u, v) := \frac{u^2\pi^2}{v^2} - 2u\pi - \frac{2u^2\pi}{v} + \frac{u\pi^2}{v} - 4(u + v)\cot v > 0, \quad (u, v) \in \Omega. \tag{3.46}$$

为验证（3.46），有

$$\begin{aligned}\frac{\partial f(u, v)}{\partial v} &= -\frac{2u^2\pi^2}{v^3} + \frac{2u^2\pi}{v^2} - \frac{u\pi^2}{v^2} - 4\cot v + \frac{4(u + v)}{\sin^2 v} \\ &< -\frac{u\pi^2}{v^2} - 4\cot v + \frac{4(u + v)}{\sin^2 v} \\ &= \frac{F(u, v)}{v^2\sin^2 v},\end{aligned}$$

其中

$$F(u, v) = 4v^2(u + v) - 2v^2\sin 2v - u\pi^2\sin^2 v.$$

很容易验证

$$\frac{\partial F(u, v)}{\partial u} < 0$$

for 所有 $v \in (0, \pi/2)$。由 (3.22) 和注 3.10 可得 $t_0 \in (0, 0.52)$，并且

$$P(t_0) = 4i^2 \cot t_0 \cdot (t_0 + \tilde{\pi}) > 4i^2 \cot 0.52 \cdot 0.52 > 3.6i^2.$$

Then

$$\frac{u\pi}{u - \frac{\pi}{2} + \sqrt{(u + \frac{\pi}{2})^2 + \frac{P(t_0)}{i^2}}} < \frac{u\pi}{u - \frac{\pi}{2} + \sqrt{(u + \frac{\pi}{2})^2 + 3.6}},$$

以及定义域

$$\tilde{\Omega} = \left\{ (u, v) : u \in (0, 0.36),\ v \in \left[\frac{u\pi}{u + \frac{\pi}{2}}, \frac{u\pi}{u - \frac{\pi}{2} + \sqrt{(u + \frac{\pi}{2})^2 + 3.6}} \right] \right\} \supset \Omega.$$

可以验证，

$$F\left(u, \frac{u\pi}{u - \frac{\pi}{2} + \sqrt{\left(u + \frac{\pi}{2}\right)^2 + 3.6}} \right) < 0, \quad u \in (0, 0.36).$$

通过考察定义域 Ω 的形状以及 $F(u, v)$ 的性质，可以得到 $F(u, v) < 0$ 在 Ω 上成立。因此

$$\frac{\partial f(u, v)}{\partial v} < 0, \quad (u, v) \in \Omega,$$

接下来要证明，当 $r = P(t_0)$ 时，不等式 (3.44) 成立。

现在假设 $r = P(t_0)$。由于 P 严格递减，因此只需证明

$$t_0 < \frac{u\pi}{u - \frac{\pi}{2} + \sqrt{\left(u + \frac{\pi}{2}\right)^2 + \frac{P(t_0)}{i^2}}}.$$

利用 (3.22) 中的 $P(t_0) = 4i^2 \cot t_0 \cdot (t_0 + \tilde{\pi})$ 以及代换

$$u = \tilde{\pi} = t_0 + t_0 \cot^2 t_0 - \cot t_0$$

由 (3.37) 可验证，当 $t_0 \in (0, 0.52)$ 时，上述不等式成立。至此，证明完成。□

现在我们引入以下两个函数:

$$P_*(t) = i^2 \left(t^2 \left(2 + \cot^2 t \right)^2 - (-\cot t + t + \tilde{\pi})^2 \right),$$

and

$$V_{i,m}(t) = \sqrt{(m+1)^2\pi^2 + 4P_*(t)} - (m+1)\pi - \frac{4it}{\pi} \left(t \cot^2 t + \cot t + t - \tilde{\pi} \right), \quad t \in (0, \pi/2).$$

