´ETale群胚与伪群的范畴中的极限

JONATHAN TAYLOR

Abstract. 我们证明，不可约闭集有唯一泛点的 ´Étale 群胚与作用子的范畴具有所有小极限。为此，我们在等价的伪群范畴（其态射为伪群态射）中计算极限，并证明该范畴存在一个到集合范畴的遗忘函子，且此函子创生极限。我们还针对´Étale 群胚与伪群这一特定情形，给出 Cockett 和 Garner [4] 的伴随的另一种证明；这一伴随是计算不可约闭集有唯一泛点的 ´Étale 群胚的极限的核心工具。

arXiv:2512.18487v1 [math.CT] 20 Dec 2025

1. Introduction

拓扑空间的一个重要推广是拓扑群胚，它将几何、代数和动力学结构融为一体，构成一个统一的对象类，其中包含群、空间、等价关系，以及数学许多领域中其他许多值得关注的对象。拓扑群胚已成功应用于算子代数。许多有趣的 C^*-代数类都可表示为群胚 C^*-代数，包括图 C^*-代数、群 C^*-代数，以及交换 C^*-代数的交叉积。 ´Étale 群胚尤为重要：它们是源与值结构映射均为局部同胚的群胚。´Étale 群胚的纤维离散结构使得离散群（或未经拓扑化的群）研究中常用的技术得以应用和推广，同时仍在算子代数中发挥重要作用。

然而，从群胚构造 C^*-代数，对于群胚同态（即连续函子）而言，并不具有函子性。这种函子性难以实现，其根本原因在于，群胚 C^*-代数同时推广了群C^*-代数以及与（局部紧 Hausdorff）拓扑空间相关联的 C^*-代数。群 C^*-代数的构造对于群同态是协变函子性的，而拓扑空间的相应构造则根据 Gelfand 对偶，对于连续映射是反变函子性的。

为了解决这一问题，可以考虑群胚之间另一类态射。Buneci 和 Stachura [1] 证明，群胚之间的作用子可协变地提升为群胚 C^*-代数，从而推广了群 C^*-代数的泛性质和 Gelfand 对偶。由此得到的、以作用子为态射的群胚范畴，自然适合用于研究群胚 C^*-代数；此外，所有可逆作用子都源自作为拓扑范畴的群胚之间的同构。从算子代数的视角出发，一个自然的问题是：这个从群胚到 C^*-代数的函子具有怎样的良好性质？特别是，一个促使我们开展研究的问题是，该函子是否保极限，因为这将使我们能够根据具有泛性质的群胚构造出更多具有泛性质的群胚C^*-代数。为此，本文旨在研究群胚与作用子范畴中的极限。

群胚与作用子范畴带来的主要困扰在于它并非具体范畴（至少并非显而易见）：不存在显而易见的、到集合范畴的忠实遗忘函子。因此，该范畴中的极限与余极限构造也变得难以捉摸，因为我们无法再采用标准策略，将态射描述为底层集合之间的函数。为此，我们考虑用伪群替代群胚与作用子；伪群保留了足够的信息，能够重构群胚与作用子，同时也更便于进行具体的构造。Étale 群胚具有由开子集构成的基，在这些开子集上，值域映射和源映射均为到其像的同胚。这些开子集称为双截面；因此，我们可以不从群胚的点出发，而从其双截面来研究群胚。一个 Étale 群胚的双截面构成一个伪群：相对于自然序结构而言，这是一个完备的逆半群。群胚之间的作用子进而诱导出其双截面伪群之间的同态，并且这一构造具有函子性。

为了从 Étale 群胚的双截面伪群出发研究它们，我们需要在 Étale 群胚与伪群之间建立对偶。首先，我们需要一种根据拓扑空间的开集所构成的集合的代数结构重构拓扑空间的方法。框架理论以一种与点无关的方式处理拓扑，关注开集的格结构，而非点的底层集合。当然，并非每个拓扑空间都能从其开集框架中恢复出来，但能够恢复的空间构成了一个出人意料地大的类。这类空间称为 不可约闭集有唯一泛点的 空间，而这类空间足够庞大，不仅包含所有豪斯多夫空间，还包含任何能够局部同胚于某个不可约闭集有唯一泛点的空间的空间。框架理论中将其与拓扑联系起来的基本结果，是不可约闭集有唯一泛点的空间与空间框架（作为格与拓扑同构的框架）之间的对偶：拓扑空间范畴与框架范畴之间存在一个伴随，并且该伴随限制为不可约闭集有唯一泛点的空间的全子范畴与空间框架的全子范畴之间的等价。

索伯空间与空间框架之间的对偶，被 Matsnev 和 Resende 扩展为 Étale 群胚与伪群之间的对偶 ；他们表明，索伯 Étale 群胚可以由其双截面伪群重构 [14], 。Lawson 和 Lenz [12]将这种对偶扩展到若干类态射，考察了 $callitic$ 伪群同态以及连续覆盖函子（定义在 Étale 群胚之间）。更进一步，Cockett 和 Garner [4] 证明，通向连接限制范畴（Étale 群胚的推广）的 Étale 部分内群胚范畴及部分内余函子（作用子的推广），等价于连接限制范畴与超连通连接限制函子范畴。特别是，这一最新推广使我们能够安全地用索伯 Étale 群胚的双截面伪群及其间作用子的伪群同态，取代这些群胚和作用子。

本文旨在利用 étale 群胚与伪群之间的伴随，计算 étale 群胚与作用子的范畴中的极限。为此，我们证明，不可约闭集有唯一泛点的 étale 群胚及其作用子的范畴，与带有伪群同态的空间伪群范畴等价。

定理 (定理 4.4，推论 4.8)。 将伪群映射到其空间化群胚的空间化函子 Σ 是将 *Étale* 群胚映射到其双截面伪群的双截面函子Bis 的左伴随。此伴随

将不可约闭集有唯一泛点的 ´*Étale* 群胚与空间伪群之间的范畴等价限制为

这种伴随及其所导出的范畴等价并非新结果：本文给出的版本可由应用 [4, 定理 6.8]得到。我们给出了该定理的证明，不依赖 Cockett 和 Garner 在 [4] 中所发展的复杂工具，旨在让非专业人士也能更容易理解这一结果。

为了计算极限，我们证明从（空间的）伪群到集合的遗忘函子创生极限，因此伪群范畴是完备的。

定理（定理 5.1、5.2）。从（空间的）伪群范畴到集合的遗忘函子创生极限。

上述两个结果进而表明，不可约闭集有唯一泛点的 ´Étale 群胚与作用子构成的范畴是完备的；计算极限时，可以先在集合范畴中求极限，再将其提升为伪群，最后取该伪群的空间化群胚。

本文结构如下。第2节介绍群胚、逆半群和伪群所需的预备知识。第3节介绍两个函子，它们构成了 ´étale 群胚与伪群之间的伴随：双截面函子将群胚映射为其双截面伪群，空间化函子则将伪群映射为与之关联的 ´étale 群胚。第 4 节随后证明，这两个函子构成了´étale 群胚范畴与伪群范畴之间的伴随，从而推广了拓扑空间与帧之间的伴随。接着证明，这一伴随限制在 sober 群胚与空间伪群之间构成范畴等价。最后，在第5节中，我们证明从伪群到集合的遗忘函子创生极限，因此伪群范畴是完备的。这进而意味着 sober ´étale 群胚范畴是完备的，我们还明确描述了该范畴中的积和等化子。我们计算了一些极限的例子，包括以下拉回图群胚。我们进一步考察将群映射到群胚和伪群的包含函子如何与极限相互作用。我们还简要讨论了该范畴中的余极限，以及可能出现的一些问题。

我们还附上了附录，其中包含范畴论和Stone对偶中的关键定义与结果。

2. Preliminaries

本文的主要工具是（不可约闭集有唯一泛点的）拓扑空间与（空间的）帧之间对偶的一般化。关于帧与局部理论的详细介绍，请参阅 [18]。我们在附录 B 中简要回顾了本文所需的主要结果，内容大多是自包含的。我们还回顾了群胚、逆半群和伪群的基本且有用的性质，以及集合记号。

我们可以用不带括号的形式表示函子 F 作用于对象 x 或态射 f，例如 Fx 和 Ff。对于拓扑空间 X，其拓扑记作 $\mathcal{O}X$。附录 A 给出了一些范畴论中相关的基本定义和结果。

2.1. **拓扑空间与框架**。 框架的定义是对拓扑空间中开集格结构的一种抽象公理化。我们在此给出框架理论的一些基本定义和相关结果，以及它与拓扑之间的关系。

定义 2.1。 一个框架 F 是一个偏序集，具有有限下确界和所有上确界，且下确界对上确界满足分配律。我们用 $e \wedge f$表示两个元素 $e,\ f \in F$的下确界或交，用 $\bigvee_\alpha e_\alpha$表示一个族 $(e_\alpha)_\alpha \subseteq F$的上确界或并。于是，分配律可表示为

$$e \wedge \bigvee_\alpha f_\alpha = \bigvee_\alpha (e \wedge f_\alpha)$$

对所有 $e,\ f_\alpha \in F$均成立。

给定框架 F 和 L，框架同态 $\varphi\colon F \to L$ 是一个保持有限下确界和任意上确界的函数。框架及其框架同态构成范畴**Frame**。

对于任意拓扑空间 X，其拓扑 $\mathcal{O}X = \{U \subseteq X \text{ open}\}$ 是框架的一个例子。与某个拓扑空间 X 的 $\mathcal{O}X$ 同构的框架称为空间的。此外，连续映射 $f\colon X \to Y$ 诱导出框架同态$f^{-1}\colon \mathcal{O}Y \to \mathcal{O}X$，从而定义一个函子 $\mathcal{O}\colon \mathbf{Top}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Frame}$，其中**Top** 是拓扑空间范畴。

定义 2.2. 框架 F 上的特征 是一个框架同态 $\chi\colon F \to \Omega$.̂用 F表示特征的集合。

̂ ̂我们在 F 上赋予如下开集拓扑：$\mathcal{U}_e = \{\chi \in F\colon \chi(e) = 1\}$，其中 $e \in F$。任意框架̂ ̂同态 $L \to F$ 通过前复合诱导出一个连续映射 $F \to L$。这一̂赋值定义了一个函子 $\sigma\colon$ **框架** $\to \mathbf{Top}^{\mathrm{op}}$，对于框架 F，有 $\sigma F = F$。

如果每个闭不可约子集都是某个唯一单点集的闭包（更多细节见定义 B.3），则称拓扑空间为索伯的 。斯通对偶断言，索伯空间与空间框架构成等价范畴。我们用**框架**$_{\mathrm{Spat}}$ 和**Top**$_{\mathrm{Sob}}$ 分别表示**框架** 和**Top** 的全子范畴，它们分别由空间框架和索伯空间所张成。

定理 2.3 (见定理 B.13)。 存在一个伴随 $\sigma \dashv \mathcal{O}$，它限制为范畴等价 **框架**$_{\mathrm{Spat}} \simeq$**Top**$^{\mathrm{op}}_{\mathrm{Sob}}$。

我们稍后将讨论 *´étale* 群胚，它们配备了到某个开子空间（群胚的单位空间）的局部同胚。下一个命题表明，局部同胚于索伯空间的空间本身也是索伯空间，因此可以通过这种方式在局部验证饱和性。

命题 2.4。 设 X 和 Y 是拓扑空间，并假设 $s\colon X \to Y$ 是一个局部同胚。若 Y 是索伯空间，则 X也是。

证明。 令 $C \subseteq X$ 为一个闭不可约子集。由于 s 是局部同胚，存在一个开子集 $U \subseteq X$，其中 $U \cap C \neq \emptyset$ 上的 s 是单射，因此是到 Y中的开像上的同胚。由于 U 同胚于一个索伯空间的开子集，因此它是索伯的。此外，由于 $C \cap U$ 是 U 的一个不可约子集，其像 $s(C \cap U)$ 是 $s(U)$ 中的不可约子集，因此存在唯一点 $y \in s(U)$，使得 $\{y\} = s(C \cap \overline{U})$。

集合 $s(\overline{C})$ 是 Y中的闭不可约子集，因为任意两个闭子集 D_1、$D_2 \subseteq Y$满足 $D_1 \cup D_2 = s(C)$ 时，都可提升为闭子集 $\overline{C_i} := s^{-1}(D_i) \cap C$，满足 $C_1 \cup C_2 = C$，由此 $C = C_i$ 对某个 $i \in \{1,2\}$成立。于是 $s(C) = s(C_i) \subseteq s(s^{-1}(D_i)) \subseteq D_i \subseteq s(C)$，因此 $s(C) = D_i$，因为 $\overline{D_i}$ 是闭的。因此 $s(C)$ 是不可约的，而 Y 的饱和性给出一点 $y \in Y$，满足 $\{y\} = s(C)$。

我们断言存在一点 $x \in C$ 满足 $s(x) = y$。假设并非如此。对于每个满足 $z \in X$ 的 $s(z) = y$，我们都能找到一个 z 的开邻域 $U_z \subseteq X$，使得 s 在其上的限制是单射映射。由于 C 是闭的且不包含 z，我们还可以进一步缩小 U_z，以确保对于所有这样的 z都有 $U_z \cap C = \emptyset$。于是，$V := \bigcup_{z \in s^{-1}(\{y\})} U_z$是 X 的一个开子集，包含纤维 $s^{-1}(\{y\})$，并且

$$s(V) \cap s(C) = \bigcup_{z \in s^{-1}(\{y\})} s(U_z) \cap s(C) = \bigcup_{z \in s^{-1}(\{y\})} s(U_z \cap C) = \emptyset,$$

因为 s 在每个 U_z上都是单射。但这样一来，$s(V)$就是 Y中 y 的一个开邻域，它与 $s(C)$不相交，这与 $s(C)$在 $s(C) = \{y\}$中稠密相矛盾。因此，我们可以选取满足 $s(x) = y$的 $x \in C$。

设 $U \subseteq X$ 是 x 的一个开邻域，在该邻域上 s 限制为单射映射。集合 $C \cap U$ 是 U 在子空间拓扑下的一个不可约闭子集。事实上，U 的闭子集具有 $D \cap U$ 的形式，其中 $D \subseteq X$ 是某个闭集；若 $(C_1 \cap U) \cup (C_2 \cap U) = C \cap U$，其中 C_1，$C_2 \subseteq X$ 是闭的，则

$$C = (C_1 \cap C) \cup (C_2 \cap C) \cup (X \setminus U \cap C),$$

由此，C 的不可约性意味着 $C_1 \cap C$、$C_2 \cap C$ 或 $X \setminus U \cap C$ 等于 C。最后一种情况可以排除，因为 $X \setminus U \cap C$ 不可能是整个 C，因为$U \cap C \neq \emptyset$。因此，对于某个 $i = 1$，2，有 $C_i \cap C = C$，并且我们有 $C \cap U = C_i \cap U$，因此$C \cap U$ 在 U 中不可约。由于 $U \cap C$ 是 C 的一个开子集（同样是在子空间拓扑下），它必然是稠密的（否则 $C \setminus U \cup C \cap U = C$ 就是一个非平凡的约化）。

由于 $C \cap U$ 在 C 中稠密，我们有

$$C = \overline{C \cap U} = \overline{\{x\}} \subseteq C$$

注意到 $x \in C$ 意味着单点集 $\{x\}$ 的闭包包含于 C中。

剩下需要证明点 x是唯一的。为此，只需证明 X 是 T_0，因为在 T_0 空间中，任意两个不同的单点集都有不同的闭包。固定 x_1、$x_2 \in X$ 以及 x_1 的一个开邻域 $U \subseteq X$，使得 s 限制在该邻域上时，是到其像上的一个同胚。若 $x_2 \notin U$，则结论成立。若 $s(x_1) = s(x_2)$，则由于 s 在 U上是单射，$x_1 = x_2$ 或 $x_2 \notin U$。最后，若 $s(x_1) \neq s(x_2)$，则（由于 Y是 T_0）我们可以找到一个开子集 $V \subseteq Y$，使得 $s(x_1) \in V$和 $s(x_2) \notin V$，或反之。于是，$s^{-1}(U \cap V)$要么包含 x_1但不包含 x_2，要么 $s^{-1}(V)$包含 x_2但不包含 x_1，从而得到 T_0。□

´2.2. Étale 群胚与作用子。本文所称的群胚，始终是指其中所有态射都可逆的小范畴。我们用 G、H、K表示群胚，并将群胚的态射称为箭头，通常记作 γ、η、x、y。对于群胚 G，我们将单位空间 $G^{(0)}$ 视为箭头集合（记作 G）的子集，即将对象与其对应的恒等态射相对应。G 中的可复合对集合记作 $G^{(2)}$，复合映射 $G^{(2)} \to G$ 记作相邻写法（γ、η）$\mapsto \gamma\eta$。其中的求逆映射

G 记作 $\gamma \mapsto \gamma^{-1}$。值域映射和源映射 r、s: $G \to G^{(0)}$ 分别将每个箭头γ 映射为 $r(\gamma) = \gamma\gamma^{-1}$ 和 $s(\gamma) = \gamma^{-1}\gamma$。特别地，箭头的复合按从右到左的顺序读取，遵循函数复合中通用的约定。

拓扑群胚是一个配备了拓扑的群胚，使得逆运算和乘法都是连续的（其中，配备从 $G \times G$的积拓扑继承的子空间拓扑）。若值域映射和源映射都是局部同胚（注意，任一映射是局部同胚都蕴含另一映射也是局部同胚），则拓扑群胚 G 称为 Étale 群胚。我们常采用如下等价刻画：当且仅当 G 的拓扑有一个由双截面构成的基时，G 才是 Étale 群胚；双截面是指值域映射和源映射在其上限制后分别成为到各自像的同胚的开子集 $U \subseteq G$ 。

在 Étale 群胚 $\mathcal{G}$中，能够限制到开双截面对于研究它们至关重要；许多分析都借助了这样的事实：Étale 群胚 $\mathcal{G}$局部同胚于其单位空间。命题 2.4 表明，只需证明 Étale 群胚 $\mathcal{G}$的单位空间是不可约闭集有唯一泛点的，即可得出整个空间也是不可约闭集有唯一泛点的。

现在我们来介绍所考虑的 $\mathcal{G}$Étale 群胚之间的态射。群胚之间这类态射有不少不同的称谓，包括 Zakrzewski态射 [1], 余态射 [8], 代数态射 [1], 作用子 [16], 以及余函子[4]。我们采用作用子 这一术语，以强调它与群胚作用之间的相似性和关联。

先约定一些记号：对于（连续）函数 f: $X \to Z$ 和 g: $Y \to Z$，我们将 f 和 g的拉回记为 $X \,{}_f\!\times_g Y := \{(x, y) \in X \times Y : f(x) = g(y)\}$。在适用的情况下，我们赋予拉回从 $X \times Y$的积拓扑继承的子空间拓扑。

定义 2.5 ([16, 第 23], [22, 定义 2.2])。设 G 和 H 为 $\mathcal{G}$Étale 群胚。一个作用子 h: $G \curvearrowright H$ 由一个连续映射 ρ_h: $H \to G^{(0)}$ 和一个连续映射 $\cdot_h$: $G \,{}_s\!\times_\rho H \to H, (g, x) \mapsto g \cdot_h x$构成，并满足以下条件：

(1) $\rho_h(x) \cdot_h x = x$ 对所有 $x \in H$ 均成立；(2) $r(\gamma) = \rho_h(\gamma \cdot_h x)$ 对所有 $(\gamma, x) \in G \,{}_s\!\times_\rho H$ 均成立；(3) $\gamma_1 \cdot_h (\gamma_2 \cdot_h x) = (\gamma_1\gamma_2) \cdot_h x$ 对所有 $(\gamma_1, \gamma_2) \in G^{(2)}$、$(\gamma, x) \in G \,{}_s\!\times_\rho H$ 均成立；(4) $\rho_h(x_1x_2) = \rho_h(x_1)$ 对所有 $(x_1, x_2) \in H^{(2)}$ 均成立；(5) $\gamma \cdot_h (x_1x_2) = (\gamma \cdot_h x_1)x_2$ 对所有 $(\gamma, x_1) \in G \,{}_s\!\times_\rho H$、$(x_1, x_2) \in H^{(2)}$ 均成立。

映射 ρ_h 称为锚映射，函数 $\cdot_h$ 称为作用子乘法。当上下文清楚时，我们可以省略下标 h。

定义 2.5 中的前三个条件描述了 G on H 的左作用，其中将 H 视为一个拓扑空间。最后两个条件表明，该左作用应当与 H 通过右乘法对自身施加的右作用相交换。

在（拓扑）群胚之间所考虑的另一类典型态射是（连续）函子。Meyer 和 Zhu 表明，对于限制在单位空间上分别为同胚的连续函子，以及锚映射为同胚的作用子，这两个概念是一致的（参见 [16, 例 4.17]）。

给定作用子 h: $G \curvearrowright H$和 k: $H \curvearrowright K$，其锚映射分别为 ρ_h和 ρ_k，复合 kh 定义为锚映射 $\rho_{kh} := \rho_k \circ \rho_h$ 及乘法$\gamma \cdot_{kh} t := (\gamma \cdot_h \rho_k(t)) \cdot_k t$，其中 $\gamma \in G$ 和 $t \in K$ 满足 $s(\gamma) = \rho_{kh}(t)$。容易验证，复合 kh 是从 G 到 K的一个作用子。左乘法

群胚 G 在自身上的作用（以值域映射作为锚映射）是G处的恒等作用子，从而构成一个范畴。

´定义 2.6. 范畴 $\mathbf{EtAct}$ 由 ´étale 群胚作为对象、作用子作为态射构成，态射的复合如上所述。我们将由不可约闭集有唯一泛点的 ´étale 群胚张成的全´子范畴记为 $\mathbf{EtAct}_{\mathrm{Sob}}$。

´$\mathbf{EtAct}$ 中的同构与通常的拓扑群胚同构（即范畴的同胚同构，见 [16,命题 4.19]）一一对应。因此，两个群胚在 ´$\mathbf{EtAct}$ 中同构，当且仅当它们作为拓扑范畴同构；所以我们可以直接称两个群胚“同构”，而无需指定所在的范畴。

