INT三角范畴的本征同调代数

Panagiotis Kostas、Chrysostomos Psaroudakis 和 Jorge Vit´oria

Abstract. 我们提出了一个研究（三角范畴的）同调性质的新框架，这些性质包括正则性、全局维数或有限维数的有限性、戈伦斯坦性或内射生成，以及它们之间的关系。我们的方法聚焦于一些具有内在定义的特定子范畴，而我们的主要工具是 *far-away orthogonality*这一新概念。我们发现，这些同调性质推广了先前研究过的环上模的导出范畴的性质；我们还利用理论的普适性，考察 Artin 代数的内射对象的同伦范畴和大奇异范畴（依照 Krause 的定义），以及非正微分分次代数的导出范畴中的相同性质。最后，我们运用这一理论，重新得到并推广了三角范畴拼接理论中的若干结果。

arXiv:2512.18417v1 [math.RT] 20 Dec 2025

Contents

1. 引言与主要结果 1
2. 远距离正交性 4
3. 特征子范畴 7
4. 三角范畴的同调性质 16
5. k-线性范畴的正则性 18
6. 粘合的应用 22
参考文献 27

1. Introduction and Main Results

衡量范畴同调复杂性的方法有很多。一种非常经典的做法是建立一个维数函数，将整数（或可能是 ∞）赋给范畴中的某些对象；通常通过测量由特殊对象构成的适当分解的长度来实现，然后取该函数的上确界或下确界。例如，在有足够多投射对象或内射对象的阿贝尔范畴中，通过测量投射维数或内射维数来定义整体维数或有限维数，就是这种做法。计算这种维数的第二种方法，是尝试缩小用来衡量复杂性的对象类别，同时仍然获得足以了解整个范畴的信息。一个具体的例子是众所周知的事实：环上的模范畴的整体维数，实际上等于循环模的投射维数／内射维数的上确界。或者，如果目的是衡量范畴的复杂性，倾向于此的数学家可能会避免挑选单个对象，转而研究内在定义的子范畴及其间的关系。本文采用这种方法来研究三角范畴，因为它们几乎天然就是形式化同调现象的统一框架。本文将出现的一类关系，例如众所周知的结论：环的全局维数有限，当且仅当模的有界导出范畴与投射（或内射）模的有界同伦范畴相等。

事实上，三角范畴在所有运用同调代数的数学领域中都居于核心地位，涵盖从表示论到代数几何和代数拓扑等领域。例如，概形上的（拟）凝聚层的导出范畴、环上的模或微分分次代数（简称 dg 代数）上的微分分次模的导出范畴、相关加性范畴（如投射或内射对象）的同伦范畴、奇点范畴、环谱的同伦范畴、群代数的稳定范畴等。我们旨在重新定义、推广并在一些知名范畴中验证若干

2020 *Mathematics Subject Classification.* 18G80，16E35，18G20，16E10，16E65。*Key words and phrases.* 紧生成三角范畴、整体维数、岩永-戈伦斯坦阿廷代数、有限维数、内射生成、正则性、奇异范畴、微分分次代数、紧致倾斜对象。**致谢：** P.K. 和 C.P. 获得 H.F.R.I. “基础研究资助（支持所有科学领域）”项目资助，该项目由欧盟通过 NextGenerationEU 资助，属于国家恢复与韧性计划“Greece 2.0”（H.F.R.I. 项目编号：16785）。J.V. 获得 NextGenerationEU 在 NRRP 框架下的资助，资助来源为意大利大学与研究部 2022年2月2日发布的 PRIN 2022 第104号征集项目；项目 2022S97PMY *Structures for Quivers, Algebras and Representations (SQUARE)*。

能够体现三角范畴良好同调行为的性质。这些性质包括有限整体维数、*Gorenstein* 性、内射生成、大 *finitistic* 维数的有限性 和正则性。我们以内在的方式研究这些性质，使用按特定方式构造的子范畴，尽量减少或消除对特殊对象的选择。

人们曾尝试以多种方式将同调不变量引入三角范畴的语境中，其中大多数方法都通过某类特殊对象来定义这些不变量，而这些对象并非内在定义。下面列举几个例子。

- 在 [17] 中引入了正则性的概念，要求强生成元的存在。
- 类似地，关于强生成元的思想使得 [45]能够定义小 finitistic 维数。
- 在 [42] 和 [69] 中，通过要求某个双模是完美的，探讨了光滑 dg 范畴的概念。
- 在 [34] 和 [46] 中，借助由给定数据适当生成的某些子范畴，讨论了 Gorenstein dg 代数和 Gorenstein dg 范畴的概念。
- 在 [65], 中，建立了有限维代数的有限维数有限性与由内射对象生成导出范畴之间的关系。

上述方法都需要先获得关于某个对象或子范畴的一些数据，才能推导出关于整个范畴的信息。我们提出一种自上而下的方法：已知范畴本身，找出能够揭示其内在性质的子范畴。

人们早已注意到，在环的导出范畴中，许多值得关注的子范畴是内在出现的 [41, 64]。首先是完美复形，它们构成紧对象的子范畴。接下来是有界（上方或下方）复形，它们可以用紧对象来刻画。最后是内射对象的有界（下方）复形，或投射对象的有界（上方）复形，它们可以用有界复形来刻画。这个子范畴网络及其在代数几何中的对应类比，已经通过一种关于度量的全新完备化技术得到了研究 [53]。研究此类问题的适当框架是（弱）可逼近三角范畴（例如参见 [22] 和 [21]），该框架要求弱逼近数据由单个紧生成元和一个 t-结构组成。本文不要求我们的范畴是弱可逼近的，而是采用一种不同的方法，通过我们所称的远距正交子范畴来恢复一个先前出现过的概念，即 [60] 中的概念。相关定义请参阅第 2 节和第 3 节。

对于每个内在定义的子范畴，它的每个远距正交子范畴也都是内在定义的，这使我们能够定义一整组特征子范畴，并根据这些子范畴在环的导出范畴中的性质，为它们标上合适的上标和下标。下表在环 R 上的右模的导出范畴 $\mathsf{D}(R)$ 中展示了这一想法。

TABLE 1. 子范畴汇总

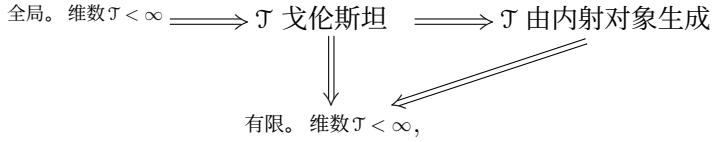
$\mathcal{T}$的子范畴	$\mathsf{D}(R)$的子范畴
$\mathcal{T}^{+}$	$\mathsf{D}^{+}(R)$
$\mathcal{T}^{-}$	$\mathsf{D}^{-}(R)$
$\mathcal{T}^{\mathsf{b}}$	$\mathsf{D}^{\mathsf{b}}(R)$
$\mathcal{T}^{\mathsf{b}}_{p}$	$\mathsf{K}^{\mathsf{b}}(\mathsf{Proj}\text{-}R)$
$\mathcal{T}^{\mathsf{b}}_{i}$	$\mathsf{K}^{\mathsf{b}}(\mathsf{Inj}\text{-}R)$
$\mathcal{T}^{\mathsf{b}}_{c}$	$\mathsf{D}^{\mathsf{b}}_{\mathsf{mod}\text{-}R}(\mathsf{Mod}\text{-}R)$ (R 诺特代数)

接下来，我们根据这些子范畴之间的关系，定义前面提到的同调属性，并确保它们对文献中已有概念作出恰当的推广。例如，如果 $\mathcal{T}^{\mathsf{b}} = \mathcal{T}^{\mathsf{b}}_{p}$，我们就称三角范畴 $\mathcal{T}$ 具有有限整体维数。下面还有一张表，举例说明由特征子范畴之间的等式所确定的性质，在右 R-模的导出范畴中（于给定语境下）应如何解释。

TABLE 2. 同调性质

性质	识别	$\mathsf{D}(R)$ 的含义
有限整体维数	$\mathcal{T}^{\mathsf{b}} = \mathcal{T}^{\mathsf{b}}_{p}$	整体维数。$\dim R < \infty$
戈伦斯坦	$\mathcal{T}^{\mathsf{b}}_{p} = \mathcal{T}^{\mathsf{b}}_{i}$	R 岩永-戈伦斯坦（如果 R Artin 代数）
内射生成	$\mathsf{Loc}(\mathcal{T}^{\mathsf{b}}_{i}) = \mathcal{T}$	内射对象为 R 生成
有限 finitistic 维数	$(\mathcal{T}^{\mathsf{b}}_{i})^{\perp} \cap \mathcal{T}^{+} = \{0\}$	Fin.dim $R < \infty$(若 R 为 Artin 代数)
正则	$\mathcal{T}^{\mathsf{c}} = \mathcal{T}^{\mathsf{b}}_{c}$	R 正则（如果是 R 交换诺特）

上述属性满足预期的因果关系（见定理 4.6）：



其中，若假设三角范畴具有某种诺特性，则对角蕴含成立。定理之后将对此作详细解释。

本文在发展这些同调属性背后的理论的同时，也验证它们在各种三角范畴中的出现。特别是，我们运用这些属性详细研究以下三角范畴:

- D(R)，环 R 上右 R-模的导出范畴;
- K(Inj-Λ)，Artin 代数 Λ 上右 Λ-模的内射对象同伦范畴;
- K$_{\text{无}}$(Inj-Λ)，Artin 代数 Λ 上右 Λ-模的内射对象无环复形的同伦范畴（通常称为 Λ大奇异范畴，并由 [43]引入）;

- D(Γ)，适当连通微分分次代数 Γ上的右 dg 模导出范畴。

论文结构。第 2 节汇集了全文所用的预备概念和结果。第 2.3 小节引入并研究远正交子范畴。第 3 节引入本文研究重点——三角范畴的主要新内禀子范畴，见定义 3.1。随后，我们立即计算上段所列范畴中的这些子范畴（见命题 3.3、推论 3.16 和命题 3.21）。在此过程中，我们讨论了存在 silting 对象时的特征子范畴，以及这些 silting 对象如何在适当的子范畴中诱导有界 t-结构或 co-t-结构（见定理 3.13）。第 4 节中，我们在定义 4.2 中列出旨在三角范畴语境下研究的性质：全局维数有限性、Gorenstein 性、由内射对象生成以及有限维数有限性。随后，我们研究这些性质之间的因果关系（见定理 4.6），并分析它们在所关注范畴中的出现情况。在第 5 节中，我们假设给定的三角范畴是关于交换诺特环 k 的 k-线性范畴，以便定义关于 k 的正则性。这需要一个内禀于给定 k-线性结构的新子范畴，即有界有限对象，以及一个我们称为奇异范畴的商范畴。我们再次研究如何从所关注的范畴中判定正则性，并将我们的定义与文献中已有的其他正则性概念进行比较。最后，第 6 节讨论本文理论在三角范畴再拼接中的应用。特别地，我们推广了 [6] 关于将三角范畴的再拼接限制到特征子范畴的结果，并在最后讨论我们的同调性质在再拼接中的表现，从而推广了 [6] 关于全局维数、 [28] 关于内射生成以及 [23] 关于有限维数的先前工作。

记号与约定。所有子范畴都是严格且满的。对于加性范畴 $\mathcal{A}$的子范畴 $\mathcal{X}$ ，我们用 Add($\mathcal{X}$)（分别地，Prod($\mathcal{X}$)）表示由 $\mathcal{X}$中对象的现有余积（分别地，积）的直和项组成的子范畴。对于加性范畴 $\mathcal{A}$ ，记 K($\mathcal{A}$) 为 $\mathcal{A}$中的（上链）复形的同伦范畴，并考虑以下子范畴：K^{+}($\mathcal{A}$)，即满足 $X^n=0$ （对 $n\ll 0$）的复形 $X^\bullet$ 的同伦范畴；K^{-}($\mathcal{A}$)，即满足 $X^n=0$（对 $n\gg 0$）的复形 $X^\bullet$ 的同伦范畴；以及 K^{b}($\mathcal{A}$)，即 K^{+}($\mathcal{A}$)$\cap$K^{-}($\mathcal{A}$)。若 $\mathcal{A}$ 是阿贝尔范畴，则记 D$^{?}$($\mathcal{A}$) 为 K$^{?}$($\mathcal{A}$) 在 K($\mathcal{A}$) $\longrightarrow$K($\mathcal{A}$)/K$_{\mathrm{ac}}$($\mathcal{A}$) =D($\mathcal{A}$) 下的本质像，其中 K$_{\mathrm{ac}}$($\mathcal{A}$) 表示由$\mathcal{A}$中的无环复形组成的子范畴，而 ? 是符号 $+$、$-$ 或 b之一。若 $\mathcal{X}$ 和 $\mathcal{Y}$ 是 $\mathcal{T}$的子范畴，我们用 $\mathcal{X}*\mathcal{Y}$ 表示 $\mathcal{T}$ 的子范畴，其对象是满足以下条件的 t： 存在 x 属于$\mathcal{X}$、 y 属于 $\mathcal{Y}$ ，以及 $\mathcal{T}$ 中的一个形如

$$x\longrightarrow t\longrightarrow y\longrightarrow x[1].$$

我们将包含 $\mathcal{X}$ 的最小厚子范畴（即对扩张和直和项封闭的最小子范畴）记为 thick($\mathcal{X}$)。给定三角范畴 $\mathcal{T}$ 中的一个对象 x 和一个整数区间 I ，我们考虑以下子范畴

$$x^{\perp_I}:=\{y\in\mathcal{T}\colon \mathsf{Hom}_{\mathcal{T}}(x,y[i])=0,\forall i\in I\}$$

其中， I 有时用符号 >0 或 ≤ 0 表示，其含义显而易见。符号 $\perp$ 仅表示 $\perp_0$。对于环 R，我们用 Mod-R 表示所有右 R-模组成的范畴，并考虑其子范畴 Proj-R （投射模）、proj-R （有限生成投射模）、Inj-R （内射模）和 mod-R （有限表示模）。我们还将 D$^{?}$(R) 和 K$^{?}$(R) 分别简写为 D$^{?}$(Mod-R) 和 K$^{?}$(Mod-R)，其中 ? 属于 $\{+,-,\mathrm{b}\}$。除非另有说明， k始终表示交换诺特环。Artin 代数（分别为 Noether 代数）是指交换阿廷环（分别为诺特环）上的有限生成代数。

2. Far-Away Orthogonality

本节将介绍远距离正交子范畴。首先给出一些后文所需的预备结果。

2.1. 紧生成三角范畴。 </style}三角范畴中的对象 若满足 Hom(, –) 与所有存在的余积可交换，则称其为**紧对象** 。紧对象构成 $\mathcal{T}$ 的一个厚子范畴，记为 $\mathcal{T}^{c}$。若 $\mathcal{T}$ 余完备、 $\mathcal{T}^{c}$ 骨架小且满足 $(\mathcal{T}^{c})^{\perp}=0$，则称 $\mathcal{T}$ 是**紧生成**的。

例 2.1。 以下给出一些紧生成三角范畴的例子。

(i) 若 Λ 是自内射 Artin 代数，则稳定模范畴 Mod-Λ 是紧生成的，其紧对象子范畴是由有限表示模 mod-Λ 稳定化所得的子范畴，参见例如 [13, 引理 3.9]。(ii) 根据 [16, 命题 6.4], , 任意环 R 上模范畴的导出范畴 D(R) 是紧生成的，其紧对象子范畴为 K^{b}(proj-R)。(iii) 更一般地，微分分次代数 Γ 的导出范畴 D(Γ) 是紧生成的，参见 [39, 第 4.2] 小节。其紧对象子范畴为 thick(Γ)，有时记作 per(Γ)。(iv) 设 A 为诺特环。根据 [43,推论 4.3] ，存在一个再拼接（定义见第 6 节）：

$$\mathsf{K}_{\mathsf{ac}}(\mathsf{Inj}\text{-}A)\ \underset{\mathsf{I}_{\rho}}{\overset{\mathsf{I}_{\lambda}}{\rightleftarrows}}\ \mathsf{I}\ \mathsf{K}(\mathsf{Inj}\text{-}A)\ \underset{\mathsf{Q}_{\rho}}{\overset{\mathsf{Q}_{\lambda}}{\rightleftarrows}}\ \mathsf{Q}\ \mathsf{D}(A) \tag{2.1}$$

其中，函子 Q 就是投影函子 K(A) $\longrightarrow$ D(A) 在 K(Inj-A) 上的限制。根据 [43, 命题 2.3]，同伦范畴 K(Inj-A) 是紧生成的，并且

$$\mathsf{K}(\mathsf{Inj}\text{-}A)^{\mathsf{c}} \simeq \mathsf{Q}_{\rho}(\mathsf{D}^{\mathsf{b}}(\mathsf{mod}\text{-}A)).$$

由此可得，K_{ac}(Inj-A)（有时称为 A 的大奇异范畴 ）是紧生成的，且其紧对象是 D^{b}(mod-A) 在 I_{λ} Q_{ρ} 作用下的本质像中的对象的直和项。借助标准布斯菲尔德局部化论证，这一本质像等价于的奇异范畴 ，其定义如下:

$$\mathsf{D}^{\mathsf{b}}(\mathsf{mod}\text{-}A)/\mathsf{D}(A)^{\mathsf{c}} =: \mathsf{D}_{\mathsf{sg}}(A).$$

在紧生成三角范畴中，紧对象的对偶是一种有用工具。回想一下，对于紧生成三角范畴 $\mathcal{T}$中的紧对象 t ，存在唯一一个 $\mathcal{T}$中的对象（在同构意义下），它表示函子

$$\mathsf{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathsf{Hom}_{\mathcal{T}}(t,-),\mathbb{Q}/\mathbb{Z})\colon \mathcal{T}^{\mathsf{op}} \to \mathsf{Ab},$$

我们将其记为 t^{*}。这个对象通常称为**的 Brown-Comenetz 对偶** 。类似地，如果 $\mathcal{X}$ 是 $\mathcal{T}^{c}$ 的子范畴，我们用 $\mathcal{X}^{*}$ 表示 $\mathcal{T}$ 的子范畴，其对象是在 $\mathcal{X}$ 中满足 x 的那些 x^{*} 。请注意，如果范畴 $\mathcal{T}$ 带有交换诺特环 k 上的 k-线性结构，那么在上述公式中，自然会考虑用 $\mathsf{Hom}_{k}(-,\ -)$ 替换 $\mathsf{Hom}_{\mathbb{Z}}(-,\ -)$，并用 Mod-$k$ 中的一个内射余生成元替换 $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ 。特别地，当 k 是域时，通常用 k 替代 $\mathbb{Z}$ 和 $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$。

注记 2.2. Brown–Comenetz 对偶在表示论中十分自然地出现。以下结论源自 Keller 的工作，见 [39] （另可参见 [34, 第 1.2] 小节）。设 k 为一个域，并假设 Γ 是一个微分分次 k- 代数（简称 dg k- 代数，或 k 上的 dg 代数）。函子

$$\nu\colon \mathsf{D}(\Gamma) \to \mathsf{D}(\Gamma) \qquad t \mapsto t \otimes^{\mathbb{L}}_{\Gamma} \mathbb{R}\mathsf{Hom}_{k}(\Gamma,k)$$

称为**中山函子**，可以证明它将 D(A) 中的紧对象 t 映到其 Brown–Comenetz 对偶。在此情形下，Brown–Comenetz 对偶中固有的同构称为奥斯兰德-赖滕公式。若 $\dim_{k} \oplus_{n\in\mathbb{Z}} H^{n}(\Gamma) < \infty$，则称 Γ 为**适当**的。对于适当的 dg$k$-代数， ν 限制为 D(Γ) 中如下形式的子范畴之间的等价：D(Γ)^{c} = 厚(Γ) $\to$ 厚($\nu\Gamma$)。

最后，我们简要回顾一下 t-结构和余 t-结构。

定义 2.3。 $\mathcal{T}$ 中的一对子范畴 $(\mathcal{U},\ \mathcal{V})$ 称为**挠对** ，如果 $\mathcal{U}^{\perp}=\mathcal{V}$、 $^{\perp}\mathcal{V}=\mathcal{U}$ 且$\mathcal{U}*\mathcal{V}=\mathcal{T}$。如果 $\mathcal{U}[1]\subseteq\mathcal{U}$ ，则称该挠对为**t-结构** ； 如果 $\mathcal{U}[-1]\subseteq\mathcal{U}$，则称其为**余 t-结构** 。

众所周知（见 [12]） ，若 $(\mathcal{U},\mathcal{V})$ 是一个 t-结构，则 $\mathcal{H}:=\mathcal{U}\cap\mathcal{V}[1]$ 是一个阿贝尔范畴，称为 $(\mathcal{U},\mathcal{V})$ 的**心** 。若 $(\mathcal{U},\mathcal{V})$ 是一个余 t-结构，则交集 $\mathcal{U}\cap\mathcal{V}[-1]$ 称为 $(\mathcal{U},\mathcal{V})$ 的**co-心** ； 一般而言，它只是一个加性范畴。

2.2. **宽广性**。 本小节将介绍一些术语，以便后文使用。

定义 2.4. 我们称三角范畴 $\mathcal{T}$ 的厚子范畴 $\mathcal{S}$ 为

(i) **$\prod$-宽的**（分别地， **Σ-宽的**），若其对存在的自积（分别地，自余积）封闭；也就是说，对于 $\mathcal{S}$ 中的每个对象 x 和任意集合 I，积 x^I （分别地，余积 $x^{(I)}$）属于 $\mathcal{S}$；(ii) **宽的**，若其同时是 Σ-宽的和 $\prod$-宽的。

注意，余完备（分别地，完备）三角范畴的任意局部化（分别地，余局部化）子范畴都是 Σ-宽的（分别地， $\prod$-宽的），但反过来显然并不成立——以下例子将说明这一点。

例 2.5. 若我们考虑某个环 R上的 $\mathcal{T}$ =D(R)，则有

(i) K^{b}(Proj-R) 和 K^{-}(Proj-R) 是 Σ-宽子范畴；(ii) K^{b}(Inj-R) 和 K^{+}(Inj-R) 是 $\prod$-宽子范畴；(iii) D^{b}(R)、D^{+}(R) 和 D^{-}(R) 是宽子范畴。

注意，然而，以上关于 D(R) 的子范畴均既非局部化，也非余局部化 .

引理2.6。 设 $\mathcal{X}$ 是三角范畴 $\mathcal{T}$中的对象集。

(i) 若 $\mathcal{T}$ 余完备，则 厚($\cup_{x\in\mathcal{X}}$直和闭包(x)) 是包含 $\mathcal{X}$的 Σ-广子范畴中最小的一个，记作 广子范畴$_{\Sigma}$($\mathcal{X}$)。(ii) 若 $\mathcal{T}$ 完备，则 厚($\cup_{x\in\mathcal{X}}$直积闭包(x)) 是包含 $\mathcal{X}$的 $\prod$-广子范畴中最小的一个，记作 广子范畴Π($\mathcal{X}$)。

证明。 任何包含 x的 Σ-广子范畴都必须包含 $\cup_{x\in\mathcal{X}}$Add(x)，因而也必须包含 thick($\cup_{x\in\mathcal{X}}$Add(x))。因此，只需证明后者是一个 Σ-广子范畴。根据构造，它是厚的；所以还需证明，对于 thick($\cup_{x\in\mathcal{X}}$Add(x)) 中的任意对象 y，任意对象集 I对应的 $y^{(I)}$ 也属于 thick($\cup_{x\in\mathcal{X}}$Add(x))。现在， y 是某个对象的直和项，而该对象具有一个有限滤过，其各项属于 $\cup_{x\in\mathcal{X}}$Add(x)的适当平移。由于余积保持三角并且在 $\mathcal{T}$中分裂单态射， $y^{(I)}$ 是另一个具有此类滤过的对象的直和项，从而可知它属于 thick($\cup_{x\in\mathcal{X}}$Add(x))。断言(ii)可对偶地证明。□

例 2.7. 设 R 为一个环， E 为 Mod-R 中的一个内射余生成元，且 $\mathcal{T}$ =D(R)。容易看出，K^{b}(Proj-R) = 是$_{\Sigma}$(R) 的广子范畴，且 K^{b}(Inj-R) =是Π(E) 的广子范畴。若 R 是右诺特环，则每个内射右R-模都是不可分解内射模的余积；特别地，我们有 Add(E) = Prod(E)。因此，若 R 是右诺特环，则 K^{b}(Inj-R) = 是Π(E) = 是$_{\Sigma}$(E) 的广子范畴。对偶地，若 R 是阿廷的，则投射右 R-模构成的子范畴在积下封闭（由 Chase 定理可知），因此 K^{b}(Proj-R) 是广子范畴。

将上面的引理简单应用一下，便可得到以下有用的观察。

推论 2.8. 设 Λ 为一个 *Artin* 代数， $\mathcal{S}_{\Lambda}$ 为其简单对象构成的子范畴。于是我们有

$$\mathsf{D}^{\mathsf{b}}(\text{Mod-}\Lambda) = \mathsf{broad}_{\Sigma}(\mathsf{D}^{\mathsf{b}}(\text{mod-}\Lambda)) = \mathsf{broad}_{\Sigma}(\text{mod-}\Lambda) = \mathsf{broad}_{\Sigma}(\mathcal{S}_{\Lambda}).$$

证明。 任意 Λ-模都是半单模的有限扩张（考虑根基列，参见 [10, 命题 3.1] 和 [4, 推论 15.18]）。记 Add $\mathcal{S}_{\Lambda}$ 为半单 Λ-模构成的子范畴，则有

$$\mathsf{D}^{\mathsf{b}}(\text{Mod-}\Lambda) = \mathsf{thick}(\text{Mod-}\Lambda) = \mathsf{thick}(\mathsf{Add}\,\mathcal{S}_{\Lambda}).$$

现在注意到，由于简单 Λ-模只有有限多个，实际上我们有

$$\mathsf{thick}(\mathsf{Add}\,\mathcal{S}_{\Lambda}) = \mathsf{thick}(\cup_{x\in\mathcal{S}_{\Lambda}}\mathsf{Add}\,x) = \mathsf{broad}_{\Sigma}(\mathcal{S}_{\Lambda}).$$ □

2.3. **远距正交性**。 我们讨论三角范畴中整数充分大 或充分小 时的正交性，并指出这些关系给出了若干感兴趣子范畴的内在刻画。给定三角范畴 $\mathcal{T}$ 中的两个对象 x 和 y，我们记

$$\mathsf{Hom}_{\mathcal{T}}(x, y[\gg]) = 0 \ \ (\text{respectively, } \ \mathsf{Hom}_{\mathcal{T}}(\mathrm{x}, \mathrm{y}[\ll]) = 0)$$

若存在 N 属于 $\mathbb{Z}$，使得对所有 $n > N$（分别对所有 $n < N$），都有 $\mathsf{Hom}_{\mathcal{T}}(x,\ y[n]) = 0$。对于一个类 ss $\mathcal{X}$中的对象 ，我们定义 $\mathcal{T}$ 的以下子范畴:

$$\mathcal{X}^{\perp_{\gg}} := \{t \in \mathcal{T} : \forall x \in \mathcal{X}, \mathsf{Hom}_{\mathcal{T}}(x, t[\gg]) = 0\} \quad \mathcal{X}^{\perp_{\ll}} := \{t \in \mathcal{T} : \forall x \in \mathcal{X}, \mathsf{Hom}_{\mathcal{T}}(x, t[\ll]) = 0\}$$

$$^{\perp_{\gg}}\mathcal{X} := \{t \in \mathcal{T} : \forall x \in \mathcal{X}, \mathsf{Hom}_{\mathcal{T}}(t, x[\gg]) = 0\} \quad ^{\perp_{\ll}}\mathcal{X} := \{t \in \mathcal{T} : \forall x \in \mathcal{X}, \mathsf{Hom}_{\mathcal{T}}(t, x[\ll]) = 0\}$$

$$\mathcal{X}^{\perp} := \mathcal{X}^{\perp_{\ll}} \cap \mathcal{X}^{\perp_{\gg}} \quad ^{\perp}\mathcal{X} := {}^{\perp_{\ll}}\mathcal{X} \cap {}^{\perp_{\gg}}\mathcal{X}$$

如果 $\mathcal{X}$ 由单个对象构成，即如果 $\mathcal{X} = \{x\}$，那么对于 $\{\perp_{\gg}, \perp_{\ll}, \perp\}$ 中的任意符号 ?，我们用 $x^{?}$ 代替 $\mathcal{X}^{?}$。在讨论使用这些正交子类的意义之前，我们先提取一些简单的结构性质。

引理 2.9。设 $\mathcal{X}$ 和 $\mathcal{Y}$ 是 $\mathcal{T}$ 中的对象类，且 ? 是符号 $\{\perp_{\ll}, \perp_{\gg}, {}^{\perp}{}_{1}\}$ 之一。

(i) 子范畴 $\mathcal{X}^{?}$ 是 $\prod$-广的，而子范畴 ${}^{?}\mathcal{X}$ 是 Σ-广的

(ii) $\mathcal{X} \subseteq {}^{?}(\mathcal{X}^{?})$ 和 $\mathcal{X} \subseteq ({}^{?}\mathcal{X})^{?}$. (iii) $\mathcal{X}^{?} = ({}^{?}(\mathcal{X}^{?}))^{?}$ 以及 ${}^{?}\mathcal{X} = {}^{?}(({}^{?}\mathcal{X})^{?})$

(iv) $(\mathcal{X} * \mathcal{Y})^{?} = \mathcal{X}^{?} \cap \mathcal{Y}^{?}$ 以及 ${}^{?}(\mathcal{X} * \mathcal{Y}) = {}^{?}\mathcal{X} \cap {}^{?}\mathcal{Y}$. (v) 若 $\mathcal{X}$ 是一个对象集，则我们有 (a) $\mathcal{X} \subseteq 广_{\Sigma}(\mathcal{X}) \subseteq {}^{?}(\mathcal{X}^{?})$ 且 $\mathcal{X} \subseteq 广\Pi(\mathcal{X}) \subseteq ({}^{?}\mathcal{X})^{?}$. (b) $\mathcal{X}^{?} = 广_{\Sigma}(\mathcal{X})^{?}$ = 厚子范畴$(\mathcal{X})^{?}$ 以及 ${}^{?}\mathcal{X} = {}^{?}广\Pi(\mathcal{X}) = {}^{?}$厚子范畴$(X)$.