通过直接计算，我们得到

$$V'_{i,m}(t) = \frac{4i^2 g(t)}{\pi \sqrt{(m+1)^2\pi^2 + 4P_*(t)}} \left(\frac{\sqrt{(m+1)^2\pi^2 + 4P_*(t)}}{i} - \pi(\cot^2 t + 2) \right) < 0.$$

注意

$$\sqrt{(m+1)^2\pi^2+4P_*(t)}/i-\pi(\cot^2 t+2)<0,\quad t\in(0,\pi/2),$$

并根据函数 g 的性质，我们知道存在 $t_1\in(0,\frac{\pi}{2})$，使得 $V_{i,m}(t)$ 在 $(0,t_1)$ 上严格递减，并在 $(t_1,\pi/2)$ 上严格递增。由于 $\lim_{t\to0^+}V_{i,m}(t)=\infty$ 且 $V_{i,m}(\pi/2)=0$，因此存在唯一零点

$$\underline{t}_{i,m}=\underline{t}:=V_{i,m}^{-1}(0)\in(0,t_1)\subset(0,\pi/2).$$

我们将使用如下概念

$$\underline{r}_{i,m}=\underline{r}:=P_*(\underline{t}). \tag{3.47}$$

引理 3.12. 假设 (i,m) 满足 (3.31)。设 $r_{i,m}$ 和 $\bar{r}_{i,m}$ 是由(3.41) 和(3.47)给出的常数。那么对于 $r\in(0,\underline{r}_{i,m}]$，

$$T_{i,m,r}=\frac{2i\pi}{(m+1)\pi+\sqrt{(m+1)^2\pi^2+4r}},$$

而对于 $r\in(\underline{r}_{i,m},\bar{r}_{i,m})$，

$$T_{i,m,r}=\frac{2i^2\sigma}{r}\left(\sigma\cot^2\sigma+\cot\sigma+\sigma-\tilde{\pi}\right),$$

其中 $\sigma=\sigma_{i,m,r}$ 是下文(3.50) 给出的常数。

证明 为简便起见，我们省略记号下标中的指标 $i,\ m$。由 (3.5) 和引理 3.4 可知，$\mathcal{T}_{i,m,r}$ 可视为 $\hat{r}\in[0,r]$ 或 $t\in[\tilde{\tau},\pi/2]$ 的函数，我们也将它们简记为 $\mathcal{T}_r(\hat{r})$ 和 $\mathcal{T}_r(t)$。由引理 3.9，$P(t_1)<P(t_0)=r_{i,m}$。由于 P 严格递减，故有 $t_1>t_0$。

首先考虑 $r\le P(t_1)$ 的情形。由引理 3.7 和引理 3.8 可得$h_r(\tilde{\tau})<0$, $g(\tilde{\tau})\le0$。根据 (3.40) 以及 $g(t)$ 递减这一事实，可知 $h_r(t)<0$在 $[\tilde{\tau},\pi/2]$上成立。然后由引理 2.4、引理 3.4 和 (3.18)，可得

$$T_{i,m,r}=\min_{\hat{r}\in[0,r]}\mathcal{T}_r(\hat{r})=\mathcal{T}_r(\hat{r})|_{\hat{r}=0}=\frac{2i\pi}{(m+1)\pi+\sqrt{(m+1)^2\pi^2+4r}}. \tag{3.48}$$

接下来考虑 $P(t_1)<r<P(t_0)$ 的情形。由引理 3.7 和引理 3.8，可得$h_r(\tilde{\tau})<0$以及 $g(\tilde{\tau})>0$。根据 (3.21) 以及 P 严格递减这一事实，可知 $t_1>P^{-1}(r)=\tilde{\tau}$。因此，根据 (3.40) 以及函数 $g(t)$ 的性质，$h_r(t)$ 在 $[\tilde{\tau},t_1]$ 上严格递增，在 $[t_1,\pi/2]$上严格递减，当然

$$\max_{t\in[\tilde{\tau},\pi/2]}h_r(t)=h_r(t_1).$$

由 (3.27) 可知，$h_r(t_1)$ 关于 r 连续且严格递增。我们断言 $h_{P(t_1)}(t_1)<0$且 $h_{P(t_0)}(t_1)>0$。当 $r=P(t_1)<P(t_0)$ 时，有 $\tilde{\tau}=P^{-1}(r)=t_1$，于是由引理 3.7 可得 $h_r(t_1)=h_r(\tilde{\tau})<0$。当 $r=P(t_0)>P(t_1)$ 时，有