对于两个拓扑空间 X 和 Y （视为仅由单位构成的群胚），作用子 $X \curvearrowright Y$ 的数据简化为锚映射 $\rho\colon Y \to X$，因为根据定义 2.5 的第一条公理，单位必须平凡作用。反过来，每个连续函数 $Y \to X$´都是此类作用子的锚映射，因此 $\mathbf{Top}^{\mathrm{op}}$ 嵌入为 $\mathbf{EtAct}$的一个全子范畴。

记号 2.7. 设 G 是一个 ´étale 群胚。对于元素 $\gamma \in G$ 和开双截面 $U \in \mathrm{Bis}\ G$，若 $s(\gamma) \in r(U)$，则存在唯一的元素 $\gamma' \in U$，使得 (γ, γ') 是一个可复合对。我们将这对元素的复合记为 γU。类似地，若 $r(\gamma) \in s(U)$，则将积 $\gamma'\gamma$ 记为 $U\gamma$，其中 γ' 是 U 中满足 $s(\gamma') = r(\gamma)$ 的唯一元素。更一般地，若 $h\colon G \curvearrowright H$ 是一个作用子，则对于 $U \in \mathrm{Bis}\ G$ 以及满足 $\rho(x) \in s(U)$ 的 $x \in H$，将元素 $\gamma \cdot x$ 记为 $U \cdot_h x$（若作用子 h 已知，也可简记为 $U \cdot x$），其中 $\gamma \in U$ 是 U 中满足 $s(U) = \rho(x)$ 的唯一元素。

作用子 $h\colon G \curvearrowright H$ 诱导出一个函子，将 H-作用的范畴映至 G-作用的范畴，并保持底层空间不变（见 [16, 命题 4.18]）。群胚之间的连续函子不具备这一性质，这也是考虑用作用子而非函子作为态射的一个动机。另一个动机来自算子代数：´etale 群胚之间的作用子 $h\colon G \curvearrowright H$ 诱导出群胚的 C^*-代数之间的 *-同态 $C^*(G) \to C^*(H)$（见 [1], [22]），从而得到一个从 ´$\mathbf{EtAct}$ 到 C^*-代数范畴的函子。尽管这一函子通常远非满函子，但由此构造得到的 *-同态编码了 C^*-代数之间的动力学信息；在某些情况下，还可以从一个 *-同态重构作用子（见 [22, 命题 5.7]）。

2.3. 伪群。 若将群胚视为通过添加代数信息或动力学信息对拓扑空间作出的推广，那么从斯通对偶的视角来看，随之而来的问题便是：相应地，怎样推广框架，才能编码这些新信息？这个问题已有多种形式的答案（包括但不限于 [19], [12], [2], [4]）。

我们遵循 [19], [12] 介绍逆半群和伪群，并将在第 4 节为 ´étale 群胚证明一个版本的斯通对偶。

定义 2.8。 逆半群 S 是满足以下性质的半群：对每个 $t \in S$，都存在唯一的元素 $t^* \in S$ 使得

$$t = tt^*t, \text{ and } t^* = t^*tt^*.$$

关于逆半群理论的一般参考资料，请参阅 [11] 。逆半群上有一个自然偏序，定义为：若 $u = tu^*u$，则$u \leq t$ 。 S 中的幂等元子集记为 ES；相对于此偏序，它构成交半格，其中交运算由乘法给出。关于相对于t 的元素 t^* 的唯一性判据确保 ES 是 S 的交换子半群（事实上，这等价于对每个 $t \in S$，元素 t^* 都是唯一的）。这一唯一性还意味着，逆半群之间的任何半群同态都会自动

*保序。

我们简要回顾逆半群上自然偏序的一些基本性质，这些性质将在本文后续部分派上用场。

引理 2.9。 逆半群上的 *运算是一个序自同构。

证明。 由于部分逆元唯一， *运算是一个对合，因此我们只需证明它是保序的。固定 $t \leq u \in S$。于是 $t^* = (tu^*u)^* = u^*ut^*$，由此根据 [11, p. 1.4.6]可得 $t^* \leq u^*$ 。□

引理 2.10。 设 $\varphi\colon S \to T$ 是逆半群之间的半群同态。那么 φ是 *保序的，且保序。

证明。 S 和 T 中部分逆元的唯一性确保 φ保持 *。对于 $t \leq u$ ，我们有 $\varphi(t) = \varphi(ut^*t) = \varphi(u)\varphi(t)^*\varphi(t)$，由此 $\varphi(t) \leq \varphi(u)$。□

尽管逆半群具有序结构和对合，但正如引理 2.10 所示，这些结构都编码在半群运算中。因此，所有半群同态都会自动保持这些结构，所以我们无需在态射中添加假设来处理这一点。

我们关于逆半群的主要启发性例子来自´étale 群胚理论。

例 2.11。 设 G 是一个 ´étale 群胚。集合

$$\operatorname{Bis} G := \{U \subseteq G : U \text{ is an open bisection}\}$$

关于运算构成一个半群

$$UV := \{\gamma\eta : \gamma \in U, \eta \in V, s(\gamma) = r(\eta)\}.$$

容易看出， G 中的值域映射和源映射在 UV上是单射，因为它们在 U 和 V 上分别都是单射。由于 G 中的值域映射是开映射，根据 [21, 引理 2.4.11], ，乘法映射也如此，因此我们看到 UV 是一个开双截面。 G 中乘法的结合律继而推出 Bis(G)中复合的结合律。

对于任意元素 $\gamma \in G$ ，我们有 $\gamma = \gamma\gamma^{-1}\gamma$ 和 $\gamma^{-1} = \gamma^{-1}\gamma\gamma^{-1}$，因此很快便可得出 $U^{-1} = \{\gamma^{-1}\colon \gamma \in U\}$为 Bis G中的 U提供了一个部分逆元。它是 Bis G 中的唯一元素，这一事实可由 Bis G 中的幂等元半格为 $E\operatorname{Bis} G = \mathcal{O}G^{(0)}$这一点推出；在 $E\operatorname{Bis} G$ 中，乘法对应于 $\mathcal{O}G^{(0)}$中的交，而交是交换的。

逆半群 Bis G 在二元交集下也是闭的，并且还具有一些（但不是全部）并集。两个开双截面 U， $V \in$ Bis G的并集 $U \cup V$，如果源映射与值域映射在该并集上保持单射，则仍是一个开双截面。等价地， $U \cup V$是开双截面，当且仅当 UV^{-1}和 $U^{-1}V$

仅由单位组成。此外，如果 $(U_\alpha)_\alpha$ 是一个开双截面族，则当且仅当对于所有 α, β, $U_\alpha U_\beta^{-1}$和 $U_\alpha^{-1}U_\beta$都包含于 $G^{(0)}$中时，其并集$\bigcup_\alpha U_\alpha$是一个开双截面。因为 $G^{(0)}$ 的单位空间的开子集恰好是 Bis G的幂等元。这促成了下面的定义。

定义 2.12 ([12, 节 1])。设 S 为一个逆半群。若两个元素t、$u \in S$满足 tu^{-1}, $t^{-1}u \in ES$，则称它们是相容的 。元素 $t_\alpha \in S$的族（t_α）$_\alpha$若其中任意两个元素都相容，则称其为相容族。

伪群 S 是满足以下条件的逆半群：

（1）二元交存在：对所有 t、$u \in S$，下确界 $t \wedge u \in S$ 存在；（2）相容并存在：若（t_α）$_\alpha$ 是 S中的元素相容族，则上确界 $\bigvee_\alpha t_\alpha$ 在 S中存在；（3）乘法对并满足分配律：若（t_α）$_\alpha$ 是 S 中的元素相容族，则 $u\bigvee_\alpha t_\alpha = \bigvee_\alpha ut_\alpha$。

从 S 到 T 的伪群态射是一个保相容并的半群同态 $\varphi\colon S \to T$。

有时，如果上下文清楚，我们也会将伪群态射称为伪群同态、伪群的同态，或简称同态。

伪群及其伪群态射构成一个范畴 **Ψ群范畴**。框架 F 可视为一个幂等伪群，其乘法由$ef := e \wedge f$给出，对合为 $e^* := e$，因此框架中的所有元素（视为伪群时）都是幂等元。反过来，任何仅由幂等元组成的伪群都具有任意并，因为其中所有元素族都相容。框架之间的伪群态射恰好是框架同态；它们保并，因为根据定义 2.12，框架中的所有元素族都相容；它们也保交，因为交是由伪群中的乘法实现的。因此我们看到，**框架**嵌入到 **Ψ群范畴**中，成为由仅含幂等元素的伪群所张成的全子范畴。

群的范畴 **群范畴** 也嵌入到 **Ψ群范畴** 中，方法是将群 Γ 映射为集合 $\Gamma \sqcup \{0\}$，并添加一个零元。必须添加零元，因为伪群要求存在空上确界。$\Gamma \sqcup \{0\}$ 的相容子集仅有空集、单点集，以及形如 $\{g, 0\}$ （其中 $g \in \Gamma$）的集合。因此，任意群同态$\Gamma \to \Lambda$ 都可通过将零元映射到零元，扩张为伪群同态。

注 2.13。我们没有明确要求伪群同态保二元交。这是有意为之，因为保二元交是过强的性质。例如，若 $\varphi\colon \Gamma \to \Lambda$ 是群同态，并假设其扩张 $\tilde{\varphi}\colon \Gamma \sqcup \{0\} \to \Lambda \sqcup \{0\}$ 到伪群后保交，那么对任意$g \in \Gamma \setminus \{1\}$，都有 $0 = \tilde{\varphi}(0) = \tilde{\varphi}(g \wedge 1_\Gamma) = \varphi(g) \wedge \varphi(1)$，从而推出 $\varphi(g) \neq \varphi(1)$。这表明群之间的保交同态必为单射（并且不难看出，反过来也成立）。由于我们不希望将范围限制在单射群同态上，因此必须允许不保交的伪群同态。

虽然伪群同态不必保持所有二元交，但它们确实保持相容交。

引理 2.14。设 $\varphi\colon S \to T$ 是一个伪群同态，并且假设$t, u \in S$ 相容。那么 $\varphi(t \wedge u) = \varphi(t) \wedge \varphi(u)$。

证明。对于伪群中的任意相容 t，u 我们有如下结论：注意到 $tu^*u \leq t$，u 由于 tu^* 和 u^*u 都是幂等元，所以 $tu^*u \leq t \wedge u$。但由于 $(t \wedge u)^*(t \wedge u) \leq t^*t$，$u^*u$ 我们有

$$t \wedge u = (t \wedge u)t^*tu^*u = tu^*u \wedge ut^*t \leq tu^*u,$$

因此 $tu^*u = t \wedge u$。现在我们有 $\varphi(t \wedge u) = \varphi(tu^*u) = \varphi(t)\varphi(u)^*\varphi(u) = \varphi(t) \wedge \varphi(u)$，其中最后一个等式成立是因为 $\varphi(t)$ 和 $\varphi(u)$ 在 T 中相容。□

我们已经注意到，帧之间的伪群态射是框架同态，因为交是通过乘法实现的。引理 2.14 表明，这一性质并非伪群的幂等元框架所独有，而是在任意相容子集中都成立。

我们简要陈述并证明伪群的一些基本性质。

引理 2.15. 每个伪群 S 都具有以下性质：

(1) 乘法保序：若 $t \leq t'$ 且 $u \leq u'$，则 $tu \leq t'u'$；*(2)* 并与交保持对合：若 $(t_\alpha)_\alpha$ 是 S 中元素的相容族，则 $(\bigvee_\alpha t_\alpha)^* = \bigvee_\alpha t_\alpha^*$，且 $(t \wedge u)^* = t^* \wedge u^*$ 对所有 $t, u \in S$ 均成立；*(3)* 乘法对右侧的并满足分配律：若 $(t_\alpha)_\alpha$ 是 S 中元素的相容族，则 $(\bigvee_\alpha t_\alpha)u = \bigvee_\alpha (t_\alpha u)$；*(4)* 乘法对交满足分配律：对于 $t, u, v \in S$，有 $t(u \wedge v) = tu \wedge tv$ 且 $(u \wedge v)t = ut \wedge vt$。

证明。(1) 这一结论对逆半群也成立。根据假设，我们有 $t = tt^*t'$ 和 $u = u'u^*u$。因此我们有 $tu = tt^*t'u'u^*u$，由 [11,引理 1.4.6、命题 1.4.7]可得 $tu \leq t'u'$。

(2) 由引理 2.9 可知，*-运算是序同构，因此我们立即看出，它保留任何存在的上确界和下确界。( )

3 由部分 (2) 我们有

$$\bigvee_\alpha (t_\alpha u) = \left(\bigvee_\alpha (t_\alpha u)^*\right)^* = \left(\bigvee_\alpha u^* t_\alpha^*\right)^* = \left(u^* \bigvee_\alpha t_\alpha^*\right)^* = \left(\bigvee_\alpha t_\alpha\right) u.$$

(4) 部分 (1) 意味着 $t(u \wedge v) \leq tu \wedge tv$。若 $w \in S$ 满足 $w \leq tu$ 和 $w \leq tv$，则由部分 (1) 可得 $t^*w \leq t^*tu$，t^*tv，从而有 $t^*w \leq u$，v。因此 $t^*w \leq u \wedge v$，由此 $w = tt^*w \leq t(u \wedge v)$。因此，$t(u \wedge v)$ 是 tu 和 tv 的下确界。□

引理 2.16. 设 S 是一个伪群，且假设 t、$u \in S$ 相容。若$t^*t = u^*u$，则 $t = u$。

证明. 根据假设，$t \vee u$ 在 S 中存在，且大于每个 t 和 u，因此我们有

$$t = (t \vee u)t^*t = (t \vee u)u^*u = u. \qquad \square$$

例 2.11 中 étale 群胚 G 的双截面逆半群 $\mathrm{Bis}\, G$ 也是我们的主要伪群示例。按照定义，双截面的相容族恰好是其并集为双截面的那些族，并且很容易验证乘法对这些并集满足分配律。

伪群必然含有单位，伪群S 的幂等元 ES 构成一个相容集合，其并充当单位。每个伪群还具有

一个零元，由空并实现。与框架不同，伪群通常没有序结构意义下的最大元。以 étale 群胚 G 的 Bis$G$ 为例，开双截面的并通常不是双截面，因此伪群 Bis$G$ 含有最大元当且仅当 $G = G^{(0)}$。

由于伪群态射保相容并，它们必然将零元映射为零元，并将单位映射为单位。

与许多范畴类似，其中的态射是保持某种代数结构的函数，所有双射同态都是同构。

引理 2.17。伪群同态 $\varphi\colon\ S \to T$ 若为双射，则是同构。

证明。设 ψ 为 φ的逆函数。对于 $t,\ u \in S$ 我们有

$$\varphi(\psi(t)\psi(u)) = \varphi(\psi(t))\varphi(\psi(t)) = tu = \varphi(\psi(tu)),$$

由此可得 $\psi(t)\psi(u) = \psi(tu)$，因为 φ 是单射。

对于相容族 $(t_\alpha)_\alpha \in T$，我们有

$$\varphi\left(\psi\left(\bigvee_\alpha t_\alpha\right)\right) = \bigvee_\alpha t_\alpha = \bigvee_\alpha \varphi(\psi(t_\alpha)) = \varphi\left(\bigvee_\alpha \psi(t_\alpha)\right),$$

而且，由于 φ 是单射，可知 ψ 保持族 $(t_\alpha)_\alpha$ 的并。 □

2.4. **逆半群作用**。在全文中，我们假设所考虑的逆半群同时具有零元和单位。若它们原本不具备这些元素，可以很容易地将其添入。关于逆半群作用和变换群胚的一般参考资料，请参阅 [5, 第 4] 节。以下构造可在该处找到。

定义 2.18。拓扑空间 X 的部分同胚 是两个开子集之间的同胚 $U \xrightarrow{\sim} V$。部分同胚的全体构成一个逆半群 $\Pi(X)$，其运算为部分复合。该逆半群的单位是X上的恒等映射，零元为空函数。

逆半群 S 在 X 上的作用 （通过同胚）是一个半群同态 $\alpha\colon\ S \to \Pi(X)$，记作 $t \mapsto \alpha_t$，且满足 $\alpha_0 = \emptyset$ 和 $\alpha_1 = \mathrm{id}_X$。

给定逆半群 S 在空间 X 上的作用 α，每个 $t \in S$ 都有一个开定义域 $\mathrm{dom}(t) \subseteq X$，其中包含其作用的点；它也是部分同胚 α_t 的定义域。对于定义域中的点 x，我们常写作 $t \cdot x := \alpha_t(x)$ t，这与群作用中常用的记号类似。

我们在集合 $D := \{(t,\ x) :\ t \in S,\ x \in \mathrm{dom}(t)\}$ 上赋予从 $S \times X$ 继承的子空间拓扑，其中将 S 视为具有离散拓扑。我们通过规定 $(t,\ x) \sim (u,\ y)$ 当且仅当 $x = y$ 且存在一个幂等元 $e \in E(S)$，使得 $x = y \in \mathrm{dom}(e)$ 且 $te = ue$，从而在 D 上定义一个等价关系。

命题 2.19 ([5, 第 4]节。由 $D/\sim$ 上的部分乘法定义为

$$[t, x][u, y] = [tu, y],$$

当且仅当 $x = u \cdot y$ 将 $D/\sim$ 变成一个 ´***étale*** 群胚时才有定义。我们称此群胚为与作用 α 相关联的 变换群胚 $S \ltimes_\alpha X$。该映射

$x \mapsto [1_S, x]$ 是一个同胚 $X \to (S \ltimes_\alpha X)^{(0)}$，我们通过此同胚将二者视为相同。源映射与值域映射定义如下：

$$s[t,x] = x, \qquad r[t,x] = t \cdot x,$$

而逆映射由下式给出

$$[t,x]^{-1} = [t^*, t \cdot x].$$

如果作用 α 已明确，我们通常只写 $S \ltimes X$。逆半群的每个元素$t \in S$都指定一个子集 $U_t := \{[t,x] : x \in \mathrm{dom}(t)\} \subseteq S \ltimes X$。根据 [5, 4，这是 $S \ltimes X$ 的一个开双截面。18 命题]。这些开集覆盖$S \ltimes X$，且源映射与值域映射在其上的限制都是局部同胚。

3. Functors between groupoids and pseudogroups

´本节讨论 **EtAct** 与 **Ψ群范畴** 之间的函子，它们将构成第 4 节中的伴随。关于这些函子在对象上的作用，已有多处讨论，包括 [14], [12], 和 [4]。这些文献各自处理不同类的态射，我们的方法最接近 Cockett 和 Garner 的工作 [4]。这些函子的构造以及第 4 节中的后续伴随，是 [4, 第 6]节内容的特例。我们从伪群构造 Étale 群胚的方法与上述文献等价，但我们采用伪群作用的变换群胚这一具体方法，灵感来自 [2]。我们强调，出于稍后将讨论的原因， [2]中的群胚构造与上述其他构造并不等价。

3.1. 双截面函子。

我们已经看到，对于任意 ´étale 群胚 G， G 的双截面构成一个伪群 Bis G。我们将证明，这一赋值´描述了函子 Bis: $\mathbf{EtAct} \to$ **Ψ群范畴**在对象上的作用，并且当把 $\mathbf{Top}^{\mathrm{op}}$ 和 **框架** 分别嵌入´**EtAct**和 **Ψ群范畴**时，该函子扩展了 $\mathcal{O}$: $\mathbf{Top}^{\mathrm{op}} \to$ **框架** 。

关键在于 [22, 引理 2.5]„ 我们在此重述如下。

引理 3.1 ([22, 引理 2.5])。 设 h: $G \curvearrowright H$ 是 ***étale*** 群胚 ´与 H之间的一个作用子。设 $U \in \mathrm{Bis}(G)$ 和 $V \in \mathrm{Bis}(H)$ 是开双截面。集合

$$U \cdot V = \{\gamma \cdot x : \gamma \in G, x \in H, s(\gamma) = \rho(x)\}$$

是 H的一个开双截面。

引理 3.1 与固定的开双截面 $V \in$ Bis H 一起，给出一个函数 Bis $G \to$Bis H。Bis H 的单位是开双截面 $H^{(0)}$，由此得到一个伪群同态。

命题 3.2. 映射 $\mathrm{Bis}\ h\colon \mathrm{Bis}\ G \to \mathrm{Bis}\ H$ 由下式给出

$$\mathrm{Bis}\, h(U) = U \cdot_h H^{(0)}$$

是一个伪群态射。赋值 $h \mapsto \mathrm{Bis}\, h$ 定义了一个函子

$$\mathrm{Bis}\colon \mathbf{\acute{E}tAct} \to \Psi\mathbf{Grp}$$

将函子 $\mathcal{O}$: $\mathbf{Top}^{\mathrm{op}} \to$ **框架** 扩展。

证明。引理 3.1 表明，对于任意 $U \in$Bis G，Bis h(U) 属于 Bis H，因此该函数定义良好。对于 U，$V \in$Bis G，Bis h(U) Bis h(V) 的一般元素具有如下形式：($\gamma \cdot x$)($\eta \cdot y$)，其中 $\gamma \in U$、$\eta \in V$ 和 x，$y \in H^{(0)}$。利用定义 2.5 的公理，并注意到 x 是 H 中的单位，我们可知

$$(\gamma \cdot x)(\eta \cdot y) = \gamma \cdot (x(\eta \cdot y)) = \gamma \cdot (\eta \cdot y) = (\gamma\eta) \cdot y,$$

由此 Bis h(U) Bis h(V) $\subseteq$Bis h(UV)。采用对称论证可得反向包含关系，只需在上述设定中取 $x = r(\eta \cdot y)$。因此 Bis h(U) Bis h(V) =Bis h(UV)，所以 Bis h 是半群同态。

设 $(U_\alpha)_\alpha \subseteq$ Bis G 是一个相容族。由于乘法在 Bis H 中对并具有分配性，我们有

$$\begin{aligned}
\operatorname{Bis} h\left(\bigcup_\alpha U_\alpha\right) &= \left\{\gamma \cdot x : \gamma \in \bigcup_\alpha U_\alpha, x \in H^{(0)}, s(\gamma) = \rho(x)\right\} \\
&= \bigcup_\alpha \{\gamma \cdot x : \gamma \in U_\alpha, x \in H^{(0)}, s(\gamma) = \rho(x)\} \\
&= \bigcup_\alpha U_\alpha \cdot H^{(0)} \\
&= \bigcup_\alpha \operatorname{Bis} h(U_\alpha),
\end{aligned}$$