证明。(i) 形如 $\mathcal{X}^{?}$ 的子范畴显然在平移和直和项下封闭。若我们考虑一个三角

$$u \to v \to w \to u[1]$$

在 $\mathcal{T}$ 中，取 u 和 w，其中 $\mathcal{X}^{?}$；对其应用上同调函子 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(x, -)$。由于 $\mathcal{X}^{?}$ 在平移下封闭，故对于 x 中的对象，可得 v 属于 $\mathcal{X}^{?}$。最后，$\mathcal{X}^{?}$ 对自积封闭，因为 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(x, -)$ 与积可交换。另一种情形是对偶的。

(ii) 这直接由定义得出。

(iii) 我们证明 $\mathcal{X}^{?} = ({}^{?}(\mathcal{X}^{?}))^{?}$；另一等式是对偶的。将 (i) 中的第二个包含关系应用于类 $\mathcal{X}^{?}$，得到 $\mathcal{X}^{?} \subseteq ({}^{?}(\mathcal{X}^{?}))^{?}$。将 $(-)^{?}$ 应用于 (ii) 中的第一个包含关系，还可得 $({}^{?}(\mathcal{X}^{?}))^{?} \subseteq \mathcal{X}^{?}$，从而证明该等式。

(iv) 我们有 $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{X} * \mathcal{Y}$ 和 $\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{X} * \mathcal{Y}$，这意味着 $(\mathcal{X} * \mathcal{Y})^{?} \subseteq \mathcal{X}^{?}$ 和 $(\mathcal{X} * \mathcal{Y})^{?} \subseteq \mathcal{Y}^{?}$。因此可得 $(\mathcal{X} * \mathcal{Y})^{?} \subseteq \mathcal{X}^{?} \cap \mathcal{Y}^{?}$。对于 $\mathcal{X} * \mathcal{Y}$ 中的对象 t，存在一个三角 $x \to t \to y \to x[1]$，其中 x 属于 $\mathcal{X}$，且 y 属于 $\mathcal{Y}$。于是，对于 $\mathcal{X}^{?} \cap \mathcal{Y}^{?}$ 中的对象 s，利用长正合列

$$\cdots \to \mathsf{Hom}_{\mathcal{T}}(y, s[n]) \to \mathsf{Hom}_{\mathcal{T}}(t, s[n]) \to \mathsf{Hom}_{\mathcal{T}}(x, s[n]) \to \mathsf{Hom}_{\mathcal{T}}(y, s[n+1]) \to \cdots$$

我们推得，对于每个 $t \in \mathcal{X} * \mathcal{Y}$，$s$ 都属于 $t^{?}$，即 s 属于 $(\mathcal{X} * \mathcal{Y})^{?}$。

(v)(a) 这些包含关系直接由定义以及 (i) 和 (ii) 得出。

(v)(b) 我们证明 $\mathcal{X}^{?} =$broad$_{\Sigma}(\mathcal{X})^{?} =$包含于厚子范畴 thick$(\mathcal{X})^{?}$；另一个结论是对偶的。由 (v)(a)，我们有 broad$_{\Sigma}(\mathcal{X}) \subseteq {}^{?}(\mathcal{X}^{?})$，因此由 (iii) 得到等式 $\mathcal{X}^{?} = ({}^{?}(\mathcal{X}^{?}))^{?} \subseteq$ broad$_{\Sigma}(\mathcal{X})^{?}$。为证明反向包含，注意到由于 $\mathcal{X} \subseteq$ broad$_{\Sigma}(\mathcal{X})$，我们有 broad$_{\Sigma}(\mathcal{X})^{?} \subseteq \mathcal{X}^{?}$。这就证明了第一个等式。现在显然有 thick$(\mathcal{X})^{?} \subseteq \mathcal{X}^{?}$，并且，由于 thick$(\mathcal{X})$ 中的每个对象都是某个对象的直和项，而该对象存在一个由 $\mathcal{X}$ 中对象的平移构成的有限滤过，因此 $\mathcal{X}^{?}$ 中的任意对象也必属于厚子范畴 thick$(\mathcal{X})^{?}$，从而得到 $\mathcal{X}^{?} =$thick$(\mathcal{X})^{?}$。□

例 2.10. 设 Λ 是一个 Artin 代数。回顾推论 2.8 中

$$\mathsf{broad}_{\Sigma}(\text{mod-}\Lambda) = \mathsf{thick}(\text{Mod-}\Lambda) = \mathsf{D}^{\mathsf{b}}(\text{Mod-}\Lambda).$$

于是，由引理 2.9(v)(b)可知，对于 $\{\perp_{\ll}, \perp_{\gg}, {}^{\perp}{}_{1}\}$中的任意符号 ?，$(\text{mod-}\Lambda)^{?} = (\text{Mod-}\Lambda)^{?}$。

下文将有助于说明远距正交性在伴随对和全忠实函子下的表现。

引理 2.11. 设F 是一个三角函子F: $\mathcal{D} \to \mathcal{T}$，并设 $\mathcal{X}$ 和 $\mathcal{Y}$ 分别是 $\mathcal{D}$ 和 $\mathcal{T}$ 中的对象类，满足$\mathsf{F}(\mathcal{X}) \subseteq \mathcal{Y}$。对于 $\{\perp_{\ll}, \perp_{\gg}, {}^{\perp}{}_{1}\}$中的任意?，以下结论成立：

(i) 若F 有右伴随G，则$\mathsf{G}(\mathcal{Y}^{?}) \subseteq \mathcal{X}^{?}$；(ii) 若F 有左伴随G，则$\mathsf{G}({}^{?}\mathcal{Y}) \subseteq {}^{?}\mathcal{X}$；

(iii) 若F 是全忠实的，且$\mathsf{F}(x)$ 对某个 x （其中 $\mathcal{D}$）属于 $\mathcal{Y}^{?}$，则 x属于 $\mathcal{X}^{?}$；

(iv) 若F是全忠实的，且$\mathsf{F}(x)$ 对某个 x （其中 $\mathcal{D}$）属于${}^{?}\mathcal{Y}$，则 x 属于${}^{?}\mathcal{X}$。

证明。断言 (i) 和 (ii) 由定义及所考虑的伴随关系直接得出。为证明 (iii)，假设对于某个 x 以及某个 ?$\in \{\perp_{\gg}, \perp_{\ll}, {}^{\perp}{}_{1}\}$，F($x$) 属于 $\mathcal{Y}^{?}$。考虑 $\mathcal{X}$ 中的一个对象 x'。由于 F 完全忠实，因此

$$\mathsf{Hom}_{\mathcal{D}}(x', x[n]) \cong \mathsf{Hom}_{\mathcal{T}}(\mathsf{F}(x'), \mathsf{F}(x)[n])$$

对所有 $n \in \mathbb{Z}$ 均成立。由于 F(x') 属于 $\mathcal{Y}$，且 F(x) 属于 $\mathcal{Y}^{?}$，特别地，对于取决于 ? 的适当 n 值，右侧为零。在每种情况下，都可得出 x 属于 $x'^{?}$，正如所需。断言 (iv) 的证明类似。□

有时，远距离正交子范畴会成对出现，正如我们将在接下来的章节中看到的那样。

定义 2.12。给定一个三角范畴 $\mathcal{T}$，若子范畴对 $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ 满足 $\mathcal{X}^{\perp_{1}} = \mathcal{Y}$ 和 ${}^{\perp_{1}}\mathcal{Y} = \mathcal{X}$，则称其为一个**远对**。此外，若范畴 $\mathcal{T}$ 的子范畴三元组 $(\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z})$ 中的 $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ 和 $(\mathcal{Y}, \mathcal{Z})$ 均为远对，则称该三元组为一个**远三元组**。

注 2.13. 由引理 2.9(iii)可直接得出，对于任意一类对象 $\mathcal{X}$，我们可以构造两个远离对

(i) 由 $\mathcal{X}$ 生成的远离对为 $({}^{\perp_\infty}(\mathcal{X}^{\perp_\infty})\ \mathcal{X}^{\perp_\infty})$；(ii) 由 $\mathcal{X}$ 余生成的远离对为 $({}^{\perp_\infty}\mathcal{X},({}^{\perp_\infty}\mathcal{X})^{\perp_\infty})$。注意，根据引理 2.9(ii)，我们有 $\mathcal{X}\subseteq{}^{\perp_\infty}(\mathcal{X}^{\perp_\infty})$ 和 $\mathcal{X}\subseteq({}^{\perp_\infty}\mathcal{X})^{\perp_\infty}$。

例　　远离对将在下一节开头给出定义后显而易见　　.

3. Distinguished Subcategories

在下述定义中，我们引入本文研究的主要子范畴。它们都以三角范畴中紧对象的特征子范畴为起点构造。因此，它们对于紧生成三角范畴尤为重要。

定义 3.1。设 $\mathcal{T}$ 是一个三角范畴。我们定义以下特征子范畴：

- 有界上方对象的子范畴 $\mathcal{T}^{-}:=(\mathcal{T}^{\mathsf{c}})^{\perp_\infty\gg}$。
- 有界下方对象的子范畴 **bounded below** $\mathcal{T}^{+}:=(\mathcal{T}^{\mathsf{c}})^{\perp_\infty\ll}$。
- 有界对象的子范畴 **bounded** $\mathcal{T}^{\mathsf{b}}:=(\mathcal{T}^{\mathsf{c}})^{\perp_\infty}=\mathcal{T}^{+}\cap\mathcal{T}^{-}$。
- 有界上方投射的对象的子范畴 **bounded above projective** $\mathcal{T}_p^{-}:={}^{\perp_\infty\ll}(\mathcal{T}^{\mathsf{b}})$。
- 有界下方投射的对象的子范畴 **bounded below projective** $\mathcal{T}_p^{+}:={}^{\perp_\infty\gg}(\mathcal{T}^{\mathsf{b}})$。
- 有界投射的对象的子范畴 **bounded projective** $\mathcal{T}^{\mathsf{b}p}:={}^{\perp_\infty}(\mathcal{T}^{\mathsf{b}})=\mathcal{T}_p^{+}\cap\mathcal{T}_p^{-}$。
- 有界上方内射的对象的子范畴 **bounded above injective** $\mathcal{T}_i^{-}:=(\mathcal{T}^{\mathsf{b}})^{\perp_\infty\gg}$。
- 有界下方内射的对象的子范畴 **bounded below injective** $\mathcal{T}_i^{+}:=(\mathcal{T}^{\mathsf{b}})^{\perp_\infty\ll}$。
- 有界内射的对象的子范畴 **bounded injective** $\mathcal{T}^{\mathsf{b}i}:=(\mathcal{T}^{\mathsf{b}})^{\perp_\infty}=\mathcal{T}_i^{+}\cap\mathcal{T}_i^{-}$。

注意，对于 $\{+,-,\mathsf{b}\}$ 中 ? 的任意选择，子范畴 $(\mathcal{T}^{\mathsf{c}})^{?}$ 是宽的，子范畴 $\mathcal{T}_i^{?}$ 是 $\prod$-宽的，而子范畴 $\mathcal{T}_p^{?}$ 是 Σ-宽的。正如所承诺的，下面的引理给出了一些远离对的例子。

引理 3　.2. 设 $\mathcal{T}$ 是一个完备且余完备三角范畴。以下结论成立　　$d.$

(i) $(\mathcal{T}_p^{\mathsf{b}},\mathcal{T}^{\mathsf{b}})$ 是由 $\mathcal{T}^{\mathsf{c}}$ 生成的远对；特别地，我们有 $\mathcal{T}^{\mathsf{c}}\subseteq\mathcal{T}_p^{\mathsf{b}}$。(ii) 若 $\mathcal{T}$ 是紧生成的，则由 $(\mathcal{T}^{\mathsf{c}})^{*}$ 余生成的远对与 $(\mathcal{T}^{\mathsf{b}},\mathcal{T}_i^{\mathsf{b}})$ 相同。特别地，我们有一个形如 $(\mathcal{T}_p^{\mathsf{b}},\mathcal{T}^{\mathsf{b}},\mathcal{T}_i^{\mathsf{b}})$ 的远三元组。

若对于某个 M，　$\mathcal{T}^{\mathsf{c}}=$厚子范畴$(M)$，则 $M^{\perp_\infty}=\mathcal{T}^{\mathsf{b}}={}^{\perp_\infty}(M^{*})$、 ${}^{\perp_\infty}(M^{\perp_\infty})=\mathcal{T}_p^{\mathsf{b}}$以及 $({}^{\perp_\infty}(M^{*}))^{\perp_\infty}=\mathcal{T}_i^{\mathsf{b}}$。

证明。(i) 这由定义 $\mathcal{T}^{\mathsf{b}}:=(\mathcal{T}^{\mathsf{c}})^{\perp_\infty}$和 $\mathcal{T}_p^{\mathsf{b}}:={}^{\perp_\infty}((\mathcal{T}^{\mathsf{c}})^{\perp_\infty})$ 得出。(ii) 设 $\mathcal{T}$ 是紧生成的。根据 Brown–Comenetz 对偶的定义，显然有 ${}^{\perp_\infty}((\mathcal{T}^{\mathsf{c}})^{*})=(\mathcal{T}^{\mathsf{c}})^{\perp_\infty}=\mathcal{T}^{\mathsf{b}}$。由定义可得 $({}^{\perp_\infty}((\mathcal{T}^{\mathsf{c}})^{*}))^{\perp_\infty}=\mathcal{T}_i^{\mathsf{b}}$，证明完毕。最后一个结论由引理 2.9 得出。

□

3.1. 第一个例子：环的导出范畴。 让我们针对一些熟悉的三角范畴，计算定义 3.1 中子范畴的一些例子。第一个例子，即环上的模的导出范畴，有助于我们说明这一命名的合理性。

命题 3.3。下表列出了任意环 R 的三角范畴 $\mathcal{T}=\mathsf{D}(R)$ 的一些特征子范畴。

$\mathcal{T}$	$\mathcal{T}^{\mathsf{c}}$	$\mathcal{T}^{-}$	$\mathcal{T}^{+}$	$\mathcal{T}^{\mathsf{b}}$	$\mathcal{T}_p^{-}$	$\mathcal{T}_p^{\mathsf{b}}$	$\mathcal{T}_i^{+}$	$\mathcal{T}_i^{\mathsf{b}}$
$\mathsf{D}(R)$	K^{b}(proj-R)	$\mathsf{D}^{-}(R)$	$\mathsf{D}^{+}(R)$	$\mathsf{D}^{\mathsf{b}}(R)$	K^{-}(Proj-R)	K^{b}(Proj-R)	K^{+}(Inj-R)	K^{b}(Inj-R)

证明。令 R 为任意一个环，并固定 $\mathcal{T}=\mathsf{D}(R)$。这些 $\mathsf{D}(R)$ 的子范畴已在 $[41,64]$中计算，相关证明的详细说明例如可见 $[28,$ 引理 2.12$]$。为方便读者，我们在此给出论证。$\mathcal{T}^{\mathsf{c}}=\mathsf{K}^{\mathsf{b}}$(proj-$R$) 是公知的，其证明可见 $[16,$ 命题 6.4$]$。回忆一下，R^{*}（即 R的 Brown-Comenetz 对偶）是 Mod-R 的一个内射余生成元。

- $\mathcal{T}^{?}=\mathsf{D}^{?}(R)$，对任意 $\{+,-,\mathsf{b}\}$ 中的 ?。由于 $\mathcal{T}^{\mathsf{c}}=$厚子范畴$(R)$，由引理 2.9 (v)(b) 可知 $\mathcal{T}^{-}=R^{\perp_\infty\gg}$，即 $\mathcal{T}^{-}$ 由满足以下条件的对象 x 组成：对于 $n\gg 0$，$H^{n}(x)\cong\mathrm{Hom}_{\mathsf{D}(R)}(R,x[n])\cong 0$。这就证明了 $?=-$ 时的结论；$?=+$ 的情形可对偶地证明，而 $?=\mathsf{b}$ 则由前两条结论合并得出。
- $\mathcal{T}_p^{-}=\mathsf{K}^{-}$(Proj-$R$) 和 $\mathcal{T}_i^{+}=\mathsf{K}^{+}$(Inj-$R$)。如果 x 属于 $\mathcal{T}_p^{-}$，那么对于 $n\ll 0$，我们有 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(x,\ R^{*}[n])=0$，因此 $H^{-n}(x)=0$。由此，x 属于 $\mathsf{D}^{-}(R)$，且该论证可逆。因此我们得到$\mathcal{T}_p^{-}=\mathsf{D}^{-}(R)\simeq\mathsf{K}^{-}$(Proj-$R$)。第二个等式可通过对偶方式证明。

- $\mathcal{T}^{b}_{p}$ =K^{b}(Proj-R) 和 $\mathcal{T}^{b}_{i}$ =K^{b}(Inj-R)。如果 x 属于 K^{b}(Proj-R)，那么对于每个属于 $\mathsf{D}^{b}(R)$ 的 y，我们有

$$\mathsf{Hom}_{\mathsf{D}(R)}(x, y[n]) \cong \mathsf{Hom}_{\mathsf{K}(R)}(x, y[n])$$

并且由于 x 和 y 都是有界复形，因此当 $|n|$ 足够大时，后者为 0。这意味着 K^{b}(Proj-R) $\subseteq {}^{\perp_{>0}}(\mathsf{D}^{b}(R)) = {}^{\perp_{>0}}(\mathcal{T}^{b}) = \mathcal{T}^{b}_{p}$。另一方面，若 x 是 $\mathcal{T}^{b}_{p}$中的一个对象，则存在 N，使得对 $|n| \geq N$有 $\mathsf{Hom}^{\mathsf{D}(R)}(x, R^{*}[n]) = 0$。然而，由于 $H^{-n}(x) = 0$当且仅当 $\mathsf{Hom}^{\mathsf{D}(R)}(x, R^{*}[n]) = 0$，我们可知 x具有有界上同调。因此，存在一个有界上复形 $P = (P^{i}, d^{i})$，它属于 K^{-}(Proj-R)，与 x拟同构，且具有有界上同调。我们断言，对 $n \ll 0$，$\mathsf{Coker}(d^{n-1})$ 是投射的。事实上，由于 $P \cong x$属于 ${}^{\perp_{1}}(\mathsf{D}^{b}(R))$，对于任意 R-模 c，有 $\mathsf{Hom}^{\mathsf{D}(R)}(x, c[\gg]) \cong \mathsf{Hom}^{\mathsf{K}(R)}(P, c[\gg]) = 0$。令 c 为 $\mathsf{Coker}(d^{n-1})$ 的余积 $\oplus_{n\in\mathbb{Z}}$，并取一个整数 k_{c}，使得对所有 $k \geq k_{c}$，$\mathsf{Hom}^{\mathsf{K}(R)}(P, c[k]) = 0$。现在再取一个整数 k，使得 $k \geq \max\{N, k_{c}\}$，从而对于这样的 k，我们同时有 $\mathsf{Hom}^{\mathsf{D}(R)}(P, c[k]) = 0$和 $H^{-k}(P) = 0$。考虑由投影映射 π诱导的复形自然映射： $P^{-k} \longrightarrow \mathsf{Coker}(d^{-k-1})$。该映射是零同伦映射这一事实意味着存在 f： $P^{-k+1} \longrightarrow \mathsf{Coker}(d^{-k-1})$，使得 $f \circ d^{-k} = \pi$，从而得到下图。

$$\begin{array}{ccccccccc}
\cdots & \longrightarrow & P^{-k-1} & \xrightarrow{d^{-k-1}} & P^{-k} & \xrightarrow{d^{-k}} & P^{-k+1} & \longrightarrow & \cdots \\
 & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi} & \swarrow{\scriptstyle f} & \downarrow & & \\
\cdots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \text{余核}(d^{-k-1}) & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \cdots
\end{array}$$

现在，由于 $H^{-k}(P) = 0$，存在自然同构 $\mathrm{Im}(d^{-k}) \cong$ 余核(d^{-k-1})，因此我们可以考虑典范嵌入 ϵ: 余核(d^{k-1}) $\longrightarrow P^{-k+1}$，使得 $\epsilon \circ \pi = d^{-k}$。注意到 $f \circ \epsilon \circ \pi = f \circ d^{-k} = \pi$，因此 f 是分裂满射，且余核(d^{k-1})是投射的。这说明截断复形

$$\cdots \to 0 \to \mathsf{Coker}(d^{-k-1}) \to P^{-k+1} \to P^{-k+2} \to \cdots$$

是一个与 x 拟同构的有界投射复形。第二个陈述可对偶地证明。 □

3.2. **例：具有 silting 对象的紧生成三角范畴**。现在我们来考察具有一类特殊对象的紧生成三角范畴。

定义 3.4。 [57] [61] 设 $\mathcal{M}$ 是三角范畴 $\mathcal{T}$ 的一个对直和封闭的子范畴，即 Add $\mathcal{M} = \mathcal{M}$。若 $(\mathcal{M}^{\perp_{>0}}, \mathcal{M}^{\perp_{\leq 0}})$ 是 $\mathcal{T}$ 中的一个 t-结构，则称 $\mathcal{M}$ 为**silting**。若对象 M 属于 $\mathcal{T}$，且 Add(M) 是一个倾斜子范畴，则称 M 为**silting**。若两个 silting 对象 M 和 N 满足 Add M = Add N，则称它们**等价**。

注记 3.5. 若 $\mathcal{T}$ 是紧生成三角范畴，且 M 是 $\mathcal{T}$ 中属于 $\mathcal{T}^{c}$ 的 silting 对象（这样的 M 通常称为紧致倾斜对象），那么 $\mathcal{T}^{c} = \mathsf{thick}(M)$，如 [2, 命题 4.2],following [52] 和 [63] 中所述。

例 3.6. 一个典型的 silting 对象例子出现在微分分次代数 Γ 的导出范畴 D(Γ) 中，其中对所有 $n > 0$， $H^{n}(\Gamma) = 0$。事实上，任何含有一个属于 $\mathcal{T}^{c}$ 的 silting 对象的代数紧生成三角范畴 $\mathcal{T}$ 都具有这种形式（[39]）。

例 3.7. 一个非代数的、具有紧致倾斜对象的紧生成三角范畴的例子是连通环谱上的模的同伦范畴，参见 [68]。

若 $\mathcal{T}$ 是紧生成三角范畴，则还存在一个与 silting 对象 M 相关联的余 t-结构，即 $({}^{\perp}(M^{\perp_{>0}}) \; M^{\perp_{>0}})$，其余心为直和闭包($M$)，参见 [7, 推论 3.10]。

命题 3.8。 设 $\mathcal{T}$ 是一个具有余积的三角范畴，并设 M 是 $\mathcal{T}$ 中的一个 *silting* 对象，其关联的心为 $\mathcal{H}_{M} = M^{\perp_{\neq 0}}$。则有：

（i）与 M关联的 *t*-结构限制为 $M^{\perp_{1}}$上的一个有界 *t*-结构，并且 $M^{\perp_{1}} =$厚子范畴($\mathcal{H}_{M}$)。（ii）若 $\mathcal{T}$ 还是一个紧生成三角范畴，则与 M 关联的余 *t*-结构限制为 ${}^{\perp_{1}}(M^{\perp_{1}})$中的一个余 *t*-结构。

证明。 （i）考虑与 M关联的 t-结构 $(M^{\perp_{>0}}, M^{\perp_{\leq 0}})$，设 $M^{\perp_{1}}$中的 y是一个对象，并考虑截断三角

$$u \to y \to v \to u[1]$$

其中 u属于 $M^{\perp_{>0}} \subseteq M^{\perp_{\gg}}$，且 v属于 $M^{\perp_{\leq 0}} \subseteq M^{\perp_{\ll}}$。由于 u和 y都属于 $M^{\perp_{\gg}}$，因此 v也属于 $M^{\perp_{\gg}}$，所以 v属于 $M^{\perp_{1}}$。反过来，这也表明 u属于 $M^{\perp_{1}}$，因此该 t-结构限制到 $M^{\perp_{1}}$上。要验证该限制是有界的，只需注意，任意 x属于 $M^{\perp_{1}}$，对某个 a和 b，都有 $M^{\perp_{>a}} \cap M^{\perp_{\leq b}}$。此外，注意到 $\mathcal{H}_{M} = M^{\perp_{\neq 0}}$包含于 $M^{\perp_{1}}$，因此 $(M^{\perp_{>0}} \cap M^{\perp_{1}}, \; M^{\perp_{\leq 0}} \cap M^{\perp_{1}})$ 的心为 $\mathcal{H}_{M}$。由于该 t-结构在 $M^{\perp_{1}}$中有界，因此 $M^{\perp_{1}} =$厚子范畴($\mathcal{H}_{M}$)。