$\tilde{\tau} = P^{-1}(r) = t_0 < t_1$，于是由引理 3.7 可得 $h_r(t_0) = h_r(\tilde{\tau}) = 0$。结合 $h_r(t)$ 在 $[\tilde{\tau}, t_1]$ 上严格递增这一事实，可推出 $h_r(t_1) > 0$。因此断言成立，并且存在某个

$$r_0 := r_{0,i,m} \in (P(t_1), P(t_0)) \tag{3.49}$$

使得 $h_{r_0}(t_1) = 0$. 如果 $P(t_1) < r \leq r_0$，那么 $h_r(t) \leq 0$ 在 $[\tilde{\tau}, \pi/2]$ 上成立，且显然有 (3.48)。

因此，以下我们假设 $r_0 < r < P(t_0)$。那么 $h_r(t_1) > 0$ ，并且 $h_r(t)$ 在 $(\tilde{\tau}, t_1)$ 和 $(0, t_1)$ 中均有唯一零点 σ。我们将定义在区间 $(0, t_1]$ 上的函数 $h_r(t)$ 记为 $h|_{(0,t_1]}(t)$。令

$$\sigma = \sigma_{i,m,r} := h|^{-1}_{(0,t_1]}(0) \in (\tilde{\tau}, t_1), \tag{3.50}$$

这是一个由 $i,\ m,\ r$的取值确定的常数。由引理 3.4 可容易得到， $\mathcal{T}_r(t)$ 在 $[\tilde{\tau}, \sigma]$ 上严格递减，随后在 $[\sigma, \pi/2]$ 上单调递减，这与 $h_r(\pi/2)$ 的符号有关。由引理 2.4 和引理 3.4，我们知道

$$T_{i,m,r} = \min_{\hat{r}\in[0,r]} \mathcal{T}_r(\hat{r}) = \min_{t\in[\tilde{\tau},\pi/2]} \mathcal{T}_r(t) = \min\left\{\mathcal{T}_r(t)|_{t=\sigma}, \mathcal{T}_r(t)|_{t=\pi/2}\right\}.$$

考虑(3.48)以及引理 3.4中的函数 $t(\hat{r})$ $(= t_{i,\ m}(\hat{r}))$，可得

$$\mathcal{T}_r(t)|_{t=\pi/2} = \mathcal{T}_r(\hat{r})|_{\hat{r}=0} = \frac{2i\pi}{(m+1)\pi + \sqrt{(m+1)^2\pi^2 + 4r}}. \tag{3.51}$$

由于 $h_r(\sigma) = 0$，由(3.27)可得

$$r = P_*(\sigma). \tag{3.52}$$

由于 $P_*(t) = -i^2 h_r(t) + r$，我们可以推导出 P_* 的单调性，并得到

$$\min_{t\in(0,\pi/2)} P_*(t) = P_*(t_1).$$

利用代换可以容易地证明 $P_*(t_1) > 0$

$$\tilde{\pi} = \cot t_1 + \frac{t_1}{\sin t_1^2} - \frac{2t_1^2 \cot t_1}{\sin^2 t_1}$$

根据(3.38)。于是，对于所有 $t \in (0,\ \pi/2)$，都有 $P_*(t) > 0$ 。由(3.16)和(3.52)，

$$\mathcal{T}_r(t)|_{t=\sigma} = \frac{2i^2\sigma}{r}\left(\sigma\cot^2\sigma + \cot\sigma + \sigma - \tilde{\pi}\right). \tag{3.53}$$