因此 Bis h 保持相容并。

对于两个双截面 U，$V \in$Bis G，我们有

$$\begin{aligned}
\operatorname{Bis} h(U \cap V) &= (U \cap V) \cdot H^{(0)} \\
&= \{\gamma \cdot t : \gamma \in U \cap V, t \in H^{(0)}, s(\gamma) = \rho(t)\} \\
&= U \cdot H^{(0)} \cap V \cdot H^{(0)} \\
&= \operatorname{Bis} h(U) \cap \operatorname{Bis} h(V),
\end{aligned}$$

所以 Bis h 是伪群同态。

对于作用子 h: $G \curvearrowright H$, k: $H \curvearrowright K$ 以及开双截面 $U \in$Bis G，有

$$\begin{aligned}
\operatorname{Bis}(kh)(U) &= U \cdot_{kh} K^{(0)} \\
&= \{\gamma \cdot_{kh} t : \gamma \in U, t \in K^{(0)}, s(\gamma) = \rho_{kh}(t)\} \\
&= \{(\gamma \cdot_h \rho_k(t)) \cdot_k t : \gamma \in U, t \in K^{(0)}, s(\gamma) = \rho_{kh}(t)\} \\
&= (U \cdot_h H^{(0)}) \cdot_k K^{(0)} \\
&= \operatorname{Bis} k(\operatorname{Bis} h(U)),
\end{aligned}$$

因此，Bis 保持复合。对于由左乘法给出的特定作用子 1_G: $G \curvearrowright G$，有 $U \cdot_{1_G} G^{(0)} = UG^{(0)} = U$，故 Bis $1_G = 1_{\operatorname{Bis} G}$，因此 Bis 是一个函子。

最后，我们证明 Bis 限制在 $\mathcal{O}$ 上的全子范畴 $\mathbf{Top}^{\mathrm{op}}$。设 X和 Y为拓扑空间，并固定一个作用子 $X \curvearrowright Y$，即一个连续锚映射ρ: $Y \to X$。对于 $U \in$Bis $X = \mathcal{O}X$，框架同态 Bis ρ将 U 映射为

$$U \cdot Y = \{x \cdot y : x \in U, y \in Y, x = s(x) = \rho(y)\}.$$

但由于 Y 仅由单位构成，作用子的定义给出 $y = s(y) = s(x \cdot y) = x \cdot y$。因此 $U \cdot Y = \{y : x \in U, y \in Y, x = \rho(y)\} = \rho^{-1}(U)$，所以 Bis ρ 是与 ρ相关联的逆像函数，而这正是 $\mathcal{O}\rho$。□

正如空间框架是 $\mathcal{O}$ 的本质像中的对象一样，若存在某个 ´étale 群胚 G，使得 S 同构于 Bis$G$，我们就称伪群 S 是空间的。由空间伪群张成的全子范畴记为 Ψ**群范畴**$_{\mathrm{Spat}}$。

3.2.空间化函子。现有多种方法可从伪群式数据重构一个 ´étale 群胚，包括但不限于 [19], [12], [2], [4]。我们将采用一种类似但不同的构造方法：构造与特征空间上的作用相关联的变换群胚 [2] 。我们所构造出的群胚将与 [19], [12], 和 [4] 中的构造等价。

伪群 S 以一种典范方式作用于其幂等元框架的谱。给定一个元素 $t \in S$，以及幂等元框架 ES 上的一个特征 χ，满足 $\chi(t^*t) = 1$，映射

$$e \mapsto \chi(tet^*)$$

在 ES 上构成一个特征。容易验证，这定义了一个同胚c_t: $\mathcal{U}_{t^*t} \to \mathcal{U}_{tt^*}$，并且对所有 t, $u \in S$，都有 $c_{tu} = c_t \circ c_u$。因此，同胚$\widehat{\ }(c_t)_{t\in S}$ 描述了 S 在 ES 上的一个作用。

定义 3.3。伪群 S 的谱 是 ´étale 群胚 $\Sigma S := \widehat{S} \ltimes ES$

Buss、Exel 和 Meyer [2] 研究了逆半群在幂等元半格的特征空间上的作用。这里的特征与我们在定义 2.2 中考虑的特征不同，因为它们不要求保持任意并（事实上，逆半群的幂等元半格未必存在可供讨论的任意并）。在 [2, 第 3] 节构造出的群胚并非 T_1，除非它是空的，或者特征空间只含一个元素（即逆半群为群的情形）。特别是，它很少能从一个 ´étale 群胚的双截面逆半群还原出该群胚，而这正是我们在后续应用中所要求的一项理想性质（至少，这一性质会在 ´étale 群胚的一个有意义的子范畴中成立）。

定义 3.3 中的伪群谱与 [14] 和 [12]中的两种构造都等价。我们的方法与它们的区别在于对态射的处理：Matsnev 和 Resende 为伪群同构提供了一种对偶，而 Lawson 和 Lenz 考虑*callitic* 态射，即满足某些额外条件的伪群态射，这些条件允许构造关联群胚之间的连续函子。伪群态射通常不会诱导连续函子，但如我们现在所示，它们确实允许一种作用子的函子性构造。

伪群同态 φ: $S \to T$ 限制为框架同态$ES \to ET$，因此我们可以使用第2节中的函子 σ，得到连续映射$\widehat{\ } = \sigma(\varphi|_{ES}) = \varphi|_{ES}^*$: $ET \to ES$，并且可以通过与值域映射预合成，将其扩展为映射 $\Sigma T \to ES$。接着我们定义函数 $\Sigma S \,{}_s\!\times_{\rho_\varphi} \Sigma T \to \Sigma T$如下:

$$[t, \tau] \cdot [u, \chi] = [\varphi(t)u, \chi],$$

我们声称它构成一个作用子。

引理 3.4. 设 $\varphi\colon S \to T$ 是一个伪群态射，并令 $\rho_\varphi := \varphi^* \circ r\colon \Sigma T \to \!\!\!\rightharpoonup ES$。那么 ρ_φ 是作用子 $\Sigma\varphi\colon \Sigma S \curvearrowright \Sigma T$ 的锚映射，其乘法映射为 $\Sigma S\ {}_s\!\times_{\rho_\varphi} \Sigma T \to \Sigma T$，定义如下：

$$[t,\tau]\cdot[u,\chi] = [\varphi(t)u,\chi].$$

证明。注意，若 $[t,\tau]$ 和 $[u,\chi]$ 对所定义的作用子乘法可复合，则必有 $\tau = s[t,\tau] = \rho_\varphi[u,\chi] = \varphi^*(c_u(\chi))$。下面证明满足定义 2.5 中的条件：

(1) 对于 $[u,\chi]\in\Sigma T$，有

$$\rho_\varphi[u,\chi]\cdot[u,\chi] = [1_S,\varphi^*c_u(\chi)]\cdot[u,\chi] = [\varphi(1_S)u,\chi] = [u,\chi],$$

利用 $\varphi(1_S) = 1_T$，因为它是一个伪群态射。

(2) 固定一组可复合的 $([t,\varphi^*(c_u(\chi))],[u,\chi]) \in \Sigma S\ {}_s\!\times_{\rho_\varphi}\Sigma T$。对于 $e\in ES$，有

$$\begin{aligned} r[t,\varphi^*c_u(\chi)](e) &= [c_t(\varphi^*c_u(\chi))](e)\\ &= [c_u(\chi)]\varphi(tet^*)\\ &= \chi(u\varphi(t)\varphi(e)(u\varphi(t))^*)\\ &= [c_{\varphi(t)u}(\chi)](\varphi(e))\\ &= [\varphi^*c_{\varphi(t)u}](e)\\ &= \rho_\varphi([\varphi(t)u,\chi])(e), \end{aligned}$$

因此 $r[t,\varphi^*c_u(\chi)] = \rho_\varphi([t,\varphi^*c_u(\chi)]\cdot[u,\chi])$。

(3) 对于可复合的 $[t',\tau']$，$[t,\tau]\in\Sigma S$和 $[u,\chi]\in\Sigma T$，我们有

$$\begin{aligned} [t',\tau']\cdot([t,\tau]\cdot[u,\chi]) &= [t',\tau']\cdot[\varphi(t)u,\chi]\\ &= [\varphi(t')\varphi(t)u,\chi]\\ &= [\varphi(t't)u,\chi]\\ &= [t't,\tau]\cdot[u,\chi]\\ &= ([t',\tau'][t,\tau])\cdot[u,\chi], \end{aligned}$$

如所需。

(4) 对于可复合的 $[t,\tau]\in\Sigma S$和 $[u,\chi]\in\Sigma T$，我们有

$$s([t,\tau]\cdot[u,\chi]) = s[\varphi(t)u,\chi] = \chi = s[u,\chi],$$

如所需。

(5) 对于可复合的 $[t,\tau]\in\Sigma S$和 $[u,\chi]$，$[u',\chi']\in\Sigma T$，我们有

$$\begin{aligned} ([t,\tau]\cdot[u,\chi])[u',\chi'] &= [\varphi(t)u,\chi][u',\chi']\\ &= [\varphi(t)uu',\chi']\\ &= [t,\tau]\cdot[uu',\chi']\\ &= [t,\tau]\cdot([u,\chi][u',\chi']). \end{aligned}$$

最后，我们证明乘法映射是连续的。取网 $([t_\lambda,\tau_\lambda],\ [u_\lambda,\chi_\lambda])^\frown$，它在 $\Sigma S\ {}_s\!\times_r \Sigma T$ 中收敛到 $([t,\tau],\ [u,\chi])$。于是 $t_\lambda\to t$ 属于 S，且 $\tau_\lambda\to\tau$ 属于 ES，因此存在某个幂等元 $e\in ES$，使得当 λ 充分大时，$\tau(e) = 1$，且 $[t_\lambda,\tau_\lambda] = [t,\tau_\lambda]$。类似地，当 λ 充分大时，$[u_\lambda,\chi_\lambda] = [u,\chi_\lambda]$。因此，当 λ 充分大时，我们有

$$[t_\lambda,\tau_\lambda]\cdot[u_\lambda,\chi_\lambda] = [t,\tau_\lambda]\cdot[u,\chi_\lambda] = [\varphi(t)u,\chi_\lambda]$$

它收敛到 $[\varphi(t)u,\ \chi] = [t,\tau]\cdot[u,\chi]$，正如所需。因此，存在一个作用子 $\Sigma\varphi$，其锚映射和乘法分别为上述映射和乘法。□

由伪群态射构造作用子的过程具有函子性。

命题 3.5。 赋值 $S \mapsto \Sigma S$和 $(\varphi\colon\ S \to T) \mapsto \Sigma\varphi$ 构成一个函子$\Sigma\colon$ **Ψ群范畴** $\to$ **EtAct**。

证明。 设 1_S 为 S上的恒等伪群态射。由此诱导的映射 $ES \to \frown ES$ 也就是恒等映射，因此， $\Sigma 1_S$ 的锚映射就是值域映射$\frown \Sigma S \to ES$。对于任意可复合的 $([t,\tau],\ [u,\chi]) \in \Sigma S\ {}_s\!\times_r \Sigma S$，我们有

$$[t,\tau]\cdot_{\Sigma 1_S}[u,\chi] = [1_S(\tau)u,\chi] = [tu,\chi] = [t,\tau][u,\chi],$$

因此， $\Sigma 1_S$ 是 ΣS 上的自身左乘法，也就是$\acute{}$**EtAct**中 ΣS 处的恒等映射。

设 $\varphi\colon\ S \to T$和 $\psi\colon\ T \to R$为伪群同态。限制到幂等元框架上，我们有 $(\psi\circ\varphi)|_{ES} = \psi|_{ET}\circ\varphi|_{ES}$，它下降为 $\sigma(\psi\circ\varphi) = \frown \sigma(\varphi)\circ\sigma(\psi)\colon\ ER \to ES$，因为 σ是一个函子。 $\Sigma(\psi\circ\varphi)$对应的锚映射为 $\rho_{\psi\circ\varphi} = (\psi\circ\varphi)|^*_{ES}\circ r = \psi|^*_{ET}\circ r\circ\varphi|^*_{ES}\circ r = \rho_\varphi\circ\rho_\psi$。 因此，$\Sigma(\psi\circ\varphi)$和$(\Sigma\psi)(\Sigma\varphi)$的锚映射相同。

对于 $[t,\tau]\in\Sigma S$和 $[v,\mu]\in\Sigma R$，且 $s[t,\tau] = \rho_{\psi\circ\varphi}[v,\mu]$，我们有

$$\begin{aligned}[t,\tau]\cdot_{(\Sigma\psi)(\Sigma\varphi)}[v,\mu] &= ([t,\tau]\cdot_{\Sigma\varphi}[1_T,\psi^*\mu])\cdot_{\Sigma\psi}[v,\mu]\\ &= [\varphi(t),\psi^*\mu]\cdot_{\Sigma\psi}[v,\mu]\\ &= [\psi(\varphi(t))v,\mu]\\ &= [t,\tau]\cdot_{\Sigma(\psi\circ\varphi)}[v,\mu],\end{aligned}$$

因此 $(\Sigma\psi)(\Sigma\varphi) = \Sigma(\psi\circ\varphi)$，这表明 Σ 是一个函子。 □

4. The adjunction

本节通过函子 Σ 和 Bis，建立范畴 **Ψ群范畴** 与$\acute{}$**EtAct** 之间的伴随，并证明空间伪群与不可约闭集有唯一泛点的 ´étale 群胚的全子范畴之间的等价。本节可与 Cockett 和 Garner 的文章 [4], 对照，尤其是第 6 节。事实上，Cockett 和 Garner 在一个更广泛的框架下证明了一族伴随，而我们的伴随只是其中的一个特例。我们的讨论和证明牺牲了一般性，以换取更直接、易懂的论证，方便那些不太熟悉 Cockett 和 Garner 所用语言或技巧的读者。

我们首先描述将构成函子 Σ 与 Bis 之间伴随的单位和余单位的自然变换。

命题 4.1。 设 S 为一个伪群。对于每个 $t\in S$，集合 $\eta_S(t)\colon = \{[t,\chi]\colon\ \chi\in\mathcal{U}_{t^*t}\}$ 是 ΣS的一个开双截面。此外，映射 $\eta_S\colon\ S \to \mathrm{Bis}\,\Sigma S$ 将t 映射为 $\eta_S(t)$ 是一个伪群同态，而这些映射组成了一个自然变换 $\eta\colon\ 1_{\Psi\mathbf{Grp}} \Rightarrow \mathrm{Bis}\ \Sigma$。

证明。 根据 [5, 4.18 命题], 集合 $\eta_S(t)$ 是一个开双截面。对于 $t,u\in S$，可复合对中的元素 $[t,x]\in\eta_S(t)$ 和 $[u,y]\in\eta_S(u)$ 的积为 $[tu,y]$，显然属于 $\eta_S(tu)$。反过来，任意元素 $[tu,y]\in\eta_S(tu)$ 都可分解为积 $[t,u\cdot y][u,y]\in\eta_S(t)\eta_S(u)$，因此可知 η_S 是一个半群同态。

设 $(t_\alpha)_\alpha \subseteq S$ 是一个相容族，并记 $t := \bigvee_\alpha t_\alpha$。引理 2.10 表明，$\eta_S(t)$ 是所有 $\eta_S(t_\alpha)$ 的一个上界，因此有 $\bigcup_\alpha \eta_S(t_\alpha) \subseteq \eta_S(t)$。取定一个元素 $[t,\chi] \in \eta_S(t)$。利用引理 2.9 和引理 2.15 的第 (1) 部分，可知$t^*t = \bigvee_\alpha t_\alpha^* t_\alpha$，因此 $\chi(\bigvee_\alpha t_\alpha^* t_\alpha) = 1$。由于 χ 是一个特征，必然存在 α 使得 $\chi(t_\alpha^* t_\alpha) = 1$。于是有 $[t,\chi] = [t_\alpha, \chi]$，从而 $[t,\chi] \in \eta_S(t_\alpha)$。这证明了反向包含关系，因此 η_S 保持相容并。

固定 $t,\ u \in S$。再次利用引理 2.10，我们得到 $\eta_S(t \wedge u) \subseteq \eta_S(t) \cap \eta_S(u)$。反过来，注意到元素 $\eta_S(t) \cap \eta_S(u)$ 可写成 $[t,\chi] = [u,\chi]\widehat{\ }$，其中某个 $\chi \in ES$ 满足 $\chi(t^*t) = \chi(u^*u) = 1$。此外，由于芽相同，存在幂等元 $e \in ES$，使得 $te = ue$ 且 $\chi(e) = 1$。于是我们得到 $te \le t \wedge u[t,\chi] = [te,\chi] = [t \wedge u, \chi]$，从而 $[t,\chi] \in \eta_S(t \wedge u)$。因此，$\eta_S$ 保持二元交，故为伪群态射。

最后，我们证明自然性。固定一个伪群态射 $\varphi\colon S \to T$。对于 $t \in S$，我们有

$$\mathrm{Bis}\,\Sigma\varphi(\eta_S(t)) = \eta_S \cdot_{\Sigma S} \widehat{ET} = \{[\varphi(t),\tau] : \tau \in \widehat{ES}, \tau(\varphi(t^*t)) = 1\} = \eta_T(\varphi(t)),$$

从而得到自然性。 □

如果 $S = F$ 是一个框架（即只由幂等元组成），记号 map η_F 现在出现了重载：它既在命题 4.1 中定义，也在引理 B.6 中定义。由于我们将 $\widehat{ES} = \sigma F$ 与 $(\Sigma S)^{(0)}$ 认同，并且函子 Bis 在满子范畴 $\mathbf{Top}^{\mathrm{op}}$ **ofEtAct** 上限制为 $\mathcal{O}$，因此命题 4.1 中 η 的定义扩展了引理 B.6 中原先已有的定义，所以这种记号重载是合理的。

命题 4.2。设 G 是一个 ´*étale* 群胚。存在一个作用子 $\epsilon_G\colon\ \Sigma\,\mathrm{Bis}\ G \curvearrowright G$⌒，其锚映射为 $\rho_G\colon = \kappa_{G^{(0)}} \circ r\colon\ G \to (\Sigma\,\mathrm{Bis}\ G)^{(0)}$，其中 $\kappa_{G^{(0)}}\colon\ G^{(0)} \to \mathcal{O}G^{(0)}$ 是将点映射到其检测特征的连续映射。作用子乘法 $\cdot_{\epsilon_G}\colon\ \Sigma\mathrm{Bis}\,G\ {}_s\!\times_{\rho_G} G \to G$ 由.....给出

$$[U,\chi] \cdot_{\epsilon_G} \gamma = U\gamma.$$

证明。为简洁起见，我们将 κ 记作 $\kappa_{G^{(0)}}$。首先注意，所述作用子乘法是良定义的，因为若对于两个开双截面有 $[U,\chi] = [V,\chi]$，且 $\chi = \rho_G(\gamma) = \kappa(r(\gamma))$，则存在一个开子集 $W \subseteq G^{(0)}$，使得 $UW = VW$ 且$\kappa(r(\gamma))(W) = 1$，由此 $r(\gamma) \in W$。于是我们得到 $U\gamma = UW\gamma = VW\gamma = V\gamma$，如所需。

由于 $\rho_G(\gamma) = [G^{(0)}, \kappa_{G^{(0)}}(r(\gamma))]$，我们有 $\rho_G(\gamma)\cdot\gamma = G^{(0)}\gamma = \gamma$，因此满足定义 2.5 的第一条公理。注意，对于满足 $r(\gamma) \in s(U)$ 的 $U \in \mathrm{Bis}\ G$，Bis G在 $\mathcal{O}G^{(0)}$上的作用⌒将特征 $\kappa(r(\gamma))$映为 $c_U(\kappa(r(\gamma))) = \kappa(r(\gamma))(U \cdot U^*)$，而后者将 $W \in \mathcal{O}G^{(0)}$映为 1，当且仅当 $r(\gamma) \in UWU^*$；这又当且仅当 $r(U\gamma) = U^* r(\gamma) U \in W$。因此 $r[U,\kappa(r(\gamma))] = \kappa(r(U\gamma)) = \rho_G([U,\kappa(r(\gamma))]\cdot\gamma)$，从而得到第二条公理。显然，对于所有的$[V,\tau]$、$[U,\chi] \in \Sigma\,\mathrm{Bis}\ G$ 以及作用子乘法有定义的 $\gamma \in G$，我们还有 $[V,\tau]\cdot([U,\chi]\cdot\gamma) = VU\gamma = [VU,\chi]\cdot\gamma$，因此所提出的作用子乘法定义了 ΣBis G在 G上的左作用。

定义 2.5 的最后两个公理，依据构造可知 ρ_G 经由 G 中的值域映射进行分解，并由 G 的结合律推出。□

命题 4.3. 命题 4.2 中的作用子 $\epsilon_G\colon\ \Sigma\,\mathrm{Bis}\ G \curvearrowright G$ 组成一个自然变换 $\epsilon\colon\ \Sigma\,\mathrm{Bis}\ \Rightarrow 1_{\mathbf{\acute{E}tAct}}$。

证明。 固定一个作用子 $h\colon G \curvearrowright H$。证明 ϵ 的自然性，只需证明等式 $\epsilon_H(\Sigma\operatorname{Bis}\ h) = h\epsilon_G$。$\Sigma\operatorname{Bis}\ h$ 的锚映射为 $\rho_{\Sigma\operatorname{Bis}\ h} = (\operatorname{Bis}\ h)|^*_{E\operatorname{Bis} G} \circ r$，其中 $(\operatorname{Bis}\ h)|^*_{E\operatorname{Bis} G}$ 将一个特征 $\chi \in \mathcal{O}H^{(0)}$ 映射到 $\chi \circ (\operatorname{Bis}\ h)|_{E\operatorname{Bis} G}$。对于 $x \in H$，$\epsilon_H(\Sigma\operatorname{Bis}\ h)$ 的锚映射将 x 映射为特征

$$U \mapsto [\kappa_{H^{(0)}}(r(x))](\operatorname{Bis} h(U)) = [\kappa_{H^{(0)}}(r(x))](\rho_h^{-1}(U)) = \begin{cases} 1, & r(x) \in \rho_h^{-1}(U), \\ 0, & r(x) \notin \rho_h^{-1}(U). \end{cases}$$