(ii) 设 $\mathcal{T}$为紧生成的，并考虑与 M相关联的 $\mathcal{T}$ 中的余 t-结构 ($^{\perp}(M^{\perp_{>0}})$ $M^{\perp_{>0}}$)。我们将证明它限制为 $M^{\perp}$ 中的余 t-结构；根据 (i)，这与 $^{\perp}(\mathcal{H}_M)$ 一致。设 y为 $^{\perp}(\mathcal{H}_M)$ 中的一个对象，并考虑截断三角

$$u \to y \to v \to u[1]$$

其中 u属于 $^{\perp}(M^{\perp_{>0}})$，而 v属于 $M^{\perp_{>0}}$。我们有 $\mathrm{Hom}(M^{\perp_{>0}},\ \mathcal{H}_M[<0]) = 0$，因为 $\mathcal{H}_M[<0]$包含于余心 $M^{\perp_{\leq 0}}$中。特别地，我们有 $M^{\perp_{>0}}$包含于 $^{\perp}\ll(\mathcal{H}_M)$中。由上面的三角可知，$u$属于 $^{\perp}\ll(\mathcal{H}_M)$。此外，我们还有 $\mathrm{Hom}(^{\perp}(M^{\perp_{>0}})\ \mathcal{H}_M[>0]) = 0$，因为 $\mathcal{H}_M[>0]$包含于心 $M^{\perp_{>0}}$中。这意味着 $^{\perp}(M^{\perp_{>0}})$属于 $^{\perp}\gg(\mathcal{H}_M)$。因此，$u$属于 $^{\perp}(\mathcal{H}_M)$，而由截断三角可得 v也满足同样的结论，这表明给定的余 t-结构确实限制为 $^{\perp}(\mathcal{H}_M)$ 上的一个余 t-结构。□

上述陈述特别告诉我们，由 silting 对象 M 生成的远对与其关联的心 $\mathcal{H}_M$ 余生成的远对相一致，而且，

$$M^{\perp} = (^{\perp}\mathcal{H}_M)^{\perp} = \mathsf{thick}(\mathcal{H}_M).$$

众所周知，若 $\mathcal{T}$ 是紧生成的，且 M 是 $\mathcal{T}$ 中的紧致倾斜对象，那么 M 就是有时被称为 $\mathcal{T}^{c}$中的经典 *silting* 对象，也就是说，M具有如下性质：$\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(M,\ M[>0]) = 0$且 $\mathsf{thick}(M) = \mathcal{T}^{c}$。

推论 3.9. 设 $0 \neq \mathcal{T}$ 是具有 $\mathcal{T}^{b} = 0$的紧生成三角范畴。那么 $\mathcal{T}$ 没有紧致倾斜对象。

证明. 若 $\mathcal{T}$存在紧致倾斜对象 M，则由 [32, 定理 1.3] 可知 $\mathcal{H}_M = \text{Mod-End}_{\mathcal{T}}(M)$。然而，由命题 3.8 以及 $\mathcal{T}^{b} = M^{\perp}$这一事实可推出 $0 = \mathcal{T}^{b} = \mathsf{thick}(\mathcal{H}_M)$，这表明 $\mathrm{End}_{\mathcal{T}}(M) = 0$，与 M 是 $0 \neq \mathcal{T}$的生成元这一事实矛盾。□

如果我们对 silting 对象 M 作出更多假设，就能对上文提到的远对作出更多论述。我们在任意三角范畴中引入以下定义。

定义 3.10。若三角范畴 $\mathcal{T}$ 的子范畴 $\mathcal{M}$ 满足 $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{M}^{\perp}$ 且 $\mathsf{thick}(\mathcal{M}) = \mathcal{T}$，则称 $\mathcal{M}$ 是 $\mathcal{T}$ 的**远生成子范畴**。此时，我们称 $\mathcal{T}$ 是**远生成的**。

例3.11。若 $\mathcal{M}$ 是一个具有附加性质 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(\mathcal{M}, \mathcal{M}[\neq 0]) = 0$ 的倾斜子范畴（此类子范畴称为**倾斜子范畴**），则显然 $\mathsf{thick}(\mathcal{M})$ 是远生成的。对于环 R，导出范畴 $\mathsf{D}(R)$ 中的 $\mathcal{M} = \mathsf{Add}(R)$ 就是这种情形，这表明 $\mathsf{K}^{b}(\text{Proj-}R)$ 是远生成的。对于 $\mathsf{K}^{b}(\text{proj-}R)$，以 R 为远生成元时，也同样成立。更一般地，若 $\mathcal{M}$ 是三角范畴 $\mathcal{T}$ 的倾斜子范畴，则 $\mathsf{thick}(\mathcal{M})$ 是远生成的，当且仅当 $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{M}^{\perp}\ll$；此时的远生成元为 $\mathcal{M}$。对于具有有限个非零上同调的非正分次微分分次代数，导出范畴 $\mathsf{D}(\Gamma)$ 中的 $\mathcal{M} = \mathsf{Add}\,\Gamma$ 就是这种情形，这表明 $\mathsf{broad}_{\Sigma}(\Gamma) = \mathsf{thick}(\mathsf{Add}\,\Gamma)$ 是远生成的（见引理2.6）。

稍后我们将看到（参见推论 3.25），如果 Λ 是一个无限全局维数的 Artin 代数，那么 $\mathsf{D}^{b}(\text{mod-}\Lambda)$ 和 $\mathsf{D}_{\mathsf{Sg}}(\Lambda)$ 都不是远生成的。需要注意的是，众所周知，这两个范畴都没有经典 silting 对象（例如，参见 [2, 例2.5(a)] 和 [26,推论 3.3]）。

我们来归纳一下远生成范畴的一些结构性质。

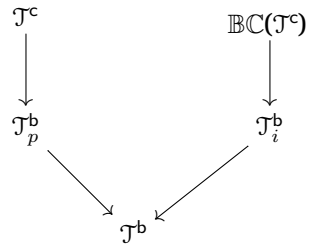
引理 3.12. 设 $\mathcal{T}$ 是一个紧生成三角范畴，并假设 $\mathcal{T}^{c}$ 是远生成的。那么子范畴 $\mathcal{T}^{c}$、$\mathcal{T}_{i}^{b}$ 和 $\mathcal{T}_{p}^{b}$ 都包含于 $\mathcal{T}^{b}$中。

证明。$\mathcal{T}^{c} \subseteq \mathcal{T}^{b}$：设 x 是 $\mathcal{T}^{c}$ 中的一个对象，并设 $\mathcal{M}$ 是远生成 $\mathcal{T}^{c}$的一个子范畴。我们将证明 $\mathcal{T}^{c} \subseteq x^{\perp}$。我们已经看到，$x^{\perp}$是 $\mathcal{T}$ 的一个宽子范畴（因而也是厚子范畴）（参见引理 2.9）。因此，我们只需证明 $\mathcal{M}$ 包含于 $x^{\perp}$，或者等价地，证明 x 属于 $^{\perp}\mathcal{M}$。然而请注意，$^{\perp}\mathcal{M}$ 是一个包含 $\mathcal{M}$ 的厚子范畴，因此它包含 $\mathcal{T}^{c}$。于是，x 属于 $^{\perp}\mathcal{M}$，结论得证。

$\mathcal{T}_{i}^{b} \subseteq \mathcal{T}^{b}$：考虑包含 $\mathcal{T}^{c} \subseteq \mathcal{T}^{b}$ 的右远正交即可得到此结论。
$\mathcal{T}_{i}^{b} \subseteq \mathcal{T}^{b}$：考虑 包含 $\mathcal{T}_{i}^{b} \subseteq \mathcal{T}^{b}$ 的左远正交即可得到此结论，依据引理 3.2。 □

该引理给出了以下关于紧生成三角范畴中各特征厚子范畴包含关系的图表；其中，紧对象的子范畴 $\mathcal{T}^{c}$ 是远生成的 $\mathcal{T}$。在

该图表中，我们将 $\mathcal{T}$ 的由 $\{t^*$生成的厚子范畴记为 $\mathbb{BC}(\mathcal{T}^c)\colon\ t\in\mathcal{T}^c\}$。



如果一个三角范畴 $\mathcal{T}$ 拥有一个紧致倾斜对象，且该对象同时是 $\mathcal{T}^c$的远生成元，那么我们可以将命题 3.8 改进如下。

定理 3.13. 设 $\mathcal{T}$ 是一个紧生成三角范畴，且 M 是一个远生成 $\mathcal{T}^c$的紧致倾斜对象。那么我们有如下远三元组

$$(\mathcal{T}^b_p,\mathcal{T}^b,\mathcal{T}^b_i)=(\mathsf{broad}_{\Sigma}(\mathcal{T}^c),\mathsf{thick}(\mathcal{H}_M),\mathsf{broad}_{\prod}((\mathcal{T}^c)^*))=(\mathsf{thick}(\mathsf{Add}\,M),\mathsf{thick}(\mathcal{H}_M),\mathsf{thick}(\mathsf{Prod}\,M^*))$$

使得由 M 诱导的 *t*-结构限制到 $\mathcal{T}^b$ 上是一个有界 *t*-结构，由 M诱导的余 *t*-结构限制到 $\mathcal{T}^b_p$ 上是一个有界 *co-t*-结构，且由 M^* 诱导的余 *t*-结构限制到 $\mathcal{T}^b_i$ 上是一个有界 *co-t*-结构。

证明. 如例 3.6 所示，由于 M 是 $\mathcal{T}$的一个紧生成元，$\mathcal{T}^c=$ 厚闭包(M)，且由引理 3.2 可知，由 M生成的远对是($\mathcal{T}^b_p,\mathcal{T}^b$)，而由 M^*余生成的远对是($\mathcal{T}^b,\mathcal{T}^b_i$)。由命题 3.8，由于 M 是 silting 对象，我们有 $\mathcal{T}^b=$ 厚闭包($\mathcal{H}_M$)，由 M 诱导的 t-结构限制到 $\mathcal{T}^b$ 上是一个有界 t-结构，且由 M 诱导的余 t-结构限制到 $\mathcal{T}^b_p$上。对偶论证表明，由 M^*诱导的余 t-结构也限制到 $\mathcal{T}^b_i$上。为了证明定理，只需证明对 $\mathcal{T}^b_p$的限制实际上给出一个 co-心为直和闭包 M 的有界 co-t-结构。由对偶性可知，对 $\mathcal{T}^b_i$的限制给出一个 co-心为直积闭包 M^* 的有界 co-t-结构。于是，有界性条件保证 $\mathcal{T}^b_p$ （分别地，$\mathcal{T}^b_i$）与 co-心的厚闭包重合（见 [49, 定理 4.20]）。

固定记号 $\mathcal{U}:={}^{\perp}(M^{\perp_{>0}})$ 和 $\mathcal{V}:=M^{\perp_{>0}}$，并考虑 $\mathcal{T}^b_p$ 中的余 t-结构 $(\mathcal{U}\cap\mathcal{T}^b_p,\mathcal{V}\cap\mathcal{T}^b_p)$。根据引理 3.12，我们有 $\mathcal{T}^b_p\subseteq\mathcal{T}^b=\cup_{n\in\mathbb{Z}}\mathcal{V}[n]$。回想一下，若将由 M 诱导的 t-结构所对应的上同调函子记为 H^0_M，由于该 t-结构在 $\mathcal{T}^b$ 上的限制是有界的，$\mathcal{T}^b$ 中的对象 y 将满足：对于 $\mathbb{Z}$ 中仅有限多个 n，有 $H^{-n}_M(y):=H^0_M(y[n])\neq 0$。因此我们只需证明

$$\mathcal{T}^b_p=\cup_{n\in\mathbb{Z}}(\mathcal{U}\cap\mathcal{T}^b_p)[n]=\cup_{n>0}(\mathcal{U}\cap\mathcal{T}^b_p)[n]$$

（最后一个等式显然是因为 $\mathcal{U}\cap\mathcal{T}^b_p$ 余悬置），也就是说，对于任意 $\mathcal{T}^b_p$ 中的 x，存在一个整数 $N>0$，使得 x 属于 $(\mathcal{U}\cap\mathcal{T}^b_p)[N]={}^{\perp}(\mathcal{V}\cap\mathcal{T}^b_p)[N]={}^{\perp}(\mathcal{V}[N]\cap\mathcal{T}^b_p)$。假设这样的 N 不存在。这意味着，对于每个 $n>0$，都存在 $\mathcal{V}[n]\cap\mathcal{T}^b_p$ 中的一个对象 y_n，使得 $\mathsf{Hom}_{\mathcal{T}}(x,y_n)\neq 0$。如上所述，由于 y_n 属于 $\mathcal{T}^b_p$，因而也属于 $\mathcal{T}^b$，所以对于某个 $k\geq 0$，y_n 属于 $\mathcal{H}_M[n+k]*\cdots*\mathcal{H}_M[n]$。因此，对于每个 $n>0$，都存在 $k_n\geq 0$，使得 $\mathsf{Hom}_{\mathcal{T}}(x,\mathcal{H}_M[n+k_n])\neq 0$。对于每个 $n>0$，取 $\mathcal{H}_M$ 中的一个对象 a_n，使得 $\mathsf{Hom}_{\mathcal{T}}(x,a_n[n+k_n])\neq 0$，并令 $a=\prod_{n>0}a_n$ 属于 $\mathcal{H}_M$。注意，此时我们有 $\mathsf{Hom}_{\mathcal{T}}(x,a[\gg])\neq 0$，这与 x 属于 $\mathcal{T}^b_p={}^{\perp_{\mathbb{Z}}}\mathcal{H}_M$ 矛盾。因此，假设的 N 必定存在，从而证明该余 t-结构确实是有界的。□

请注意，微分分次代数的导出范畴中的某些特征子范畴，其行为与环上模的导出范畴中的情形完全相同。

注记 3.14. 设 Γ 是一个微分分次 k-代数，并考虑其导出范畴 $\mathcal{T}=\mathsf{D}(\Gamma)$。由引理 2.9(v)，由于 $H^0(-)\cong\mathsf{Hom}_{\mathsf{D}(\Gamma)}(\Gamma,-)$，我们可以立即看出：

(i) $\mathcal{T}^+=\{x\in\mathsf{D}(\Gamma):\ H^n(x)=0,\ n\ll 0\}$;

(ii) $\mathcal{T}^-=\{x\in\mathsf{D}(\Gamma):\ H^n(x)=0,\ n\gg 0\}$;

(iii) $\mathcal{T}^b=\{x\in\mathsf{D}(\Gamma):\ H^n(x)=0,\ |n|\gg 0\}$.

注记 3.15. Neeman 在 [56] 中为上述例子提供了另一种构造。若 $\mathcal{T}$ 是一个三角范畴，且 $\tau=(\mathcal{T}^{\leq 0},\ \mathcal{T}^{\geq 0})$ 是 $\mathcal{T}$ 中的一个 t-结构，那么我们可以考虑 $\mathcal{T}$ 的以下三角子范畴：

$$\mathcal{T}^{-,\tau}:=\bigcup_{n>0}\mathcal{T}^{\leq n},\quad \mathcal{T}^{+,\tau}:=\bigcup_{n>0}\mathcal{T}^{\geq -n}\ \text{and}\ \mathcal{T}^{b,\tau}:=\mathcal{T}^{-,\tau}\cap\mathcal{T}^{+,\tau}.$$

如果 $\mathcal{T}$ 是一个具有单个紧生成元 G的三角范畴，τ 的一种特定选择是由 G生成的 t-结构。当 $\mathcal{T}$ 是弱可逼近的，即由 G 生成的 t-结构满足若干“可逼近性条件”（详情见 [56,定义 0.25] ）时，上述定义的子范畴是内在的

且独立于所选生成元。由 [20, 推论 3.10] 可知，上述定义的子范畴 $\mathcal{T}^{-}$、$\mathcal{T}^{-}_{\tau}$、$\mathcal{T}^{+}$、$\mathcal{T}^{+}_{\tau}$以及 $\mathcal{T}^{b}$、$\mathcal{T}^{b}_{\tau}$，分别与定义 3.1 中的 $\mathcal{T}^{-}$、$\mathcal{T}^{+}$ 和 $\mathcal{T}^{b}$ 相同。

我们以将定理 3.13 应用于非正微分分次代数 Γ 的导出范畴这一情形，结束本小节；也就是说，Γ 是一个 dg 代数，其中 $H^{n}(\Gamma) = \mathrm{Hom}_{\mathsf{D}(\Gamma)}(\Gamma, \Gamma[n]) = 0$ 对所有 $n > 0$ 都成立。这类 dg 代数通常称为**连通的**。

推论 *3.16.* 设 Γ 是交换环 k 上的连通微分分次代数，且 $H^{n}(\Gamma) \neq 0$ 仅对有限多个整数 n 成立。令 $\mathcal{T}$ 为 $D(\Gamma)$，则 $\mathcal{T}^{b}_{p} = \mathit{broad}_{\Sigma}(\mathit{per}(\Gamma)) = \mathit{thick}(\text{直和闭包}\,\Gamma)$，且 $\mathcal{T}^{b}_{i} = \mathit{broad}_{\Pi}(\mathit{per}(\Gamma)^{*}) = \mathit{thick}(\text{直积闭包}\,\Gamma^{*})$。

证明。这立即由定理 3.13 得出；注意到在非零上同调仅有有限多个这一假设下，Γ 是 $\mathrm{per}(\Gamma)$ 的远生成元。□

3.3. **示例：Artin 代数的同伦范畴与大奇异范畴**。我们将考察 Artin 代数 Λ 的范畴 $\mathsf{K}(\mathrm{Inj}\text{-}\Lambda)$ 和 $\mathsf{K}(\mathrm{Proj}\text{-}\Lambda)$。所考虑的大奇异范畴子范畴将是由内射 Λ-模的无环复形构成的 $\mathsf{K}_{\mathrm{ac}}(\mathrm{Inj}\text{-}\Lambda)$。我们将需要以下关于 $\mathsf{K}(\mathrm{Inj}\text{-}\Lambda)$ 的陈述。

引理 3.17. 设 A 为右诺特环，并考虑再拼接 (2.1)。以下结论成立 $d.$

(i) $K^{+}(\mathit{Inj}\text{-}A) \subseteq \mathit{Im}(Q_{\rho})$。（*ii*）对于 $\mathit{Im}(Q_{\rho})$ 中的任意 x，$\mathit{Hom}_{\mathsf{K}(\mathrm{Inj}\text{-}A)}(-, x) \cong \mathit{Hom}_{\mathsf{D}(A)}(Q(-), Q(x))$。（*iii*）对于任意 $x \in K^{b}(\mathit{proj}\text{-}A)$，$Q_{\lambda}(x) = Q_{\rho}(x)$。（*iv*）对于任意对象族 $(x_{i})_{i\in I}$，其余积属于 $D^{+}(A)$，有 $Q_{\rho}(\coprod_{i\in I} x_{i}) \cong \coprod_{i\in I} Q_{\rho}(x_{i})$.

证明。(i) 是相当经典的（见 [43]），而 (ii) 直接由伴随关系得出。

(iii) 注意，由于 Q 保持余积，Q_{λ} 保持紧对象，因此，对于任意 x 属于 $\mathsf{D}(A)^{c}$ 的对象，$\mathsf{Q}_{\lambda}(x)$ 都属于 $\mathrm{Im}(\mathsf{Q}_{\rho})$。因此，伴随对 $(\mathsf{Q},\mathsf{Q}_{\rho})$ 的单位作用于 $\mathsf{Q}_{\lambda}(x)$ 后是一个同构，从而说明 $\mathsf{Q}_{\lambda}(x) \cong \mathsf{Q}_{\rho}(x)$。

(iv) 首先注意，Q_{ρ} 限制为 $\mathsf{D}^{+}(A)$ 与 $\mathsf{K}^{+}(\mathrm{Inj}\text{-}A)$ 之间的范畴等价。现在，由于族 $(x_{i})_{i\in.I}$ 在 $\mathsf{D}^{+}(A)$ 中的余积存在，且 A 是右诺特的，我们便可得出 $\mathsf{Q}_{\rho}(\coprod_{i\in I} x_{i}) \cong \coprod_{i\in I} \mathsf{Q}_{\rho}(x_{i})$。□

我们将计算 Artin 代数 Λ 对应的 $\mathsf{K}(\mathrm{Inj}\text{-}\Lambda)$ 和 $\mathsf{K}_{\mathrm{ac}}(\mathrm{Inj}\text{-}\Lambda)$ 的特征子范畴。以下引理对我们的计算十分重要。

引理 3.18. 若 Λ 是 *Artin* 代数，则对于 $\{\perp_{\gg}, \perp_{\ll}, \curvearrowright\}$ 中任意符号 ?，在 $\mathsf{K}(\mathrm{Inj}\text{-}\Lambda$ 中有 $),$

$$\mathsf{Q}_{\rho}(\mathrm{mod}\text{-}\Lambda)^{?} = \mathsf{Q}_{\rho}(\mathrm{Mod}\text{-}\Lambda)^{?}. \qquad (*)$$

证明。由推论 2.8，$\mathrm{broad}_{\Sigma}(\mathsf{D}^{b}(\mathrm{mod}\text{-}\Lambda)) = \mathsf{D}^{b}(\mathrm{Mod}\text{-}\Lambda)$，且 Q_{ρ} 保持 $\mathsf{D}^{b}(\mathrm{Mod}\text{-}\Lambda)$ 中存在的所有余积，因此有

$$\mathrm{broad}_{\Sigma}(\mathsf{Q}_{\rho}(\mathrm{mod}\text{-}\Lambda)) = \mathsf{Q}_{\rho}(\mathrm{broad}_{\Sigma}(\mathrm{mod}\text{-}\Lambda)) = \mathsf{Q}_{\rho}(\mathsf{D}^{b}(\mathrm{Mod}\text{-}\Lambda)) = \mathrm{thick}(\mathsf{Q}_{\rho}(\mathrm{Mod}\text{-}\Lambda))$$

By L由引理 2.9(v)(b)可得，对于 $\{\perp_{\ll}, \perp_{\gg}, \curvearrowright\}$ 中任意符号 ?，$\mathsf{Q}_{\rho}(\mathrm{mod}\text{-}\Lambda)^{?} = \mathsf{Q}_{\rho}(\mathrm{Mod}\text{-}\Lambda)^{?}$. □

注 3.19. 请注意，对于任意右诺特环 A，如果条件 $(*)$ 对 A 成立，那么对于 $\{\perp_{\ll}, \perp_{\gg}, \curvearrowright\}$ 中任意符号 ?，$(\mathrm{mod}\text{-}A)^{?} = (\mathrm{Mod}\text{-}A)^{?}$。事实上，利用引理 2.11(i)，令 $\mathsf{F} = \mathsf{Q}$、$\mathsf{G} = \mathsf{Q}_{\rho}$，$\mathcal{Y} = \mathrm{mod}\text{-}\Lambda$，并令 $\mathcal{X} = \mathsf{Q}_{\rho}(\mathrm{mod}\text{-}A)$，可得 $\mathsf{Q}_{\rho}((\mathrm{mod}\text{-}A)^{?}) \subseteq \mathsf{Q}_{\rho}(\mathrm{mod}\text{-}A)^{?}$。后者等于 $\mathsf{Q}_{\rho}(\mathrm{Mod}\text{-}A)^{?}$。现在，给定 $(\mathrm{mod}\text{-}A)^{?}$ 中的 y，有 $\mathsf{Q}_{\rho}(y)$ 属于 $\mathsf{Q}_{\rho}(\mathrm{Mod}\text{-}A)^{?}$，因此利用 Q_{ρ} 完全忠实这一事实，可得 y 属于 $(\mathrm{Mod}\text{-}A)^{?}$。另一包含关系显然。注意，对于 Artin 代数 Λ，我们已由例 2.10 知道 $(\mathrm{mod}\text{-}\Lambda)^{?} = (\mathrm{Mod}\text{-}\Lambda)^{?}$。

注 3.20. 例 2.10 中的等式对于更一般的环并不成立，因此，根据注 3.19，引理 3.18 中的等式也不会成立。事实上，考虑一个环 R，其中每个有限生成模都具有有限投射维数，且 $\mathrm{gl.dim}\ R = \infty$。Nagata [50]，给出了这样一个环的具体例子；事实上，它是交换诺特环。根据有限生成R-模具有有限投射维数这一假设，可知

$$(\mathrm{mod}\text{-}R)^{\curvearrowright} \supseteq \mathrm{Mod}\text{-}R$$

在 $\mathsf{D}(R)$ 中。然而，由于在 $\mathsf{D}(R)$ 中我们有等式

$$(\mathrm{Mod}\text{-}R)^{\curvearrowright} = \mathsf{D}^{b}(\mathrm{Mod}\text{-}R)^{\curvearrowright} = \mathsf{K}^{b}(\mathrm{Inj}\text{-}R),$$

子范畴 $(\mathrm{Mod}\text{-}R)^{\curvearrowright}$不能包含 $\mathrm{Mod}\text{-}R$，否则就意味着每个 R-模都具有有限内射维数，这与假设矛盾。换言之，我们有 $(\mathsf{D}^{b}(\mathrm{mod}\text{-}R))^{\curvearrowright} \neq (\mathsf{D}^{b}(\mathrm{Mod}\text{-}R))^{\curvearrowright}$。特别地，这里有 $\mathrm{broad}_{\Sigma}(\mathrm{mod}\text{-}R) \neq \mathsf{D}^{b}(\mathrm{Mod}\text{-}R)$，这也表明推论 2.8 对于 R 不成立。

命题 3.21。 下表包含K(内射-Λ)和K_{ac}(内射-Λ)的一些重要子范畴，其中Λ 是一个 *Artin* 代数。

$\mathcal{T}$	K(Inj-Λ)	K_{ac}(Inj-Λ)
$\mathcal{T}^{\mathsf{c}}$	D^{b}(mod-Λ)	$\mathsf{D}^{\mathsf{sg}}(\Lambda)$
$\mathcal{T}^{-}$		$\mathsf{K}^{-}_{\mathsf{ac}}$(Inj-$\Lambda$)
$\mathcal{T}^{+}$	K^{+}(Inj-Λ)	$\{0\}$
$\mathcal{T}^{\mathsf{b}}$	K^{b}(Inj-Λ)	$\{0\}$
$\mathcal{T}^{-}_{p}$	$\{x\colon\ H^{n}(x)=0$ 对于 $n\gg 0\}$	K_{ac}(Inj-Λ)
$\mathcal{T}^{+}_{p}$	$\{x\colon H^{n}(x)=0$ 对于 $n\ll 0\}$	K_{ac}(Inj-Λ)
$\mathcal{T}^{\mathsf{b}}_{p}$	$\{x\colon \#\{n\colon\ H^{n}(x)\neq 0\}<\infty\}$	K_{ac}(Inj-Λ)
$\mathcal{T}^{-}_{i}$	见引理 3.26	K_{ac}(Inj-Λ)
$\mathcal{T}^{+}_{i}$	见引理 3.26	K_{ac}(Inj-Λ)
$\mathcal{T}^{\mathsf{b}}_{i}$	见引理 3.26	K_{ac}(内射-Λ)

证明。 我们用 $\mathcal{T}$ 表示 K(内射-Λ)，用 $\mathcal{T}_{\mathsf{ac}}$ 表示 K_{ac}(内射-Λ)。

- $\mathcal{T}^{+}{}_{\text{无环}}=\{0\}$。设 $x=(x^{i},\ d^{i})_{i\in\mathbb{Z}}$ 是 $\mathcal{T}_{\text{无环}}$中的一个复形。那么我们有

$$\mathsf{Hom}_{\mathcal{T}_{\mathsf{ac}}}(\mathsf{I}_{\lambda}\mathsf{Q}_{\rho}(\text{mod-}\Lambda),x[\ll])\cong\mathsf{Hom}_{\mathcal{T}}(\mathsf{Q}_{\rho}(\text{mod-}\Lambda),\mathsf{I}(x)[\ll]).$$