利用（3.51）、（3.52）和（3.53），可得

$$\mathcal{T}_r(t)|_{t=\pi/2} - \mathcal{T}_r(t)|_{t=\sigma} = \frac{i\pi}{2r} V_{i,m}(\sigma). \tag{3.54}$$

根据（3.54），当 $\sigma < t$ 时，$\mathcal{T}_r(t)|_{t=\pi/2} > \mathcal{T}_r(t)|_{t=\sigma}$；当 $\sigma > t$ 时，$\mathcal{T}_r(t)|_{t=\pi/2} < \mathcal{T}_r(t)|_{t=\sigma}$。此外，它们同时取等号。由于 σ，$t \in (0, t_1)$ 且 $P_*(t)$ 在 $t \in (0, t_1)$ 上严格递减，我们知道 $t - \sigma$ 与 $P_*(\sigma) - P_*(t) = r - r$ 同号。

最后，我们证明 $r \in (\underline{r}_0, \bar{P}(t_0)) \subset (P(t_1) \quad P(t_0))$，其中 r_0 如式 (3.49) 所示。否则，若 $r \le r_0$，由假设 $r_0 < r < P(t_0)$ 可得 $r > r_*$。于是有 $t > \sigma$ 以及

$$\mathcal{T}_r(t)|_{t=\pi/2} > \mathcal{T}_r(t)|_{t=\sigma}.$$

由上述讨论以及 $\mathcal{T}_r$ 和 σ 在 r 中连续这一事实，可以推出

$$\mathcal{T}_{r_0+\epsilon}(t)|_{t=\pi/2} < \mathcal{T}_{r_0+\epsilon}(t)|_{t=\sigma}$$

当 $\epsilon > 0$ 足够小时。这就产生了矛盾。类似地，我们可以证明 $r \ge P(t_0)$ 也是不可能的。□

结合引理 3.5、引理 3.11 和引理 3.12，我们证明了以下结果。

定理 3.13。对于 $r \in (0, \infty)$，$m \in \mathbb{N}$、$1 \le i \le m$，令 $r_{i,m}$ 和 $\underline{r}_{i,m}$ 分别为由 (3.41) 和 (3.47) 给出的常数。我们有以下结果。

(i) 如果 $i \le \frac{m+1}{2}$，那么

$$T_{i,m,r} = \mathcal{T}_{i,m,r}(\hat{r})|_{\hat{r}=r} = \mathbf{W}_{i,m}^{-1}(r),$$

其中 $\mathbf{W}_{i,m}$ 由 (3.20) 给出。

(ii) 如果 $i > \frac{m+1}{2}$ 且 $r \in [\bar{r}_{i,m}, \infty)$，那么

$$T_{i,m,r} = \mathcal{T}_{i,m,r}(\hat{r})|_{\hat{r}=r} = \mathbf{W}_{i,m}^{-1}(r).$$

(iii) 如果 $i > \frac{m+1}{2}$ 且 $r \in (\underline{r}_{i,m}, \bar{r}_{i,m})$，那么

$$T_{i,m,r} = \mathcal{T}_{i,m,r}(\hat{r})|_{\hat{r}=\hat{r}(\sigma)} = \frac{2i^2\sigma}{r}\left(\sigma\cot^2\sigma + \cot\sigma + \sigma - \frac{m-i+1}{2i}\pi\right),$$

其中 σ 由 (3.52) 给出，并且

$$\hat{r}(\sigma) = 2i^2\cot\sigma\cdot\left(\sigma\cot^2\sigma - \cot\sigma + 3\sigma + \tilde{\pi}\right). \tag{3.55}$$

(iv) 如果 $i > \frac{m+1}{2}$ 且 $r = \underline{r}_{i,m}$，那么

$$T_{i,m,r} = \mathcal{T}_{i,m,r}(\hat{r})|_{\hat{r}=0} = \mathcal{T}_{i,m,r}(\hat{r})|_{\hat{r}=\hat{r}(\sigma)} = \frac{2i\pi}{(m+1)\pi + \sqrt{(m+1)^2\pi^2 + 4r}}.$$