$h\epsilon_G$ 的锚映射将 x 映至 $\kappa_{G^{(0)}}(\rho_h(r(x)))$。这个特征定义为

$$[\kappa_{G^{(0)}}(\rho_h(r(x)))](U) = \begin{cases} 1, & \rho_h(r(x)) \in U, \\ 0, & \rho_h(r(x)) \notin U, \end{cases} = \begin{cases} 1, & r(x) \in \rho_h^{-1}(U), \\ 0, & r(x) \notin \rho_h^{-1}(U), \end{cases}$$

这恰好是 $[\kappa_{H^{(0)}}(r(x))](\operatorname{Bis}\ h(U))$。因此 $\rho_{\epsilon_H\ (\Sigma\operatorname{Bis}\ h)} = \rho_{h\epsilon_G}$。

当且仅当 $\chi = \kappa_H^{(0)}(r(x))$ 时，数对 $([U,\chi],\ x) \in \Sigma\operatorname{Bis} G \times H$ 相对于所关注的作用子可合成。$h\epsilon_G$ 的作用子乘法将这个数对映至

$$[U,\chi] \cdot_{\epsilon_G h} x = ([U,\chi] \cdot_{\epsilon_G} \rho_h(x)) \cdot_h x = (U\rho_h(x)) \cdot_h x,$$

$\epsilon_H(\Sigma\operatorname{Bis}\ h)$ 的作用子乘法将其映至

$$\begin{aligned} [U,\chi] \cdot_{\epsilon_H(\Sigma\operatorname{Bis} h)} x &= ([U,\chi] \cdot_{\Sigma\operatorname{Bis} h} \kappa_{H^{(0)}}(r(x))) \cdot_{\epsilon_H} x \\ &= [\operatorname{Bis} h(U), \kappa_{H^{(0)}}(r(x))] \cdot_{\epsilon_H} x \\ &= \operatorname{Bis} h(U) x. \end{aligned}$$

但是，$\operatorname{Bis}\ h(U)x = (\operatorname{Bis}\ h(U)r(x))x$ 是 $\operatorname{Bis}\ h(U)$ 中源为 $r(x)$ 的唯一元素与 x 的积。由于 $\operatorname{Bis}\ h(U) = U \cdot_h H^{(0)}$，我们有 $\operatorname{Bis}\ h(U)r(x) = \gamma \cdot_h r(x)$，其中 $\gamma \in U$ 是满足 $s(\gamma) = \rho_h(x)$ 的唯一元素。因此 $\operatorname{Bis}\ h(U)r(x) = (U\rho_h(x)) \cdot_h r(x)$，于是

$$[U,\chi] \cdot_{\epsilon_G h} x = (U\rho_h(x)) \cdot_h x = \operatorname{Bis} h(U)x = [U,\chi] \cdot_{\epsilon_H(\Sigma\operatorname{Bis} h)} x,$$

正如所要求的。 □

现在我们证明，η 和 ϵ 构成一个伴随的单位和余单位。

定理 4.4（参见 [4, 定理 6.8]）。函子 $\Sigma\colon$ **Ψ群范畴** $\to$ **´EtAct** 和 ´Bis: **EtAct** $\to$ **Ψ群范畴** 构成伴随 $\Sigma \dashv \operatorname{Bis}$。命题 4.1 和 4.2 中的自然变换 η 和 ϵ 分别是这个伴随的单位和余单位。

证明。我们证明，η 和 ϵ 满足三角恒等式。

对于伪群 S，作用子 $((\epsilon\Sigma)(\Sigma\eta))_S = \epsilon_{\Sigma S}(\Sigma\eta_S)$ 的锚映射由复合 $\chi \mapsto \kappa_{(\Sigma S)^{(0)}}(\chi) \mapsto [\kappa_{(\Sigma S)^{(0)}}(\chi)](\eta_S(\cdot))$ 给出。此特征作用于 ES，将 e 映射为

$$[\kappa_{(\Sigma S)^{(0)}}(\chi)](\eta_S(e)) = \begin{cases} 1, & \chi \in \eta_S(e), \\ 0, & \chi \notin \eta_S(e), \end{cases} = \begin{cases} 1, & \chi(e) = 1, \\ 0, & \chi(e) = 0, \end{cases} = \chi(e).$$

因此 $\rho_{\epsilon_{\Sigma S}(\Sigma\eta_S)}(\chi) = \eta_S^* \kappa_{(\Sigma S)^{(0)}}(\chi) = \chi$，所以 $\epsilon_{\Sigma S}(\Sigma\eta_S)$ 的锚映射是 ΣS 的单位空间上的恒等映射。由于两个锚映射都经由值域映射分解，我们可知，锚映射在 ΣS 上就是值域映射。

对于可复合的 $[t,\chi],[u,\tau]\in\Sigma S$，二者的作用子乘积为

$$\begin{aligned}[t,\chi]\cdot_{\epsilon_{\Sigma S}(\Sigma\eta_S)}[u,\tau]&=([t,\chi]\cdot_{\Sigma\eta_S}[1_{\mathrm{Bis}\,\Sigma S},\kappa_{(\Sigma S)^{(0)}}(r[u,\tau])])\cdot_{\epsilon_{\Sigma S}}[u,\tau]\\&=[\eta_S(t),\kappa_{(\Sigma S)^{(0)}}(r[V,\tau])]\cdot_{\epsilon_{\Sigma S}}[u,\tau]\\&=\eta_S(t)[u,\tau]\\&=[tu,\tau],\end{aligned}$$

这正是群胚 ΣS 中 $[t,\chi]$ 与 $[u,\tau]$ 的积。因此 $\epsilon_{\Sigma S}(\Sigma\eta_S)=1_{\Sigma S}$。

设 G 是一个 Étale 群胚，并考虑分量

$$((\mathrm{Bis}\,\epsilon)(\eta\,\mathrm{Bis}))_G=\mathrm{Bis}\,\epsilon_G(\eta_{\mathrm{Bis}\,G})\colon\ \mathrm{Bis}\,G\to\mathrm{Bis}\,G.$$

对于开双截面 $U\in\mathrm{Bis}\ G$，回忆 $\eta_{\mathrm{Bis}\,G}(U)$ 是集合

$$\{[U,\chi]:\chi\in\widehat{\mathcal{O}G^{(0)}},\chi(U^*U)=1\}.$$

对于满足 $\kappa_{G^{(0)}}(x)\in U^*U$ 的点 $x\in G^{(0)}$，作用子乘积 $[U,\kappa_{G^{(0)}}]\cdot_{\epsilon_G}x$ 的取值为 Ux；它是 U 中源为 x 的唯一元素。我们还注意到，$x\in\frown G^{(0)}$ 对某个 $\chi\in\mathcal{O}G^{(0)}$ 满足 $\rho_{\epsilon_G}(x)=[U,\chi]$，当且仅当 $\chi=\kappa_{G^{(0)}}(x)$ 且 $[\kappa_{G^{(0)}}(x)](U^*U)=1$，当且仅当 $x\in U^*U$。因此我们计算

$$\mathrm{Bis}\,\epsilon_G(\eta_{\mathrm{Bis}\,G}(U))=\eta_{\mathrm{Bis}\,G}(U)\cdot_{\epsilon_G}G^{(0)}=\{[U,\chi]\cdot_{\epsilon_G}x:x\in U^*U\}=U,$$

由此得到 $\mathrm{Bis}\ \epsilon_G(\eta_{\mathrm{Bis}\,G})=1_{\mathrm{Bis}\,G}$，如所需。 □

该伴随限制为 **EtAct** $\mathbf{EtAct}$ 中不可约闭集有唯一泛点的Étale 群胚全子范畴与 **Ψ群范畴** 中空间的伪群全子范畴之间的等价。

引理 4.5。设 S 是一个伪群，则 ΣS 是不可约闭集有唯一泛点的。

证明。由于 ΣS 是 Étale 的，它局部同胚于其单位空间 ES。由于$\frown ES$ 是一个框架，根据命题 B.9，其谱 ES 是不可约闭集有唯一泛点的。由命题 2.4 可知，ΣS 是不可约闭集有唯一泛点的。□

我们还在此回顾，命题 2.4 表明，一个 Étale 群胚是不可约闭集有唯一泛点的，当且仅当其单位空间是不可约闭集有唯一泛点的。

命题 4.6。设 G 是一个不可约闭集有唯一泛点的群胚，则余单位作用子 $\epsilon_G\colon\ \Sigma\,\mathrm{Bis}\ G\curvearrowright G$是一个同构。

证明。由命题 B.9 可知，单位空间 $(\Sigma\,\mathrm{Bis}\,G)^{(0)}=\mathcal{O}G^{(0)}$ 是不可约闭集有唯一泛点的，因此根据定理 B.10，框架$\frown$同态 $\kappa_{G^{(0)}}\colon\ G^{(0)}\to\mathcal{O}G^{(0)}$ 是一个同构。因此，$\mathcal{O}G^{(0)}$ 上的每个特征都是某个$x\in G^{(0)}$对应的点检测特征 $\chi_x:=\kappa_{G^{(0)}}(t)$。定义 $\rho\colon\ \Sigma\mathrm{Bis}\ G\to G^{(0)}$为 $\rho:=\kappa_{G^{(0)}}^{-1}\circ r$，使得 $\rho[U,\chi_x]=U^*xU$。接着，我们通过如下定义，为具有锚映射 ρ 的作用子 $h\colon\ G\curvearrowright\Sigma\,\mathrm{Bis}\ G$ 构造作用子乘法

$$\gamma\cdot_h[U,\chi_x]=[V_\gamma U,\chi_x]$$

对于 $\gamma\in G$以及满足 $s(\gamma)=\rho[U,\chi_x]=UxU^*$的 $[U,\chi_x]\in\Sigma\mathrm{Bis}\ G$，其中 $V_\gamma\in\mathrm{Bis}\ G$是 γ的一个双截面邻域。此公式与 V_γ 的选取无关，因为对于任意两个包含 γ 的 $V_\gamma,\ V'_\gamma\in\mathrm{Bis}\ G$，$V_\gamma U$ 和 $V'_\gamma U$ 在 x 处的芽均与 $(V_\gamma\cap V'_\gamma)U$ 在 x处的芽相同。不难验证，这构成了一个作用子 h。

我们断言 h 是 ϵ_G的逆作用子。根据构造，锚映射在单位空间上互为逆映射，因此它们的复合给出值域映射

在各自的定义域上。首先我们计算复合 $\epsilon_G h$。对于可复合的箭头 γ， $\eta \in G$，令 V_γ 为包含 γ的一个双截面。我们计算

$$\begin{aligned}\gamma \cdot_{\epsilon_G h} \eta &= \gamma \cdot_h ([G^{(0)}, \chi_{r(\eta)}]) \cdot_{\epsilon_G} \eta \\ &= [V_\gamma, \chi_{r(\eta)}] \cdot_{\epsilon_G} \eta \\ &= V_\gamma \eta \\ &= \gamma\eta,\end{aligned}$$

如上所要求。剩下的只是检查逆复合。对于可复合的$[U, \chi_x]$， $[V, \chi_y] \in \Sigma\,\mathrm{Bis}\ G$，其中 x， $y \in G^{(0)}$ 是单位，我们有

$$\begin{aligned}[U, \chi_x] \cdot_{h\epsilon_G} [V, \chi_y] &= ([U, \chi_x] \cdot_{\epsilon_G} VyV^*) \cdot_h [V, \chi_y] \\ &= UVyV^* \cdot_h [V, \chi_y] \\ &= [UV, \chi_y] \\ &= [U, \chi_x][V, \chi_y],\end{aligned}$$

如上所要求。 □

´两个群胚在 **EtAct** 中同构，当且仅当它们作为拓扑范畴同构（即它们之间存在连续互逆函子），根据 [16, 命题 4.19]。因此，命题 4.6 表明，一个不可约闭集有唯一泛点的 ´étale 群胚G 在“通常意义下”同构于 $\Sigma\mathrm{Bis}\ G$。

与帧的情形类似，我们可以证明，一个伪群 S 是空间的，当且仅当它同构于其关联群胚的双截面伪群 ΣS。

命题 4.7。 一个伪群 S 是空间的，当且仅当且仅当 ES 是空间的。在此情形下，同态 η_S： $S \to \mathrm{Bis}\,\Sigma S$ 是同构。

证明。 假设 S 是空间的。根据定义，存在一个 ´étale 群胚 G，满足 $S \cong \mathrm{Bis}\ G$。这意味着 $ES \cong E\,\mathrm{Bis}\,G = \mathcal{O}G^{(0)}$ 是一个空间框架，因此根据 [18, 5, $ES \cong \curvearrowright \mathcal{O}ES$。1 命题]。反过来，假设 ES 是空间的。令 η_S: $S \to \mathrm{Bis}\ \Sigma S$ 为命题 4.1 中单位的分量。固定 t， $u \in S$，使得 $\eta_S(t) = \eta_S(u)$。于是 $\eta_S(t^*t) = \eta_S(u^*u)$，因此 $t^*t = u^*u$，因为 ES 是空间的，且 η 延拓了定理 2.3 中伴随的单位。此外， t 和 u 的芽在 t^*t 中的所有特征处都相同，从而得到 $t = tt^*t = ut^*t = u$。

对于满射性，我们采用与命题 4.7 中类似的策略。固定一个开双截面 $U \in \mathrm{Bis}\,\Sigma S$，并将其写成一个并

$$U = \bigvee_\alpha \eta_S(t_\alpha) \cap U$$

其中 $(t_\alpha)_\alpha \subseteq S$ 是一个元素族，它们在 η_S 下的像共同覆盖 U。 ⌢由于 $(\eta_S(t_\alpha) \cap U)^*(\eta_S(t_\alpha) \cap U)$ 是 ES 的开子集，且 ES 是空间的，因此存在一个元素 $e_\alpha \in ES$，使得 $\eta_S(e_\alpha) = (\eta_S(t_\alpha) \cap U)^*(\eta_S(t_\alpha) \cap U)$，于是得到 $\eta_S(t_\alpha) \cap U = \eta_S(t_\alpha e_\alpha)$。 $\eta_S(t_\alpha e_\alpha)$ 的并是一个开双截面，因此族 $(\eta_S(t_\alpha e_\alpha)_\alpha)$ 相容；又因为 η_S 是单射，故 $(t_\alpha e_\alpha)_\alpha$ 也相容。于是我们有

$$U = \bigcup_\alpha \eta_S(t_\alpha e_\alpha) = \eta_S\left(\bigvee_\alpha t_\alpha e_\alpha\right),$$

由此得到满射性。引理 2.17 完成证明。

令 $\eta_S\colon S \to \mathrm{Bis}\ \Sigma S$ 为命题 4.1 中的单位态射。对于 $t,u \in S$，满足 $\eta_S(t) = \eta_S(u)$，我们有 $\eta_S(t^*t) = \eta_S(u^*u)$，这意味着 $t^*t = u^*u$，因为 ES 是空间的，且 η_S 对空间框架限制为一个同构。对于每个 $\chi \in \eta_S(t^*t) = \frown\eta_S(u^*u) \subseteq ES$，令 $e_\chi \in ES$ 为一个幂等元，使得 $\chi(e_\chi) = 1$ 且 $te = ue$。这些元素存在，因为对于这样的 χ，$[t,\chi] = [u,\chi]$；它们恰好是 $\eta_S(t) = \eta_S(u)$ 的元素。于是我们有 $t^*t = u^*u \le \bigvee_\chi e_\chi$，因为与 e_χ 对应的开集在 $\frown\mathcal{O}ES$ 中包含 χ。因此我们有 $t = t\bigvee_\chi e_\chi = \bigvee_\chi te_\chi = \bigvee_\chi ue_\chi = u$，且 η_S 是单射。

固定一个开双截面 $U \in \mathrm{Bis}\,\Sigma S$。令 $I \subseteq S$ 为满足$\eta_S(t) \cap U \neq \emptyset$的元素集合 $t \in S$。由于 η_S 的像覆盖了 ΣS，我们有

$$U = \bigcup_{t\in I} \eta_S(t) \cap U.$$

此外，$\eta_S(t) \cap U = \eta_S(t)(\eta_S(t) \cap U)^*(\eta_S(t) \cap U)$，因为 $\eta_S(t)$ 和 $\eta_S(t) \cap U$ 都是$\frown$开双截面。集合 $(\eta_S(t) \cap U)^*(\eta_S(t) \cap U)$ 是 ES 的一个开子集，因此存在一个幂等元 $e_t \in ES$，使得 $(\eta_S(t) \cap U)^*(\eta_S(t) \cap U) = \eta_S(e_t)$，因为 ES 是一个空间框架。因此 $\eta_S(t) \cap U = \eta_S(t)\eta_S(e_t) = \eta_S(te_t)$，从而

$$U = \bigcup_{t\in I} \eta_S(t) \cap U = \bigcup_{t\in I} \eta_S(te_t).$$

开双截面的并在且仅在该族相容时才再次成为开双截面，因此族 $(\eta_S(te_t))_{t\in I}$ 是 $\mathrm{Bis}\,\Sigma S$ 中的相容族。由于 η_S 是单射的，我们看到 $(te_t)_{t\in I}$ 在 S 中相容，因此其并存在。于是我们有

$$\eta_S\left(\bigvee_{t\in I} te_t\right) = \bigcup_{t\in I} \eta_S(te_t) = U,$$

由此 η_S 是满射。因此，根据引理 2.17，η_S 是一个同构。 □

现在我们可以结合之前的结果，证明Σ 与 Bis 之间的伴随限制为 sober 群胚与空间伪群之间的等价。

推论 4.8。伴随 $\Sigma \dashv \mathrm{Bis}$ 限制为 $\mathbf{EtAct}$ 中由 *sober* 群胚张成的全´子范畴与 Ψ**群范畴** 中由空间伪群张成的全子范畴之间的等价。

证明。命题 4.6 和 4.7 表明，单位和余单位的分量在这些子范畴上是同构，因此这些子范畴是等价的。□

推论 4.9. 空间伪群的全子范畴是 Ψ**群范畴** 的反射子范畴，其反射函子为 $\mathrm{Bis}\,\Sigma$。*sober* 群胚´的全子范畴是 $\mathbf{EtAct}$ 的余反射子范畴，其余反射函子为 $\Sigma\mathrm{Bis}$。

5. Limits

本节利用定理 4.4 中的伴随，以及推论 4.8 中不可约闭集有唯一泛点的 ´étale 群胚与空间伪群之间的等价，研究相应范畴中的极限。群范畴中的极限 Ψ**群范畴** 可通过到**集合**的遗忘函子直接计算，我们据此推导出 Ψ**群范畴**$_{\mathrm{Spat}}$ 以及

´进而得到$\mathbf{EtAct}_{\mathrm{Sob}}$的完备性。随后，我们介绍$\mathbf{EtAct}_{\mathrm{Sob}}$中极限的一些主要例子。´此外，我们还说明群的极限和余极限在 Ψ**群范畴** 和$\mathbf{EtAct}$中的表现，并对较为困难的余极限问题作简要讨论。

定理 5.1。 遗忘函子 $U\colon$ Ψ**群范畴** $\to$ **集合** 创生极限。特别地，Ψ**群范畴** 是完备的。

证明。 设 $F\colon J \to \Psi$**群范畴** 是一个小图表。 UF在集合中的极限可实现为集合 Cone(1，UF)，其中 $1 \in$**集合** 是一个单点集。泛锥$\lambda\colon$ Cone(1，UF) $\Rightarrow F$的分量为 $\lambda_j\colon$ Cone(1，UF) $\to F_j$，它将 Cone(1，UF) 上的一个锥 $\mu \in$映射到 $\mu_j(*)$，其中 $* \in 1$ 是唯一元素。

我们赋予 Cone(1，UF) 一个“逐点的”伪群结构。所有运算都将是逐点进行的：对于 $j \in J^0$

- 两个锥 μ^1，$\mu^2 \in$Cone(1，UF) 的积由 $(\mu^1\mu^2)_j(*) = \mu^1_j(*)\mu^2_j(*)$ 给出，
- 该 *运算由 $(\mu^*)_j(*) = \mu_j(*)^*$ 给出，
- 两个锥 $\mu^1, \mu^2 \in$Cone(1，UF) 的交由 $(\mu^1 \wedge \mu^2)_j(*) = \mu^1_j(*) \wedge \mu^2_j(*)$ 给出
- 族 $(\mu^\alpha)_\alpha \subseteq$Cone(1，$UF$) 相容，当且仅当 $(\mu^\alpha_j(*))_\alpha$是伪群 Fj 中的相容族，因此这些逐点并都存在。Cone(1，UF) 中该族的并由 $(\bigvee_\alpha \mu^\alpha)_j(*) = \bigvee_\alpha \mu^\alpha_j(*)$ 给出。

容易验证，这一结构使 Cone(1，UF) 成为一个伪群，并且构造所得的 **集合** 中泛锥的分量 λ_j 都是伪群同态。由于到**集合**的遗忘函子是忠实的，这些分量可提升为 Ψ**群范畴**中覆于 F 的锥。此外，任何其他覆于 F 的锥 μ都可下降为覆于 UF 的锥，由此得到一个函数 $\tilde{\mu}\colon US \to$Cone(1，UF)，使得对于每个 $j \in J^0$，都有 $\lambda_j\tilde{\mu} = \mu_j$。 由于 Cone(1，$UF$) 中所有伪群运算都是逐点定义的，且 λ_j 是求值映射，因此我们看到， $\tilde{\mu}$ 是伪群同态，当且仅当对每个 j， $\lambda_j\tilde{\mu}$ 是伪群同态。但这些恰好就是 μ_j，根据假设，它们都是伪群同态。映射 $\tilde{\mu}$ 也因这一性质而唯一，因为任何其他具有该性质的态射都会下降为 **集合**中的函数 $US \to$Cone(1，UF)；由该函数的唯一性以及 U 的忠实性可知，它必然就是 $\tilde{\mu}$。□