  由于 thick($\mathsf{I}_{\lambda}\mathsf{Q}_{\rho}$(mod-$\Lambda$)) $=\mathcal{T}^{\mathsf{c}}_{\mathsf{ac}}$，我们看到， x 属于 $\mathcal{T}^{+}_{\mathsf{ac}}$ 当且仅当 I(x) 属于 Q_{ρ}(mod-Λ)$^{\perp_{\ll}}$；根据引理 3.18，这与 Q_{ρ}(Mod-Λ)$^{\perp_{\ll}}$ 一致。因此，假设 x 属于 $\mathcal{T}^{+}_{\mathsf{ac}}$，因而 I($x$) 属于$\mathcal{T}^{+}$。为简便起见，我们用 x 代替 I(x)，并将 I 视为子范畴 $\mathcal{T}_{\mathsf{ac}}$ 到 $\mathcal{T}$ 的包含。根据 [43, 引理 2.1], ，我们有一个同构

$$\mathsf{Hom}_{\mathcal{T}}(\mathsf{Q}_{\rho}(\oplus_{j}\mathsf{Ker}(d^{j})),x[n])\cong\mathsf{Hom}_{\mathsf{K}(\Lambda)}(\oplus_{j}\mathsf{Ker}(d^{j}),x[n]),$$

  因此，由于 x属于 $\mathcal{T}^{+}$，存在 N属于 $\mathbb{Z}$，使得对所有 j和 $n\leq N$，都有 $\mathsf{Hom}^{\mathsf{K}(\Lambda)}(\mathsf{Ker}(d^{j})\ x[n])=0$。特别地，对所有 $n\leq N$，我们有 $\mathsf{Hom}^{\mathsf{K}(\Lambda)}(\mathsf{Ker}(d^{n})\ x[n])=0$。对于这样的整数 $n\leq N$，考虑由包含 $f^{n}\colon\mathsf{Ker}(d^{n})\to x^{n}$诱导的复形态射 $f\colon\mathsf{Ker}(d^{n})\to x[n]$。由于 f是零伦的，存在 $h\colon\mathsf{Ker}(d^{n})\to x^{n-1}$，使得 $f^{n}=d^{n-1}\circ h$。由于 x是无环的，我们有 $\mathsf{Ker}(d^{n})\cong\mathsf{Im}(d^{n-1})$，因此 d^{n-1}可分解为复合 $f^{n}\circ i^{n}$，其中 $i^{n}\colon x^{n-1}\to\mathsf{Ker}(d^{n})$。于是，我们有$f^{n}=d^{n-1}\circ h=f^{n}\circ i^{n}\circ h$；又由于 f^{n}是单态射，得到 $i^{n}\circ h\simeq\mathsf{Id}_{\mathsf{Ker}(d^{n})}$。特别地，可知对所有 $n\leq N$，$\mathsf{Ker}(d^{n}_{x})$ 都是内射对象，这表明 x 是零伦的。

- $\mathcal{T}^{-}{}_{\mathsf{ac}}$(Inj-$\Lambda$) =$\mathsf{K}^{-}{}_{\mathsf{ac}}$(Inj-$\Lambda$)。逐字遵循上述论证可知，给定一个复形 x in $\mathcal{T}^{-}{}_{\mathsf{ac}}$，它必然在足够大的次数上分裂，从而推出 $\mathcal{T}^{-}{}_{\mathsf{ac}}$ $\subseteq\mathsf{K}^{-}{}_{\mathsf{ac}}$(Inj-$\Lambda$)。对于反向包含，注意到给定 $x$in $\mathsf{K}^{-}{}_{\mathsf{ac}}$(Inj-$\Lambda$)，I($x$) 属于 K^{-}(Inj-Λ)，因此属于 Q_{ρ}(mod-Λ)$^{\perp_{\gg}}$，正如所要求的。

- $\mathcal{T}_{\mathsf{bac}}=\{0\}$ 源于以下事实： $\mathcal{T}_{\mathsf{bac}}\subseteq\mathcal{T}^{+}{}_{\mathsf{ac}}$。然后，通过考虑适当的远距正交子范畴可知，对于 $\{+,-,\mathsf{b}\}$ 中的任意 ? 以及 $\{p,i\}$ 中的任意 α，$(\mathcal{T}_{\mathsf{ac}})_{?\ \alpha}=\mathsf{K}_{\mathsf{ac}}$(Inj-$\Lambda$)。

- $\mathcal{T}^{+}=\mathsf{K}^{+}$(Inj-$\Lambda$)。首先注意，$\mathsf{K}^{+}$(Inj-$\Lambda$) $\subseteq\mathcal{T}^{+}$，因为

$$\mathsf{Hom}_{\mathcal{T}}(\mathsf{Q}_{\rho}(\text{mod-}\Lambda),\mathsf{Q}_{\rho}(x)[\ll])\cong\mathsf{Hom}_{\mathsf{D}(\Lambda)}(\text{mod-}\Lambda,x[\ll])$$

  并且 (mod-Λ)$^{\perp_{\ll}}$ 属于 D(Λ)，其中包含 K^{+}(Inj-Λ)。现在令 x 属于 $\mathcal{T}^{+}$，并考虑以下三角

$$\mathsf{I}\mathsf{I}_{\rho}(x)\to x\to\mathsf{Q}_{\rho}\mathsf{Q}(x)\to\mathsf{I}\mathsf{I}_{\rho}(x)[1].$$

  由于函子 Q_{λ} 保持紧对象，对伴随对 (Q_{λ}, Q) 应用引理 2.11，可得 Q(x) 属于 $\mathsf{D}^{+}(\Lambda)$。因此，Q_{ρ}Q(x) 属于 K^{+}(Inj-Λ) $\subseteq\mathcal{T}^{+}$，并且由上述三角可得 II$_{\rho}$(x) 属于 $\mathcal{T}^{+}$。我们有

$$\mathsf{Hom}_{\mathcal{T}_{\mathsf{ac}}}(\mathsf{I}_{\lambda}\mathsf{Q}_{\rho}(\text{mod-}\Lambda),\mathsf{I}_{\rho}(x)[\ll])=\mathsf{Hom}_{\mathcal{T}}(\mathsf{Q}_{\rho}(\text{mod-}\Lambda),\mathsf{I}\mathsf{I}_{\rho}(x)[\ll])$$

  由此我们推得 I$_{\rho}$(x) 属于 $\mathcal{T}^{+}_{\mathsf{ac}}=\{0\}$。因此，我们有 $x\cong\mathsf{Q}_{\rho}$Q(x)，而它随后属于 K^{+}(Inj-Λ)。

- $\mathcal{T}_{\mathsf{b}}=\mathsf{K}_{\mathsf{b}}$(Inj-$\Lambda$)。由于 $\mathcal{T}_{\mathsf{b}}$ 是 $\prod$-广的，K_{b}(Inj-Λ) $=$ 对于 Mod-Λ 的内射余生成元 E 而言是 $\Pi(E)$-广的；又由于 E 属于 $\mathcal{T}_{\mathsf{b}}$，我们得到 K_{b}(Inj-Λ) 属于 $\mathcal{T}_{\mathsf{b}}$。对于反向包含，令 x 为$\mathcal{T}_{\mathsf{b}}\subseteq\mathcal{T}^{+}=\mathsf{K}^{+}$(Inj-$\Lambda$) 中的一个对象。那么我们有 $x\cong\mathsf{Q}_{\rho}$ Q(x)。由引理 3.18 可得

$$\mathcal{T}^{\mathsf{b}}=\mathsf{Q}_{\rho}(\text{mod-}\Lambda)^{\perp\perp}=\mathsf{Q}_{\rho}(\text{Mod-}\Lambda)^{\perp\perp}.$$

  现在，对于任意 $y\in$ Mod-Λ，我们有

$$\mathsf{Hom}_{\mathcal{T}}(\mathsf{Q}_{\rho}(y),x[n])\cong\mathsf{Hom}_{\mathcal{T}}(\mathsf{Q}_{\rho}(y),\mathsf{Q}_{\rho}\mathsf{Q}(x)[n])\cong\mathsf{Hom}_{\mathsf{D}(\Lambda)}(y,\mathsf{Q}(x)[n])$$

  这表明，如果 x 属于 $\mathcal{T}^{\mathsf{b}}$，那么 Q(x) 就属于 D(Λ) 的子范畴 (Mod-Λ)$^{\perp\perp}$，即 Q(x) 属于 K^{b}(Inj-Λ)，因此，作为 $\mathcal{T}$ 的一个子范畴， $x\cong\mathsf{Q}_{\rho}$Q(x) 属于 K^{b}(Inj-Λ)。

- $\mathcal{T}_p^- = \{x\colon\ H^n(x) = 0$ 对于 $n \gg 0\}$。对于 K(Inj-Λ) 中任意的 x，以及 $\mathcal{T}_b$ 中任意的 $y \cong Q_\rho Q(y)$，我们有

$$\mathsf{Hom}_{\mathcal{T}}(x, y[n]) \cong \mathsf{Hom}_{\mathcal{T}}(x, \mathsf{Q}_\rho\mathsf{Q}(y)[n]) \cong \mathsf{Hom}_{\mathsf{D}(\Lambda)}(\mathsf{Q}(x), \mathsf{Q}(y)[n]).$$

因此，x 属于 $\mathcal{T}_p^-$，当且仅当 Q(x) 属于 D(Λ) 中的 $^{\perp}\ll$(K^b(Inj-Λ))。然而，若 E 是 Mod-Λ 的一个内射余生成元，我们知道，H^{-n}(Q(x)) $= 0$ 当且仅当 Hom$^{D(\Lambda)}$(Q(x) $E[n]$) $= 0$。因此，我们得出结论：x 属于 $\mathcal{T}_p^-$，当且仅当对于所有 $n \ll 0$，H^{-n}(Q(x)) $= 0$，即 Q(x) 属于 D$^-$(Λ)。这意味着，x 属于 K$_{ac}$(Inj-Λ) $*$Q$_\rho$(D$^-$(Λ))，也就是说，$\mathcal{T}_p^-$由 K(Inj-Λ) 中上有界上同调的复形组成。

- $\mathcal{T}_p^+ = \{x\colon\ H^n(x) = 0$ 对于 $n \ll 0\}$。由与上文相同的论证可知，x 属于 $\mathcal{T}_p^+$，当且仅当 Q(x) 属于 D(Λ) 中的 $^{\perp}\gg$(K$_b$(Inj-Λ))，这与具有下有界上同调的复形所构成的子范畴相同。

- $\mathcal{T}_{b_p} = \{x\colon \#\{n\colon\ H^n(x) \neq 0\} < \infty\}$。根据上文相同的论证可知，$x$ 属于 $\mathcal{T}_{bp}$，当且仅当 Q(x) 属于 $^{\perp_\cup}$K$_b$(Inj-Λ) $=$ D$_b$(Λ) 在 D(Λ) 中。这意味着 $\mathcal{T}_{bp}$ 与 K$_{ac}$(Inj-Λ) $*$ Q$_\rho$(D$_b$(Λ)) 重合，即与 K(Inj-Λ) 中仅有有限个非零上同调的复形所构成的子范畴重合。□

上述命题直接推出以下推论。请注意，正如引理 3.12 之前的段落所指出的，这些推论中的第一个早已为人所知（参见 [26, 推论 3.3]）。

C推论 3.22。对于 *Artin* 代数 Λ，奇异范畴 D^{sg}(Λ) 没有 *silting* 对象 t.

证明。这由推论 3.9 得出，因为 D^{sg}(Λ) 是 $\mathcal{T}$ =K$_{ac}$(Inj-Λ) 和 $\mathcal{T}^b = 0$ 中紧对象构成的子范畴。□

推论 3.23。对于 *Artin* 代数 Λ，K$_{ac}$(Inj-Λ)（并且因此，D^{sg}(Λ）在K(Inj-Λ)中是内在确定的，即它不依赖于 Λ。

证明。考虑 $\mathcal{T}$ = K(Inj-Λ)。我们注意到，(K$_{ac}$(Inj-Λ),Q$_\rho$(D^b(Mod-Λ))) 是 $\mathcal{T}_p^b$ 中的一个稳定 t-结构；由引理 3.18 的证明可知，Q$_\rho$(D^b(Mod-Λ)) =broad$_\Sigma$($\mathcal{T}^c$)。这意味着 K$_{ac}$(Inj-Λ) 是 $\mathcal{T}_p^b$ 的一个余局部化，因此等价于 Verdier 商 $\mathcal{T}_p^b$/broad$_\Sigma$($\mathcal{T}^c$)。最后注意，D^{sg}(Λ) 是后者中紧对象构成的子范畴，即 D^{sg}(Λ) =($\mathcal{T}_p^b$/broad$_\Sigma$($\mathcal{T}^c$))^c。□

注 3.24。现在注意到，命题 3.21 中的计算并不适用于每个诺特环。设 R 如注 3.20 中所述。于是我们断言，对于 $\mathcal{T}$ =K(Inj-R)，有

$$\mathcal{T}^b \neq \mathsf{K}^b(\mathsf{Inj}\text{-}R).$$

事实上，我们有 K^b(Inj-R) = (Q$_\rho$(Mod-R))$^{\perp_\cup}$（见命题 3.21 的证明），因此，如果 $\mathcal{T}^b$ = (Q$_\rho$(mod-R))$^{\perp_\cup}$ = (Q$_\rho$(Mod-R))$^{\perp_\cup}$成立，那么我们将得到 (mod-R)$^{\perp_\cup}$ =(Mod-R)$^{\perp_\cup}$在 D(R) 中——而事实并非如此。

正如前文所承诺的，命题 3.21 中的计算使我们能够观察到，对于整体维数无限的 Artin 代数，D^b(mod-Λ) 和 D^{sg}(Λ) 都不是远生成的。

推论 3.25。设 Λ 是一个整体维数无限的 *Artin* 代数。那么 D^b(mod-Λ) 和 D^{sg}(Λ) 都不是远生成的。

证明。由引理 3.12 和命题 3.21 可知这一点，只需注意到，这两个三角范畴都是某个紧生成三角范畴中的紧对象（即分别对应于 $\mathcal{T}$ =K(Inj-Λ) 和 $\mathcal{T}$ =K$_{ac}$(Inj-Λ)），而包含映射 $\mathcal{T}^c \subseteq \mathcal{T}^b$ 未得到验证。注意，D^{sg}(Λ) 是幂等完备的（见 [25,推论 2.4]），因此确实与 K$_{ac}$(Inj-Λ) 中的紧对象重合。□

下一个引理在附加条件下补充了前面关于阿廷代数的表格。回忆一下，Λ 是 **岩永-戈伦斯坦**的，当且仅当 K^b(Proj-Λ) 和 K^b(Inj-Λ) 作为 D(Λ) 的子范畴相重合（详情见 [31] ）。

引理 3.26。若 Λ 是岩永-戈伦斯坦阿廷代数，则对于 $\mathcal{T}$ = K(Inj-Λ) 以及 $\{-, +, \mathsf{b}\}$ 中的 ?，有

$$\mathcal{T}_i^? = \mathsf{K}_{\mathsf{ac}}(\mathsf{Inj}\text{-}\Lambda) * \mathsf{Q}_\rho(\mathsf{D}^?(\Lambda)).$$

证明。设 e 是一个内射 Λ-模。我们首先证明，若 x 是无环的，则 Hom$^{K(Inj\text{-}\Lambda)}$(e, x) $= 0$。事实上，由于 Λ 是诺特的，e 是不可分解 Λ内射模的直和。因此，只需对 e 不可分解内射模证明这一断言。由于 Λ 是 Artin 代数，e 是有限表示的，因此属于$\mathcal{T}^c$ =Q$_\rho$(D^b(mod-Λ))。由于 Λ 是岩永-戈伦斯坦的，Q(e) 是一个有限表示的 Λ模，且具有有限投射维数，因此属于 K^b(proj-Λ)。于是，由引理 3.17 可得 $e \cong \mathsf{Q}_\lambda\mathsf{Q}(e)$。将 x =I(x) 记作一个由内射对象组成的无环复形。那么，如所断言的，我们有

$$\mathsf{Hom}_{\mathsf{K}(\mathsf{Inj}\text{-}\Lambda)}(e, x) = \mathsf{Hom}_{\mathsf{K}(\mathsf{Inj}\text{-}\Lambda)}(\mathsf{Q}_\lambda\mathsf{Q}(e), \mathsf{I}(x)) = \mathsf{Hom}_{\mathsf{K}_{\mathsf{ac}}(\mathsf{Inj}\text{-}\Lambda)}(\mathsf{I}_\lambda\mathsf{Q}_\lambda\mathsf{Q}(e), x) = 0.$$

现在，由于 K^b(Inj-Λ) = 广$_\Sigma$(Λ*)，于是 ($\mathcal{T}^b$)$^?$ =(Λ*)$^?$，显然，对于每个 ? $\in\{\perp_\ll, \perp_\gg, ^{\perp_\cup}\}$，我们得到 K$_{ac}$(Inj-Λ) $\subseteq$($\mathcal{T}^b$)$^?$。对于 ($\mathcal{T}^b$)$^?$ 中的一个对象 x，考虑三角

$$\mathsf{II}_\rho(x) \to x \to \mathsf{Q}_\rho\mathsf{Q}(x) \to \mathsf{II}_\rho(x)[1].$$

由上可知，$\mathrm{II}_\rho(x)$ 属于 $(\mathcal{T}^{\mathrm{b}})^?$，因此 $\mathrm{Q}\rho\mathrm{Q}(x)$ 属于 $(\mathcal{T}^{\mathrm{b}})^?$。给定 K^{b}(Inj-Λ) 中的 y，我们有

$$\mathsf{Hom}_{\mathsf{D}(\Lambda)}(\mathrm{Q}(y),\mathrm{Q}(x)[n]) \cong \mathsf{Hom}_{\mathsf{K}(\mathsf{Inj}\text{-}\Lambda)}(y,\mathrm{Q}_\rho\mathrm{Q}(x)[n]) = 0$$

对于 n的适当取值。换言之，$\mathrm{Q}(x)$属于相应的远端正交子范畴 K^{b}(Inj-Λ)$^?$，位于 $\mathsf{D}(\Lambda)$ 中。然而，由于假设 Λ 是岩永-戈伦斯坦的，我们有 K^{b}(Inj-Λ) = K^{b}(Proj-Λ)，因此，当 x 是 $\mathcal{T}_i^-$ 中的一个对象时，$\mathrm{Q}(x)$属于 $\mathsf{D}^-(\Lambda)$；当 x 是 $\mathcal{T}_i^+$ 中的一个对象时，$\mathrm{Q}(x)$属于 $\mathsf{D}^+(\Lambda)$；当 x 是 $\mathcal{T}_i^{\mathrm{b}}$中的一个对象时，$\mathrm{Q}(x)$属于 $\mathsf{D}^{\mathrm{b}}(\Lambda)$。□

上文计算出的特征子范畴可以在 Artin 代数 Λ的 K(Proj-Λ) 中重新诠释。回顾一下，对于 Artin 代数，Proj-Λ 与 Inj-Λ 之间存在一个众所周知的等价，该等价可扩展为 K(Proj-Λ) 与 K(Inj-Λ) 之间的等价，由与 Λ^* 作张量积给出。这称为中山函子，而 Λ^* 则扮演着称为对偶化复形的角色。为明确说明这种转换，我们先考虑一个诺特环 R，它具有一个对偶化复形 D_R，由 [33], 给出一个等价

$$T := - \otimes_R D_R \colon \mathsf{K}(\mathsf{Proj}\text{-}R) \longrightarrow \mathsf{K}(\mathsf{Inj}\text{-}R). \tag{3.1}$$

T的一个准逆由 $\rho \circ \mathrm{Hom}_R(D_R,\ -)$ 给出，其中函子 ρ 表示包含函子 K(Proj-R) $\hookrightarrow$$\mathsf{K}$(Mod-$R$) 的右伴随（其存在性由 [36, 定理 2.4] 得出）。

引理 3.27. 设 R 是一个诺特环，且存在对偶化复形 D_R。以下结论成立。

(i) T 限制为等价 K^+*(Proj-*R*)* $\simeq$ K^+*(Inj-*R*)*。*(ii)* T 限制为等价 K^{b}*(Proj-*R*)* $\simeq$ K^{b}*(Inj-*R*)*。*(iii)* 对于属于 *K(Proj-*R*)* 的复形 x，对于每个 $P \in$ *Proj-*R，都有 H^n*(Hom*$_R$*(*x, P*))* $= 0$，当且仅当 H^n*(*$T(x)$*))* $= 0$ 对 $n \gg 0$ 成立。*(iv)* 对于属于 *K(Proj-*R*)* 的复形 x，对于每个 $P \in$ *Proj-*R，都有 H^n*(Hom*$_R$*(*x, P*))* $= 0$，当且仅当 H^n*(*$T(x)$*))* $= 0$ 对 $n \ll 0$ 成立。*(v)* 对于属于 *K(Proj-*R*)* 的复形 x，对于每个 $P \in$ *Proj-*R，都有 H^n*(Hom*$_R$*(*x, P*))* $= 0$，当且仅当 H^n*(*$T(x)$*))* $= 0$ 对 $|n| \gg 0$ 成立。

证明。(i) 注意，对于投射的 R-模 P，模 $P \otimes_R D_R$ 是内射的。由此可知，函子 T 将 K^+(Proj-R) 映到 K^+(Inj-R)。现在设 x 是 K^+(Inj-R) 中的一个对象。则复形 $\mathrm{Hom}_R(D_R,\ x)$ 由平坦模组成（例如参见 [58, 引理 2.13]）。由于平坦模具有有限投射维数（参见 [37]），可得 $\rho(\mathrm{Hom}_R(D_R,\ x))$ 是有界于下方的（参见 [58, 命题 2.5]）。(ii) 这与 (i) 类似，另见 [58, 引理 2.14]。

(iii) 令 $\mathcal{V}$ 表示 K(Inj-R) 的子范畴，它由在充分大的次数上无环的复形组成。于是我们有

$$\mathcal{V} = {}^{\perp_\ll}(\mathsf{K}^{\mathrm{b}}(\mathsf{Inj}\text{-}R)) \simeq {}^{\perp_\ll}(\mathsf{K}^{\mathrm{b}}(\mathsf{Proj}\text{-}R)) = {}^{\perp_\ll}(\mathsf{Proj}\text{-}R),$$

其中，第一个等式由命题 3.21 的证明得出（注意，要得到这个等式，我们不需要 R 是 Artin 代数），而后面的等价关系由 (ii) 得出。现在我们将证明 ${}^{\perp_\ll}$(Proj-R) 与 K(Proj-R) 中所需的子范畴一致。为此，只需证明：对于任意 $P \in$ Proj-R，以及 K(Proj-R) 中的复形 x，复形 $\mathrm{Hom}_R(x,\ P)$ 在充分大的次数上无环，当且仅当 x 属于 ${}^{\perp_\ll}P$。记

$$x = \cdots \to P^{i-1} \xrightarrow{d^{i-1}} P^i \xrightarrow{d^i} P^{i+1} \to \cdots.$$

注意，对于所有 $i$in $\mathbb{Z}$，我们有 $\mathrm{Ker}(\mathrm{Hom}_R(d^{i-1}, P)) \cong \mathrm{Hom}^{\mathsf{C}(\mathsf{R})}(x, P[-i])$。现在，$H^i(\mathrm{Hom}_R(x, P)) = 0$当且仅当 $\mathrm{Ker}(\mathrm{Hom}_R(d^{i-1}, P)) = \mathrm{Im}(\mathrm{Hom}_R(d^i, P))$，也就是说，当且仅当 $\mathrm{Hom}^{\mathsf{C}(\mathsf{R})}(x, P[-i])$ 中的每个态射都经由 d^i 分解。这等价于存在 $h^{i+1}\colon P^{i+1} \longrightarrow P$ 使得 $f = h^{i+1}d^i$。特别地，复形 $\mathrm{Hom}_R(x, P)$ 在高次数上无环，当且仅当每个复形态射 $x \longrightarrow P[-i]$ 都是零同伦的，其中 $i \gg 0$。

(iv) 和 (v) 与 (iii) 类似。 □

考虑到上述命题，我们可以将关于特征子范畴的计算转化为 K(Inj-Λ) 的 与之对应的 K(Proj-Λ) 的子范畴。

推论 3.28. 以下结论对 $\mathcal{T} = \mathsf{K}(\mathsf{Proj}\text{-}\Lambda)$ 成立，其中 Λ 是一个 *Artin* 代数。

(i) $\mathcal{T}^+ = \mathsf{K}^+(\mathsf{Proj}\text{-}\Lambda)$。(ii) $\mathcal{T}^{\mathrm{b}} = \mathsf{K}^{\mathrm{b}}(\mathsf{Proj}\text{-}\Lambda)$。(iii) $\mathcal{T}_p^- = \{x\colon\ H^n(\mathrm{Hom}_R(x, P)) = 0$ 对于 $n \gg 0$ 以及任意 $P \in \mathsf{Proj}\text{-}\Lambda\}$。(iv) $\mathcal{T}_p^+ = \{x\colon\ H^n(\mathrm{Hom}_R(x, P)) = 0$ 对于 $n \ll 0$ 以及任意 $P \in \mathsf{Proj}\text{-}\Lambda\}$。(v) $\mathcal{T}_p^{\mathrm{b}} = \{x\colon\ H^n(\mathrm{Hom}_R(x, P)) = 0$ 对于 $|n| \gg 0$ 以及任意 $P \in \mathsf{Proj}\text{-}\Lambda\}$。

特别地，当 Λ 是岩永-戈伦斯坦时，以下结论成立。

(vi) $\mathcal{T}_i^- = \{x\colon\ H^n(\mathrm{Hom}_R(x, P)) = 0$ 对 $n \gg 0$ 及每个 $P \in \mathsf{Proj}\text{-}\Lambda\}$。

(vii) $\mathcal{T}_i^+ = \{x : \ H^n(\mathsf{Hom}_R(x, P)) = 0 \text{ 对 } n \ll 0 \text{ 及每个 } P \in \mathsf{Proj}\text{-}\Lambda\}$。

(viii) $\mathcal{T}_i^{\mathsf{b}} = \{x : \ H^n(\mathsf{Hom}_R(x, P)) = 0 \text{ 对 } |n| \gg 0 \text{ 及每个 } P \in \mathsf{Proj}\text{-}\Lambda\}$。

证明。 等价 K(Proj-Λ) ≃K(Inj-Λ) 限制为 K(Proj-Λ) 和 K(Inj-Λ) 的所有特定子范畴之间的等价。因此，利用引理 3.27，根据命题 3.21 和引理 3.26，结果得证。□

3.4. **例：阿廷代数之外的同伦范畴**。上一节对阿廷代数进行的计算之所以可行，是因为引理 3.18 的条件 (∗)，而该条件本身又依赖于推论 2.8。正如例 3.20 所示，这些结论存在诺特反例。在本小节中，我们将讨论其他满足这两个结果的情形；因此，我们或许能够计算相应的内射对象/投射对象同伦范畴的特征子范畴。

例 3.29。 我们从一个稍显乏味的例子开始。设 R 是一个**具有有限右整体维数的右诺特环**。那么我们有等式

$$\mathsf{D}^{\mathsf{b}}(\mathsf{Mod}\text{-}R) = \mathsf{K}^{\mathsf{b}}(\mathsf{Proj}\text{-}R) = \mathsf{broad}_{\Sigma}(\mathsf{K}^{\mathsf{b}}(\mathsf{proj}\text{-}R)) = \mathsf{broad}_{\Sigma}(\mathsf{D}^{\mathsf{b}}(\mathsf{mod}\text{-}R))$$

在 K(Inj-R) ≃ D(R) 中，并且条件 (∗) 和推论 2.8 对这类环均成立。当然，由于 K(Inj-R) ≃ D(R)，K(Inj-R) 的特征子范畴已在命题 3.3 中计算出来。