(v) 若 $i > \frac{m+1}{2}$ 和 $r \in (0, \underline{r}_{i,m})$，则

$$T_{i,m,r} = \mathcal{T}_{i,m,r}(\hat{r})|_{\hat{r}=0} = \frac{2i\pi}{(m+1)\pi + \sqrt{(m+1)^2\pi^2 + 4r}}.$$

到目前为止，我们已经求出了最小化问题 (3.28) 的解。接下来，我们将根据引理 2.2 中所述的强连续性，证明这些解正是我们最小化问题 (1.3) 的解。

3.2. **最小化问题 (1.3) 的解**。 对于 $m \in \mathbb{N}$, $1 \le i \le m$, $\hat{r}, \check{r} \ge 0$和 $T \in (0,1)$。引入测度 $\gamma_{i,m,\hat{r},\check{r},T}$ 如下

$$\gamma_{i,m,\hat{r},\check{r},T}(x) = \begin{cases} \mu_{i-1,\hat{r}}(\frac{x}{T}), & x \in [0,T], \\ -\hat{r} + \frac{1}{1-T}\int_T^x \eta_{m-i,\check{r}}(\frac{t-T}{1-T})\,\mathrm{d}t, & x \in (T,1], \end{cases} \tag{3.56}$$

其中，$\mu_{i-1,\hat{r}}$ 和 $\eta_{m-i,\check{r}}$ 分别如（2.9）和（2.10）中所定义。注意，测度 $\gamma_{i,m,\hat{r},\check{r},T}$（$x$）在 $[T,1]$上的约束实际上是由（2.3）得到的缩放测度 $\mu_{\eta_{m-i,\check{r}}}(\frac{x-T}{1-T})$。 ——

引理 3.14。 对于 $r \in$（0，∞），$m \in \mathbb{N}$、$1 \le i \le m$，并定义测度 $\gamma_{i,m,r}$（x）如下：

$$\gamma_{i,m,r} = \begin{cases} \gamma_{i,m,r,0,T_{i,m,r}}, & i \le \frac{m+1}{2}, \\ \gamma_{i,m,r,0,T_{i,m,r}}, & i > \frac{m+1}{2}, r \in [\overline{r}_{i,m}, \infty), \\ \gamma_{i,m,\hat{r}(\sigma),r-\hat{r}(\sigma),T_{i,m,r}}, & i > \frac{m+1}{2}, r \in (\underline{r}_{i,m}, \overline{r}_{i,m}), \\ \gamma_{i,m,0,r,T_{i,m,r}} \ or\ \gamma_{i,m,\hat{r}(\sigma),r-\hat{r}(\sigma),T_{i,m,r}}, & i > \frac{m+1}{2}, r = \underline{r}_{i,m}, \\ \gamma_{i,m,0,r,T_{i,m,r}}, & i > \frac{m+1}{2}, r \in (0, \underline{r}_{i,m}). \end{cases}$$

于是 $T_{i,m,r} = T_{i,m}$（$\gamma_{i,m,r}$）。

证明 由（2.11）、（2.12）和（3.4），可得

$$\lambda_m\left(\gamma_{i,m,r}(x)|[0,1]\right) = \lambda_{i-1}\left(\gamma_{i,m,r}(x)|[0,T_{i,m,r}]\right) = \lambda_{m-i}\left(\gamma_{i,m,r}(x)|[T_{i,m,r},1]\right).$$