由于空间伪群的子范畴 Ψ**群范畴**$_{\mathrm{Spat}}$ 依据推论 4.9 是 Ψ**群范畴** 的反射子范畴，我们可以利用定理 5.1 推出 Ψ**群范畴**$_{\mathrm{Spat}}$ 的完备性。´推论 4.8 随后将此结果传递到 $\mathbf{EtAct}_{\mathrm{Sob}}$。

定理 5.2。 遗忘函子 Ψ**群范畴**$_{\mathrm{Spat}}$ $\to$**集合** 创生极限。特别地，Ψ**群范畴**$_{\mathrm{Spat}}$ 和 $\mathbf{EtAct}_{\mathrm{Sob}}$ 都是完备的。

证明。 子范畴 Ψ**群范畴**$_{\mathrm{Spat}}$ 是 Ψ**群范畴** 的反射子范畴，因此包含函子 Ψ**群范畴**$_{\mathrm{Spat}} \hookrightarrow \Psi$**群范畴** 依据 [20, 命题 4.5.15] 创生极限。定理 5.1 表明 Ψ**群范畴** 是完备的，因此 Ψ**群范畴**$_{\mathrm{Spat}}$ 是完备的；此外，极限是在 Ψ**群范畴** 中构造的，因此由到 **集合** 的遗忘函子创生。

´$\mathbf{EtAct}_{\mathrm{Sob}}$ 通过 Ψ**群范畴**$_{\mathrm{Spat}}$ 与其等价，因此完备性得以传递。□

注记 5.3. 遗忘函子 Ψ**群范畴** $\to$ **集合** 具有一个左伴随，即一个“自由伪群”函子，因此它自身是一个右伴随，故至少必须保留

极限。此外，这表明 Ψ**群范畴** 具有所有自由对象的余极限，因为遗忘函子的左伴随必须保留从**集合**而来的这些余极限。详情请参阅 [11, 定理 1.4.23、定理 1.4.24、定理 6.1.2] 。

由于任何伪群态射都必然将幂等元映射为幂等元，因此限制到幂等元框架上便得到一个函子 E: Ψ**群范畴** $\to$ **框架**。反过来，我们可以将任意框架视为由幂等元组成的伪群，而两个框架之间的伪群同态恰好就是框架同态。我们用 ι 表示包含函子：**框架** $\to$ Ψ**群范畴**。此函子是从框架范畴到伪群范畴的包含函子的右伴随，从而得到一个余反射子范畴。

命题 5.4。 E 是包含函子 ι: **框架** $\to$ Ψ**群范畴**的右伴随，因此**框架** 是 Ψ**群范畴**的余反射子范畴。对于框架 F 和伪群S，自然双射 Ψ**群范畴**$(\iota F, S) \xrightarrow{\sim}$ **框架**(F, ES) 将伪群态射 $\varphi^\sharp$: $\iota F \to S$ 映为其余限制 $\varphi^\flat$: $F \to ES$。

证明。 由于 ιF 仅由幂等元组成， $\varphi^\sharp$: $\iota F \to S$ 的像必定包含于 ES中，因此，给定为 $\varphi^\flat(e) = \varphi^\sharp(e)$ 的余限制 $\varphi^\flat$: $F \to ES$定义良好。此外，每个框架同态 $F \to ES$ 都具有这种形式，因此映射 $\varphi^\sharp \mapsto \varphi^\flat$ 是一个双射。自然性很容易验证。□

根据命题 4.7，伪群的空间性仅取决于其幂等元´框架，因此$\mathbf{EtAct}_{\mathrm{Sob}}$ 中的极限群胚可以在 $\mathbf{Top}_{\mathrm{Sob}}$中计算。

推论 5.5。 E 保极限。特别地，图表 F: $J \to$ ´$\mathbf{EtAct}_{\mathrm{Sob}}$ 的极限的单位空间，由$\mathbf{Top}^{\mathrm{op}}{}_{\mathrm{Sob}}$ 中相应（反向）锚映射的极限给出。

5.1. **极限的例子**。 有了这些新本领，我们可以更好地描述 ´$\mathbf{EtAct}_{\mathrm{Sob}}$中的一些极限。现在，复合 ´$\mathbf{EtAct}_{\mathrm{Sob}} \xrightarrow{\Psi_{\text{群范畴}}} \to$ **集合**给出了一个从 sober étale 群胚范畴到集合范畴的函子，该函子构造所需的极限；这意味着，这一范畴中 sober 群胚的极限可以先在集合范畴中构造，再通过该函子“提升”回来。不过，由于这个函子并不会将群胚映射到其箭头的底层集合（而是映射到双截面的集合），因此得到的极限构造或许并不那么熟悉。一个例子是$\mathbf{EtAct}_{\mathrm{Sob}}$ 中的积，因为它并不等同于笛卡尔积。甚至无需直接调用定理 5.1 或 5.2，也可以在更大的范畴 ´$\mathbf{EtAct}$中描述这个积。

´命题 5.6. 范畴 $\mathbf{EtAct}$ 中的积由不交并给出。

证明。 设 $(G_\alpha)_{\alpha\in I}$ 是一个 ´étale 群胚族。令 $G := \bigsqcup_{\alpha\in I} G_\alpha$ 为不交并，并赋予其不交并拓扑和不交并群胚结构（即以函子为态射的群胚范畴中的余积）。对每个 $\alpha \in I$，令 ι_α: $G_\alpha \to G$ 为包含映射。

我们按如下方式定义图表 $(G_\alpha)_\alpha$ 上的一个泛锥：对于每个 $\alpha \in I$，令ρ_α: $G_\alpha \to G^{(0)}$ 为复合 $\rho_\alpha := \iota_\alpha \circ r_\alpha$，其中 r_α: $G_\alpha \to G_\alpha^{(0)}$是 G_α中的值域映射。对于 $\gamma \in G$ 和 $\eta \in G_\alpha$，仅当 γ属于不交并的 G_α-分量时，我们才有 $s(\gamma) = \rho_\alpha(\eta) = \iota_\alpha(r_\alpha(\eta))$。将每个 G_α 与像 $\iota_\alpha(G_\alpha) \subseteq G$ 识别后，我们看到 (γ, η) 是 G_α 中的可复合对，于是我们可以继续

定义 $\cdot_\alpha$: $G\,{}_s\!\times_{\rho_\alpha} G_\alpha \to G_\alpha$ 如下

$$\gamma \cdot_\alpha \eta := \gamma\eta,$$

使用 G_α中的乘法。

容易验证，这定义了一个作用族 π_α: $G \curvearrowright G_\alpha$。给定另一个作用族（$h_\alpha$: $H \curvearrowright G_\alpha$）$_\alpha$，我们构造一个作用子 h: $H \curvearrowright G$，使得$h_\alpha = \pi_\alpha h$ 对所有 α均成立。 h 的锚映射由将锚映射 ρ_{h_α}: $G_\alpha \to H^{(0)}$ 的不交并取为连续映射 $\rho_h := \bigsqcup \rho_{h_\alpha}$: $G \to H$给出。对于满足 $s(x) = \rho_h(\gamma)$ 的成对元素$x \in H$ 和 $\gamma \in G$，存在唯一的 α 使得 $\gamma \in G_\alpha$ 且$\rho_h(\gamma) = \rho_{h_\alpha}(\gamma)$。对于这样的成对元素，我们定义 $x \cdot_h \gamma := x \cdot_{h_\alpha} \gamma$。这确定了一个作用子，并且根据构造，我们有 $h_\alpha = \pi_\alpha h$。显然， h 也是唯一的此类作用子，因为在每个 G_α 上的作用都已确定，且这些子集覆盖了 G。□

等化子的构造稍微有些不那么直观。

设 G和 H是 sober Étale 群胚，并设 h, k: $G \curvearrowright H$是作用子。为计算等化子，我们考虑诱导同态 Bis h, Bis k: Bis $G \to$ Bis H，并在此处取等化子。根据定理 5.2，这两个同态的等化子是子伪群 $S := \{U \in \text{Bis } G : \text{Bis } h(U) = \text{Bis } k(U)\} \subseteq \text{Bis } G$。此外， S 是空间的，因此 $S \cong \text{Bis}\,\Sigma S$ 连同诱导同态 Bis $\Sigma S \to \text{Bis}\,G$ 构成了 Ψ**群范畴** Spat中的等化子。

$\widehat{\ }$将此经由 Σ 推出后，得到群胚 $S \ltimes ES$，因此我们希望描述 S 在 $\widehat{ES}$上的作用。首先注意， ES 是 $\mathcal{O}G^{(0)}$ 中 Bis h 与 Bis k 相等的子集，因为 E 根据命题 5.4 保极限。利用定理 2.3 中从空间框架到 sober 拓扑空间对偶范畴的等价，我们看到， ΣS 的单位空间由诱导连续映射 $H^{(0)} \to G^{(0)}$ 的余等化子给出，这些映射分别来自 Bis h 和 Bis k。但它们恰好是将$\widehat{\ }$锚映射限制到 H的单位空间上所得的映射，因此 $ES \cong \text{coeq}(\rho_h, \rho_k)$，即 $G^{(0)}$ 关于由所有$x \in H$的 $\rho_h(x) \sim \rho_k(x)$ 所生成的等价关系所得的商。

将 ΣS 中的一个单位视为某个单位 $t \in G^{(0)}$的等价类 $[t]$，当 U^*U 包含 $[t]$ 的一个代表元时， $U \in S$ 在 $[t]$ 上的作用有定义，且该作用将 $[t]$映至 $[UtU^*]$。S的空间化由这类配对 $[U, [t]]$构成。作用子 $\Sigma S \curvearrowright G$ 的锚映射由商映射 $G \to \text{coeq}(\rho_h, \rho_k)$ 给出，它将 γ 映至类 $[r(\gamma)]$。于是，作用子乘法定义为

$$[U, [r(\gamma)]] \cdot \gamma = U\gamma.$$

另一种理解余等化子的方式是取由 S覆盖的开子群胚 $K := \bigcup S \subseteq G$。我们在 K 上赋予一个等价关系，将 ρ_h 和 ρ_k 的余等化子关系扩展为：若 $s(\gamma) \sim s(\eta)$，且存在一个包含 γ 和 η的元素 $U \in S$，则 $\gamma \sim \eta$。于是， K 对该关系取商后得到的群胚与 ΣS同构；对于满足 $s[\gamma] = [r(\eta)]$ 的 $[\gamma] \in K/\sim$ 和 $\eta \in G$，作用子乘法由 $[\gamma] \cdot \eta = \gamma'\eta$刻画，其中 γ' 是类 $[\gamma]$ 中唯一一个可与 η复合的元素。

计算拉回结合了前面的这两种描述。

设 h_i: $G_i \curvearrowright H$ 是 $i = 1, 2$ 的作用子，令 $h_i\pi_i$ 为与泛积作用子 π_i 的复合: $G_1 \times G_2 \curvearrowright G_i$（此处 $\times$ 表示范畴积）。于是，拉回可实现为作用子 $h_i\pi_i$的等化子，因此我们计算得。

命题 5.6 指出，积 $G_1 \times G_2$ 可实现为不交并$G_1 \sqcup G_2$，其泛锥作用子由相应的左乘法给出。第 5.1 小节中描述的等化子，是子伪群$S = \{U \in \mathsf{Bis}(G_1 \sqcup G_2) : U \cdot_{\pi_1 h_1} H^{(0)} = U \cdot_{\pi_2 h_2} H^{(0)}\}$ 的空间化；它也可表示为由 S 覆盖的子群胚的商。

令 $K = \bigcup S$为由 S覆盖的 $G_1 \sqcup G_2$的开子群胚。那么 K由满足以下条件的元素 $\gamma \in G_i$ 组成：存在开双截面 $U_i \subseteq G_i$、 $V_j \subseteq G_j$ （其中$i \neq j$），使得 $\gamma \in U_i$且 $U_i \cdot_{h_i} H^{(0)} = V_j \cdot_{h_j} H^{(0)}$; 集合 $\iota_i(U_i) \cup \iota_j(V_j) \subseteq G_1 \sqcup G_2$属于 S （此外， S 的每个元素都以这种方式产生）。

现在我们构造拉回的单位空间。 $\pi_i h_i$ 的锚映射由将 h_i 的锚映射 ρ_i: $H \to G_i^{(0)}$ 与（$\mathbf{Top}$典范）包含映射ι_i: $G_i \hookrightarrow G_1 \sqcup G_2$复合而得，因此拉回的单位空间是这些映射的 $\mathbf{Top}$-余等化子。

对于单位 $t \in K^{(0)}$，拉回中 $[t] \in \mathsf{coeq}(\iota_1\rho_1,\ \iota_2\rho_2)$ 上的纤维由 K 中 t 上的元素表示。在这个纤维内，两个不同的箭头$\gamma,\ \eta \in K_t$ 绝不会被识别，因为它们具有相同的源，所以没有任何开双截面 K 会同时包含二者。特别是，没有 S 的元素会同时包含二者。进一步说，这可以实现为 K 对由以下条件生成的等价关系取商：若 $s(\gamma) \sim s(\eta)$，且存在一个同时包含 γ 和 η 的元素 $U \in S$，则声明$\gamma \sim \eta$。

5.2. 图群胚的拉回。现在我们给出一个明确的例子，演示如何计算由有向图产生的群胚的拉回。

给定一个有向图 $E = (E^0,\ E^1,\ r,\ s)$，其顶点集合为 E^0，边集合为 E^1，值域映射和源映射为 $r,\ s$: $E^1 \to E^0$，Paterson [17] 定义了图群胚 G_E。这里我们回顾一种等价的构造。

E中的一条路径 是由边组成的有限或无限字符串 $e_1 \cdots e_n$或 $e_1 \cdots\ e_i \in E^1$，满足 $s(e_i) = r(e_{i+1})$，其中 $i \geq 1 \leq n$ （若路径是无限的，则简写为 $i \geq 1$ ）。我们约定路径按从右到左的顺序读取，以符合群胚和伪群中复合的约定。一条路径的长度 $x = e_1 \cdots e_n$为 n，记作 $|x|$。我们也将顶点视为长度为零的路径。我们用 E^*表示 E中有限路径的集合，用 E^∞ 表示无限路径的集合。我们将 E上的源映射延拓到 E^*，定义为 $s(e_1 \cdots e_n) = s(e_n)$; 并将值域映射延拓到 $E^* \cup E^\infty$，定义为 $r(e_1 \cdots) = r(e_1)$。若顶点 $v \in E^0$满足 $r^{-1}(v) = \emptyset$, 则称其为源，也就是说， v 没有入边。 G_E 的单位空间是路径空间

$$\partial E = E^\infty \cup \{\lambda \in E^* : s(\lambda) \text{ is a source}\},$$

其拓扑由以下基本开集给出 $Z_x = \{\lambda \in \partial E :\ \lambda = x\lambda'$，其中$\lambda' \in \partial E\}$取遍有限路径 $x \in E^*$。这里， $x\lambda'$ 表示路径 x 和 λ'的连接；当且仅当 $s(x) = r(\lambda)$时，该连接才有定义。

令 G_E为 $\partial E \times \mathbb{Z} \times \partial E$的子集，由三元组 $(\lambda,\ n-m,\ \mu)$ 构成，其中 λ和 μ 是这样的路径：分别从 λ 和 μ中删去最左侧的 n 条边和m 条边后，两者相同。如果 n 大于 λ 的长度（当 λ 为有限路径时），删去最左侧的 n 条边后，得到由 λ的源构成的零长度路径。

我们赋予 G_E 子空间拓扑；值得注意的是，它的基由以下形式的集合构成

$$Z^E(x,y) := \{(x\lambda, |x| - |y|, y\lambda) : \lambda \in \partial E, s(x) = s(y) = r(\lambda)\} \tag{1}$$

其中路径为有限路径 x、$y \in E^*$。如果图 E 明确无误，我们可以将 $Z^E(x, y)$ 写作 $Z(x, y)$。这样一来，G_E 便成为一个局部紧豪斯多夫空间。特别地，它是不可约闭集有唯一泛点的。

我们将 ∂E 与其在映射 $\lambda \mapsto (\lambda, 0, \lambda)$ 下在 G_E 中的像视为相同。在 G_E 上定义值域映射和源映射如下：$r(\lambda, n, \mu) = \lambda$ 以及 $s(\lambda, n, \mu) = \mu$，复合$G_E \,{}_s\!\times_r G_E \to G_E$ 定义为

$$(\lambda, n, \mu)(\mu, m, \nu) = (\lambda, n + m, \nu).$$

这些运算使 G_E 成为一个拓扑群胚，其单位空间由 ∂E 给出。方程 (1) 中的基本开集 $Z(x, y)$ 构成 G_E 的开双截面，这意味着 G_E 是 ´étale 的。

与群胚 G_E 相关联的双截面伪群由如下形式的双截面生成：$Z(e, s(e))$，其中边为 $e \in E^1$。这些双截面编码了图 E 的动力学结构，从而引出以下定义。

定义 5.7 ([3, 定义 1.1])。设 E 是一个有向图，H 是一个´étale 群胚。H 中的动力学 *Cuntz-Krieger* E-族 是指由紧开子集 $\Omega = (\Omega_v)_{v \in E^{(0)}}$ 构成的一个族，以及由 $T = (T_e)_{e \in E^1}$ 中紧开双截面构成的一个族，且满足

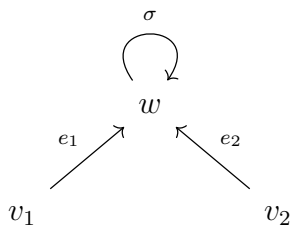
(1) 对不同的顶点 v，$w \in E^0$，$\Omega_v \cap \Omega_w = \emptyset$；(2) 对所有边 $e \in E^1$，$s(T_e) \subseteq \Omega_{s(e)}$ 且 $r(T_e) \subseteq \Omega_{r(e)}$；(3) 对不同的边 e，$r(T_e) \cap r(T_f) = \emptyset$，$f \in E^1$；(4) 对任意满足 $r^{-1}(v)$ 有限且非空的顶点 $v \in E^0$，$\Omega_v = \bigsqcup_{r(e)=v} r(T_e)$。

De Castro 和 Meyer 表明，作用子 $G_E \curvearrowright H$ 与 H 中的 Cuntz-Krieger E-族之间存在自然双射。

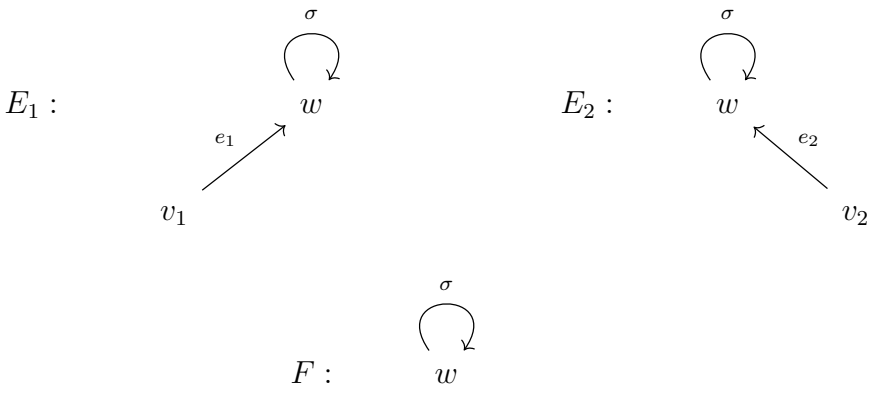
定理 5.8 ([3, 定理 4.3，推论 4。6])。H 中的任意 *Cuntz-Krieger* E-族 $(\Omega\ T)$ 都诱导出一个作用子 $G_E \curvearrowright H$，满足 $Z_v \cdot H^{(0)} = \Omega_v$ 和 $Z(e, s(e)) \cdot H^{(0)} = T_e$。将 *Cuntz-Krieger* E-族映射到相应作用子的函数，在 *Cuntz-Krieger* E-族的集合与定义域为 G_E 的作用子之间构成自然双射。

我们将利用定理 5.2 和定理 5.8 来描述图群胚的一个特定拉回。

考虑图 E，其顶点为 $E^0 = \{v_1, v_2, w\}$，边为 $E^1 = \{e_1, e_2, \sigma\}$，值域映射和源映射分别由 $r(e_i) = r(\sigma) = w$、$s(e_i) = v_i$ 和 $s(\sigma) = w$ 给出：



令 E_1 为以顶点 $\{v_1, w\}$ 为顶点集的全子图，并令 E_2 为以顶点 $\{v_2, w\}$ 为顶点集的全子图。令 F 为以顶点 w 为顶点的全子图，它由单点和环组成。



选择 $\Omega^i_w = Z_w$, $T^i_\sigma = Z^F(\sigma,\ s(\sigma))$ 和 $T^i_{e_i} = \Omega_{v_i} = \emptyset$，定义了 G_F 中的 Cuntz-KriegerE_i-族 $(\Omega^i,\ T^i)$，并由定理 5.8 诱导出作用子 $G_{E_1},\ G_{E_2} \curvearrowright G_F$。我们旨在运用本文中发展的工具，计算这个拉回图表的极限。由于图群胚是不可约闭集有唯一泛点的，只需考虑相应的伪群图表

$$\begin{array}{ccc} & & \mathrm{Bis}(G_{E_1}) \\ & & \downarrow{\scriptstyle \psi_1} \\ \mathrm{Bis}(G_{E_2}) & \xrightarrow[\psi_2]{} & \mathrm{Bis}(G_F) \end{array}$$

其中，ψ_i 是由 G_F 中的 Cuntz-Krieger E_i 族诱导的伪群同态。ψ_i 是满足 $\psi_i(Z^{E_i}(e,\ s(e))) = T^i_e$ 的唯一伪群同态，对每条边 $e \in E^1_i$ 都成立。利用定理 5.1，我们可以将 (5.2) 的极限实现为集合

$$\{(U_1, U_2) \in \mathrm{Bis}(G_{E_1}) \times \mathrm{Bis}(G_{E_2}) : \psi_1(U_1) = \psi_2(U_2)\}$$

并配备逐点运算。

引理 5.9。对于 $i = 1,2$，有 $\psi_i(\partial E_i \setminus \{\sigma^\infty\}) = \emptyset$。