例 3.30。 我们可以验证，对于任意有限 CM 型的**戈伦斯坦 R-阶**，条件 (∗) 均成立，其中 R 是交换诺特完备 CM 局部环。对于这样的代数，设其为 A，记 Gproj-A为有限生成戈伦斯坦投射 A-模构成的范畴，GProj-A 为所有戈伦斯坦投射 A-模构成的范畴，并记 $\mathcal{IG}_A$ 为 Gproj-A 中不可分解对象构成的类。于是

$$\mathsf{D}^{\mathsf{b}}(\mathsf{Mod}\text{-}A) = \text{第 } \mathsf{ick}(\mathsf{GProj}\text{-}A) = \mathsf{thick}(\mathsf{Add}(\mathsf{Gproj}\text{-}A)) = \mathsf{thick}(\mathsf{Add}(\mathcal{IG}_A)) = \mathsf{thick}(\cup_{x\in\mathcal{IG}_A}\mathsf{Add}\, x) = \mathsf{broad}_{\Sigma}(\mathcal{IG}_A)$$

其中，第一个等式是通过对 A-模取极小戈伦斯坦投射分解得到的；第二个等式源于每个戈伦斯坦投射模都是有限生成戈伦斯坦投射模的直和这一事实（见 [51, 定理 1.2]）；第四个等式则源于 Gproj-A 中的不可分解对象只有有限多个（至同构为止）。特别地，由于 thick($\mathcal{IG}_A$) = thick(Gproj-A) = D^{b}(mod-A)，推论 2.8 的类似结论对 A 也成立，即

$$\mathsf{D}^{\mathsf{b}}(\mathsf{Mod}\text{-}A) = \mathsf{broad}_{\Sigma}(\mathsf{D}^{\mathsf{b}}(\mathsf{mod}\text{-}A))$$

作为 D(A) 的子范畴。按照引理 3.18 的证明进行论证，我们可以看到条件 (∗) 成立。因此，K(Inj-A) 的特征子范畴计算结果与命题 3.21 中的表格完全一致。

我们改变策略，借助 Aoki [8] 和 Neeman [55,56]的结果来提供另一类例子。先回顾一些记号，为此我们固定一个具有余积的三角范畴 $\mathcal{T}$。给定 $\mathcal{T}$中的一组对象 $\mathcal{X}$，我们用 Coprod($\mathcal{X}$) 表示由 $\mathcal{X}$中对象的余积构成的子范畴 $\mathcal{T}$。接着，递归地定义

$$\mathsf{Coprod}_1(\mathcal{X}) \coloneqq \mathsf{Coprod}(\mathcal{X}) \text{ and } \mathsf{Coprod}_n(\mathcal{X}) \coloneqq \mathsf{Coprod}_1(\mathcal{X}) * \mathsf{Coprod}_{n-1}(\mathcal{X})$$

并令 $\overline{\langle\mathcal{X}\rangle_n} \coloneqq$ smd(Coprod$_n(\mathcal{X})$)，其中 smd 表示对直和项的闭包，详情见 [56]。当$\mathcal{X}$ 由某个对象 x 和 $I \subseteq \mathbb{Z}$ 给出时，我们将 $\langle\mathcal{X}\rangle_n$ 记为 $\langle x[I]\rangle_n$。如果 x 是一个对象，且存在一个整数 $n \geq 1$ 使得 $\overline{\langle x[\mathbb{Z}]\rangle_n} = \mathcal{T}$，那么我们称 x 为**的强生成元**，并称 x由 $\mathcal{T}$强生成。

命题 3.31. 设 $\mathcal{T}$ 是一个具有余积且有紧致倾斜对象的三角范畴。若 $\mathcal{T}$有一个强生成元 x，且该生成元属于 $\mathcal{T}^{\mathsf{b}}$，则 $\mathcal{T}^{\mathsf{b}} = \text{厂}_{\Sigma}(x)$。

证明。 设 $n \geq 1$ 满足 $\overline{\langle x[\mathbb{Z}]\rangle_n} = \mathcal{T}$。由于 x 属于 $\mathcal{T}^{\mathsf{b}}$，显然 broad$_{\Sigma}(x)$包含于 $\mathcal{T}^{\mathsf{b}}$。记 M 为 $\mathcal{T}$ 的紧致倾斜生成元，并取 $\mathcal{T}^{\mathsf{b}}$中的一个对象，例如 t。由命题 3.8 可知，与 M 相关联的 t-结构限制在 $\mathcal{T}^{\mathsf{b}}$上是一个有界 t-结构。因此，存在 a，b 属于 $\mathbb{Z}$，使得 t属于 $M^{\perp_{>a}} \cap M^{\perp_{\leq b}}$。由假设和引理 9.4]可知，对于某个 ~~$d \geq 1$~~（取决于 a，b），t属于 $\langle x[[-d, d]]\rangle_n$。注意到 $\langle x[[-d, d]]\rangle_n \subseteq$ broad$_{\Sigma}(x)$，结论即得。□

上述命题使我们得以推导出本小节的最后一个例子。

例 3.32. 设 R 有限 Krull 维数的交换诺特拟优环。无需定义这类环，只需指出，代数和几何中自然出现的大多数交换诺特环都属于此类。例如，任何 Dedekind 整环上的有限生成交换代数都属于此类。对于这类环，由 [8, 主要定理] 及其证明可知，存在一个对象 x，使得 D^{b}(mod-R) 中的 D(R) = $\langle x[\mathbb{Z}]\rangle_n$，其中 $n \geq 1$。由 [55, 引理 2.7]（另见 [56, 命题 9.8]），x 是 D^{b}(mod-R) 的强生成元，特别地，D^{b}(mod-R) =厚子范畴(x)。

最后，命题 3.31 使我们得以断定，D^{b}(Mod-R) =广$_{\Sigma}(x)$，因此得到推论 2.8 的类似结论，即

$$\mathsf{D}^{\mathsf{b}}(\text{Mod-}R) = \mathsf{broad}_{\Sigma}(\mathsf{D}^{\mathsf{b}}(\text{mod-}R)).$$

于是，引理 3.18 以及随之而来的命题 3.21 中关于特征子范畴的计算，对 K(Inj-R) 仍然成立。另请参阅 [48, 定理 7.26 和定理 8.12] ，其中使用不同的技术计算了 K(Inj-R) 的某些子范畴。

4. Homological properties for triangulated categories

本节将为紧生成三角范畴$\mathcal{T}$ 介绍各种同调性质；这些性质仅取决于我们在上一节定义的特征子范畴。特别地，这意味着所有这些概念都是内在的，因此在三角等价下保持不变。

回忆一下，如果每个（右） R-模都具有有限投射维数，或者等价地，如果每个（右） R-模都具有有限内射维数，则称一个环具有有限（右）整体维数。这是一种可以在导出范畴中读出的性质：事实上，正如引言中所提到的， R 具有有限整体维数，当且仅当 D^{b}(Mod-R) = K^{b}(Proj-R)，或者等价地，当且仅当 D^{b}(Mod-R) = K^{b}(Inj-R)，作为 D(R) 的子范畴。如下述引理所示，这两个陈述的等价性是完全一般的。

引理 4.1. 对于紧生成三角范畴 $\mathcal{T}$，当且仅当 $\mathcal{T}^{\mathsf{b}} = \mathcal{T}_i^{\mathsf{b}}$ 时，我们有 $\mathcal{T}^{\mathsf{b}} = \mathcal{T}_p^{\mathsf{b}}$。

证明。 由引理 3.2 可得，因为 $(\mathcal{T}_p^{\mathsf{b}}, \mathcal{T}^{\mathsf{b}}, \mathcal{T}_i^{\mathsf{b}})$ 是一个远三元组。 □

回忆一下，我们所说的 **戈伦斯坦** 环，是指满足 K^{b}(Proj-R) =K^{b}(Inj-R) 作为 D(R) 的子范畴的环 R。当 R 是双侧诺特环时，我们恢复早先的术语，称 R 为岩永-戈伦斯坦环（见第 3 节）。另请回忆，根据 [65], **环 的内射对象生成**，若 Loc(Inj-R) = D(R)，则称 R 的内射对象生成。如果 R 是域上的有限维代数，且 R 的内射对象生成，那么 R 具有**有限 finitistic 维数** (Fin.dim $R < \infty$)，也就是说，有限投射维数的 R-模的投射维数存在一个上界（见定理 4.3]）。以下是我们想要讨论的四个同调概念：整体维数的有限性、Gorenstein 性、由内射对象生成以及 finitistic 维数的有限性。

定义 4.2. 我们称一个紧生成三角范畴 $\mathcal{T}$ 为

(i) 具有**有限整体维数** （简称 gl. dim $\mathcal{T} < \infty$），若 $\mathcal{T}_p^{\mathsf{b}} = \mathcal{T}^{\mathsf{b}}$；等价地，若 $\mathcal{T}^{\mathsf{b}} = \mathcal{T}_i^{\mathsf{b}}$；(ii) **戈伦斯坦** ，若 $\mathcal{T}_p^{\mathsf{b}} = \mathcal{T}_i^{\mathsf{b}}$；(iii) **由内射对象生成** ，若 $\mathcal{T} = \mathrm{Loc}(\mathcal{T}_i^{\mathsf{b}})$；(iv) 具有**有限 finitistic 维数** （简称 Fin. dim $\mathcal{T} < \infty$），若 $(\mathcal{T}_i^{\mathsf{b}})^{\perp} \cap \mathcal{T}^{+} = \{0\}$。

前三个定义的动机相当明确，我们依据 [65, 定理 4.4] 和 [45,定理 B.1] 来说明第四个定义的动机（关于其恰当性的讨论见下文例 4.8）。下面我们将说明，这些定义是同调代数中经典概念的良好推广。

定理 4.3. 设 R 是一个环。那么有

- gl。dimD(R) $< \infty$ 当且仅当gl。dim $R < \infty$;
- D(R) 是戈伦斯坦的，当且仅当 R 是戈伦斯坦的;
- D(R) 由内射对象生成，当且仅当对于 R，内射对象生成。

如果 $R = \Lambda$ 是一个 *Artin* 代数，那么我们还有

- Fin。dimD(Λ) $< \infty$ 当且仅当Fin。dim $\Lambda < \infty$;
- gl。 dim K(Inj-Λ) $< \infty$ 当且仅当 gl。dim $\Lambda < \infty$;
- gl。 dimK$_{\mathsf{ac}}$(Inj-Λ) $< \infty$ 当且仅当 K$_{\mathsf{ac}}$(Inj-Λ) $= 0$;
- K$_{\mathsf{ac}}$(内射对象-Λ) 总是戈伦斯坦的，由内射对象和 Fin生成。dim K$_{\mathsf{ac}}$(内射对象-Λ) $< \infty$。

证明。 关于整体维数的陈述，对所有范畴而言都可由表格中的命题 3.3 和命题 3.21 轻易得出。类似的论证适用于 D(R) 的 Gorenstein 性与 R 的 Gorenstein 性之间的关系，从而证明了我们的第二个断言。对于 D(R) 的内射生成，注意到 K^{b}(内射-R) ⊆Loc(内射-R)，因此 Loc(K^{b}(内射-R)) = D(R) 当且仅当 Loc(内射-R) = D(R)。当 Λ 是（交换阿廷环 k 上的）Artin 代数时，K$_{\mathsf{ac}}$(内射-Λ) 的内射生成性质显然成立。对于 Artin 代数 Λ，D(Λ) 具有有限有限维数当且仅当 Fin.dim $\Lambda < \infty$，这一事实可由 [65, 定理 4.4(b)], 得出，该定理指出 Fin. dim $R < \infty$ 当且仅当 $\mathrm{Hom}_k(R, k)^{\perp} \cap \mathsf{D}^{+} = \{0\}$ （另见 [45, 定理 B.1.]）。□

关于 K(Inj-Λ)（Λ 为 Artin 代数）的 Gorenstein 性质、由内射对象生成或有限维数的有限性，我们只能在了解子范畴 $\mathcal{T}_i^{\mathsf{b}}$ 的某些性质时讨论这些问题（例如，参见引理 3.26）。我们从 Gorenstein 性质开始。

引理 4.4. 设 Λ 为 *Artin* 代数，并考虑 $\mathcal{T} = \mathsf{K}$(内射-Λ)。以下结论成立：

(i) 如果 Λ 是岩永-戈伦斯坦的，那么 $\mathcal{T}$ 是戈伦斯坦的。

(ii) 如果 $\mathcal{T}$ 是戈伦斯坦的，那么K^{b}(内射-Λ) $\subseteq\mathsf{K}^{\mathsf{b}}$(投射-$\Lambda$)。

特别地，如果戈伦斯坦对称猜想成立，那么 Λ 是岩永-戈伦斯坦的，当且仅当 K(内射-Λ) 是戈伦斯坦的。

证明。 第一个结论由引理 3.26 和命题 3.21 得出，只需注意到

$$\mathsf{K}_{\mathsf{ac}}(\mathsf{Inj}\text{-}\Lambda) * \mathsf{Q}_{\rho}(\mathsf{D}^{\mathsf{b}}(\Lambda)) = \{x \in \mathsf{K}(\mathsf{Inj}\text{-}\Lambda) \colon \#\{n \colon H^n(x) \neq 0\} < \infty\}.$$

关于 (ii)，假设 $\mathcal{T}_i^{\mathsf{b}} = \mathcal{T}_p^{\mathsf{b}}$ 特别表明 $\mathsf{Q}_{\rho}(\mathsf{D}^{\mathsf{b}}(\Lambda)) \subseteq \mathcal{T}_i^{\mathsf{b}}$，因此对于 K^{b}(内射-Λ) 中的任意 x 和 $\mathsf{D}^{\mathsf{b}}(\Lambda)$ 中的任意 y，我们有

$$\mathsf{Hom}_{\mathsf{D}(\Lambda)}(\mathsf{Q}(x), y[n]) = \mathsf{Hom}_{\mathsf{K}(\mathsf{Inj}\text{-}\Lambda)}(x, \mathsf{Q}_{\rho}(y)[n]) = 0$$

对于 $|n| \gg 0$。换言之，在 $\mathsf{D}(\Lambda)$ 中，我们有 K^{b}(内射-Λ) $\subseteq {}^{\perp}(\mathsf{D}^{\mathsf{b}}(\Lambda)) = \mathsf{K}^{\mathsf{b}}$(投射-$\Lambda$)，因此内射 A-模具有有限投射维数。对于最后一个断言，注意如果戈伦斯坦对称猜想成立（即存在包含关系 K^{b}(内射-Λ) $\subseteq \mathsf{K}^{\mathsf{b}}$(投射-$\Lambda$)，当且仅当在 $\mathsf{D}(\Lambda)$ 中存在包含关系 K^{b}(内射-Λ) $\supseteq\mathsf{K}^{\mathsf{b}}$(投射-$\Lambda$)），那么前两个断言保证了所声称的等价。□

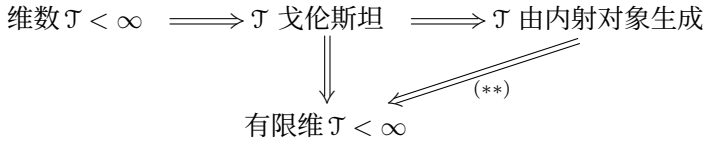
注 4.5。 不能合理地期待 K_{ac}(Inj-Λ) 能检测出 Λ 的戈伦斯坦性。这部分是因为戈伦斯坦性并不是一个奇异不变量。事实上，考虑一个具有 $\operatorname{gl.dim} A = \infty$ 的岩永-戈伦斯坦阿廷代数 A、一个具有 $\operatorname{gl.dim} B < \infty$ 的阿廷代数 B，以及一个 A-B-双模 M，满足 $\operatorname{pdim}_A M = \infty$。那么，我们有奇点范畴的一个等价

$$\mathsf{D}_{\mathsf{sg}}(\begin{pmatrix} A & M \\ 0 & B \end{pmatrix}) \simeq \mathsf{D}_{\mathsf{sg}}(A)$$

但左侧的三角矩阵环并不是岩永-戈伦斯坦的（见 [24, 定理 3.3 和定理 4.1]）。正如我们在定理 4.3 中所观察到的，对于一个阿廷代数 A，范畴 K_{ac}(Inj-A) 总是戈伦斯坦的。此外，已知并非每个阿廷代数都与一个岩永-戈伦斯坦代数奇异等价，见 [25]。

对于环 R，众所周知，$\operatorname{gl.dim} R < \infty$ 意味着 R 是戈伦斯坦的；若 R 是戈伦斯坦的，则对 R，内射对象生成，见 [65, 定理 8.1]。此外，岩永-戈伦斯坦阿廷代数总是具有有限的有限维数（见 [9, 命题 6.10]），而阿廷代数的内射生成意味着有限维数有限，见 [65, 定理 4.3]。我们将证明这些蕴含关系的三角范畴版本。

定理 4.6。 以下蕴含关系对紧生成三角范畴 $\mathcal{T}$ 成立



其中，当 $\mathcal{T}_i^{\mathsf{b}} =$广$_{\Sigma}(S)$ 对于某个集合 S时，蕴含关系 $(**)$ 成立。

证明。 • $\operatorname{gl.dim}\mathcal{T} < \infty \Rightarrow \mathcal{T}$戈伦斯坦：对 $\mathcal{T}_p^{\mathsf{b}} = \mathcal{T}^{\mathsf{b}}$ 应用 ${}^{\perp}(-)$后，我们得到 $\mathcal{T}^{\mathsf{b}} = \mathcal{T}_i^{\mathsf{b}}$，见引理 3.2(iii)。特别地，这意味着 $\mathcal{T}_p^{\mathsf{b}} = \mathcal{T}_i^{\mathsf{b}}$，即 $\mathcal{T}$ 是戈伦斯坦的。

• $\mathcal{T}$ 由内射对象 $\Rightarrow \mathcal{T}$ 生成的戈伦斯坦：只需注意到 $\mathsf{Loc}(\mathcal{T}_{\mathsf{b}i}) = \mathsf{Loc}(\mathcal{T}_{\mathsf{b}p}) = \mathcal{T}$，其中第一个等式由 Gorenstein 性得到，第二个等式由 $\mathcal{T}_{\mathsf{c}} \subseteq \mathcal{T}_{\mathsf{b}p}$得到，见引理 3.2(i)。

• $\mathcal{T}$戈伦斯坦 $\Rightarrow \operatorname{Fin.dim}\mathcal{T} < \infty$：由于 $\mathcal{T}_{\mathsf{c}} \subseteq \mathcal{T}_{\mathsf{b}p}$ 且 $\mathcal{T}_{\mathsf{b}p} = \mathcal{T}_{\mathsf{b}i}$，可得 $(\mathcal{T}_{\mathsf{b}i})^{\perp} \subseteq (\mathcal{T}_{\mathsf{c}})^{\perp} = \{0\}$，特别地，交集 $(\mathcal{T}_{\mathsf{b}i})^{\perp} \cap \mathcal{T}^{+}$ 是平凡的。

最后，假设对于某个集合 S，有 $\mathcal{T}_i^{\mathsf{b}} =$broad$_{\Sigma}(S)$，并证明蕴含关系 $(**)$。由于 S 是一个集合，根据 [54, 定理 2.3]，($\mathsf{Loc}(S)$ $S^{\perp}$) 是一个挠对。我们有 $\mathsf{Loc}(S) =$Loc$(\mathcal{T}_i^{\mathsf{b}})$ 且 $S^{\perp} = (\mathcal{T}_i^{\mathsf{b}})^{\perp}$。由于对于 $\mathcal{T}$，内射对象生成，因此可得 $(\mathcal{T}_i^{\mathsf{b}})^{\perp} = \{0\}$。我们已经证明了陈述 (a) 和 (b)。□

注意，对于一个集合 S，假设 $\mathcal{T}_i^{\mathsf{b}} = \mathsf{broad}_{\Sigma}(S)$ 在以下情形下成立：例如，当 $\mathcal{T} =$D(R) 对于右诺特环 R 成立时，因为在这种情况下，$\mathcal{T}_i^{\mathsf{b}} = \mathsf{K}^{\mathsf{b}}$(Inj-$R$) =broad$_{\Sigma}(E)$，其中 E 是 R 的内射余生成元。下面的例子表明，这一条件也可以出现在微分分次代数的背景下。

例 4.7. 设 $\mathcal{T}$ 是一个代数紧生成三角范畴，且 $\mathcal{T}^c$ 是 Krull-Schmidt 范畴，并且在域 k 上 Hom-有限。假设 x 是 $\mathcal{T}$ 中的紧致倾斜对象，它远距离生成 $\mathcal{T}$。那么由定理 3.13 可知，$\mathcal{T}_i^{\mathsf{b}} =$是 thick(Prod($x^*$))，其中可将 x^* 视为相对于 Mod-k 的内射余生成元 k 而取的 x 的 Brown-Comenetz 对偶，即 $\mathsf{Hom}_{\mathcal{T}}(-, x^*) \cong \mathsf{Hom}_k(\mathsf{Hom}_{\mathcal{T}}(x, -)\ k)$。特别地，注意对 $\mathcal{T}$ 中任意对象 c，$\mathsf{Hom}_{\mathcal{T}}(c, x^*) \cong \mathsf{Hom}_k(\mathsf{Hom}_{\mathcal{T}}(x, c)\ k)$ 是 k 上的有限维向量空间。特别地，x^* 是 $\mathcal{T}$ 中的端有限对象，也就是说，对所有紧对象 c，$\mathsf{Hom}_{\mathcal{T}}(c, x^*)$ 都是 $\mathsf{End}_{\mathcal{T}}(x^*)$ 上的有限长度对象。特别地，x^* 因而是 Σ-纯内射的，其不可分解子对象构成齐格勒谱中的一个闭集（见 [27, 定理 2.13 和附录 A]）。由此，根据 [18, 定理 4.10]，可得 $\mathsf{Prod}(x^*) = \mathsf{Add}(x^*)$，进而有 $\mathcal{T}_i^{\mathsf{b}} =$thick(Add($x^*$))。

一个满足上述假设的具体情形是：考虑域 k 上一个微分分次代数的导出范畴，其中对所有 $n>0$ 都有 $H^n(\Gamma)=0$，且总上同调 $\oplus_{n\in\mathbb{Z}}H^n(\Gamma)$ 是 k 上的有限维向量空间；也就是说，这是一个 k 上的连通真微分分次代数。对于这样的微分分次代数 Γ，这意味着蕴含式 $(**)$ 对 $\mathsf{D}(\Gamma)$ 成立。

例 4.8。设 $\mathcal{T}=\mathsf{D}(R)$，其中 R 是例 3.20 中的环。回顾一下，R 是一个具有无限 Krull 维数的交换诺特环，并且每个有限表示模都有有限投射维数。由于 $\mathcal{T}$ 是交换诺特的，由 [65, 定理 3.3] 可知，$\mathcal{T}$ 由内射对象生成，且上述定理的蕴含关系 $(**)$ 成立，因此可得 $\mathcal{T}$ 具有有限 finitistic 维数。这个结论令人遗憾，因为我们知道 R 本身具有无限 finitistic 维数。造成这一不一致的原因是，我们提出的定义受 [65, 定理 4.4] 和 [45, 定理 B.1] 的启发，适用于阿廷代数（另见定理 4.3），但不适用于更一般的情形。

5. Regularity for k-linear categories

5.1. 有界有限对象子范畴。通常，正如之前已经出现过的那样，我们所研究的三角范畴是 k-线性的，其中 k 是交换诺特环 k。例如，代数在 k上的导出范畴或概形在 k上的导出范畴便是如此。给定一个 k-线性三角范畴 $\mathcal{T}$ 以及 $\mathcal{T}$ 的一个子范畴 $\mathcal{X}$，我们考虑 $\mathcal{T}$ 的以下厚子范畴

$$\mathcal{X}^{\perp_{\mathbf{hf}}}:=\{t\in\mathcal{T}:\ \forall x\in\mathcal{X},\ \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}}\mathsf{Hom}_{\mathcal{T}}(x,t[n])\in\mathsf{mod}\text{-}k\}\qquad {}^{\perp_{\mathbf{hf}}}\mathcal{X}:=\{t\in\mathcal{T}:\ \forall x\in\mathcal{X},\ \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}}\mathsf{Hom}_{\mathcal{T}}(t,x[n])\in\mathsf{mod}\text{-}k\}.$$

根据定义，显然 $\mathcal{X}^{\perp_{\mathbf{hf}}}\subseteq\mathcal{X}^{\perp}$和 ${}^{\perp_{\mathbf{hf}}}\mathcal{X}\subseteq{}^{\perp}\mathcal{X}$. 这些子范畴已被许多其他作者在不同名称和不同设定下研究过，参见例如 [1] 和 [46]。注意，每个三角范畴都是 $\mathbb{Z}$-线性的，因为它是加性的。不过，在本节中，只要 k 是交换诺特环，我们也会考虑其他 k-线性结构。

在上述设定下，还有一个我们可以研究的特殊三角范畴；除环 k的选择外，它是内在确定的，而这一点通常会从上下文中清楚地看出。

定义 5.1. k-线性三角范畴 $\mathcal{T}$ 中**有界有限个**对象构成的子范畴记作 $\mathcal{T}^{\mathsf{b}}_c$，其定义为 $\mathcal{T}^{\mathsf{b}}_c:=(\mathcal{T}^{\mathsf{c}})^{\perp_{\mathbf{hf}}}$.

后文将用到以下结果。

引理 5.2. 设 $\mathcal{T}$ 是一个 k-线性三角范畴，且 $\mathcal{X}$、$\mathcal{Y}$是 $\mathcal{T}$中的对象类。则有以下结论。

(i) $(\mathcal{X}*\mathcal{Y})^{\perp_{\mathbf{hf}}}=\mathcal{X}^{\perp_{\mathbf{hf}}}\cap\mathcal{Y}^{\perp_{\mathbf{hf}}}$ *and* ${}^{\perp_{\mathbf{hf}}}(\mathcal{X}*\mathcal{Y})={}^{\perp_{\mathbf{hf}}}\mathcal{X}\cap{}^{\perp_{\mathbf{hf}}}\mathcal{Y}$.

(ii) $\mathcal{X}^{\perp_{\mathbf{hf}}}=\mathsf{thick}(\mathcal{X})^{\perp_{\mathbf{hf}}}$ *and* ${}^{\perp_{\mathbf{hf}}}\mathcal{X}={}^{\perp_{\mathbf{hf}}}\mathsf{thick}(\mathcal{X})$.