因此，$T_{i,m,r} = T_{i,m}$（$\gamma_{i,m,r}$）。 □

L引理 3.15。 对于 $r \in$（0，∞），$m \in \mathbb{N}$、$1 \le i \le m$ 和 $T_{i,m,r}$ 如上。则

$$\mathbf{m}_{i,m}(r) = T_{i,m,r}.$$

证明 对于任意势函数 $q \in S_r$，我们构造了两个参数 $\hat{r}, \check{r}$，如 (3.1)-(3.2) 所示，使得节点 $T = T_{i,m}(q)$ 满足不等式 (3.2)。利用在 (3.3) 中定义的函数 $f(t,\hat{r})$,

$$f(T_{i,m}(q),\hat{r}) \le 0 = f(\mathcal{T}_{i,m,r}(\hat{r}),\hat{r}).$$

由于 $f(t,\hat{r})$ 关于 t 单调递减，我们得到

$$T_{i,m}(q) \ge \mathcal{T}_{i,m,r}(\hat{r}).$$

因此，对于每个 $q \in S_r$，$T_{i,m}(q) \ge T_{i,m,r}$。于是 $\mathbf{m}_{i,m}(r) = \inf_{q\in S_r} T_{i,m}(q) \ge T_{i,m,r}$。 □

另一方面，根据引理 2.1，存在一个序列 $\{\mu_n\} \subset \mathcal{M}_0 \cap \mathcal{C}^\infty$ 使得$q_n = \mu_n' \in B_r$ 并且

$$\mu_n \to \gamma_{i,m,r} \text{ in } (\mathcal{M}_0, w^*), \quad n \to +\infty.$$

由 $T_{i,m}(\mu)$ 关于测度 μ 的连续性，我们得到

$$T_{i,m}(\gamma_{i,m,r}) = \lim_{n\to\infty} T_{i,m}(\mu_n) = \lim_{n\to\infty} T_{i,m}(q_n) \ge \lim_{n\to\infty} \mathbf{m}_{i,m}(r) = \mathbf{m}_{i,m}(r).$$

因此，根据引理 3.14，$\mathbf{m}_{i,m}(r) \le T_{i,m,r}$。由此，结果得证。 □

由定理 3.13、引理 3.14 和引理 3.15 可知，本文的主要结果可表述如下。

定理 *3.16*。对于 $r \in (0,\infty)$，$m \in \mathbb{N}$ 和 $1 \le i \le m$。设 $r_{i,m}$、$\overline{r}_{i,m}$、$\sigma = \sigma_{i,m,r}$、$\hat{r}(\sigma)$ 为分别由 *(3.41)*、*(3.47)*、*(3.50)*、*(3.55)* 给出的常数，且 $\gamma_{i,m,\hat{r},\check{r},T}(x)$ 为 *(3.56)* 中的测度。则对于 $\mathbf{m}_{i,m}(r)$，有如下完整刻画：

(i) 若 $i \le \frac{m+1}{2}$，则

$$\mathbf{m}_{i,m}(r) = \mathbf{W}_{i,m}^{-1}(r),$$

其中$\mathbf{W}_{i,m}$ 由(3.20)给出。此外，$\mathbf{m}_{i,m}(r)$ 可由测度 $\gamma_{i,m,r,0,T_{i,m,r}}(x)$取得。

(ii) 若 $i > \frac{m+1}{2}$ 且 $r \in [\overline{r}_{i,m},\infty)$，则

$$\mathbf{m}_{i,m}(r) = \mathbf{W}_{i,m}^{-1}(r).$$

此外，$\mathbf{m}_{i,m}(r)$ 可由测度 $\gamma_{i,m,r,0,T_{i,m,r}}(x)$取得。

(iii) 若 $i > \frac{m+1}{2}$ 和 $r \in (\underline{r}_{i,m},\overline{r}_{i,m})$，则

$$\mathbf{m}_{i,m}(r) = \frac{2i^2\sigma}{r}\left(\sigma\cot^2\sigma + \cot\sigma + \sigma - \frac{m-i+1}{2i}\pi\right).$$