证明。我们可以将 $\partial E_i \setminus \{\sigma^\infty\}$ 表示为所有 $n \in \mathbb{N}_0$ 对应的双截面 $Z^{E_i}(\sigma,\ s(\sigma))^n Z^{E_i}(e_i,\ s(e_i))$ 的源与值域之并。伪群态射 ψ_i 将 $Z^{E_i}(e_i,\ s(e_i))$ 映为空集，并且每个 ψ_i 都保持积，故引理得证。□

引理 5.10。固定 $U_i \in \mathrm{Bis}(G_{E_i})$。双截面 $\psi_i(U_i) \in \mathrm{Bis}(G_F)$ 要么是包含 U_i 中唯一（必然唯一）的、源和值域均等于 σ^∞ 的元素的单点集；要么在 U_i 不包含此类元素时为空。

证明。如果 U_i 不包含源和值域均为 σ^∞ 的点，那么我们有 $U_i = U_i(\partial E_i \setminus \{\sigma^\infty\})$ 或 $U_i = (\partial E_i \setminus \{\sigma^\infty\})U_i$。引理 5.9 表明，在这两种情况下均有$\psi_i(U_i) = \emptyset$。

现在假设 U_i 包含一个源和值域分别由 σ^∞ 给出的元素。该元素必然具有如下形式：$(\sigma^\infty, n, \sigma^\infty)$，其中 $n \in \mathbb{Z}$。如有必要，将 U_i 替换为其伴随后，不妨设 $n \geq 0$。我们可以找到点 $(\sigma^\infty, n, \sigma^\infty)$ 的一个基本邻域，其形式为 $Z(x, y)$，其中 $x, y \in E^*_i$ 包含于 U_i 中，

由此必然得到，对于某个 $k \in \mathbb{N}_0$，$x = \sigma^{k+n}$ 且 $y = \sigma^k$。引理 5.9 表明

$$\psi_i(U_i) = \psi_i(U_i(\partial E_i \setminus \{\sigma^\infty\}) \cup Z(x,y)) = \psi(Z(x,y)).$$

注意到 $Z(\sigma^{n+k}, \sigma^k)$ 可以表示为积 $Z(\sigma, s(\sigma))^{n+k} Z(\sigma, s(\sigma))^{k*}$，并且 ψ_i 将 $Z(\sigma, s(\sigma))$ 映射到单点集 $\{(\sigma^\infty, 1, \sigma^\infty)\} \subseteq G_F$，因此有

$$\psi_i(U_i) = \psi(Z(\sigma, s(\sigma)))^{n+k} \psi(Z(\sigma, s(\sigma)))^{k*} = \{(\sigma^\infty, n, \sigma^\infty)\}$$

如所要求。 □

引理 5.11。 图表 $\mathrm{Bis}(G_{E_1}) \times_{\mathrm{Bis}(G_F)} \mathrm{Bis}(G_{E_2})$ 的拉回 (5.2) 由以下元素生成：

- $(Z^{E_1}(e_1, s(e_1)), \emptyset)$,
- $(\emptyset, Z^{E_2}(e_2, s(e_2)))$,
- $(Z^{E_1}(\sigma, s(\sigma)), Z^{E_2}(\sigma, s(\sigma)))$。

证明。 令 $S := \mathrm{Bis}(G_{E_1}) \times_{\mathrm{Bis}(G_F)} \mathrm{Bis}(G_{E_2})$。首先注意，每个所提出的生成元都属于 S，因为 $\psi_i(Z^{E_i}(e_i, s(e_i))) = T^i_{e_i} = \emptyset$ 且 $\psi_1(Z^{E_1}(\sigma, s(\sigma))) = Z^F(\sigma, s(\sigma)) = \psi_2(Z^{E_2}(\sigma, s(\sigma))$。令 $S' \subseteq S$ 为由所提出的生成元生成的子伪群。

与引理 5.9 中一样，我们可以将 $\partial E_i \setminus \{\sigma^\infty\}$ 表示为双截面 $Z^{E_i}(\sigma, s(\sigma))^n Z^{E_i}(e_i, s(e_i))$ 的源和值域的并，其中遍历所有 $n \in \mathbb{N}_0$。所有这些分量在 ψ_i 下都映射到空集，因为根据引理 5.9，对于 $j \neq i$，我们有 $\psi_i(\partial E_i \setminus \{\sigma^\infty\}) = \emptyset = \psi_j(\emptyset)$。因此，$(\partial E_1 \setminus \{\sigma^\infty\}, \emptyset)$ 和 $(\emptyset, \partial E_2 \setminus \{\sigma^\infty\})$ 都是我们可以由 S' 的生成元生成的 S 中的元素。令 $G'_{E_i} := G_{E_i} \cdot \partial E_i \setminus \{\sigma^\infty\}$，并注意到对于 $i = 1, 2$，这是 G_{E_i} 的一个开子群胚。这意味着 $\mathrm{Bis}(G'_{E_i})$ 是 $\mathrm{Bis}(G_{E_i})$ 的一个逆子半群；此外，ψ_i 将 G'_{E_i} 的所有双截面都映射到空集，因此对于所有 $U \in \mathrm{Bis}(G'_{E_i})$，$(U, \emptyset)$ 都属于 S。双截面 $Z^{E_i}(e_i, s(e_i)) \cdot (\partial E_i \setminus \{\sigma^\infty\})$ 和 $Z^{E_i}(\sigma, s(\sigma)) \cdot (\partial E_i \setminus \{\sigma^\infty\})$ 随后生成 $\mathrm{Bis}(G'_{E_i})$。由此可见，积 $\mathrm{Bis}(G'_{E_1}) \times \mathrm{Bis}(G'_{E_2})$ 以显然的方式嵌入 S，成为一个逆子半群，而且还包含于 S' 中。

固定 $(U_1, U_2) \in S$。注意，若 $\psi_1(U_1) = \emptyset = \psi_2(U_2)$，则 $U_i \subseteq G'_{E_i}$，因此 (U_1, U_2) 属于 S'。现在考虑 $\psi_1(U_1) = \psi_2(U_2) \neq \emptyset$ 的情形。由引理 5.10 可知，存在 $n \in \mathbb{Z}$，使得 $\gamma := (\sigma^\infty, n, \sigma^\infty) \in U_1 \cap U_2$。于是可以找到 $x, y \in E_1^*$ 和 $z, w \in E_2^*$，使得 $\gamma \in Z^{E_1}(x, y) \subseteq U_1$ 且 $\gamma \in Z^{E_2}(z, w) \in U_2$。由于例如 $Z^{E_1}(x, y)$ 的元素具有 $x\lambda$，$|x| - |y|, y\lambda$ 的形式，其中 $\lambda \in \partial E_1$，且 $\gamma = (\sigma^\infty, n, \sigma^\infty)$ 属于该集合，因此可知 $x = \sigma^{|x|}$，$y = \sigma^{|y|}$；同理可得 z 和 w。此外，我们有 $|x| - |y| = n = |z| - |w|$。如有必要，将 (U_1, U_2) 与 $(U_1, U_2)^* = (U_1^*, U_2^*)$ 对调后，只需考虑 $n \geq 0$ 的情形，故 $k \geq n$。于是有 $Z^{E_1}(\sigma^k, \sigma^{n-k}) \subseteq Z^{E_1}(x, y)$，且 $Z^{E_2}(\sigma^k, \sigma^{n-k}) \subseteq Z^{E_2}(w, z)$，而 γ 同时属于二者。此外，$(Z^{E_1}(\sigma^k, \sigma^{n-k}) Z^{E_1}(\sigma^k, \sigma^{n-k}))$ 可表示为 $(Z^{E_1}(\sigma, s(\sigma)) Z^{E_2}(\sigma, s(\sigma)))$ 及其逆的积，因此有序对 $(Z^{E_1}(\sigma^k, \sigma^{n-k}) Z^{E_1}(\sigma^k, \sigma^{n-k}))$ 属于 S'。最后注意，γ 是 U_1 和 U_2 中唯一不属于 $U_i \cdot (\partial E_i \setminus \{\sigma^\infty\})$ 的元素。因此我们有

$$\begin{aligned}(U_1, U_2) = &(U_1 \cdot (\partial E_1 \setminus \{\sigma^\infty\}), U_2 \cdot (\partial E_2 \setminus \{\sigma^\infty\})) \\ &\vee (Z^{E_1}(\sigma^k, \sigma^{n-k}), Z^{E_2}(\sigma^k, \sigma^{n-k}))\end{aligned}$$

因此（U_1，U_2）包含于 S'，因为这两个分量均如此。 □

定理 5.12。 由上述 F 中的 ***Cuntz-Krieger*** E_i-族诱导的、关于 $i=1$ 的作用子 $G_{E_i} \curvearrowright G_F$ 2 的拉回是图群胚 G_E。泛锥作用子 $G_E \curvearrowright G_{E_i}$ 由 E_i 中给定的动力学 ***Cuntz-Krieger*** E-族 (Ω^i、T^i) 诱导，具体为

$$\Omega^i_w := Z_w, \qquad T^i_\sigma := Z(\sigma, s(\sigma)),$$

$$\Omega^i_{v_j} := \begin{cases} Z_{v_i}, & i=j, \\ \emptyset, & otherwise, \end{cases} \qquad T^i_{e_j} := \begin{cases} Z(e_i, s(e_i)), & i=j, \\ \emptyset, & otherwise. \end{cases}$$

证明。 将拉回 Bis(G_{E_1}) $\times_{\mathrm{Bis}(G_F)}$ Bis(G_{E_2}) 记为 S。令 φ_i: Bis(G_E) $\to$Bis(G_{E_i}) 为由动力学 Cuntz-Krieger E-族 (Ω^i, T^i) 诱导的伪群同态。显然，由于复合 $\psi_1\varphi_1$ and$\psi_2\varphi_2$ 在 Bis(G_E) 的典范生成元上取值相同，因此存在唯一的伪群同态 φ: Bis(G_E) $\to S$ 满足 $\pi_i\varphi = \varphi_i$ ，其中 $i=1,2$， π_i: $S \to$ Bis(G_{E_i}) 是典范投影。

我们将 G_E 的幂集记为 $\mathcal{P}$(G_E)。将 E_1 和 E_2 直接视为 E 的子图，可得到包含映射 ι_i: Bis(G_{E_i}) $\to \mathcal{P}(G_E)$，它从双截面伪群映射到图群胚 G_E 的幂集，并将 G_{E_i} 的任意双截面映为该集合本身，将其视为 G_E 的子集。类似地，我们也可以将 Bis(G_E) 视为 $\mathcal{P}$(G_E) 的子集。利用将 S 刻画为集合的方式

$$S := \{(U_1, U_2) \in \mathrm{Bis}(G_{E_1}) \times \mathrm{Bis}(G_{E_2}) : \psi_1(U_1) = \psi_2(U_2)\},$$

我们断言，函数 α: $S \to \mathcal{P}$(G_E) 定义如下:

$$\alpha(U_1, U_2) = \iota_1(U_1) \cup \iota_2(U_2)$$

t取值于 Bis(G_E)，并定义了一个伪群同态，它是 φ 的逆映射 .

由于 G_E 上的源映射与值域映射限制在每个 G_{E_i} 上时，分别就是其源映射与值域映射，因此注意到，值域映射与源映射在每个 $\iota_i(U_i)$ 上都是单射，因为 U_i 是 G_{E_i}中的双截面。假设存在 $\gamma_1 \in \iota_1(U_1)$ 和 $\gamma_2 \in \iota_2(U_2)$，它们具有相同的源。这意味着 $s(\gamma_1) = s(\gamma_2)$ 属于交集$\partial E_1 \cap \partial E_2 = \{\sigma^\infty\}$，因此 γ_1 和 γ_2 具有源 σ^∞。由于 σ^∞ 是两个图群胚 G_{E_i} 中的不变点，我们推得 $r(\gamma_1) = \sigma^\infty = r(\gamma_2)$，所以 $\gamma_i \in U_i$ 是 U_i 中唯一一个源和值域为 σ^∞的元素。应用引理 5.10，得到 $\{\gamma_1\} = \psi_1(U_1) = \psi_2(U_2) = \{\gamma_2\}$，这意味着 $\gamma_1 = \gamma_2$。因此，s 在$\iota_1(U_1) \cup \iota_2(U_2)$上是单射；对称的论证表明， r 也同样是单射。

为证明 $\alpha(U_1,U_2)$ 是开集，任取一点 $\gamma \in \alpha(U_1,U_2)$。由于群胚 G_{E_i} （视为 G_E 的子群胚）的交恰好包含 σ^∞ 上方的纤维，若 $s(\gamma) \neq \sigma^\infty$ 则 γ 属于某个 U_i($\partial E_i \setminus \{E_i\}$)，其中 $i=1$ 为 2。由于 $\partial E_i \setminus \{\sigma^\infty\}$ 在 ∂E中是开集，我们看到 $\iota_i(U_i($ $\partial E_i \setminus \{\sigma^\infty\})$) 是包含 γ 且包含于 $\alpha(U_1,U_2)$ 的开邻域。否则，若 $s(\gamma) = \sigma^\infty$ ，则可应用引理 5.10 得到 $\gamma \in U_1 \cap U_2$；与前面一样，可以找到 γ 的邻域 $Z^E(\sigma^k, \sigma^\ell)$，它同时包含于 U_1 和 U_2。因此， $\alpha(U_1,U_2)$ 是一个开双截面，所以 α 的取值属于 Bis(G_E)。

注意到映射 ι_1 和 ι_2 是 *-保持的，且 *-运算保持并集，因此 α 是 *-保持的。为证明 α 是乘法的，固定 (U_1,U_2),$(V_1,V_2) \in S$，并注意到逐点乘积 $\iota_1(U_1)\iota_2$ (V_2)要么为空，要么仅包含 U_1 和 V_2 中源和值域均等于 σ^∞的唯一元素之积。由引理 5.10可知， $\iota_1(U_1)\iota_1(V_1)$也包含这个单点集

因为 $\psi_1(V_1) = \psi_2(V_2)$，所以 $\iota_1(U_1)\iota_2(V_2) \subseteq \iota_1(U_1)\iota_1(V_1)$。对称地，我们有$\iota_2(U_2)\iota_1(V_1) \subseteq \iota_2(U_2)\iota_2(V_2)$。我们还注意到每个 ι_i 都是乘法的，因此有

$$\begin{aligned}\alpha(U_1,U_2)\alpha(V_1,V_2) &= (\iota_1(U_1)\cup\iota_2(U_2))(\iota_1(V_1)\cup\iota_2(V_2)) \\ &= \iota_1(U_1)\iota_2(U_2)\cup\iota_1(U_1)\iota_2(U_2)\cup\iota_2(U_2)\iota_1(V_1)\cup\iota_2(U_2)\iota_2(V_2) \\ &= \iota_1(U_1)\iota_1(V_1)\cup\iota_2(U_2)\iota_2(V_2) \\ &= \iota_1(U_1V_1)\cup\iota_2(U_2V_2) \\ &= \alpha(U_1V_1,U_2V_2),\end{aligned}$$

因此 α 是乘法的。我们还注意到，α 保持（相容的）并，因为包含映射 ι_i 保持并集，而 α 定义为这些并集的并。因此，α 是一个伪群态射。

最后，我们证明 α 是 φ的逆。伪群 Bis(G_E) 由双截面 $Z^E(e_i, s(e_i))$ 和 $Z^E(\sigma, s(\sigma))$ 生成，而引理 5.11 表明，S由 $(\emptyset, Z^{E_i}(e_i, s(e_i)))$ 以及 $(Z^{E_1}(\sigma, s(\sigma)) \; Z^{E_2}(\sigma, s(\sigma)))$ 生成。根据 α 的构造，并且由于 φ 由 Cuntz-Krieger E- 族（Ω^i, T^i）诱导，我们看到φ 和 α 在这些生成元集合上限制为互逆的双射。因此，它们构成互逆的同构。推论 4.8 随即推出，G_E 是 EtAct 中相应的拉回群胚´。□

在 [7], Hajac、Reznikoff 和 Tobolski 中，他们给出了判据，用以判断有向图的推出何时会提升为相应 C^*-代数的拉回。他们将上述图 $F \subseteq E_1$，$E_2 \subseteq E$ 作为一个这样的例子。定理 5.12 表明，该图 E 也会诱导相应的群胚与作用子的拉回。

5.3. **群的极限**。将群范畴 **群范畴** 作为 **EtAct** 的一个满子范畴包含在内，并不能保留所有极限。事实上，命题 5.6 将 **EtAct** 中的积描述为不交并群胚，而它通常并非群。在这种情况下，以及更一般地讨论 **EtAct** 中群图表的极限时，根本问题在于，´**EtAct** 中的图表未必会关联（或映射）不同群中的单位元，因此这些单位元可能经由作用子被分离到其他群胚中。

回顾一下，范畴 J 称为连通的，如果对于任意两个对象 a，$b \in J$ 都存在有限个对象 $a = a_0$，a_1、……、$a_n = b$ 以及箭头 f_1、……、f_n，其中每个 f_i 要么是箭头 $f_i\colon a_i \to a_{i+1}$，要么是箭头 $f_i\colon a_{i+1} \to a_i$。这样一串箭头称为之字形链。如果范畴 $\mathcal{C}$ 中的图表 $F\colon J \to \mathcal{C}$ 的J 是连通的，我们就称该图表连通。

´**命题 5.13**。包含关系 $\iota\colon$ **群范畴** $\to$ **EtAct** 保留连通极限。

证明。由推论 5.5 可知，极限群胚的单位空间由单位空间和锚映射构成的图表在 **Top** 中的余极限给出。如果该图表是连通的，且所有单位空间都是单点集（这恰好对应于连通群图的情形），那么**Top** ´中连通的单点集图表的余极限也是单点集，因此 **EtAct** 中的该图表的极限具有单点单位空间，也就是说，它是一个群。由于包含关系 ι 是忠实满函子，根据[20, 引理 3.3，忠实满函子反映极限。5], 因此，如果某个图表的极限是一个群，那么它实际上就是从群范畴中保留下来的极限。□

由于**群范畴** 有一个终对象，即平凡群，因此可以通过加入终对象，将**群范畴** 中任意图表的极限实现为连通极限。

˜具体而言，若 $F\colon J \to$ **群范畴** 是一个小群图，则定义 J 为一个范畴，其对象为 $J^\circ \sqcup \{\infty\}$，箭头为 $J^1 \sqcup \{!_j : j \to \infty : j \in J^0\}$，并将图表˜扩展为 J：将 ∞ 映至平凡群 $\{e\}$，并将每个 $!_j : j \to \infty$ 映至平凡映射 $Fj \to \{e\}$。F 上的任意锥都能自然且唯一地扩展为 F上的锥˜，
因此相应的极限在**群范畴**中同构。此外，按构造，F 是连通的，因此根据命题 5.13，该极限在包含关系映射到$\mathbf{EtAct}$时得以保留。

推论 5.14. 设 $F\colon J \to$ **群范畴** 是一个小图表。$\iota F\colon J \to$´$\mathbf{EtAct}$ 中的极限是该图表F的各连通分量的极限的不交并，特别地，它是群的不交并。

证明.将形状范畴 J 表示为其各连通分支 $J = \bigsqcup_{\alpha\in A} J_\alpha$的不交并。于是图表 F 分解为连通图表 $F_\alpha\colon J_\alpha \to$ **群范畴**。F 上的一个锥通过限制给出各个 F_α 上的一族锥；反过来，若各个 F_α 上有一族顶点相同的锥，则可导出一个 F上的锥，从而得到锥函子 $\mathsf{Cone}(-, F)$ 与积 $\prod_{\alpha\in A} \mathsf{Cone}(-, F_\alpha)$ 之间的自然同构。根据米田引理，F 的极限便是各个 F_α的极限之积；且每个 F_α 都是连通的，因此根据命题 5.13，F_α 的´极限由 ι保持。最后，根据命题 5.6，$\mathbf{EtAct}$ 中的积由不交并给出，因此 ιF 的极限是各个 ιF_α的极限的不交并，而根据命题 5.13，其中每一个都是一个群。□

5.4. **关于余极限的评论**。目前尚不清楚余极限是否通常存在于Ψ**群范畴** 或$\mathbf{EtAct}$中。例如，某些具体情形是已知的，序列归纳余极限就在 [22] 中构造。我们还可以很快推导出，群的极限将表现良好。

引理 5.15。包含关系 **群范畴** $\hookrightarrow$ Ψ**群范畴** （添上一个零元）以及 **群范畴** $\hookrightarrow$´$\mathbf{EtAct}$ 都是左伴随。特别地，它们保持余极限。
证明。对于一个群 Γ，将其对应的伪群记为 $\Gamma^0 := \Gamma \sqcup \{0\}$，其中 0 是满足 $0t = t0 = 0$ for all $t \in \Gamma^0$ 的零元。对于一个伪群S，令 $S^\times$ 为 S 的可逆元素集合。容易看出，在伪群乘法和求逆下，这构成一个群；此外，任意伪群同态 $\Gamma_0 \to S$ 限制为群同态 $\Gamma \to S^\times$。我们立即看到，这一限制给出一族双射 Ψ**群范畴**$(\Gamma_0,\ S) \cong$ **群范畴**$(\Gamma,\ S^\times)$，且关于 Γ 和 S 都是自然的。

对于群胚，我们注意到，从群 Γ 到 ´Étale 群胚G 的作用子 $\Gamma \curvearrowright G$ 可与群同态 $\Gamma \to (\mathrm{Bis}\, G)^\times$等同。自然双射´$\mathbf{EtAct}(\Gamma,\ G) \cong$ **群范畴**$(\Gamma,\ (\mathrm{Bis}\, G)^\times)$很容易验证。□

上述引理 5.15 用到了 ´Étale 群胚G的拓扑全群，即 G的全局双截面所成的群。拓扑全群已在全不连通的 ´Étale（或充足）群胚的背景下得到广泛研究，甚至被证明是这类不含非平凡单位空间的闭不变子空间的群胚的完全不变量 [15]。拓扑全群也被用于构造有趣的群的例子（例如参见 [6]）。

在群胚谱的完全相反端，我们还看到，将拓扑空间视为 ´étale 群胚时，其余积对应于$\mathbf{Top}$中的积。将这两种情形结合起来，问题立刻变得复杂起来：

显然，如何将拓扑空间的极限结构与纤维逐点余极限或类似于“自由积”的纤维结构结合起来，并不清楚。

如果 **Ψ群范畴**中的一个图表存在余极限，我们便通过应用函子 E，开始分析相应空间化群胚的单位空间。

引理 5.16。设 S 为一个伪群，设 L 为一个框架。任意伪群同态 $\varphi\colon\ S \to \iota L$ 均由其到框架同态 $ES \to L$的限制所确定。此外，限制描述了自然嵌入 **Ψ群范畴**$(S, \iota L) \hookrightarrow$**框架**$(ES, L)$。

证明。由于 ιL 是一个由幂等元组成的伪群，对于任意 $t \in S$，我们有$\varphi(t) = \varphi(t)^*\varphi(t) = \varphi(t^*t)$。对于框架之间的态射，限制同样是自然的，从而得到自然嵌入 **Ψ群范畴**$(S,\ \iota(-)) \Rightarrow$**框架**$(ES,\ -)$。□

如果此类图表在 **Ψ群范畴**中的余极限存在，我们可以利用余极限的可表泛性质推出：从幂等元框架的余极限到余极限伪群的幂等元框架之间存在一个自然的框架满态射。

命题 5.17。设 $F\colon\ J \to$ **Ψ群范畴**^{Spat} 是一个在 **Ψ群范畴**^{Spat}中存在余极限的图表。则存在一个框架满态射 余极限 $EF \to E$余极限 F。对偶地，存在一个连续单射

$$(\operatorname{colim} \Sigma F)^{(0)} \hookrightarrow \lim_{J^{\mathrm{op}},\mathbf{Top}} (\Sigma F j)^{(0)},$$

其中，右侧的极限是在拓扑空间范畴中对由图表 F 中各态射的锚映射构成的图表取的。

证明。设 $F\colon\ J \to$ **Ψ群范畴**^{Spat} 是一个存在余极限 colim F的图表。利用命题 5.4、引理 5.16 以及余极限的可表泛性质（见 [20, 定理 3.4。7]）

$$\begin{aligned}
\mathbf{Frame}(E \operatorname{colim} F, -) &\cong \Psi\mathbf{Grp}(\operatorname{colim} F, \iota(-)) \\
&\cong \lim_{J^{\mathrm{op}}} \Psi\mathbf{Grp}(Fj, \iota(-)) \\
&\hookrightarrow \lim_{J^{\mathrm{op}}} \mathbf{Frame}(EFj, -) \\
&\cong \mathbf{Frame}(\operatorname{colim} EF, -).
\end{aligned}$$

由米田引理，存在唯一的满态射 $\alpha\colon$ colim $EF \to E$colim F，使得与 α 前复合诱导出该自然变换。应用空间化函子后， Σcolim $F \cong$ colim ΣF的单位空间是 colim EF的谱，因为 Σ 是左伴随，因而保余极限。因此得到所需的单态射。□

Appendices

鉴于本文的目标读者包括可能并不专攻范畴论或斯通对偶的读者，我们在附录中收录了这两个主题的关键定义和结果。

Appendix A. Category theory

关于范畴论的一般参考资料，请读者参阅 [13] 或 [20] .