证明。证明与引理 2.9 中相同，利用 k 的诺特性来证明 (i)。 □

还要注意，对于 $?={}^{\perp_{\mathbf{hf}}}$，引理 2.11 的类似结论也成立，我们将在必要时使用它。现在让我们计算一些三角范畴中的有界有限对象子范畴。

命题 5.3。设 k 是交换诺特环。

(i) 如果 R 是一个 ***Noether*** k-代数且 $\mathcal{T}=\mathsf{D}(R)$，那么有 $\mathcal{T}^{\mathsf{b}}_c=\mathsf{D}^{\mathsf{b}}(\mathsf{mod}\text{-}R)$。(ii) 如果 k 是阿廷环，Λ 是一个 ***Artin*** k-代数且 $\mathcal{T}=\mathsf{K}_{\mathsf{ac}}(\mathsf{Inj}\text{-}\Lambda)$，那么有 $\mathcal{T}^{\mathsf{b}}_c=\{0\}$。(iii) 如果 k 是阿廷环，Λ 是一个 ***Artin*** k-代数且 $\mathcal{T}=\mathsf{K}(\mathsf{Inj}\text{-}\Lambda)$，那么有

$$\mathcal{T}^{\mathsf{b}}_c=\{x\in\mathsf{K}^{\mathsf{b}}(\mathsf{Inj}\text{-}\Lambda):\ \oplus_{n\in\mathbb{Z}}H^n(x)\in\mathsf{mod}\text{-}k\}.$$

(iv) 如果 k 是一个域，Γ 是 ***dg*** k-代数且 $\mathcal{T}=\mathsf{D}(\Gamma)$，那么有

$$\mathcal{T}^{\mathsf{b}}_c=\{x\in\mathsf{D}(\Gamma):\ \mathsf{dim}(\oplus_{n\in\mathbb{Z}}H^n(x))<\infty\}=:\mathsf{D}_{\mathsf{fd}}(\Gamma).$$

证明。(i) 对于 $\mathcal{T}=\mathsf{D}(R)$。由引理 5.2 可知，$\mathcal{T}^{\mathsf{b}}_c$ 与 $R^{\perp_{\mathbf{hf}}}$一致；由于 R 在 k上有限生成，这恰好就是 $\mathsf{D}^{\mathsf{b}}(\mathsf{mod}\text{-}R)$。

(ii) 对于 $\mathcal{T}=\mathsf{K}_{\mathsf{ac}}(\mathsf{Inj}\text{-}\Lambda)$，由命题 3.21 可得 $\mathcal{T}^{\mathsf{b}}_c\subseteq\mathcal{T}^{\mathsf{b}}=\{0\}$。

(iii) 对于 $\mathcal{T}=\mathsf{K}(\mathsf{Inj}\text{-}\Lambda)$，考虑伴随对 $(\mathsf{Q}_\lambda,\mathsf{Q})$，见 (2.1)。函子 Q_λ 保持紧对象，因此函子 Q 将 $\mathcal{T}^{\mathsf{b}}_c$ 映到 $\mathsf{D}^{\mathsf{b}}(\mathsf{mod}\text{-}\Lambda)$，这表明 $\mathcal{T}^{\mathsf{b}}_c$ 包含于

$$\{x\in\mathsf{K}^{\mathsf{b}}(\mathsf{Inj}\text{-}\Lambda):\ \oplus_{n\in\mathbb{Z}}H^n(x)\in\mathsf{mod}\text{-}k\}.$$

反向包含可直接验证。

(iv) 这由以下事实得出：$\mathsf{D}(\Gamma)^{\mathsf{c}}=$ 厚子范畴(Γ)，且 $H^n(-)\cong\mathsf{Hom}_{\mathcal{D}(\Gamma)}(\Gamma,\ -[n])$。 □

注 5.4。 考虑 $\mathcal{T}$，如注记 3.15 中所述，即 $\mathcal{T}$ 是由单个紧对象 G 生成的紧生成三角范畴，并且由 G 生成的 t-结构满足“可逼近性条件”，见定义 0.25]。假设 $\mathcal{T}$ 是一个 k-线性范畴。在 [56,定义 0.20], 中，Neeman 考虑以下子范畴

$$\mathcal{T}_c^{-,\tau} := \bigcap_{n>0} (\mathcal{T}^{c} * \mathcal{T}^{\leq -n}) \text{ and } \mathcal{T}_c^{\mathsf{b},\tau} := \mathcal{T}_c^{-,\tau} \cap \mathcal{T}^{\mathsf{b},\tau}.$$

其中 $\mathcal{T}^{\mathsf{b},\tau}$ 的定义见注记 3.15。与之前一样，这些子范畴最终被证明是内在的，且独立于生成元 G 的选择。此外，如果对所有 $n \in \mathbb{Z}$，$\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(G, G[n])$ 都属于 mod-k，那么根据 [56, 定理 0.4]，子范畴 $\mathcal{T}^{\mathsf{b},}{}_{c}{}^{\tau}$与定义 5.1 中的 $\mathcal{T}_c^{\mathsf{b}}$ 一致。

5.2. **微分分次代数的 Gorenstein 性**。 正如我们将在本小节中看到的，有界有限对象子范畴有助于我们比较这样一种概念：微分分次代数 Γ 的导出范畴是 Gorenstein 三角范畴；以及 [34] 为此类微分分次代数引入的概念，只要 Γ 是域 k 上适当且连通的。利用推论 3.16，导出范畴 $\mathsf{D}(\Gamma)$ 是 Gorenstein 的，当且仅当

$$\mathsf{thick}(\mathsf{Add}\,\Gamma) = \mathsf{thick}(\mathsf{Prod}\,\Gamma^*).$$

Jin [34, 假设 0.1(3)], 给出的 Gorenstein dg 代数定义要求 $\mathsf{thick}(\Gamma) = \mathsf{thick}(\Gamma^*)$。本小节旨在比较这两个概念；参见命题 5.6。关于 Gorenstein dg 范畴的一个相关概念，我们也请读者参阅 [46]，特别是 [46, 第 6 节 2]，其中他们将其概念与 [34] 的概念作了比较。我们先汇集一些必要的陈述。

命题 5.5. 设 Γ 是域 k上的本原且连通的 *dg* 代数。则有以下结论 .

(i) 作为 $D(\Gamma)$ 的子范畴，有 $per(\Gamma) = \hookrightarrow hf(D_{fd}(\Gamma))$。特别地，我们有 $(per(\Gamma), D_{fd}(\Gamma))$ 是一个同调有限远距离对，即一对 $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$，它们是 $\mathcal{T}$的子范畴，且满足 $\mathcal{Y} = \mathcal{X}^{\overset{\mathbf{hf}}{\hookrightarrow}}$和 $\mathcal{Y} = \overset{\mathbf{hf}}{\hookrightarrow}\mathcal{X}$。*(ii)* 作为 $D(\Gamma)$ 的子范畴，有 $thick(\Gamma^*) = D_{fd}(\Gamma)^{\overset{\mathbf{hf}}{\hookrightarrow}}$。*(iii)* $D(\Gamma)$ 的子范畴之间有以下等式

$$^{\overset{\mathbf{hf}}{\hookrightarrow}}\mathsf{D}_{\mathsf{fd}}(\Gamma) = {}^{\perp_{\hookrightarrow}}\mathsf{D}_{\mathsf{fd}}(\Gamma) \cap \mathsf{D}_{\mathsf{fd}}(\Gamma) \text{ and } \mathsf{D}_{\mathsf{fd}}(\Gamma)^{\overset{\mathbf{hf}}{\hookrightarrow}} = \mathsf{D}_{\mathsf{fd}}(\Gamma)^{\perp_{\hookrightarrow}} \cap \mathsf{D}_{\mathsf{fd}}(\Gamma).$$

证明。 (i) 该结论直接由 [1, 引理 4.13] 得出。

(ii) 考虑 k上的对偶性，即函子 $d_k := \mathbb{R}\mathrm{Hom}_k(-,k)\colon \mathsf{D}(\Gamma) \to \mathsf{D}(\Gamma^{\mathsf{op}})^{\mathsf{op}}$，它限制为一个等价 $\mathsf{D}_{\mathsf{fd}}(\Gamma) \simeq \mathsf{D}_{\mathsf{fd}}(\Gamma^{\mathsf{op}})^{\mathsf{op}}$ (例如参见 [46, 引理 3.5])。由于 Γ 是适当的，因此 $\mathsf{D}_{\mathsf{fd}}(\Gamma) \hookrightarrow \mathsf{hf} \subseteq \mathsf{D}_{\mathsf{fd}}(\Gamma)$，所以函子 d_k 限制为一个等价 $\mathsf{D}_{\mathsf{fd}}(\Gamma) \hookrightarrow \mathsf{hf} \simeq (\mathsf{D}_{\mathsf{fd}}(\Gamma^{\mathsf{op}})^{\mathsf{op}})^{\overset{\mathbf{hf}}{\hookrightarrow}}$。后一个等价右侧是 $\mathsf{D}(\Gamma^{\mathsf{op}})$ 中子范畴 $\hookrightarrow \mathsf{hf}\,(\mathsf{D}_{\mathsf{fd}}(\Gamma^{\mathsf{op}}))$ 的对偶范畴。现在，由于 Γ 是适当且连通的，Γ^{op} 也具有同样的性质；因此利用 (i)，可得 $\hookrightarrow \mathsf{hf}\,(\mathsf{D}_{\mathsf{fd}}(\Gamma^{\mathsf{op}})) = \mathsf{thick}(\Gamma^{\mathsf{op}})$。最后注意到，$\mathsf{thick}(\Gamma^{\mathsf{op}})^{\mathsf{op}}$ 在函子 d_k 下的逆像是 $\mathsf{thick}(\Gamma^*)$，因为 $\Gamma^* = \mathbb{R}\mathrm{Hom}_k({}_{\Gamma}\Gamma, k)$。

(iii) 我们只证明第二个等式，因为两个结论的证明类似。正如在第 (ii) 点的证明中所观察到的，我们显然有包含关系 $\mathsf{D}_{\mathsf{fd}}(\Gamma)^{\overset{\mathbf{hf}}{\hookrightarrow}} \subseteq \mathsf{D}_{\mathsf{fd}}(\Gamma)^{\perp_{\hookrightarrow}} \cap \mathsf{D}_{\mathsf{fd}}(\Gamma)$。反向包含关系源于以下事实：对于任意 x, y in $\mathsf{D}_{\mathsf{fd}}(\Gamma)$，空间 $\mathrm{Hom}_{\mathsf{D}(\Gamma)}(x, y)$ 在 k 上是有限维的。事实上，这例如可由 [38, 命题 2.1] 得出；该命题表明，由 Γ 诱导的 t-结构限制在 $\mathsf{D}_{\mathsf{fd}}(\Gamma)$ 上是一个有界 t-结构，其心为 mod-$H^0(\Gamma)$，并且该心的厚闭包就是整个 $\mathsf{D}_{\mathsf{fd}}(\Gamma)$。□

现在我们可以证明以下结论。

命题 5.6。 设 Γ 是域 k 上的适当连通 *dg* 代数。那么 厚子范畴(Γ) = 厚子范畴(Γ^*) 当且仅当 厚子范畴(直和闭包(Γ)) = 厚子范畴(直积闭包(Γ))。换言之，*dg* 代数 Γ 是戈伦斯坦的（按照 *Jin* 的定义），当且仅当范畴 $\mathsf{D}(\Gamma)$是戈伦斯坦的。

证明。记 $\mathcal{T}$ 为 $\mathsf{D}(\Gamma)$，并首先假设 Γ 是戈伦斯坦的，即 $\mathsf{per}(\Gamma)$ =厚子范畴(Γ^*)。于是我们有

$$\mathcal{T}_p^{\mathsf{b}} = \mathsf{thick}(\mathsf{Add}\,\Gamma) = \mathsf{broad}_{\Sigma}(\mathsf{per}(\Gamma)) = \mathsf{broad}_{\Sigma}(\mathsf{thick}(\Gamma^*)) = \mathsf{thick}(\mathsf{Add}\,\Gamma^*) = \mathsf{thick}(\mathsf{Prod}\,\Gamma^*) = \mathcal{T}_i^{\mathsf{b}},$$

其中，第一个和最后一个等式由推论 3.16 得出，第三个等式由假设得出，倒数第二个等式则由例 4.7 得出。这说明 $\mathcal{T}$ 是戈伦斯坦的。现在假设 $\mathcal{T}$ 是戈伦斯坦的。首先，根据 [30, 引理 5.2]，我们知道 $\mathcal{T}$ 是强生成的，即 $\mathcal{T} = \langle x[\mathbb{Z}]\rangle_n$ 对于某个对象 $x \in \mathsf{D}_{\mathsf{fd}}(\Gamma)$ 以及某个 $n \geq 1$。特别地，由命题 3.31 可知 $\mathcal{T}^{\mathsf{b}}$ =广$_{\Sigma}(x)$；再结合 [56, 命题 9.8], 、 [56, 定理 0.4], 、 $\mathcal{T}$ 是可逼近的这一事实（例如参见 [56, 注记 4.3]）以及注 5.4，可得 $\mathcal{T}_c^{\mathsf{b}} = \langle x\rangle_n$ （另见 [62, 引理 5.9]）。由后者可知

$$\mathcal{T}^{\mathsf{b}} = \mathsf{broad}_{\Sigma}(\mathcal{T}_c^{\mathsf{b}}) \tag{5.1}$$

作为 $\mathcal{T}$的子范畴。于是我们得到以下等式

$$\mathsf{per}(\Gamma) = {}^{\overset{\mathbf{hf}}{\hookrightarrow}}(\mathsf{D}_{\mathsf{fd}}(\Gamma)) = {}^{\perp_{\hookrightarrow}}(\mathsf{D}_{\mathsf{fd}}(\Gamma)) \cap \mathsf{D}_{\mathsf{fd}}(\Gamma) = {}^{\perp_{\hookrightarrow}}(\mathcal{T}^{\mathsf{b}}) \cap \mathsf{D}_{\mathsf{fd}}(\Gamma)$$

其中，第一个等式由命题 5.5(i) 得出，第二个等式即命题 5.5(iii)，第三个等式则由 (5.1) 和引理 2.9(v) 得出。对偶地，利用命题 5.5(ii)，可得

$$\mathsf{thick}(\Gamma^*) = (\mathcal{T}^{\mathsf{b}})^{\perp_1} \cap \mathsf{D}_{\mathsf{fd}}(\Gamma).$$

总之，与 $\mathcal{T}_p^{\mathsf{b}} = \mathcal{T}_i^{\mathsf{b}}$ 相交于 $\mathsf{D}_{\mathsf{fd}}(\Gamma)$ 意味着 $\mathsf{thick}(\Gamma)$ =$\mathsf{thick}(\Gamma^*)$。 □

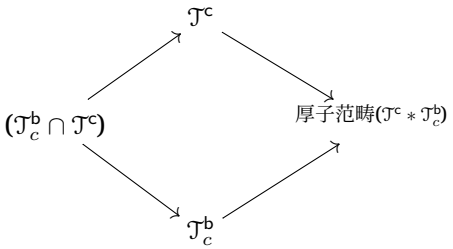
5.3. **正则三角范畴**。对于 k-线性三角范畴，我们提出一个额外的同调条件，以及一个用于度量该条件失效程度的范畴。

定义 5.7。 k-线性三角范畴 $\mathcal{T}$ 称为（**在** k **上**）**正则**，如果 $\mathcal{T}_c^{\mathsf{b}} = \mathcal{T}^{\mathsf{c}}$。我们将 $\mathcal{T}$ 的**奇异** k**范畴**定义为 $\mathcal{T}_k^{\mathsf{sg}} := \mathsf{thick}(\mathcal{T}^{\mathsf{c}} * \mathcal{T}_c^{\mathsf{b}})/(\mathcal{T}_c^{\mathsf{b}} \cap \mathcal{T}^{\mathsf{c}})$。

C显然，奇异范畴的定义旨在导出以下结论。

引理 *5.8*。 *</style}*如果 $\mathcal{T}$ 是一个 k-线性三角范畴，那么 $\mathcal{T}$ 在 k 上正则，当且仅当 $\mathcal{T}_k^{\mathsf{sg}} = 0$。

证明。 这个等价中只有一个（略微）非平凡的方向。包含关系的交换图



当且仅当图表中的每个箭头都是等价时，才得到范畴等价；这证明了如果$\mathcal{T}_k^{\mathsf{sg}} = 0$ ，那么 $\mathcal{T}$ 是正则的。□

基于 于我们之前的计算，可以陈述以下结果（这也解释了名称正则 r).

定理 5.9。 以下陈述成立 d.

(i) 若 R 是交换诺特环，则 $\mathsf{D}(R)$ 关于 R正则，当且仅当 R 正则。*(ii)* 若 R 是交换局部诺特环，则 $\mathsf{K}_{\mathsf{ac}}(\mathsf{Inj}\text{-}R)$ 关于 R正则，当且仅当 $\mathsf{K}_{\mathsf{ac}}(\mathsf{Inj}\text{-}R) \simeq 0$，当且仅当 R 正则。*(iii)* 若 Λ 是 *Artin* k-代数，则 $\mathsf{D}(\Lambda)$ 关于 k正则，当且仅当 $\mathsf{K}(\mathsf{Inj}\text{-}\Lambda)$ 关于 k正则，当且仅当 $\mathsf{K}_{\mathsf{ac}}(\mathsf{Inj}\text{-}\Lambda) = 0$，当且仅当 *gl. dim* $\Lambda < \infty$。

证明。 (i) 回顾一下，交换诺特环 R 正则，当且仅当有限生成模具有有限投射维数（例如参见 [47, 定理 5.94]）。

(ii) 若 R 非正则，且其极大理想为 $\mathfrak{m}$，则由 [11, 定理 6.5] 可得

$$\mathsf{Hom}_{\mathsf{D}_{\mathsf{sg}}(R)}(k(\mathfrak{m}), k(\mathfrak{m})[n]) \neq 0 \tag{5.2}$$

对所有 n 属于 $\mathbb{Z}$，其中 $k(\mathfrak{m})$ 表示 R的剩余域。我们考察 $\mathcal{T}$ =$\mathsf{K}_{\mathsf{ac}}(\mathsf{Inj}\text{-}R)$，并将 $\mathsf{D}_{\mathsf{sg}}(R)$ 视为 $\mathcal{T}^{\mathsf{c}}$ 的满子范畴，由上面的等式可知， $k(\mathfrak{m})$ 属于 $\mathcal{T}^{\mathsf{c}}$ ，但不属于 $\mathcal{T}_c^{\mathsf{b}}$ 。这意味着 $\mathsf{K}_{\mathsf{ac}}(\mathsf{Inj}\text{-}R)$ 不是正则的。现在，若 R 是正则的，则由 Auslander–Buchsbaum 定理可得 gl。 $\dim R < \infty$，因此 $\mathsf{K}_{\mathsf{ac}}(\mathsf{Inj}\text{-}R) \simeq 0$。

(iii) 这由命题 5.3 得出。 □

下面的注记讨论我们对正则性的概念与文献中其他类似概念之间的关系。

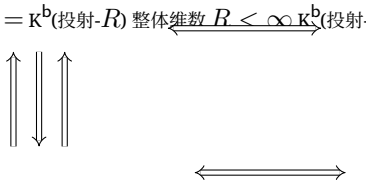
注记 5.10。 设 Γ 是域 k上的微分分次代数。那么对于 k-线性范畴 $\mathcal{T}$ =$\mathsf{D}(\Gamma)$，我们有

$$\mathcal{T}_c^{\mathsf{b}} = \{x \in \mathsf{D}(\Gamma) : \oplus_{n\in\mathbb{Z}} H^n(x) \in \mathsf{mod}\text{-}k\},$$

参见命题 5.3。注意， Γ 是适当的，也就是说， $\oplus_{n\in\mathbb{Z}} H^n(\Gamma)$ 在 k上有限生成，当且仅当$\mathcal{T}^{\mathsf{c}} \subseteq \mathcal{T}_c^{\mathsf{b}}$。此外，当 Γ 光滑时，也就是说， $\Gamma \in \mathsf{per}(\Gamma \otimes_k \Gamma^{\mathsf{op}})$，则 $\mathcal{T}_c^{\mathsf{b}} \subseteq \mathcal{T}^{\mathsf{c}}$；参见 [40, 引理 4.1]的证明。特别地，若 Γ 适当且光滑，则 $\mathcal{T}^{\mathsf{c}} = \mathcal{T}_c^{\mathsf{b}}$，也就是说，$\mathsf{D}(\Gamma)$ 在 k上是正则的。关于小型微分分次增强三角范畴背景下的相关结果，参见 [46, 引理 3.8]。

注 5.11。 更经典的观点或许是，若一个（小）三角范畴存在强生成元 [17]，便称其为“正则”。在我们的设定中，合理的做法是对紧对象提出这一条件，而

原则上，这与我们的定义有所不同。为了说明这一点，我们先回顾一下以下关于 R 诺特环的一般推论。



标记为（$*$）的蕴含对 Artin 代数或局部交换诺特环成立，而对于不成立的蕴含，Nagata 给出了一个例子（我们已在注 3.20 中使用过）。对于非诺特环，存在满足 D^{b}(模-R) $\simeq \mathsf{K}^{\mathsf{b}}$(投射-$R$) 的环，它们的整体维数无限，但 D^{b}(模-R) 的 Rouquier 维数为 0，参见 [67]。近期提出的概念局部正则性 [14] 也不同于我们对正则性的定义；根据 [14, 定理 8.3], ，对于一个域 k 和一个有限群 G ，若 char(k) 整除 G的阶，则三角范畴 K(Inj-kG) 是局部正则的。然而，根据定理 5.9，K(Inj-kG) 按照我们的定义是正则的，当且仅当整体.维数 $kG<\infty$；而在给定假设下，这种情况绝不会发生。

注 5.12. 设 $\mathcal{D}$为一个小三角范畴， G为 $\mathcal{D}$ 中的一个对象，并考虑 $\mathcal{C}_G(\mathcal{D})$，它是相对于 $\mathcal{D}$ 上的"G-良度量"对 $\mathcal{D}$ 进行完备化的结果（即与G所诱导的度量等价的良度量）；详情见 [15, 53] 。根据 [15]，若 $\mathcal{D}$ ($\mathcal{D}$)，则称 $\mathcal{D}$ 在 G 处正则；若它在一个经典生成元 G处正则，则称其为正则。现在假设 $\mathcal{T}$ 是一个紧生成三角范畴，且有一个紧生成元 G ，满足对 $i\gg 0$有 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(G,G[i])=0$ 。令 $\mathcal{D}=\mathcal{T}^{\mathsf{c}}$ ，并如注 5.4 中那样考虑 $\mathcal{T}^{\mathsf{b}}$、$_c\tau$，其中 τ 是由 G诱导的 $\mathcal{T}$ 的 t-结构。那么， $\mathcal{D}$ 在 G处正则，当且仅当 $\mathcal{D}=\mathcal{T}^{\mathsf{b}}$、$_c\tau$。当 $\mathcal{T}$ 可逼近，且对所有 $n\in\mathbb{Z}$, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(G,G[n])$ 属于 mod-k时，我们知道（见注 5.4）， $\mathcal{T}^{\mathsf{b}}$、$_c\tau=\mathcal{T}^{\mathsf{b}}_c$。总之，对于这样的三角范畴 $\mathcal{T}$， $\mathcal{T}^{\mathsf{c}}$ 按照 [15] 的意义正则，当且仅当 $\mathcal{T}$ 按照定义 5.7 的意义正则。

下面的命题告诉我们，我们对奇异范畴的定义与文献中已有的其他定义一致。我们注意到，尽管上面的注记告诉我们， [15] 之后奇异范畴的消失与我们提出的奇异范畴的消失一致，但我们并不清楚在它们不消失时二者有何关系。

命题 5.13. 我们有以下奇异范畴的计算结果。

(i) 对于 *Noether* k-代数 R 和 $\mathcal{T}=D(R)$，有 $\mathcal{T}^{\mathsf{sg}}_k=D^{\mathsf{b}}(mod\text{-}R)/K^{\mathsf{b}}(proj\text{-}R)$。

(ii) 对于域 k上的有限维代数 Λ ，*(a)* 若 $\mathcal{T}=D(\Lambda)$，则有 $\mathcal{T}^{\mathsf{sg}}_k=D^{\mathsf{b}}(mod\text{-}\Lambda)/K^{\mathsf{b}}(proj\text{-}\Lambda)$；*(b)* 若 $\mathcal{T}=K(Inj\text{-}\Lambda)$，则有 $\mathcal{T}^{\mathsf{sg}}_k=D^{\mathsf{b}}(mod\text{-}\Lambda)/K^{\mathsf{b}}(inj\text{-}\Lambda)$。*(iii)* 对于域 k 上的微分分次代数 Γ ，若 $\mathcal{T}=D(\Gamma)$，则 *(a)* 若 Γ 适当（见注 *5.10*），则 $\mathcal{T}^{\mathsf{sg}}_k=D_{\mathsf{fd}}(\Gamma)/per(\Gamma)$；*(b)* 若 Γ 光滑（见注 *5.10*），则 $\mathcal{T}^{\mathsf{sg}}_k=per(\Gamma)/D_{\mathsf{fd}}(\Gamma)$。

证明。 （i）和（ii）的结论可由命题 5.3 中的计算推出，前提是我们证明对于 $\mathcal{T}=\mathsf{K}$(Inj-Λ)，有 $\mathcal{T}^{\mathsf{b}}_c=\mathsf{K}^{\mathsf{b}}$(inj-$\Lambda$)。由上述命题可知， $\mathcal{T}^{\mathsf{b}}_c$ 是 K^{b}(Inj-Λ) $\subseteq\mathrm{Im}(\mathsf{Q}_\rho)$ 的子范畴，其中包含总上同调有限生成的对象。由于 $\mathcal{T}$ 中的紧对象是 $\mathsf{Q}_\rho(\mathsf{D}^{\mathsf{b}}$(mod-$\Lambda$)) 中的对象，因此我们得到

$$\mathcal{T}^{\mathsf{b}}_c=\mathsf{Q}_\rho(\mathsf{D}^{\mathsf{b}}(\text{mod-}\Lambda)^{\overset{\mathsf{hf}}{\hookrightarrow}})\cap\mathsf{K}^{\mathsf{b}}(\text{Inj-}\Lambda)=\mathsf{Q}_\rho(\mathsf{thick}(\Lambda^*))\cap\mathsf{K}^{\mathsf{b}}(\text{Inj-}\Lambda)=\mathsf{Q}_\rho(\mathsf{thick}(\Lambda^*))=\mathsf{K}^{\mathsf{b}}(\text{inj-}\Lambda),$$

其中，第一个等式由 Q_ρ 的全忠实性得出，第二个等式由命题 5.5(ii) 得出，第三和第四个等式则由 Λ^* 是内射的这一事实得出。

对于结论（iii），注意若 Γ 适当，则 per(Γ) $\subseteq\mathsf{D}_{\mathsf{fd}}(\Gamma)$；若 Γ 光滑，则 $\mathsf{D}_{\mathsf{fd}}(\Gamma)\subseteq$per($\Gamma$)（见注 5.10）。因此，在这两种情况下，奇异范畴如所述（另见 [3]）。□

现在，我们将比较一个 k-线性三角范畴的正则性与全局维数有限性。这是定理 4.6 的推广。

定理 5.14. 设 $\mathcal{T}$ 是一个紧生成的 k-线性三角范畴。以下结论成立。

(i) 若 $\mathcal{T}$满足 $(\mathcal{T}^{\mathsf{b}})^{\circlearrowleft}=(\mathcal{T}^{\mathsf{b}}_c)^{\circlearrowleft}$且 $\mathcal{T}$是正则的，则 全局。维数 $\mathcal{T}<\infty$.(ii) 若 $\mathcal{T}^{\mathsf{c}}$ 在 k上 *Hom*-有限， $\mathcal{T}^{\mathsf{b}}_p\cap\mathcal{T}^{\mathsf{b}}_c\subseteq\mathcal{T}^{\mathsf{c}}$ 且 全局。维数 $\mathcal{T}<\infty$，则 $\mathcal{T}$是正则的。

证明。 假设 $\mathcal{T}$是紧生成的、正则的，并满足 $(\mathcal{T}^{\mathsf{b}})^{\circlearrowleft}=(\mathcal{T}^{\mathsf{b}}_c)^{\circlearrowleft}$。将 $(-)^{\circlearrowleft}$应用于等式 $\mathcal{T}^{\mathsf{c}}=\mathcal{T}^{\mathsf{b}}_c$可知， $\mathcal{T}^{\mathsf{b}}=(\mathcal{T}^{\mathsf{b}}_c)^{\circlearrowleft}=(\mathcal{T}^{\mathsf{b}})^{\circlearrowleft}=\mathcal{T}^{\mathsf{b}}_i$，这意味着整体维数 gl。 dim $\mathcal{T}<\infty$。现在假设 $\mathcal{T}^{\mathsf{c}}$在 k上是 Hom-有限的，具有有限整体维数，并满足 $\mathcal{T}^{\mathsf{b}}_p\cap\mathcal{T}^{\mathsf{b}}_c\subseteq\mathcal{T}^{\mathsf{c}}$。由等式 $\mathcal{T}^{\mathsf{b}}=\mathcal{T}^{\mathsf{b}}_p$可得 $\mathcal{T}^{\mathsf{b}}\cap\mathcal{T}^{\mathsf{b}}_c=\mathcal{T}^{\mathsf{b}}_p\cap\mathcal{T}^{\mathsf{b}}_c$。我们有 $\mathcal{T}^{\mathsf{b}}_c\subseteq\mathcal{T}^{\mathsf{b}}$，结合该假设可推出 $\mathcal{T}^{\mathsf{b}}_c\subseteq\mathcal{T}^{\mathsf{c}}$。另一方面，

我们总有 $\mathcal{T}^{c} \subseteq \mathcal{T}_{p}^{b}$，因此 $\mathcal{T}^{c} \subseteq \mathcal{T}^{b}$。由于 $\mathcal{T}$ 是局部 Hom-有限的，故可得 $\mathcal{T}^{c} \subseteq \mathcal{T}_{c}^{b}$，从而证明完成。□

注意，我们已在某些情形下验证了定理的假设。例如，对于 $\mathcal{T} = \mathsf{D}(\Lambda)$，条件 $(\mathcal{T}^{b})^{\perp_{>}} = (\mathcal{T}_{c}^{b})^{\perp_{>}}$ 成立，其中 Λ 是一个 Artin 代数，见注 3.19。此外，对于任意有限维 k-代数，条件 $\mathcal{T}_{p}^{b} \cap \mathcal{T}_{c}^{b} \subseteq \mathcal{T}^{c}$ 对 $\mathcal{T} = \mathsf{D}(\Lambda)$ 和 $\mathcal{T} = \mathsf{K}(\mathrm{Inj}\text{-}\Lambda)$ 均成立；这只需考察这些范畴各自特征子范畴的计算即可。

现在我们可以证明，对于一个适当连通 dg 代数 Γ，在基域满足某些温和假设的条件下，光滑性可以在 $\mathsf{D}(\Gamma)$ 中以内在方式检测。

推论 5.15. *设 $\mathsf{D}(\Gamma)$ 具有有限整体维数的一个适当连通 dg 代数。那么，当且仅当 Γ 光滑，并且全局维数。*

证明。 利用 [62,推论 3.12], ，我们可以假设 Γ 是一个有限维 dg 代数（即严格地说，由有限维向量空间的有界复形给出）。对于这样的 dg 代数，由于我们假设 k 是一个完美域，根据 [29, 推论 2.5] 可知， Γ 光滑当且仅当 $\mathsf{D}_{\mathrm{fd}}(\Gamma) = \mathsf{per}(\Gamma)$。此外，从命题 5.6 的证明中可以观察到，对于 $\mathcal{T} = \mathsf{D}(\Gamma)$，我们同时有 $(\mathcal{T}^{b})^{\perp_{>}} = (\mathcal{T}_{c}^{b})^{\perp_{>}}$ 以及 $\mathcal{T}_{p}^{b} \cap \mathcal{T}_{c}^{b} \subseteq \mathcal{T}^{c}$。于是，根据定理 5.14，$\mathsf{D}(\Gamma)$ 正则当且仅当 $\mathsf{D}(\Gamma)$ 具有有限整体维数。□

6. Application to Recollements

本节研究（完备且余完备）三角范畴与其定义 3.1 中的各种特征子范畴之间的再拼接的存在性。 [5,6] 中研究了环的导出范畴的这一问题。

6.1. **工具箱。** 为准备我们的结果，我们需要一些有用的结果，归纳如下引理 a.