此外，$\mathbf{m}_{i,m}(r)$ 可由测度 $\gamma_{i,m,\hat{r}(\sigma),r-\hat{r}(\sigma),T_{i,m,r}}(x)$取得。(iv) 若 $i > \frac{m+1}{2}$ 和 $r \in (0, \underline{r}_{i,m})$，则

$$\mathbf{m}_{i,m}(r) = \frac{2i\pi}{(m+1)\pi + \sqrt{(m+1)^2\pi^2 + 4r}}.$$

此外，$\mathbf{m}_{i,m}(r)$可由势函数

$$q_{i,m,r}(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0, T_{i,m,r}], \\ \frac{1}{1-T_{i,m,r}}\eta_{m-i,r}\left(\frac{x-T_{i,m,r}}{1-T_{i,m,r}}\right), & x \in [T_{i,m,r}, 1], \end{cases}$$

其中 $\eta_{m,r}(x)$ 是如(2.10) 中所述的势函数。此外，$\mathbf{m}_{i,m}(r)$ 在 $r = r_{i,m}$时也可由测度 $\gamma_{i,m,\hat{r}(\sigma),r-\hat{r}(\sigma),T_{i,m,r}}(x)$ 取得。

注 3.17。本文所采用的方法可应用于以下更一般的谱问题

$$y'' = q(x)y + \lambda m(x)y, \tag{3.57}$$

其中 q 是非负连续函数，而 m可以变号。参见 [11]，了解问题 (3.57) 的特征值分布；参见 [10]，了解其特征值的尖锐界。当 $q(t) \equiv 1/4$ 时，这是一个与著名的 Camassa-Holm 方程相关的谱方程。关于此类谱问题的讨论，参见 [12]。

利益冲突 作者不存在利益冲突。

References

1. M. S. Ashbaugh，Hill方程特征值在势函数 p-范数约束下的优化，《数学分析与应用杂志》143（1989），438-447。2. M. S. Ashbaugh，R. Benguria，具有狄利克雷边界条件和正势函数的一维薛定谔算子特征值比的最优界，《数学物理通讯》124（1989），403-415。3. F. V. Atkinson，A. B. Mingarelli，一般加权斯图姆–刘维尔问题中零点个数及特征值的渐近性，《克雷尔数学杂志》375/376，（1987），380-393。4. C. Bennewitz，M. Brown，R. Weikard，常微分方程的谱理论与散射理论，I: 斯图姆–刘维尔方程，Universitext，Springer，2020。5. J. Chu，K. Jiang，G. Meng，负权斯图姆–刘维尔问题所有节点的尖锐界，《地中海数学杂志》22（2025），127，12页。6. J. Chu，G. Meng，具有不定势函数的 Camassa-Holm 方程最低正周期特征值的最小化，《数学研究》268（2023），241-258。7. J. Chu，G. Meng，F. Wang，M. Zhang，含势函数的 Sturm-Liouville算子节点优化问题，《数学年刊》390（2024），1401-1417。8. J. Chu，G. Meng，N. Xie，具有固定节点的斯图姆–刘维尔方程逆问题，《微分方程杂志》454（2026），113966。9. J. Chu，G. Meng，M. Zhang，与周期 Camassa-Holm 方程相关的谱的连续性与最小化，《微分方程杂志》265（2018），1678-1695。10. J. Chu，G. Meng，Z. Zhang，一般不定斯图姆–刘维尔问题正周期特征值与狄利克雷特征值的最小化，《数学进展》432（2023），论文编号109272，38页。11. A. Constantin，一般加权斯图姆–刘维尔问题，《比萨高等师范学院科学年刊》（第4辑）24（1997），767-782。12. A. Constantin，H. P. McKean，圆上的一个浅水方程，《纯粹与应用数学通讯》52（1999），949-982。13. Yu. V. Egorov，V. A. Kondrat'ev，关于某些斯图姆–刘维尔问题第一特征值的估计，《俄罗斯数学评论》51（1996），439-508。14. S. Guo，G. Meng，P. Yan，M. Zhang，斯图姆–刘维尔算子狄利克雷特征值的最大间隔最优界，《数学物理杂志》63（2022），072701，11页。15. S. Guo，G. Xu，M. Zhang，斯图姆–刘维尔问题特征值关于势函数的二阶 Fr´echet 导数，《巴塞尔数学档案》113（2019），301-312。16. S. Guo，M. Zhang，关于斯图姆–刘维尔问题节点对势函数的依赖性，《地中海数学杂志》19（2022），168，11页。17. S. Guo，M. Zhang，确定第二狄利克雷特征函数节点最优位置的变分方法，《应用数学方法与科学》46（2023），11983-12006。18. O. H. Hald，J. R. McLaughlin，逆问题：从节点恢复BV系数，《逆问题》14（1998），245-273。19. Y. He，M. Wu，Y. Xia，M. Zhang，一种新颖且面向应用的斯图姆–刘维尔算子逆节点问题，《数学年刊》（2025），https://doi.org/10.1007/s00208-025-03298-0。20. S. Karaa，某些微分方程特征值的尖锐估计，SIAM《数学分析杂志》29（1998），1279-1300。21. M. G. Krein，关于特征值最大值和最小值的某些问题以及李雅普诺夫稳定区域，《美国数学会译丛》1（1955），163-187。