A.1. 基本定义，米田引理。

定义 A.1. 一个范畴 $\mathcal{C}$ 由以下部分组成

- 一个对象 $\mathcal{C}^0$ 类,
- 范畴 $\mathcal{C}$中对象之间的 $\mathcal{C}^1$ 箭头或态射类。每个箭头 f 都有唯一的定义域 c 和陪域 d，记作 $f\colon c \to d$,
- 复合：若 $f\colon c \to d$ 和 $g\colon d \to e$ 是 $\mathcal{C}$ 中的箭头，则存在一个复合箭头 $gf\colon c \to e$,

使得

- 对每个对象 $c \in \mathcal{C}$，都有一个恒等箭头 $1_c\colon c \to c$，满足 $f1_c = f$，并且对所有 $f\colon c \to d$ 和 $g\colon d \to c$,
- 复合满足结合律：$(hg)f = h(gf)$，其中 $f\colon c \to d$、$g\colon d \to e$和 $h\colon e \to b$ 是 $\mathcal{C}$ 中的可复合箭头。

箭头 $f\colon c \to d$ 是同构，如果存在箭头 $g\colon d \to c$ 满足$gf = 1_c$ 和 $fg = 1_d$。

范畴 G 是群胚，如果态射类 $G = G^1$ 是一个集合，并且每个态射都是同构。

每个范畴 $\mathcal{C}$ 都有一个对偶范畴 $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$，它与 $\mathcal{C}$ 有相同的对象，并且其中每个态射 $f\colon c \to d$在 $\mathcal{C}$中都对应一个态射 $f^{\mathrm{op}}\colon d \to c$。$\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$中的复合定义为 $g^{\mathrm{op}}f^{\mathrm{op}} = (fg)^{\mathrm{op}}$。

定义 A.2. 两个范畴 C 和D 之间的一个（协变）函子 $F\colon C \to D$ 由函数 $\mathcal{C}^0 \to \mathcal{D}^0$ 和 $\mathcal{C}^1 \to \mathcal{D}^1$（均记作 F）组成，并满足

- $Ff\colon Fc \to Fd$ 对于 $\mathcal{C}$中的所有态射 $f\colon c \to d$,
- $F1_c = 1_{Fc}$对于 $\mathcal{C}$中的所有对象 c。

从 $\mathcal{C}$ 到 $\mathcal{D}$ 的反变函子 是一个协变函子 $\mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{D}$。

函子 $\mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 和 $\mathcal{D} \to \mathcal{E}$ 可以复合，得到一个函子 $\mathcal{C} \to \mathcal{E}$。每个范畴 $\mathcal{C}$ 都有一个恒等函子 $1_{\mathcal{C}}$，它由 $\mathcal{C}^0$和 $\mathcal{C}^1$上的恒等映射组成。对于函子复合而言，该函子起到恒等元的作用。

定义 A.3. 给定范畴之间的函子 $F, G\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$，一个自然变换 $\alpha\colon F \Rightarrow G$从 F 到 G是一个箭头族 $(\alpha_c)_{c\in\mathcal{C}^0}$，其中箭头 $\alpha_c\colon Fc \to Gc$属于 $\mathcal{D}$，称为分量；对于每个 $\mathcal{C}$中的箭头 $f\colon c \to d$，都有 $\alpha_d Ff = Gf\alpha_c$。用图表表示，该图表

$$\begin{array}{ccc} Fc & \xrightarrow{\alpha_c} & Gc \\ {\scriptstyle Ff}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle Gf} \\ Fd & \xrightarrow[\alpha_d]{} & Gd \end{array}$$

可交换。若自然变换 α 的每个分量α_c都是同构，则称其为自然同构 。对于函子 F，$G\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$，我们用 $\mathrm{Nat}(F, G)$ 表示自然变换 $F \Rightarrow G$ 所成的类。

自然变换 $\alpha\colon F \Rightarrow G$ 和 $\beta\colon G \Rightarrow H$ 可以按分量复合，得到自然变换 $\beta\alpha\colon F \Rightarrow H$，其分量为 $(\beta\alpha)_c := \beta_c\alpha_c$。

给定一个范畴 $\mathcal{C}$ 和对象 c，$d \in \mathcal{C}^0$，我们用 $\mathcal{C}(c, d)$ 表示态射 $f\colon c \to d$ 构成的类。若对于所有对象 c，$d \in \mathcal{C}^0$，$\mathcal{C}(c, d)$ 都是一个集合，则称 $\mathcal{C}$ 是局部小的。

我们用 Set 表示集合与函数范畴。若 $\mathcal{C}$ 是局部小的，则每个对象 $c \in \mathcal{C}^0$定义两个函子 $\mathcal{C}(c,-): \mathcal{C} \to$Set 和 $\mathcal{C}(-,c): \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to$Set。在对象上，$\mathcal{C}(c,-)d := \mathcal{C}(c,d)$ 和 $\mathcal{C}(-,c)d = \mathcal{C}(d,c)$；而箭头 $f: d \to e$ 分别通过后复合和前复合定义函数 $f_*: \mathcal{C}(c,d) \to \mathcal{C}(c,e)$ 和 $f^*: \mathcal{C}(e,c) \to \mathcal{C}(d,c)$。协变函子 $F: \mathcal{C} \to$ Set 的表示是一个自然同构 $\mathcal{C}(c,-) \Rightarrow F$。若函子 F 存在表示$\mathcal{C}(c,-) \Rightarrow F$，则称其为可表的；此时，对象 c 称为 F 的代表元。米田引理有助于描述从已表示的函子到其他函子的自然变换。

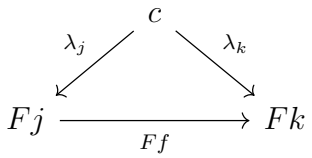
定理 *A.4*（米田引理 [13, *III.2*（引理）]）。设 $\mathcal{C}$ 为一个局部小范畴，并设 $F: \mathcal{C} \to$集合为一个函子。对于所有 $c \in \mathcal{C}^0$，函数 $y: Nat(\mathcal{C}(c,-)\ F) \to Fc$将一个自然变换 $\alpha: \mathcal{C}(c,-) \Rightarrow F$ 映射为 $y(\alpha) := \alpha_c(1_c)$，是一个双射。此外，这些双射对于 c 和 F 都是自然的。

米田引理的一个直接推论是，表示函子之间的所有自然变换都由范畴中的态射实现。

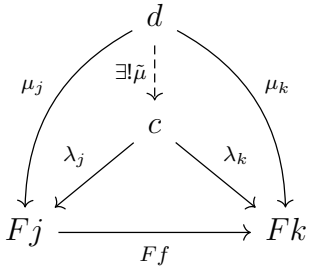
A.2. **极限**。范畴 $\mathcal{C}$ 中形状为 J 的一个图表 是一个函子 $F: J \to \mathcal{C}$。如果形状范畴 J 是局部小的，则该图表是小的 。

虽然从形式上看，图表与函子之间没有区别，但这两个名称的典型用法不同。图表通常用于极限的语境中。

定义 A.5. 设 $F: J \to \mathcal{C}$ 是一个图表，$c \in \mathcal{C}$ 是一个对象。一个以 c为顶点、覆盖 F 的锥，是由一族态射 $\lambda = (\lambda_j)_{j \in J}$组成的，其中对每个$j \in J$，都有 $\lambda_j: c \to Fj$在 $\mathcal{C}$ 中，称为锥脚或分量，并且满足：对于J中的所有箭头 $f: j \to k$，都有 $\lambda_k = (Ff)\lambda_j$。



一个以 c 为顶点、覆盖 F 的锥 λ，若对于任何以 d为顶点、覆盖 F 的锥 μ，都存在唯一的箭头 $\tilde{\mu}: d \to c$，满足对于所有 $j \in J$都有 $\mu_j = \lambda_j \mu$，则称其为极限锥。



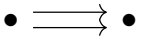
在这种情况下，我们称 c 为 F的极限。

图表下锥和余极限通过对偶方式定义。图表F下的一个锥由箭头 $Fj \to c$组成，而 F 的余极限是 F下的一个泛锥。

尽管我们把一个极限称为该极限，但极限并非严格唯一。它们在同构意义下唯一，而且在与上述方式中锥相容的箭头中，这个同构也是唯一的。

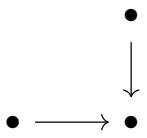
例 A.6. 若 J 是离散的，也就是说，其中唯一的箭头是单位元，那么图表 $F\colon J \to \mathcal{C}$ 的极限就是一个积，记作 $\prod_{j\in J} Fj$；若 J有限，则记作 $Fj_1 \times \cdots \times Fj_n$。在许多常见的范畴中（包括**集合**、**Top**、**群范畴**、**Ring**、$\mathbf{Vect}_k$），这些都与经典积相同。

例 A.7. 等化子 是某个图表的极限，其形状范畴由两个对象以及从一个对象到另一个对象的两个非平凡平行箭头构成：

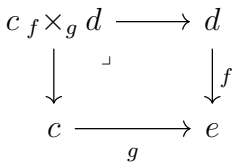


若 $\varphi, \psi\colon G \to H$是群同态，则 φ和 ψ的等化子 是由这两个同态构成的图表的极限（其形状范畴由两个对象以及从一个对象到另一个对象的两个非平凡平行箭头构成）。等化子确定子群 $\{g \in G : \varphi(g) = \psi(g)\}$，且每个子群都以此方式得到。群同态 φ的核与 φ和那个平凡同态之间的等化子重合。

例 A.8. 拉回 是某个具有如下形状的图表的极限



从而得到一个极限



在 **Top** 中，拉回就是通常的拉回，也称为纤维积：对于 $f\colon X \to Z$和$g\colon Y \to Z$，拉回 $X \,{}_f\!\times_g Y$是子空间 $\{(x, y) \in X \times Y\colon f(x) = g(y)\}$，其拓扑取自积拓扑下的子空间拓扑。极限锥由坐标投影给出。

若存在忠实函子$U\colon \mathcal{C} \to$ **集合**，则范畴 $\mathcal{C}$ 称为具体的（或者更准确地说，可具体化的）。我们将 U 称为遗忘函子。示例 A.7 和 A.8 中群范畴**群范畴** 与 **Top** 中极限的底层集合，与在**集合** 中取极限所得的集合相同，仿佛我们“忘掉”了群结构或拓扑结构。情况总是如此：通常的遗忘函子**群范畴**，**Top** $\to$ **集合** 将极限映为极限。

定义 A.9。 设 $G\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 是一个函子，并考虑$\mathcal{C}$中的一类图表 $\mathcal{C}$。函子 G

(1) 若对 $\mathcal{C}$中的任意极限锥 λ（其底图表为 F，且属于该类 $\mathcal{C}$），其像锥 $G\lambda$ 是 GF上的极限锥，则称该函子保极限；(2) 若只要锥 λ 在 F上的像 $G\lambda$ 是 $\mathcal{C}$ 中图表 F上的极限锥 GF，就有 λ 是 F上的极限锥，则称该函子反映极限；(3) 若只要 GF 在 $\mathcal{C}$中对 F 有极限锥 μ，就存在一个锥 λ，其底图表为 F 且满足 $G\lambda = \mu$，并且 G 反映极限，则称该函子创生极限。

我们也可以用类似的方式称 G 为保持、反映或创建余极限。

例 A.10。 从 **Top**、**群范畴**、**Ring**、**Vect** 到 **集合** 的遗忘函子都保持极限。除了 **Top** $\to$ **集合** 之外，它们还都创建极限。

如果一个范畴容许所有小图表的极限，则称其为完备 。重要的是，**集合**是完备的。小图表 $F\colon J \to$ **集合** 的极限是锥的集合 $\mathsf{Cone}(\{*\}, F)$，其中顶点是一个单点集。泛锥的第 j 条腿将一个锥 $\mu\colon \{*\} \to Fj$ 映射到元素 $\mu_j(*)$。给定另一个锥 $\nu = (\nu_j\colon X \to Fj)_{j\in J}$，泛映射 $\tilde{\nu}\colon X \to \mathsf{Cone}(\{*\}, F)$ 将 $x \in X$ 映射到锥 $\tilde{\nu}(x)_j\colon * \mapsto \nu_j(x)$。

由于 **集合** 是完备的，任何存在一个到 **集合** 的函子且该函子创建小极限的范畴也是完备的。

A.3. **范畴等价与伴随**。

定义 A.11. 设 $\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{D}$ 是范畴。 $\mathcal{C}$ 与 $\mathcal{D}$之间的一个等价 由函子 $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 和 $G\colon \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ 组成，并满足存在自然同构 $GF \cong 1_{\mathcal{C}}$ 和 $FG \cong 1_{\mathcal{D}}$。若 $\mathcal{C}$ 与 $\mathcal{D}$之间存在等价，则称 $\mathcal{C}$ 与 $\mathcal{D}$ 是等价的，记作 $\mathcal{C} \simeq \mathcal{D}$。假设选择公理，函子 $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 构成等价，当且仅当

(1) F是满 且忠实的：由 F诱导的映射 $\colon \mathcal{C}(c, c') \to \mathcal{D}(Fc, Fc')$ 对所有 $c, c' \in \mathcal{C}^0$都是双射；(2) F 是本质满的：对每个对象 $d \in \mathcal{D}^0$，都存在一个对象 $c \in \mathcal{C}^0$使得 $Fc \cong d$。

范畴可以等价但不同构；上面的复合 FG andGF 可能不等于恒等函子。下面给出一种对两个函子互为逆这一概念的进一步弱化形式，它仍然十分有趣。

定义 A.12。 设 $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 和 $G\colon \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ 为函子。 F 与 G之间的伴随是指一族双射

$$\mathcal{D}(Fc, d) \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}(c, Gd)$$

它们对 $\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{D}$均自然。

若存在这样的伴随，我们称 F 是 G的左伴随 ，或者称 F 是 G的左伴随 。我们也称 G 是 F的右伴随 ，或者称 G 是 F的右伴随。左伴随和右伴随在自然同构意义下唯一，这也说明了我们使用定冠词的合理性。我们用转向符号 $F \dashv G$表示这一点。

一种常见的伴随类型是“自由—遗忘”对。以下是一些例子：

- 自由群函子 **集合** $\to$ **群范畴** 是遗忘函子的左伴随**群范畴** $\to$**集合**,
- 自由向量空间函子 **集合** $\to$ **Vect** 是遗忘函子 **Vect** $\to$ **集合**的左伴随,
- 为集合赋予离散拓扑是遗忘函子 **Top** $\to$ **集合**的左伴随。

定理 A.13 ([13, 定理 V.5。1])。 右伴随保持极限。对偶地，左伴随保持余极限。

一个伴随 $F \dashv G$产生自然变换 $\eta\colon 1_{\mathcal{C}} \Rightarrow GF$和 $\epsilon\colon FG \Rightarrow 1_{\mathcal{D}}$。分量 $\eta_c\colon c \to GFc$是 $1_c \in \mathcal{C}(c, c)$ 在该复合下的像

$$\mathcal{C}(c, c) \xrightarrow{F} \mathcal{D}(Fc, Fc) \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}(c, GFc),$$

类似地，分量 $\epsilon_d\colon\ FGd \to d$ 是 $1_d \in \mathcal{D}(d,\ d)$ 在该复合下的像

$$\mathcal{D}(d,d) \xrightarrow{G} \mathcal{C}(Gd,Gd) \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}(FGd,d).$$

自然变换 η 和 ϵ 是该伴随的单位 和余单位 。三角恒等式指出，复合

$$F \xrightarrow{F\eta} FGF \Downarrow{\scriptstyle \epsilon F} F \quad \text{and} \quad G \xrightarrow{\eta G} GFG \Downarrow{\scriptstyle G\epsilon} G$$

是恒等自然变换。例如，$F\eta\colon F \to F(GF)$ 是分量为 $(F\eta)_c = F\eta_c$ 的自然变换，而 $\epsilon F\colon FGF \Rightarrow F$ 是分量为 $(\epsilon F)_c = \epsilon_{Fc}$ 的自然变换。事实上，当且仅当存在满足三角恒等式的自然变换 η 和 ϵ 时，两个函子构成伴随。

伴随在范畴上限制为等价。范畴 $\mathcal{C}$ 的一个子范畴 由对象的一个子类和态射的一个子类组成，它们构成一个范畴，且复合与 $\mathcal{C}$ 相同。子范畴 $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{C}$ 是满的，如果对于所有对象 $c,d \in \mathcal{D}^0 \subseteq \mathcal{C}^0$，都有 $\mathcal{C}(c,d) = \mathcal{D}(c,d)$。

引理 A.14。设 $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 和 $G\colon \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ 构成一个伴随 $F \dashv G$。$\mathcal{C}$ 中的不动点（分别是 $\mathcal{D}$ 中的不动点）是满足单位的分量 $\eta_c\colon c \to GFc$（分别是余单位的分量 $\epsilon_d\colon FGd \to d$）为同构的对象 $c \in \mathcal{C}^0$（分别是对象 $d \in \mathcal{D}^0$）。函子 F 和 G 限制后，在由不动点所张成的 $\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{D}$ 的全子范畴之间给出范畴等价。

AppendixB. Stone duality

拓扑空间 X 上的拓扑 $\mathcal{O}X$ 在按包含关系排序的偏序下具有典范的格结构；并由并集给出并，由交集给出交。拓扑空间之间的连续映射也会通过取原像诱导出拓扑之间的格同态：对于连续函数 $f\colon X \to Y$，将开子集 $U \in \mathcal{O}Y$ 映射到 $f^{-1}(U)$ 的映射 $\mathcal{O}Y \to \mathcal{O}X$ 是格同态。拓扑上的格结构还有一些额外优点：它对任意并集（而不只是有限并集）封闭，因此该格具有所有上确界；德摩根律还意味着，交对任意并具有分配性。

帧是对所有拓扑共有的格结构及其性质进行抽象公理化的结果。帧及其态射与拓扑空间及连续函数形成一幅对偶图景，而斯通对偶 描述了这两个范畴之间的伴随关系，并将其限制为空间的帧（即源自拓扑空间的帧）与不可约闭集有唯一泛点的拓扑空间之间的等价。

关于帧与局部理论的全面参考资料，请参阅 [18] 。

定义 B.1. 框架 F 是一个具有有限下确界和所有上确界的偏序集，其中下确界对上确界满足分配律。我们用 $e \wedge f$ 表示两个元素 $e,f \in F$ 的下确界或交，用 $e \wedge f$ 表示族 $(e_\alpha)_\alpha \subseteq F$ 的上确界或并

by $\bigvee_\alpha e_\alpha$. 分配律可表示为

$$e \wedge \bigvee_\alpha f_\alpha = \bigvee_\alpha (e \wedge f_\alpha)$$

对所有 $e, f_\alpha \in F$。

给定帧 F 和 L，一个框架同态 $\varphi\colon F \to L$ 是一个保留有限下确界和任意上确界的函数。帧连同框架同-态构成范畴**Frame**。

我们很快注意到，框架同态必然是保序的，因为格中的序可以用交或并来表达。明确地，对于$a, b \in F$，我们有 $a \leq b$ 当且仅当 $a \vee b = b$，当且仅当 $a \wedge b = a$。