引理 6.1. 设 $\mathsf{F}\colon \mathcal{D} \to \mathcal{T}$ 和 $\mathsf{G}\colon \mathcal{T} \to \mathcal{D}$ 是余积三角范畴之间的两个三角函子。则以下结论成立。

(i) ([6, 引理 4.2]) 若 $\mathsf{F}\colon \mathcal{D} \to \mathcal{T}$ 是完全忠实的且保持余积，则对于任意满足 $\mathsf{F}(x)$ 属于 $\mathcal{T}^{c}$ 的 x，都有 x 属于 $\mathcal{D}^{c}$。(ii) 若 (F,G) 是一个伴随对，且 G 保持余积，则 (a) F 保持紧对象；(b) 若此外 G 是完全忠实的，$\mathcal{T}$ 和 $\mathcal{D}$ 均为紧生成的，且 GF 保持紧对象，则 G 限制为一个函子 $\mathcal{T}^{c} \to \mathcal{D}^{c}$。

证明。 我们证明断言 (ii)(b)。根据 (ii)(a)，函子 F 限制为 $\mathcal{D}^{c} \to \mathcal{T}^{c}$。事实上，我们断言，$\mathsf{F}$ 将 $\mathcal{D}$ 的一组紧生成元 D 映射为 $\mathcal{T}$ 的一组紧生成元。确实，设 x 是 $\mathcal{T}$ 中的一个对象，使得对于所有 n 以及 D 中的每个 d，都有 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(\mathsf{F}(d)\ x[n]) = 0$。由伴随关系可得

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(\mathsf{F}(d), x[n]) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(d, \mathsf{G}(x)[n]),$$

并且由于 D 是紧生成元集，因此可得 $\mathsf{G}(x) = 0$。此外，由于 G 完全忠实，因此可得 $x = 0$。现在考虑子范畴 $\mathcal{U} = \{x \in \mathcal{T} : \mathsf{G}(x) \in \mathcal{D}^{c}\}$ of $\mathcal{T}$，并注意到它是厚子范畴且包含 $\mathsf{F}(D)$。我们有 $\mathsf{F}(D) \subseteq \mathcal{U}$，因此 $\mathsf{thick}(\mathsf{F}(D)) \subseteq \mathcal{U}$。由于 $\mathsf{F}(D)$ 是 $\mathcal{T}$ 的紧生成元集，由 [52, 引理 2.2] 可知 $\mathsf{thick}(\mathsf{F}(D)) = \mathcal{T}^{c}$，由此即可得出结论。□

对于接下来的两个结果，我们固定一个三角范畴的再拼接 $(\mathcal{X},\ \mathcal{T},\ \mathcal{Y})$。

$$\mathcal{X} \underset{\mathsf{p}}{\overset{\mathsf{q}}{\rightleftarrows}} \underset{\mathsf{i}}{\overset{}{\rightleftarrows}} \mathcal{T} \underset{\mathsf{r}}{\overset{\mathsf{l}}{\rightleftarrows}} \underset{\mathsf{e}}{\overset{}{\rightleftarrows}} \mathcal{Y} \tag{6.1}$$

回顾一下，**再拼接**（三角范畴的）是如上所示的三角函子图表，满足 $(\mathsf{q},\ \mathsf{i},\ \mathsf{p})$ 和 $(\mathsf{l},\ \mathsf{e},\ \mathsf{r})$ 是伴随三元组，i、l 和 r 完全忠实，且 $\mathrm{Ker}(\mathsf{e}) = \mathrm{Im}(\mathsf{i})$。根据定义可轻易得出，$(\mathrm{Ker}(\mathsf{q}),\ \mathrm{Im}(\mathsf{i}))$ 和 $(\mathrm{Im}(\mathsf{i}),\ \mathrm{Ker}(\mathsf{r}))$ 是（稳定的）t-结构，其截断函子由给定函子之间伴随关系的单位和余单位给出。关于再拼接的基础内容，请读者参阅原始文献 [12]。我们首先讨论再拼接中的某些函子在紧对象子范畴上的限制。

引理 6.2. 设 $\mathcal{T}$ 是一个完备且余完备三角范畴，并假设存在一个再拼接 (6.1)。以下结论成立。

(i) 如果 i 限制为函子 $\mathcal{X}^{c} \to \mathcal{T}^{c}$，那么 e 就限制为函子 $\mathcal{T}^{c} \to \mathcal{Y}^{c}$。若 $\mathcal{T}$ 是紧生成的，则反之亦然。
(ii) 如果 i 和 e 都限制为紧对象子范畴之间的函子，那么 r 限制为紧对象子范畴之间的函子，当且仅当 p 也如此。

证明。(a) 设 t 是 $\mathcal{T}$ 中的一个紧对象，并考虑以下三角

$$\mathsf{le}(t) \to t \to \mathsf{iq}(t) \to \mathsf{le}(t)[1].$$

根据引理 6.1(ii)(a)，函子 q 和 l 保持紧对象，因为它们分别是保持余积的函子 i 和 e 的左伴随。若 i 限制到 $\mathcal{X}^{\mathsf{c}} \to \mathcal{T}^{\mathsf{c}}$，则 iq($t$) 属于 $\mathcal{T}^{\mathsf{c}}$，因此，根据上述三角，le(t) 也属于其中。由引理 6.1(i)可知 e(t) $\in \mathcal{Y}^{\mathsf{c}}$，因为 l 完全忠实且保持余积。现在假设 $\mathcal{X}$ 和 $\mathcal{T}$ 是紧生成的，且 e 限制到 $\mathcal{T}^{\mathsf{c}} \to \mathcal{Y}^{\mathsf{c}}$。则 le($t$) 属于 $\mathcal{T}^{\mathsf{c}}$，因此，根据上述三角，iq(t) 也属于其中。由引理 6.1(ii)(b)可知，i 限制到紧对象。

(b) 首先假设 p($\mathcal{T}^{\mathsf{c}}$) $\subseteq \mathcal{X}^{\mathsf{c}}$。给定 y 中的一个对象，考虑 $\mathcal{T}$中的以下三角

$$\mathsf{ipl}(y) \to \mathsf{l}(y) \to \mathsf{rel}(y) \to \mathsf{ipl}(y)[1].$$

我们有 l(y) 属于 $\mathcal{T}^{\mathsf{c}}$，并且根据假设，ipl(y) 也属于其中。由上述三角可知，r(y) $\cong$ rel(y) 属于 $\mathcal{T}^{\mathsf{c}}$，这证明了所声称的两个蕴含之一。现在假设 r($\mathcal{Y}^{\mathsf{c}}$) $\subseteq \mathcal{T}^{\mathsf{c}}$。给定 t 中的一个对象，我们考虑 $\mathcal{T}$中的以下三角

$$\mathsf{ip}(t) \to t \to \mathsf{re}(t) \to \mathsf{ip}(t)[1].$$

将 q 作用于后者得到一个三角。注意到 q(t) 属于 $\mathcal{X}^{\mathsf{c}}$，根据假设，我们也有 qre(t) 属于 $\mathcal{X}^{\mathsf{c}}$。由此可得 p(t) $\cong$qip(t) 属于 $\mathcal{X}^{\mathsf{c}}$，证毕。□

以下引理在接下来的几个小节中也很有用。

引理 6.3。考虑一个形如 (6.1) 的再拼接，并设 l($\mathcal{Y}^{\mathsf{b}}$) $\subseteq \mathcal{T}^{\mathsf{b}}$ 且 i($\mathcal{X}^{\mathsf{c}}$) $\subseteq \mathcal{T}^{\mathsf{b}}_p$。以下结论成立：

(i) e($\mathcal{T}^{\mathsf{c}}$) $\subseteq \mathcal{Y}^{\mathsf{b}}_p$。
(ii) q($\mathcal{T}^{\mathsf{b}}$) $\subseteq \mathcal{X}^{\mathsf{b}}$。

证明。(i) 对于 $\mathcal{T}$ 中的紧对象 t，我们有 q(t) 属于 $\mathcal{X}^{\mathsf{c}}$，因此根据引理 2.11(ii)，iq(t) 属于 $\mathcal{T}^{\mathsf{b}}_p$。由引理 3.2，$\mathcal{T}^{\mathsf{c}}$ 包含于 $\mathcal{T}^{\mathsf{b}}_p$，据此我们从以下三角

$$\mathsf{le}(t) \to t \to \mathsf{iq}(t) \to \mathsf{le}(t)[1]$$

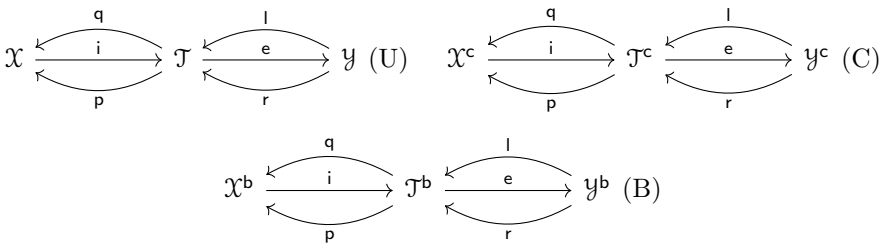
即 le(t) 属于 $\mathcal{T}^{\mathsf{b}}_p$。最后，由于 l($\mathcal{Y}^{\mathsf{b}}$) $\subseteq \mathcal{T}^{\mathsf{b}}$，由引理 2.11(iv) 可得 e($t$) $\in \mathcal{Y}^{\mathsf{b}}_p$。

(ii) 由于函子 q 和 l 在紧对象上限制成立，由引理 2.11(i) 可知，函子 i 和 e 在有界对象上限制成立。结合 l 将有界对象映为有界对象这一假设，对于对象 t in $\mathcal{T}^{\mathsf{b}}$，有 le(t) 属于 $\mathcal{T}^{\mathsf{b}}$。考虑三角

$$\mathsf{le}(t) \to t \to \mathsf{iq}(t) \to \mathsf{le}(t)[1],$$

我们看到 iq(t) 也属于 $\mathcal{T}^{\mathsf{b}}$。由于根据假设 i($\mathcal{X}^{\mathsf{c}}$) $\subseteq \mathcal{T}^{\mathsf{b}}_p$，并且由命题 3.2(i) 知道 $\mathcal{T}^{\mathsf{b}} = (\mathcal{T}^{\mathsf{b}}_p)^{\perp\perp}$，将引理 2.11(iii) 应用于这一包含关系可得，q(t) 属于 $(\mathcal{X}^{\mathsf{c}})^{\perp\perp} = \mathcal{X}^{\mathsf{b}}$。□

6.2. **限制再拼接**。考虑以下几类再拼接，其中假设 $\mathcal{T}$、$\mathcal{X}$ 和 $\mathcal{Y}$ 是紧生成三角范畴。



我们将研究形如 (U) 的再拼接限制为形如 (C) 或形如 (B) 的再拼接的充要条件。下面是 [6, 定理 4.4] 的三角化版本。

Pr命题 6.4. 设 $\mathcal{T}$、$\mathcal{X}$ 和 $\mathcal{Y}$ 为紧生成三角范畴。以下条件等价：(i) 类型为 (U) 的再拼接限制为类型(C) 的再拼接；(ii) 函子i和p 限制到紧对象；(iii) 函子e 和r 限制到紧对象。

证明。(i)$\Longrightarrow$(ii) 显然，而蕴含关系 (ii)$\Longrightarrow$(iii) 和 (iii)$\Longrightarrow$(i) 则由引理 6.2 以及 q 和 l 总是限制到紧对象这一事实得出。□

下面是 [6,命题 4.8] 的三角化版本。

命题 6.5。设 $\mathcal{T}$、$\mathcal{X}$ 和 $\mathcal{Y}$ 为紧生成三角范畴。以下条件等价：(i) 类型 (U)的再拼接限制为类型 (B)的再拼接。

(ii) $\mathsf{i}(\mathcal{X}^{\mathsf{c}}) \subseteq \mathcal{T}_p^{\mathsf{b}}$ 和 $\mathsf{l}(\mathcal{Y}^{\mathsf{b}}) \subseteq \mathcal{T}^{\mathsf{b}}$。

证明。 我们先证明 (i)$\Longrightarrow$(ii)。由假设可知 $\mathsf{l}(\mathcal{Y}^{\mathsf{b}}) \subseteq \mathcal{T}^{\mathsf{b}}$，因此只需证明 $\mathsf{i}(\mathcal{X}^{\mathsf{c}}) \subseteq \mathcal{T}_p^{\mathsf{b}}$。由于函子 $\mathsf{p}\colon \mathcal{T} \to \mathcal{X}$ 限制于有界对象，由引理 2.11(ii)可知，函子 $\mathsf{i}\colon \mathcal{X} \to \mathcal{T}$ 限制于有界投射对象。由引理 3.2(i)，我们有 $\mathcal{X}^{\mathsf{c}} \subseteq \mathcal{X}_p^{\mathsf{b}}$，这就完成了该断言的证明。现在证明 (ii)$\Longrightarrow$(i)。由于函子 q 和 l 限制于紧对象，由引理 2.11(i)可知，函子 i 和 e 限制于有界对象。此外，由于 $\mathsf{i}(\mathcal{X}^{\mathsf{c}}) \subseteq \mathcal{T}_p^{\mathsf{b}}$，由引理 2.11(i)和引理 3.2可知 $\mathsf{p}(\mathcal{T}^{\mathsf{b}}) \subseteq \mathcal{X}^{\mathsf{b}}$。由引理 6.3(i)和假设可知，$\mathsf{e}(\mathcal{T}^{\mathsf{c}}) \subseteq \mathcal{Y}_p^{\mathsf{b}}$。然后，按照上述相同的论证，我们得到 $\mathsf{r}(\mathcal{Y}^{\mathsf{b}}) \subseteq \mathcal{T}^{\mathsf{b}}$。最后，再由引理 6.3和假设可知，$\mathsf{q}(\mathcal{T}^{\mathsf{b}}) \subseteq \mathcal{X}^{\mathsf{b}}$，由此完成证明。□

下面的注记具有独立的意义。

注记 6.6. 回顾 [44, 附录 C.]，三角范畴 $\mathcal{T}$ 的态射增强 是指一个三角范畴 $\mathcal{U}$，它带有一个全忠实函子 $\mathsf{i}\colon \mathcal{T} \to \mathcal{U}$，并且该函子处于一个再拼接中

$$\mathcal{T} \underset{\mathsf{p}}{\overset{\mathsf{q}}{\rightleftarrows}} \mathcal{U} \underset{\mathsf{r}}{\overset{\mathsf{l}}{\rightleftarrows}} \mathcal{T}$$

使得 (p,l) 构成一个伴随对。这个再拼接属于一个无限阶梯（见 [44, 命题 C.3.]），由命题 6.5 可知，$\mathcal{U}^{\mathsf{b}}$ 是 $\mathcal{T}^{\mathsf{b}}$的态射增强。

现在假设 $\mathcal{T}$ 是紧生成的，并且是交换诺特环 k上的 k-线性的。我们考察 (U) 型再拼接能否限制为如下的再拼接:

$$\mathcal{X}_c^{\mathsf{b}} \underset{\mathsf{p}}{\overset{\mathsf{q}}{\rightleftarrows}} \mathcal{T}_c^{\mathsf{b}} \underset{\mathsf{r}}{\overset{\mathsf{l}}{\rightleftarrows}} \mathcal{Y}_c^{\mathsf{b}}. \quad (\mathrm{B}')$$

为了证明下一个结论，我们还需要对 $\mathcal{T}$ 增加一个条件。许多值得关注的范畴都满足这一条件，其内容是以下等式

$$\mathcal{T}^{\mathsf{c}} = \overset{\mathsf{hf}}{\hookrightarrow}(\mathcal{T}_c^{\mathsf{b}}). \tag{6.2}$$

事实上，对于有限维代数的导出范畴，这一条件成立，参见 [6,引理 2.4], ; 对于域上射影概形的导出范畴，参见 [66, 引理 7.49] ; 对于适当微分分次代数的导出范畴，参见 [1, 引理 4.13]。利用这一条件，我们可以证明 [6, 定理 4.6]的三角化版本。

命题 6.7. 设 $\mathcal{T}$、 $\mathcal{X}$ 和 $\mathcal{Y}$ 是交换诺特环 k 上紧生成的 k-线性三角范畴。若 $\mathsf{i}(\mathcal{X}^{\mathsf{c}}) \subseteq \mathcal{T}^{\mathsf{c}}$ 且 $\mathsf{l}(\mathcal{Y}_c^{\mathsf{b}}) \subseteq \mathcal{T}_c^{\mathsf{b}}$，则类型 (U) 的再拼接可限制为类型(B′)的再拼接。此外，若 $\mathcal{X}$ 和 $\mathcal{T}$ 满足 (6.2)，则逆命题也成立。

证明。 假设 $\mathsf{i}(\mathcal{X}^{\mathsf{c}}) \subseteq \mathcal{T}^{\mathsf{c}}$ 且 $\mathsf{l}(\mathcal{Y}_c^{\mathsf{b}}) \subseteq \mathcal{T}_c^{\mathsf{b}}$。由关于函子 i 的假设，根据引理 6.2 可知函子 e 保持紧对象。因此，函子 $\mathsf{i},\mathsf{e},\mathsf{r}$ 和 p 可限制到有界有限对象（因为它们是保持紧对象的函子的右伴随）。由假设 $\mathsf{l}(\mathcal{Y}_c^{\mathsf{b}}) \subseteq \mathcal{T}_c^{\mathsf{b}}$，我们只需证明包含关系 $\mathsf{q}(\mathcal{T}_c^{\mathsf{b}}) \subseteq \mathcal{X}_c^{\mathsf{b}}$。取 $\mathcal{T}_c^{\mathsf{b}}$ 中的 t，考虑三角

$$\mathsf{le}(t) \to t \to \mathsf{iq}(t) \to \mathsf{le}(t)[1].$$

根据上述考虑，$\mathsf{le}(t)$ 属于 $\mathcal{T}_c^{\mathsf{b}}$，因此可知 $\mathsf{iq}(t)$ 属于 $\mathcal{T}_c^{\mathsf{b}}$。由于 i 是完全忠实的，由引理 2.11(i) 可推得 $\mathsf{q}(t)$ 属于 $\mathcal{X}_c^{\mathsf{b}}$。反之，设 $\mathcal{X}$ 和 $\mathcal{T}$ 满足（6.2）。于是有 $\mathsf{i}(\mathcal{X}^{\mathsf{c}}) = \mathsf{i}(\overset{\mathsf{hf}}{\hookrightarrow}(\mathcal{X}_c^{\mathsf{b}})) \subseteq \overset{\mathsf{hf}}{\hookrightarrow}(\mathcal{T}_c^{\mathsf{b}}) = \mathcal{T}^{\mathsf{c}}$，其中包含关系由使用引理 2.11(ii) 得到的包含关系 $\mathsf{p}(\mathcal{T}_c^{\mathsf{b}}) \subseteq \mathcal{X}_c^{\mathsf{b}}$ 推出。□

6.3. **同调性质与再拼接**。在本小节中，我们比较再拼接中的范畴的正则性、内射生成性以及有限性维数的有限性。

我们首先给出一个关于奇点范畴与再拼接的结果，其精神与文献中类似的众所周知结果一致；例如， [35, 推论 4.2] 将利用命题 5.13由该结果推出。

T定理 6.8. 考虑一个紧生成的 k-线性三角范畴的再拼接 s

$$\mathcal{X} \underset{\mathsf{p}}{\overset{\mathsf{q}}{\rightleftarrows}} \mathcal{T} \underset{\mathsf{r}}{\overset{\mathsf{l}}{\rightleftarrows}} \mathcal{Y}$$

满足 $\mathcal{X}^{\mathsf{c}} \subseteq \mathcal{X}_c^{\mathsf{b}}, \mathcal{T}^{\mathsf{c}} \subseteq \mathcal{T}_c^{\mathsf{b}}$和 $\mathcal{Y}^{\mathsf{c}} \subseteq \mathcal{Y}_c^{\mathsf{b}}$。以下结论成立:

(i) 函子 i 诱导出等价 $\mathcal{X}^{\mathsf{sg}}_k \xrightarrow{\simeq} \mathcal{T}^{\mathsf{sg}}_k$，当且仅当 $\mathcal{Y}$ 是正则的。(ii) 函子 e 诱导出等价 $\mathcal{T}^{\mathsf{sg}}_k \xrightarrow{\simeq} \mathcal{Y}^{\mathsf{sg}}_k$，当且仅当 $\mathsf{i}(\mathcal{X}^{\mathsf{c}}) \subseteq \mathcal{T}^{\mathsf{c}}$ 且 $\mathcal{X}$ 是正则的。

证明。 (i) 首先假设 $\mathcal{Y}$ 是正则的。由于函子 l 保持紧对象，因此可得 $\mathsf{e}(\mathcal{T}^{\mathsf{b}}_c) \subseteq \mathcal{Y}^{\mathsf{b}}_c = \mathcal{Y}^{\mathsf{c}}$。根据假设，$\mathcal{T}^{\mathsf{c}} \subseteq \mathcal{T}^{\mathsf{b}}_c$，因此 $\mathsf{e}(\mathcal{T}^{\mathsf{c}}) \subseteq \mathcal{Y}^{\mathsf{c}}$。由引理 6.2 可知，函子 i 也保持紧对象。此外，我们有 $\mathsf{i}(\mathcal{X}^{\mathsf{b}}_c) \subseteq \mathcal{T}^{\mathsf{b}}_c$（因为 q 保持紧对象），因此存在短正合列 $\mathcal{X}^{\mathsf{sg}}_k \to \mathcal{T}^{\mathsf{sg}}_k \to \mathcal{Y}^{\mathsf{sg}}_k$，差一个直和项（例如参见 [35, 引理 3.1]）。由于 $\mathcal{Y}$是正则的，结论成立。

现在假设 i 诱导了等价 $\mathcal{X}^{\mathsf{sg}}_k \to \mathcal{T}^{\mathsf{sg}}_k$。那么，特别地，$\mathsf{i}(\mathcal{X}^{\mathsf{c}}) \subseteq \mathcal{T}^{\mathsf{c}}$。由引理 6.2 可知，函子 e 保持紧对象；再由与上文相同的论证，存在短正合列 $\mathcal{X}^{\mathsf{sg}}_k \to \mathcal{T}^{\mathsf{sg}}_k \to \mathcal{Y}^{\mathsf{sg}}_k$，差一个直和项。由于假设函子 i: $\mathcal{X}^{\mathsf{sg}}_k \to \mathcal{T}^{\mathsf{sg}}_k$ 是等价，因此可得 $\mathcal{Y}^{\mathsf{sg}}_k \simeq 0$，即 $\mathcal{Y}$ 是正则的。

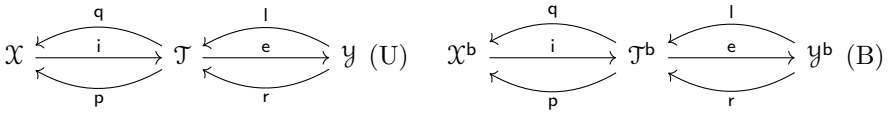
(ii) 首先假设 $\mathsf{i}(\mathcal{X}^{\mathsf{c}}) \subseteq \mathcal{T}^{\mathsf{c}}$，且 $\mathcal{X}$ 是正则的。由引理 6.2 可知，函子 e 保持紧对象；又由于 i 和 e 都保持有界有限对象（因为它们是保持紧性的函子的右伴随），因此可知存在一个短正合列 $\mathcal{X}^{\mathsf{sg}}_k \to \mathcal{T}^{\mathsf{sg}}_k \to \mathcal{Y}^{\mathsf{sg}}_k$，相差直和项。由于假设 $\mathcal{X}$ 是正则的，因此可知 $\mathcal{X}^{\mathsf{sg}}_k \simeq 0$，即 e: $\mathcal{T}^{\mathsf{sg}}_k \to \mathcal{Y}^{\mathsf{sg}}_k$ 是一个等价。

现在假设 e 诱导一个等价 $\mathcal{T}^{\mathsf{sg}}_k \to \mathcal{Y}^{\mathsf{sg}}_k$。那么，特别地，$\mathsf{e}(\mathcal{T}^{\mathsf{c}}) \subseteq \mathcal{Y}^{\mathsf{c}}$，因此由引理 6.2 可知，函子 i 保持紧性。像之前一样，我们可推出存在一个短正合列$\mathcal{X}^{\mathsf{sg}}_k \to \mathcal{T}^{\mathsf{sg}}_k \to \mathcal{Y}^{\mathsf{sg}}_k$，相差直和项；又由于 $\mathcal{T}^{\mathsf{sg}}_k \to \mathcal{Y}^{\mathsf{sg}}_k$ 是一个等价，因此可知 $\mathcal{X}^{\mathsf{sg}}_k \simeq 0$，从而 $\mathcal{X}$ 是正则的。□