22. J. L¨utzen, 《Sturm和Liouville关于常微分线性方程的研究》, 《Sturm-Liouville理论的兴起》, 《精确科学史档案》29 (1984), 309-376。23. J. R. McLaughlin, 《利用节点作为数据的逆谱理论——一个唯一性结果》, 《微分方程杂志》73 (1988), 354-362。24. G. Meng, 《测度微分方程特征值的极值问题》, 《美国数学会会刊》143 (2015), 1991-2002。25. G. Meng, M. Zhang, 《测度微分方程的解和特征值对测度的依赖性》, 《微分方程杂志》254 (2013), 2196-2232。26. S. Steinerberger, 《Sturm振荡定理中的定量投影》, J. Math. Pures Appl. 144 (2020), 1-16。27. C. Sturm, 《关于二阶线性微分方程的回忆录》, J. Math. Pures Appl. 1 (1836), 106-186。28. C. Sturm, 《关于一类偏差分方程的回忆录》, J. Math. Pures Appl. 1 (1836), 373-444。29. C. Sturm, J. Liouville, 《一篇关于函数展开为级数的回忆录摘录，其中各项均须满足同一个含可变参数的线性微分方程》, J. Math. Pures Appl. 2 (1837), 220-223。30. Q. Wei, G. Meng, M. Zhang, 《势属于 L^1 球的Sturm-Liouville算子特征值的极值》, 《微分方程杂志》247 (2009), 364-400。31. C. F. Yang, 《不连续Sturm-Liouville算子的逆节点问题》, 《微分方程杂志》254 (2013), 1992-2014。32. A. Zettl, 《Sturm-Liouville理论》, 《数学调查与专著》121，美国数学会，普罗维登斯，2005。33. A. Zettl, 《Sturm-Liouville理论的最新进展》, 《德格鲁伊特数学研究》76，德格鲁伊特，柏林，2021。34. M. Zhang, 《势属于 L^1 球的Hill算子最小特征值的极值》, 《微分方程杂志》246 (2009), 4188-4220。35. M. Zhang, Z. Wen, G. Meng, J. Qi, B. Xie, 《关于测度微分方程加权特征值的数量及完全连续性》, 《微分积分方程》31 (2018), 761-784。

[1] School of Mathematics, Hangzhou Normal University, Hangzhou 311121, China

[2] Department of Mathematical Sciences, Tsinghua University, Beijing 100084, China

[3] School of Mathematical Sciences, University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China电子邮箱：jifengchu@126.com (J. Chu) 电子邮箱：guosy@mail.neea.edu.cn (S. Guo) 电子邮箱：menggang@ucas.ac.cn (G. Meng) 电子邮箱：zhangmr@tsinghua.edu.cn (M. Zhang)