注记 6.9. 注意，利用命题 5.13，我们也可以得到 [35, 推论 5.2] 的三角类比。若假设存在如上命题所述的紧生成三角范畴的再拼接，且满足 $\mathcal{X}^{\mathsf{b}}_c \subseteq \mathcal{X}^{\mathsf{c}}$、$\mathcal{T}^{\mathsf{b}}_c \subseteq \mathcal{T}^{\mathsf{c}}$ 和 $\mathcal{Y}^{\mathsf{b}}_c \subseteq \mathcal{Y}^{\mathsf{c}}$，则有以下结论。

(i) 函子 i 诱导等价 $\mathcal{X}^{\mathsf{sg}}_k \xrightarrow{\simeq} \mathcal{T}^{\mathsf{sg}}_k$，当且仅当 $\mathsf{e}(\mathcal{T}^{\mathsf{c}}) \subseteq \mathcal{Y}^{\mathsf{c}}$ 且 $\mathcal{Y}$ 正则。(ii) 函子 e 诱导等价 $\mathcal{T}^{\mathsf{sg}}_k \xrightarrow{\simeq} \mathcal{Y}^{\mathsf{sg}}_k$，当且仅当 $\mathcal{X}$ 正则。

现在考虑第 6.2 小节中的 (U) 型和 (B) 型再拼接。

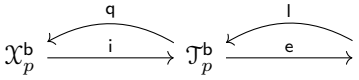


已知，对于环 A、B和 C，若存在有界导出范畴的再拼接 ($\mathsf{D}^{\mathsf{b}}(A)$，$\mathsf{D}^{\mathsf{b}}(B)$，$\mathsf{D}^{\mathsf{b}}(C)$)，则 $\operatorname{gl.dim} B < \infty$ 当且仅当 $\operatorname{gl.dim} A < \infty$ 且 $\operatorname{gl.dim} C < \infty$。对于无界导出范畴的再拼接，结论也相同（见 [6, 命题 2.14]）。下面我们将在有界投射对象均有界这一假设下，给出这些结果的一个三角类比。

命题 6.10。 假设 $\mathcal{X}$、$\mathcal{Y}$ 和 $\mathcal{T}$ 是三角范畴，且有界投射对象是有界的。则以下结论成立。

(i) 若存在一个类型为 (B) 的再拼接，则 整体维数。$\mathcal{T} < \infty$ 有限，当且仅当 整体维数。$\mathcal{X} < \infty$ 和 整体维数。$\mathcal{Y} < \infty$ 有限。
(ii) 若存在一个类型为 (U) 的再拼接，且 整体维数。$\mathcal{X} < \infty$ 和 整体维数。$\mathcal{Y} < \infty$ 有限，则 整体维数。$\mathcal{T} < \infty$ 有限。

证明。 (i) 根据引理 2.11 中使用的相同论证，我们的假设保证给定再拼接中的函子限制为以下形式的余局部化序列



假设 gl。 $\dim \mathcal{T} < \infty$，并设 y 是 $\mathcal{Y}^{\mathsf{b}}$ 中的一个对象。那么 $\mathsf{l}(y)$ 属于 $\mathcal{T}^{\mathsf{b}} = \mathcal{T}^{\mathsf{b}}_p$。由于 l 完全忠实且 $\mathsf{l}(\mathcal{Y}^{\mathsf{b}}) \subseteq \mathcal{T}^{\mathsf{b}}$，由引理 2.11 可知 y 属于 $\mathcal{Y}^{\mathsf{b}}_p$，即 gl。 $\dim \mathcal{Y} < \infty$。对 $\mathcal{X}$ 使用函子 i 也可作相同论证。现在假设 $\mathcal{X}$ 和 $\mathcal{Y}$ 具有有限整体维数。设 t 是 $\mathcal{T}^{\mathsf{b}}$ 中的一个对象，并考虑三角

$$\mathsf{le}(t) \to t \to \mathsf{iq}(t) \to \mathsf{le}(t)[1].$$

我们有 $\mathsf{e}(t)$ 属于 $\mathcal{Y}^{\mathsf{b}} = \mathcal{Y}^{\mathsf{b}}_p$，而 $\mathsf{q}(t)$ 属于 $\mathcal{X}^{\mathsf{b}} = \mathcal{X}^{\mathsf{b}}_p$。因此，$\mathsf{le}(t)$ 属于 $\mathcal{T}^{\mathsf{b}}_p$，而 $\mathsf{iq}(t)$ 属于 $\mathcal{T}^{\mathsf{b}}_p$。由上述三角可推知，$t$ 属于 $\mathcal{T}^{\mathsf{b}}_p$，即 $\mathcal{T}$ 具有有限整体维数。

(ii) 根据 (i)，只需证明当 $\operatorname{gl.dim} \mathcal{X} < \infty$ 和 $\operatorname{gl.dim} \mathcal{Y} < \infty$时，给定的再拼接限制为一个 (B) 型再黏合。由命题 6.5，这等价于 $\mathsf{i}(\mathcal{X}^{\mathsf{c}}) \subseteq \mathcal{T}^{\mathsf{b}}_p$ 和 $\mathsf{l}(\mathcal{Y}^{\mathsf{b}}) \subseteq \mathcal{T}^{\mathsf{b}}$。我们先证明前者。对于 t $\mathcal{T}$的一个紧对象，我们考虑以下三角

$$\mathsf{le}(t) \to t \to \mathsf{iq}(t) \to \mathsf{le}(t)[1].$$

由于 $\mathsf{e}(t) \in \mathcal{Y}^{\mathfrak{b}} = \mathcal{Y}_p^{\mathfrak{b}}$，我们推得 $\mathsf{le}(t) \in \mathcal{T}_p^{\mathfrak{b}}$。由上述三角可知，对于每个 $t \in \mathcal{T}^{\mathfrak{c}}$，$\mathsf{iq}(t) \in \mathcal{T}_p^{\mathfrak{b}}$。由于 $\mathcal{X}^{\mathfrak{c}} =$ 是厚子范畴 $\mathsf{thick}(\mathsf{q}(\mathcal{T}^{\mathfrak{c}}))$，结论得证。现在我们证明 $\mathsf{q}(\mathcal{Y}^{\mathfrak{b}}) \subseteq \mathcal{T}^{\mathfrak{b}}$。事实上，我们有 $\mathcal{Y}^{\mathfrak{b}} = \mathcal{Y}_p^{\mathfrak{b}}$，因此有包含关系 $\mathsf{q}(\mathcal{Y}^{\mathfrak{b}}) = \mathsf{q}(\mathcal{Y}_p^{\mathfrak{b}}) \subseteq \mathcal{T}_p^{\mathfrak{b}} \subseteq \mathcal{T}^{\mathfrak{b}}$，证明完毕。□

现在我们讨论内射生成，给出 [28, 命题 6.5 和 6.6]的一个版本。

命题 6.11。设 $\mathcal{X}$、$\mathcal{Y}$ 和 $\mathcal{T}$ 是再拼接（类型 (U)）中的三角范畴。

(i) 如果像$(\mathsf{i}) \subseteq \mathsf{Loc}(\mathcal{T}_i^{\mathfrak{b}})$，且内射对象生成 $\mathcal{Y}$，则内射对象生成 $\mathcal{T}$。(ii) 如果$\mathsf{i}(\mathcal{X}_i^{\mathfrak{b}}) \subseteq \mathcal{T}_i^{\mathfrak{b}}$，且内射对象生成 $\mathcal{X}$ 和 $\mathcal{Y}$，则内射对象生成 $\mathcal{T}$。(iii) 如果$\mathsf{e}(\mathcal{T}_i^{\mathfrak{b}}) \subseteq \mathcal{Y}_i^{\mathfrak{b}}$，且内射对象生成 $\mathcal{T}$，则内射对象生成 $\mathcal{Y}$。

证明。(i) 设 y 是 $\mathcal{Y}_i^{\mathfrak{b}}$ 中的一个对象，并注意到，根据引理 2.11(i)，$\mathsf{r}(y)$ 是 $\mathcal{T}_i^{\mathfrak{b}}$ 中的一个对象。考虑 $\mathcal{T}$中的如下三角

$$\mathsf{ler}(y) \to \mathsf{r}(y) \to \mathsf{iqr}(y) \to \mathsf{ler}(y)[1].$$

由于像(i) $\subseteq \mathsf{Loc}(\mathcal{T}_i^{\mathfrak{b}})$，我们得出 $\mathsf{ler}(y)$ 属于 $\mathsf{Loc}(\mathcal{T}_i^{\mathfrak{b}})$。然而，我们有 $\mathsf{ler}(y) \cong \mathsf{l}(y)$，因此函子 l 将 $\mathcal{Y}_i^{\mathfrak{b}}$ 映射到 $\mathsf{Loc}(\mathcal{T}_i^{\mathfrak{b}})$。由于内射对象生成 $\mathcal{Y}$，且 l 保持余积，因此可得像 (l) $\subseteq \mathsf{Loc}(\mathcal{T}_i^{\mathfrak{b}})$。对于 $\mathcal{T}$ 中的任意 t，考虑三角

$$\mathsf{le}(t) \to t \to \mathsf{iq}(t) \to \mathsf{le}(t)[1].$$

$\mathsf{le}(t)$ 和 $\mathsf{iq}(t)$ 都包含在 $\mathsf{Loc}(\mathcal{T}_i^{\mathfrak{b}})$ 中，这表明 t 也包含在 $\mathsf{Loc}(\mathcal{T}_i^{\mathfrak{b}})$ 中。

(ii) 根据假设以及 i 保持余积这一事实，可知 $\mathsf{Im(i)} \subseteq \mathsf{Loc}(\mathcal{T}_i^{\mathfrak{b}})$。由此可根据 (i) 推出所述结论。

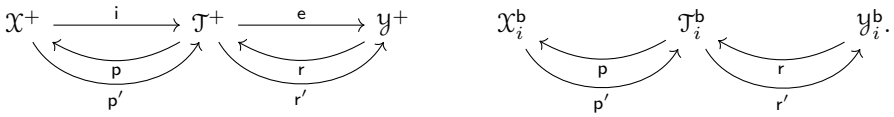
(iii) 结合假设以及 e 保持余积这一事实，可知 $\mathsf{Im(e)} \subseteq \mathsf{Loc}(\mathcal{Y}_i^{\mathfrak{b}})$。但 $\mathsf{Ime} = \mathcal{Y}$，因为 e 本质满射。□

关于有限维数的有限性，我们证明定理 1.1] 的一个版本。

命题 6.12 节。假设 $\mathcal{X}$、$\mathcal{Y}$ 和 $\mathcal{T}$ 是再拼接中类型为 (U)的三角范畴。

(i) 假设 *p* 存在右伴随 *p′*，使得 $p'(\mathcal{X}^+) \subseteq \mathcal{T}^+$，且 *r* 存在右伴随 *r′*，使得 $r'(\mathcal{T}^+) \subseteq \mathcal{Y}^+$。则有以下结论：*(a)* 若 *Fin. dim* $\mathcal{X} < \infty$ 且 *Fin. dim* $\mathcal{Y} < \infty$，则 *Fin. dim* $\mathcal{T} < \infty$；*(b)* 若 *Fin. dim* $\mathcal{T} < \infty$，则 *Fin. dim* $\mathcal{X} < \infty$。*(ii)* 假设 $l(\mathcal{Y}^{\mathfrak{b}}) \subseteq \mathcal{T}^{\mathfrak{b}}$ 且 $r(\mathcal{Y}^+) \subseteq \mathcal{T}^+$。若 *Fin. dim* $\mathcal{T} < \infty$，则 *Fin. dim* $\mathcal{Y} < \infty$。

Proof. (i) 在给定假设下，利用引理 2.11，我们可以得到函子的存在性 s:



(a) 考虑 $\mathcal{T}_i^{\mathfrak{b}\perp} \cap \mathcal{T}^+$ 中的一个对象 t。我们首先声称，$\mathsf{r}'(t)$ 属于 $\mathcal{Y}_i^{\mathfrak{b}\perp} \cap \mathcal{Y}^+$。事实上，给定 $\mathcal{Y}_i^{\mathfrak{b}}$ 中的 y，对于所有 $\mathbb{Z}$ 中的 n，

$$\mathsf{Hom}_{\mathcal{Y}}(y, \mathsf{r}'(t)[n]) \cong \mathsf{Hom}_{\mathcal{T}}(\mathsf{r}(y), t[n]) \cong 0$$

从而得出该结论。由于我们假设 $\mathcal{Y}$具有有限 finitistic 维数，因此 $\mathsf{r}'(t) \cong 0$。consequently，利用三角

$$\mathsf{p}'\mathsf{p}(t) \to t \to \mathsf{r}\mathsf{r}'(t) \to \mathsf{p}'\mathsf{p}(t)[1],$$

我们推断 $\mathsf{p}'\mathsf{p}(t) \cong t$。现在设 x 是 $\mathcal{X}_i^{\mathfrak{b}}$中的一个对象。那么，对于所有 $n \in \mathbb{Z}$，我们有

$$0 \cong \mathsf{Hom}_{\mathcal{T}}(\mathsf{p}'(x), t[n]) \cong \mathsf{Hom}_{\mathcal{T}}(\mathsf{p}'(x), \mathsf{p}'\mathsf{p}(t)) \cong \mathsf{Hom}_{\mathcal{X}}(x, \mathsf{p}(t)[n]).$$

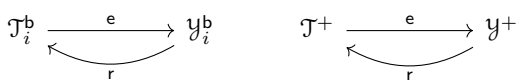
因此，我们得到 th at $\mathsf{p}(t)$属于 $\mathcal{X}_i^{\mathfrak{b}\perp} \cap \mathcal{X}^+$。由于我们假设 $\mathcal{X}$ 具有有限 finitisic 维数，因此 th at $\mathsf{p}(t) \cong 0$ 以及 因此 $t \cong \mathsf{p}'\mathsf{p}(t) \cong 0$。

(b) 考虑一个对象 x 属于 $\mathcal{X}_i^{\mathfrak{b}\perp} \cap \mathcal{X}^+$。那么，对于 t 属于 $\mathcal{T}_i^{\mathfrak{b}}$，我们有

$$0 \cong \mathsf{Hom}_{\mathcal{X}}(\mathsf{p}(t), x[n]) \cong \mathsf{Hom}_{\mathcal{T}}(t, \mathsf{p}'(x)[n])$$

对于所有 n 属于 $\mathbb{Z}$。因此，我们得到 $\mathsf{p}'(x)$ 属于 $\mathcal{T}_i^{\mathfrak{b}\perp} \cap \mathcal{T}^+$。由于我们假设 $\mathcal{T}$ 具有有限 finitistic 维数，因此可知 $\mathsf{p}'(x) \cong 0$；又由于 p' 是完全忠实的，我们推得 $x \cong 0$。

(ii) 在 给定的假设下，利用引理 2.11，可得以下函子的存在性



考虑 y 的一个对象 $\mathcal{Y}_i^{\mathfrak{b}\perp} \cap \mathcal{Y}^+$。对于 $\mathcal{T}_i^{\mathfrak{b}}$ 中的 t，我们有

$$0 \cong \mathsf{Hom}_{\mathcal{Y}}(\mathsf{e}(t), y[n]) \cong \mathsf{Hom}_{\mathcal{T}}(t, \mathsf{r}(y)[n])$$

对于所有 $\mathbb{Z}$ 中的 n，因此，$\mathrm{r}(y)$ 属于 $\mathcal{T}_i^{\flat\perp} \cap \mathcal{T}^+$。由于我们假设 $\mathcal{T}$ 具有有限 finitistic 维数，因此 $\mathrm{r}(y) \cong 0$；又由于 r 是完全忠实的，$y \cong 0$。□

References

[1] T. Adachi, Y. Mizuno, D. Yang, *Discreteness of silting objects and t-structures in triangulated categories*, 《伦敦数学会会刊》 (3) 118 (2019), 第1期, 1–42. [2] T. Aihara, O. Iyama, *Silting mutation in triangulated categories*, 《伦敦数学会杂志》 (2) 85 (2012), 第3期, 633–668. [3] C. Amiot, *Cluster categories for algebras of global dimension 2 and quivers with potential*, 傅立叶研究所年刊 (格勒诺布尔) 59 (2009), 第6期, 2525–2590. [4] F. Anderson, K. Fuller, *Rings and categories of modules*, 第二版, 《数学研究生教材》13, 施普林格出版社, 纽约, 1992年。x+376 页。[5] L. Angeleri Hügel, S. Koenig, Q. Liu,
On the uniqueness of stratifications of derived module categories, 代数杂志 359 (2012), 120–137. [6] L. Angeleri Hügel,
S. Koenig, Q. Liu, D. Yang, *Ladders and simplicity of derived module categories*, 代数杂志 472, 15-66 (2017).
[7] L. Angeleri Hügel, F. Marks, J. Vitória, *Partial silting objects and smashing subcategories*, 《数学杂志》296, 887-900 (2020). [8] K. Aoki, *Quasiexcellence implies strong generation*, 纯粹与应用数学杂志 780 (2021), 133–138. [9] M. Auslander,
I. Reiten, *Applications of contravariantly finite subcategories*, 《数学进展》86, 第1期, 111-152 (1991). [10] M. Auslander,
I. Reiten, S. Smalø, *Representation theory of Artin algebras*, 剑桥高等数学研究, 36, 剑桥大学出版社, 剑桥, 1995年。xiv+423 页。[11] L.L. Avramov, O. Veliche, *Stable cohomology of local rings*, 《数学进展》213 (2007), 第1期, 93–139. [12] A. Beilinson,
J. Bernstein, P. Deligne, *Faisceaux pervers*, 《奇异空间上的分析与拓扑》, I (吕米尼, 1981), 5–171. Ast´erisque, 100, 法国数学会, 巴黎, 1982年。[13] A. Beligiannis,
Cohen-Macaulay modules (co)torsion pairs and virtually Gorenstein algebras 288 2005 1, , , 代 137 211
数杂志 ( ), 第–期。[14] D. Benson, S. Iyengar, H. Krause, J. Pevtsova,
Locally dualisable modular representations and local regularity, arxiv:2404.14672。[15] R. Biswas, H. Chen,
K. Manali Rahul, C. Parker, J. Zheng,
Bounded t-structures finitistic dimensions and singularity , , , categories of triangulated categories 2401 00130
arXiv: . .[16] M. Bokstedt, A. Neeman, *Homotopy limits in triangulated categories*, Compositio Mathematica 86 (1993), 第2期, 209–234. [17] A. Bondal, M. Van den Bergh,
Generators and representability of functors in commutative and noncommutative geometry, 莫斯科数学杂志 3 (2003), 1–36.
[18] S. Breaz, C. Rafiliu, *Comparing* 直和闭包(M) *with* 直积闭包(M), 代数杂志 682 (2025年), 804–823. [19] R.-O. Buchweitz,
Maximal Cohen–Macaulay modules and Tate-cohomology over Gorenstein rings, 汉诺威大学, 1986年。[20] J. Burke,
A. Neeman, B. Pauwels, *Gluing approximable triangulated categories*, Forum Mathematicum Sigma 11 (2023), 论文编号 e110, 共18页。[21] A. Canonaco, A. Neeman, P. Stellari,
Weakly approximable triangulated categories and enhancements: a survey, 意大利数学联合会通报 18 (2025年), 第1期, 109–134.
[22] A. Canonaco, A. Neeman, P. Stellari, 附录由 C. Haesemeyer, *The passage among subcategories of weakly approximable triangulated categories* 2402 04605 撰写,
arXiv: . .[23] H. Chen, C. Xi, *Recollements of derived categories III: finitistic dimensions*, 《伦敦数学会杂志》 (2) 95 (2017), 第2期, 633–658. [24] X.-W. Chen,
Singularity categories Schur functors and triangular matrix rings 12, 2 5, , , 代 181 191 2009
数与表示论 第- -期 ( ). [25] X.-W. Chen *The singularity category of an algebra with radical square zero*, 数学文献 16 (2011), 921–936. [26] X.-W. Chen, Z.-W. Li, X. Zhang, Z. Zhao, *A non-vanishing result on the singularity category*, 《美国数学会会刊》152 (2024年), 第9期, 3765–3776. [27] T. Conde, M. Gorsky, F. Marks, A Zvonareva, *A functorial approach to rank functions*, 纯粹与应用数学杂志 811 (2024年), 135–181。[28] C. Cummings,
Ring Constructions and Generation of the Unbounded Derived Module Category, 代数与表示论 26 (2023年), 第1期, 281–315.
[29] I. Goodbody, *Reflecting perfection for finite-dimensional differential graded algebras*, 伦敦数学会通报 56 (2024年), 第12期, 3689–3707. [30] I. Goodbody, *Approximable Triangulated Categories and Reflexive DG-categories*, arXiv:2411.09461v1。
[31] D. Happel, *On Gorenstein algebras*, 收录于: 《有限群与有限维代数的表示论》(比勒费尔德, 1991), 数学进展丛书95, 389–404 (1991). [32] M. Hoshino, Y. Kato, J.-I. Miyachi, *On t-structures and torsion theories induced by compact objects*, 《纯粹与应用代数杂志》167 (1) (2002), 15–35. [33] S. Iyengar, H. Krause, *Acyclicity versus total acyclicity for complexes over noetherian rings*, 数学文献 11, 207-240 (2006). [34] H. Jin, *Cohen–Macaulay differential graded modules and negative Calabi–Yau configurations*, 《数学进展》374 107338, 59 2020( ), 页。[35] H. Jin, D. Yang, G. Zhou,
A localisation theorem for singularity categories of proper dg algebras, arxiv:2302.05054。[36] P. Jørgensen,
The homotopy category of complexes of projective modules, 《数学进展》193 (2005), 第1期, 223–232. [37] P. Jørgensen,
Finite flat and projective dimension, 通讯代数 33 (2005), 第7期, 2275–2279. [38] M. Kalck, D. Yang,
Relative singularity categories I: Auslander resolutions, 《数学进展》301 (2016), 973–1021。[39] B. Keller,
Deriving DG categories, Ann. Sci. ´高等师范学院 ´ 27, 63–102 (1994). [40] B. Keller, *Calabi-Yau triangulated categories* 《代数表示论及相关主题的发展趋势》, 467–489。EMS 大会报告丛书。欧洲数学会(EMS), 苏黎世, ,,
perpendicular categories and recollements of derived module categories of rings, 《纯粹与应用代数杂志》73, 第3期, 211-232 (1991)。

[42] M. Kontsevich, *Noncommutative motives*, 在高等研究院举行的演讲，纪念 Pierre Deligne 61岁生日，2005年10月。视频可在 http://video.ias.edu/Geometry-and-Arithmetic 观看。[43] H. Krause, *The stable derived category of a noetherian scheme*, 《组合数学》141 (2005年), 第5期, 1128–1162. [44] H. Krause, *Completing perfect complexes. With appendices by Tobias Barthel and Bernhard Keller*, 《数学杂志》296, 4, 1387 3 1427 2020年 第- -期 ( ). [45] H. Krause, *The finitistic dimension of a triangulated category*, 《美国数学会会刊》B辑11 (2024年), 570–578. [46] A. Kuznetsov, E. Shinder, *Homologically finite-dimensional objects in triangulated categories*, Sel.Math., NewSer.31, 第 2 期 , 论文编号27，共45页。(2025年)。[47] T. Y. Lam, *Lectures on modules and rings*, 丛书《数学研究生教材》。施普林格出版社，纽约，1999年，第189卷，页xxiv+557[48] K. Manali Rahul, *Representability theorems via metric techniques*, arXiv:2504.11768。[49] O. Mendoza Hernández, E. Sáenz Valadez,

V Santiago Vargas *Auslander-Buchweitz context and* ,
co-t-structures 21 2013 5, 417 440

M. Souto Salorio, ,《应用范畴结构》 ( ), 第–期。[50] M. Nagata, *Local rings*, 《纯粹与应用数学国际科学丛书》13，国际科学出版社，纽约，1962年。[51] T. Nakamura, *Indecomposable pure-injective objects in stable categories of Gorenstein-projective modules over Gorenstein orders* 2209 15630 , arXiv: . . 附录由 Rosanna Laking 撰写。[52] A. Neeman, *The connection between the K–theory localisation theorem of Thomason, Trobaugh and Yao and the smashing* , , Ann. Sci. Ecole *subcategories of Bousfield and Ravenel* 25 1992 547 566
Normale Superieure ( ), – . [53] A. Neeman, *Metrics on triangulated categories*, 《纯粹与应用代数杂志》224 (2020), 第4期, 106206. [54] A. Neeman, *The t-structures generated by objects*, 《美国数学会汇刊》374, 第11期, 8161-8175 (2021). [55] A. Neeman, *Strong generators in* $\mathrm{D}^{perf}(X)$ *and* $\mathrm{D}^{b}_{coh}(X)$, 《数学年刊》 (2) 193, 第3期, 689-732 (2021). [56] A. Neeman, *Triangulated categories with a single compact generator and two Brown representability theorems*, arxiv:1804.02240。[57] P. Nicolás, M. Saorin, A. Zvonareva, *Silting theory in triangulated categories with coproducts*, 《纯粹与应用代数杂志》223 (2019), 第6期, 2273–2319. [58] S. Oppermann, C. Psaroudakis, T. Stai, *Change of rings and singularity categories*, 《数学进展》350 (2019), 190–241. [59] D. O. Orlov, *Triangulated categories of singularities and D-branes in Landau-Ginzburg models*, 《斯捷克洛夫数学研究所学报》246, 《代数几何：方法、联系与应用》(2004), 240–262；译文见《斯捷克洛夫数学研究所学报》(2004), 第3期, 227–248. [60] D. O. Orlov, *Triangulated categories of singularities and equivalences between Landau-Ginzburg models*, 《数学文集》197, 第12期, 1827-1840 (2006)；译自 Mat. Sb. 197, 第12期, 117-132 (2006). [61] C. Psaroudakis, J. Vitória, *Realisation functors in tilting theory*, 《数学杂志》288 (3) (2018), 965–1028. [62] T. Raedschelders, G. Stevenson, *Proper connective differential graded algebras and their geometric realizations*, 《欧洲数学杂志》8 (2022年), S574–S598. [63] D. C. Ravenel, *Localization with respect to certain periodic homology theories*, 《美国数学杂志》105 (1984年), 351–414. [64] J. Rickard, *Morita theory for derived categories*, 《伦敦数学会杂志》(2) 39 (1989年), 第3期, 436–456. [65] J. Rickard, *Unbounded derived categories and the finitistic dimension conjecture*, 《数学进展》354 (2019), 106735, 共21页。[66] R. Rouquier, *Dimensions of triangulated categories*, 《K理论杂志》1 (2008年), 第2期, 193-256. [67] G. Stevenson, *Rouquier dimension versus global dimension*, 《纯粹与应用代数杂志》229 (2025年). [68] S. Schwede, B. Shipley, *Stable model categories are categories of modules*, 《拓扑学》42, 103–153 (2003). [69] B. Toën, *Homotopy finiteness of proper and smooth dg-algebras*, 《伦敦数学会会刊》(3) 98, 第1期, 217-240 (2009)。

Department of Mathematics, Aristotle University of Thessaloniki, Thessaloniki 54124, Greece
Email address: pkostasg@math.auth.gr

Department of Mathematics, Aristotle University of Thessaloniki, Thessaloniki 54124, Greece
Email address: chpsaroud@math.auth.gr

Dipartimento di Matematica "Tullio Levi-Civita", Università degli Studi di Padova, Torre Archimede, via Trieste63, 35121 Padova, Italy*Email address*: jorge.vitoria@unipd.it