注记 B.2. 框架同态保留有限下确界这一要求对我们的目的而言是必要的，并不能由保留上确界自动推出。格之间的保序映射 $f\colon A \to B$ 总是满足$f(a \wedge b) \leq f(a) \wedge f(b)$，但我们并不总能得到等号，即使 f是一个保留上确界的帧间映射。我们构造一个明确的反例。考虑框架 $\Omega = \{0 < 1\}$ 并在 Ω^2 上赋予积序。将 Ω 视为真值的集合，逻辑“或”函数 $+\colon \Omega^2 \to \Omega$，$+(a, b) = \max\{a, b\}$ 是保序的，并保留所有上确界，因为在 $+$ 作用下，其并映射为零元的值族 $(a_\alpha, b_\alpha)_\alpha$ 只有全由零元构成的值族。但 $+$ 不保留二元交，因为 $+((1,0) \wedge (0,1)) = +(0, 0) = 0$，但 $+(1, 0) \wedge +(0, 1) = 1 \wedge 1 = 1$。

注意，框架 F 既有绝对最小元（通常记为 0），也有绝对最大元（记为 1），因为框架具有有限上确界和下确界，而空并和空交分别是该框架的最小元和最大元。它们也可分别称为框架的底元 或零元 （以及顶元 或*1*）。根据定义，框架同态保持框架的最小元和最大元。

如前所述，我们遇到的框架的首批启发性例子是拓扑。按照定义，拓扑空间是一个集合 X，配上一个由“开”子集组成的集族$\mathcal{O}X$，该集族对有限交和任意并封闭。在包含关系的偏序下，拓扑空间的公理立即表明 $\mathcal{O}X$ 是一个框架；交由交集给出，并由并集给出。拓扑空间之间的连续函数 $f\colon X \to Y$ 恰好是这样一种函数：其诱导的原像映射 f^{-1} 构成函数 $\mathcal{O}Y \to \mathcal{O}X$。原像映射保持所有并和交，因此 f^{-1} 是一个框架同态，我们很快便看到 $\mathcal{O}$ 形成了一个从**Top** 到 **Frame**的反变函子。

颇为令人惊讶的是，在相当温和的假设下，可以从$\mathcal{O}X$ 和 $\mathcal{O}Y$ 的框架结构以及同态 f^{-1}中恢复底层空间 X 和 Y，以及函数 f。这种重构是研究饱和空间和斯通对偶的首要明显理由。正如我们将看到的，饱和空间恰恰是那些能够进行这种重构的空间。

定义 B.3. [18, p. 1.1] 拓扑空间 X 的闭子集 C 称为不可约的，若它非空，且对任意闭集 C_1，$C_2 \subseteq X$ 若满足 $C_1 \cup C_2 = C$，则有$C_1 = C$ 或 $C_2 = C$。若每个闭不可约子集都是某个唯一单点集的闭包，则称 X 为不可约闭集有唯一泛点的 。

我们用$\mathbf{Top}_{\mathrm{Sob}}$表示由索伯空间张成的$\mathbf{Top}$的全子范畴。

很容易注意到，在任何拓扑空间中，任意单点集的闭包必然是不可约子集；而在任何 T_0 中，不同的单点集会产生不同的闭包。因此，索伯空间总是 T_0，这也符合预期，因为此前曾指出，索伯空间可以从其拓扑的格结构中恢复出来；而非T_0 空间中则存在无法通过拓扑区分的点对。

索伯空间与 T_0 的区别在于，闭不可约子集只能由单点集产生。

索伯空间并不少见：首先，任何豪斯多夫空间都是索伯空间。饱和性也会沿着局部同胚向上保持，具体如下；这一点将在稍后讨论 Étale 群胚时发挥作用。

引理 B.4. 所有豪斯多夫空间都是索伯空间，所有索伯空间都是 T_0。索伯空间与 T_1 并不等价。

证明。 第一个断言正是上面的讨论。我们给出两个例子：一个是索伯空间但不是 T_1 的空间，另一个是一个不是索伯空间的 T_1 空间。

首先，考虑一个索伯但不是 T_1的空间。考虑带有拓扑 $\mathcal{O}X = \{\emptyset, \{0\}, X\}$的 Sierpiński空间 $X = \{0, 1\}$。闭不可约子集恰好是 X和 $\{1\}$。注意到 X 是 $\{0\}$ 的闭包，而 $\{1\}$ 是其自身的闭包，因此 X是索伯的。然而，单点集 $\{0\}$ 不是闭集，所以 X 不是 T_1。

接下来，考虑一个不是索伯空间的 T_1 空间。考虑赋予余有限拓扑的自然数 $\mathbb{N}$，即闭集恰好是 $\mathbb{N}$ 的有限子集以及$\mathbb{N}$ 本身。由于每个单点集都是闭集，因此这是一个 T_1 空间。闭集 $\mathbb{N}$本身是不可约的，因为如果有限个闭集的并集是有限的，或者其中一个闭集已经是 $\mathbb{N}$，则情况即告成立。但是，$\mathbb{N}$ 不是任何单点集的闭包，因此该空间不是索伯的。□

将拓扑空间映到其底层集合的遗忘函子 $\mathbf{Top} \to \mathbf{Set}$ 由单点空间 $\{*\}$ 表示；通常选取的自然双射将点 $x \in X$ 映到“选择”函数 $f_x\colon \{*\} \to X$, $f_x(*) = x$。对偶地考察原像，框架同态 $f_x^{-1}\colon \mathcal{O}X \to \mathcal{O}\{*\}$ 在开集 $U \in \mathcal{O}X$满足 $x \in U$时将其映到 $\{*\}$，否则映到 $\emptyset$。此外，若 X 是 T_0，则相应的取原像映射能够区分各点。我们将看到，索伯空间正是这样一种空间：其上每个此类“特征” $\mathcal{O}X$ 都恰好对应于 X中的一个点。

B.1. 斯通对偶。 受单点拓扑空间的泛性质启发，我们从给定的框架 F 重构一个底层集合及其拓扑。这个空间总能构造出来；若 $F \cong \mathcal{O}X$ 对于索伯空间 X 成立，那么重构出的空间与 X 同胚。我们用 $\Omega = \{0 < 1\}$ 表示唯一的全序二元素帧。

定义 B.5. 框架 F 上的特征是一个框架同态 $\chi\colon F \to \Omega$。$\widehat{}$用 F表示特征的集合。

$\widehat{}$可以在 F上赋予典范拓扑。

$\widehat{}$引理 B.6. 当 $e \in F$ 遍历 $= 1\}$ 时，集合 $\mathcal{U}_e := \{\chi \in F : \chi(e) = 1\}$ 定义了 F 上的一个拓扑，而映射 $\eta_F\colon F \to \mathcal{O}F$，由 $\eta_F(e) = \mathcal{U}_e$ 给出，是一个满射帧同态。

证明。帧同态的像显然本身是一个框架，因此只需证明 η_F 保持并和有限交。首先注意到 $\mathcal{U}_1 = F$ 和 $\mathcal{U}_0 = \emptyset$，因为每个特征都保持绝对最小元和最大元。对于任意族 $(e_\alpha)_\alpha \subseteq F$，记 $e := \bigvee_\alpha e_\alpha$。由于它们保持所有并，任意特征 $\chi \in \widehat{F}$ 都满足 $\chi(e) = 1$ 当且仅当对于某个 α，$\chi(e_\alpha) = 1$，因此 $\mathcal{U}_e = \bigcup_\alpha \mathcal{U}_{e_\alpha}$。对于 $e, f \in F$，我们有 $1 = \chi(e \wedge f) = \chi(e) \wedge \chi(f)$ 当且仅当 $\chi(e) = \chi(f) = 1$，因此 $\mathcal{U}_e \cap \mathcal{U}_f = \mathcal{U}_{e\wedge f}$。由此，$\eta_F$ 保持所有并和有限交，故它是一个框架同态。根据构造，它是满射。□

$\widehat{\ }$空间 F 称为 F的谱，我们始终认为它配备了引理 B.6 中的拓扑。由于框架同态的复合仍是框架同态，任意框架同态 $\varphi\colon F \to L$ 都通过前复合诱导一个映射 $\widehat{\ } \circ \varphi^*\colon \widehat{L} \to \widehat{F}$（请记住，$L$ 和 F 的元素都是到 Ω 的框架同态）。这个函数是连续的。

引理 B.7。设 $\varphi\colon F \to L$ 是一个框架同态。在函数 $\varphi^*\colon \widehat{L} \to \widehat{F}$ 下，$\widehat{F}$开子集 $\mathcal{U}_e \subseteq \widehat{F}$ 的原像恰为 $\eta_L(\varphi(e)) = \mathcal{U}_{\varphi(e)}$。特别地，$\varphi^*$ 是连续的。

证明。根据引理 B.6，F 的任意开子集都具有 $\eta_F(e) = \mathcal{U}_e$ 的形式，其中 $e \in F$。当且仅当 $1 = \chi(\varphi(e)) = \varphi^*\chi(e)$ 时，$\chi \in \mathcal{U}_{\varphi(e)}$ 成立；这又当且仅当$\varphi^*\chi \in \mathcal{U}_e$成立。由此得到 $(\varphi^*)^{-1}(\mathcal{U}_e) = \mathcal{U}_{\varphi(e)}$。□

显然，对于可复合的框架同态 φ 和 ψ，有 $(\varphi\psi)^* = \psi^*\varphi^*\widehat{\ }$；此外还有 $1_F^* = 1_{\widehat{F}}$（其中 1_c 是范畴中对象 c 的恒等态射），因此我们得到一个函子 $\sigma\colon$ **框架** $\to \mathbf{Top}^{\mathrm{op}}$，它将框架 F 映到其谱 $\sigma F := F$，并将框架同态 φ 映到与之作前复合 $\sigma\varphi := \varphi^*$。此外，我们已经证明：

推论 B.8。框架同态 $\eta_F\colon F \to \mathcal{O}\sigma F$ 构成一个自然变换 $1_{\mathbf{Frame}} \Rightarrow \mathcal{O}\sigma$。

框架 F 的谱 σF 总是不可约闭集有唯一泛点的。

命题 B.9（参见 [10, 第 II 1 页。7]）。设 F 是一个框架。那么 σF 是不可约闭集有唯一泛点的。

证明。首先注意，只有当特征 σF 在某个元素 $f \in F$上的取值不同时，它们才彼此不同，因此开集 $\mathcal{U}_f \subseteq \sigma F$ 将它们分离。于是 σF 是 T_0，因此，两个单点集只有在相等时才有相同的闭包。

取一个不可约闭子集 $C \subseteq \sigma F$，并令 $U := \sigma F \setminus C \subseteq \sigma F$ 为其补集。由于 U 是开集，根据引理 B.6，存在某个 $e \in F$ 使得 $\mathcal{U}_e = U$；注意到 $e \neq 1$，因为 $\mathcal{U}_e \neq \sigma F$。此外，将 e 替换为并 $\bigvee\{f \in F : \mathcal{U}_f \subseteq U\}$ 后，我们可以假设 e 是满足 $\mathcal{U}_e = \sigma F \setminus C$ 的 F 中最大的此类元素，并且对于任意 $f \in F$，$\mathcal{U}_f \subseteq \mathcal{U}_e$ 蕴含 $f \leq e$。对于任意满足 $f_1 \wedge f_2 \leq e$ 的 $f_1, f_2 \in F$，我们于是有 $\mathcal{U}_{f_1\wedge f_2} \subseteq \mathcal{U}_e$，因此 $\mathcal{U}_{f_1} \subseteq \mathcal{U}_e$ 或 $\mathcal{U}_{f_2} \subseteq \mathcal{U}_e$，因为$\mathcal{U}_e$ 的补集是不可约的。但由于 e 是按上述方式选取的并，我们必有 $f_1 \leq e$ 或 $f_2 \leq e$。

定义 $\chi\colon F \to \Omega$ 为

$$\chi(f) = \begin{cases} 1, & f \not\leq e, \\ 0, & f \leq e. \end{cases}$$

我们断言， χ 是一个特征，并且 $C = \{\chi\}$。我们有 $\chi(0) = 0$为 $0 \le e$，且$\chi(1) = 1$，因为 $1 \not\le e$。对于一个族 $(f_\alpha)_\alpha \in F$，其并 $\bigvee_\alpha f_\alpha$ 被映射为 0，当且仅当 $f_\alpha \le e$ 对每个 α 都成立，即 $\chi(f_\alpha) = 0$ 对每个 α 都成立。因此， $\chi(f) = 0$ 当且仅当 $\chi(f_\alpha) = 0$ 对所有 α 都成立，从而 χ 保持并。最后， χ 保持交，因为$\chi(f_1 \wedge f_2) = 0$ 当且仅当 $f_1 \wedge f_2 \le e$。选择 e 为最大元，再结合前面的讨论，得到 $f_1 \le e$ 或 $f_2 \le e$，因此 $\chi(f_1) \wedge \chi(f_2) = 0$。逆向蕴含显然成立。于是 χ 是一个特征，并且根据构造， $\chi(e) = 0$，所以 $\chi \notin \mathcal{U}_e$。

我们有 $\varsigma \in C$ 当且仅当 $\varsigma(e) = 0$。设 $\mathcal{U}_f$ 是 ς的一个开邻域。于是 $\varsigma(e) = 0 < 1 = \varsigma(f)$，因此 $f \not\le e$，因为 ς保持序。由此 $\chi(f) = 1$，所以 $\chi \in \mathcal{U}_f$，从而 $\{\chi\}$ 在 C中稠密。证明完毕。□

考虑另一个方向：给定一个拓扑空间 X ，存在一个自然映射 $\kappa_X \colon X \to S\mathcal{O}X$ ，它将点 $x \in X$ 映到特征 $\kappa_X(x) := \chi_x \in S\mathcal{O}X$，该特征能够识别该点：

$$\chi_x(U) = \begin{cases} 1, & x \in U, \\ 0, & x \notin U. \end{cases}$$

索伯空间是指使这个映射成为同胚的空间；由此我们可以从其拓扑的框架结构中恢复 X 。

定理 B.10 (参见 [18, 6.2 命题])。 对于任意拓扑空间 X，映射κ_X 是连续的。当且仅当 X 是 T_0时，该映射是单射；当且仅当 X 是不可约闭集有唯一泛点的时，该映射是同胚。

证明。根据引理 B.6， $\sigma\mathcal{O}X$ 的一个一般开子集具有形式 $\mathcal{U}_U = \{\chi \in \sigma\mathcal{O}X \colon$ 对于某个开子集 $U \in \mathcal{O}X$， $\chi(U) = 1\}$。原像 $\kappa_X^{-1}(\mathcal{U}_U)$ 由满足 $\chi_x(U) = 1$ 的点 x 组成，这恰好就是 U中的点。因此， κ_X 是连续的。

如果 X 是 T_0 ，那么对于 X 中的任意两个（不同）点，都存在一个开集包含其中一个点而不包含另一个点。因此，所得的特征在这个开子集上取值不同，所以 κ_X 是单射。反过来，如果 κ_X 是单射，那么对于任意两个不同的点 x， $y \in X$，都存在一个开子集 $U \in \mathcal{O}X$，使得 $\chi_x(U) \ne \chi_y(U)$。这恰好说明 U 包含这两个点 x， y 中的一个而不包含另一个，也就是说， X 是 T_0。

由命题 B.9 可知，空间 $\sigma\mathcal{O}X$ 是不可约闭集有唯一泛点的，因此若 κ_X 是同胚，则 X 也有唯一泛点。

现在假设 X 有唯一泛点。任意特征 $\chi \in \sigma\mathcal{O}X$ 都保并，因此存在最大的开子集 $U\mathcal{O}X$ ，使得 $\chi(U) = 0$ （即所有被 χ 映为零元的开子集的并）。对于任意开子集 U_1、$U_2 \in \mathcal{O}X$ ，有 $U_1 \cap U_2 \subseteq U$ 当且仅当 $\chi(U_1) \wedge \chi(U_2) = \chi(U_1 \wedge U_2) = 0$，由此可知， U_1 或 U_2 至少有一个已包含于 U 中。这恰好说明 $C = X \setminus U$ 是闭不可约子集，因此根据 X 的饱和性，它是某个唯一单点集 $x \in X$ 的闭包。对于任意开子集 $V \in \mathcal{O}X$ ，于是有 $\chi(V) = 1$ 当且仅当 V 不包含于 U。但此时 V 与 $C = \{x\}$ 有非空交集，因此 $x \in V$ ，因为 V 是开集。因此，$\chi(V) = 1$ 蕴含 $\chi_x(V) = 1$，等价地， $x \in V$；显然，若 $x \in V$，则有 $\chi(V) = 1$，所以我们得到 $\chi = \chi_x$。因此 κ_X 是满射。

接下来只需证明 κ_X 是开集。由于 κ_X 是满射，我们知道 $\sigma\mathcal{O}X = \{\chi_x : x \in X\}$。开集 $U \in \mathcal{O}X$ 在 κ_X 下的像就是集合

$\{\chi_x\colon\ x \in U\} = \{\chi_x\colon\ x \in X,\ \chi_x(U) = 1\} = \mathcal{U}_U$，它在 $\sigma\mathcal{O}X$中是开集，符合要求。□

由此可见，sober 拓扑空间恰好是能够通过这种方式，依据其开集框架系统地恢复出来的空间。σ与 $\mathcal{O}$ 的复合给出一个函子$\mathbf{Top} \to \mathbf{Top}$，而映射 κ_X: $X \to \sigma\mathcal{O}X$ 恰好关于 X自然。

引理 B.11. 函数 $\kappa_X\colon\ X \to \sigma\mathcal{O}X$ 构成一个自然变换 $1_{\mathbf{Top}} \Rightarrow \sigma\mathcal{O}$。

证明。 固定一个连续映射 $f\colon\ X \to Y$。诱导映射 $\sigma\mathcal{O}f\colon\ \sigma\mathcal{O}X \to \sigma\mathcal{O}Y$是$(f^{-1})^*$；即与关联于 f 的逆像函数进行前复合。它将一个特征 $\chi \in \sigma\mathcal{O}X$映为$(f^{-1})^*\chi = \chi \circ f^{-1}$。我们对 $x \in X$和 $U \in \mathcal{O}Y$进行计算:

$$[\kappa_Y \circ f(x)](U) = \chi_{f(x)}(U) = \chi_x(f^{-1}(U)) = \kappa_X(x) \circ f^{-1}(U) = [(f^{-1})^*\kappa_X(x)](U),$$

由此得到自然性。 □

虽然我们不会考虑此类对象，但确实存在一些并不同构于任何拓扑的帧。本文不会详细讨论这些“非空间”帧，但它们的存在提醒我们，在运用斯通对偶时应当谨慎。感兴趣的读者可参阅其他资料（例如 [9]）。

定义 B.12。 如果一个框架是空间的，则它与某个拓扑同构。由空间框架构成的 $\mathbf{Frame}$ 全子范畴记为$\mathbf{Frame}_{\mathrm{Spat}}$。

先验地，框架 F 的空间性可以由任意拓扑实现，但根据 [18,5.1 命题]，框架恰好在同态 $\eta_F\colon\ F \to \mathcal{O}\sigma F$是同构时为空间的。结合命题 B.9 和定理 B.10 可知，F 为空间框架，当且仅当它与其谱的拓扑同构；而具有此性质的 sober 空间只有这个。

我们将要介绍和使用的斯通对偶版本是在 sober 拓扑空间的背景下给出的。函子 σ 和 $\mathcal{O}$ 构成一个伴随，它限制为 sober 拓扑空间范畴与空间框架范畴之间的等价。这是一个标准结果，我们为方便起见给出证明。

定理 B.13。 函子 $\sigma\colon\ \mathbf{Frame} \to \mathbf{Top}^{\mathrm{op}}$和 $\mathcal{O}\colon\ \mathbf{Top}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Frame}$构成一对伴随函子 $\sigma \dashv \mathcal{O}$，其单位为 $\eta\colon\ 1_{\mathbf{Frame}} \Rightarrow \mathcal{O}\sigma$，余单位为 $\kappa_X^{\mathrm{op}}\colon\ \sigma\mathcal{O} \Rightarrow 1_{\mathbf{Top}^{\mathrm{op}}}$。该伴随的不动点是空间框架和 *sober* 拓扑空间，从而得到等价 $\mathbf{Frame}_{\mathrm{Spat}} \simeq \mathbf{Top}^{\mathrm{op}}{}_{\mathrm{Sob}}$。

证明。 需要验证的三角恒等式为 $(\kappa^{\mathrm{op}}\sigma)(\sigma\eta) = 1_\sigma$ 和 $(\mathcal{O}\kappa^{\mathrm{op}})(\eta\mathcal{O}) = 1_{\mathcal{O}}$。

对于框架 $F \in$ **框架**，$(\kappa^{\mathrm{op}}\sigma)(\sigma\eta)$ 在 F处的分量由 $\kappa^{\mathrm{op}}_{\sigma F}\sigma\eta_{\sigma F}$给出，这是 $\mathbf{Top}^{\mathrm{op}}$ 中与函数 $\eta^*_{\sigma F} \circ \kappa_{\sigma F}\colon\ \sigma F \to \sigma F$对偶的箭头 $\sigma F \to \sigma F$。对于特征 $\chi \in \sigma F$，χ 在此映射下所得的像将框架元素$e \in F$映射到

$$\begin{aligned}
[\eta^*_{\sigma F} \circ \kappa_{\sigma F}(\chi)](e) &= [\kappa_{\sigma F}(\chi)](\eta_{\sigma F}(e)) \\
&= [\kappa_{\sigma F}(\chi)](\mathcal{U}_e) \\
&= \begin{cases} 1, & \chi \in \mathcal{U}_e \\ 0, & \chi \notin \mathcal{U}_e, \end{cases} \\
&= \chi(e).
\end{aligned}$$

由于 F、χ 和 e 的选择是任意的，因此我们有 $(\kappa^{\mathrm{op}}\sigma)(\sigma\eta) = 1_\sigma$。

对于第二个三角恒等式，给定拓扑空间 X，$(\mathcal{O}\kappa^{\mathrm{op}})(\eta\mathcal{O})$ 在 X 处的分量是框架同态 $\kappa_X^{-1} \circ \eta_{\mathcal{O}X}\colon \mathcal{O}X \to \mathcal{O}X$。第一个映射 $\eta_{\mathcal{O}X}$ 将开集 $U \in \mathcal{O}X$ 发送到集合 $\mathcal{U}_U := \{\chi \in \sigma\mathcal{O}X : \chi(U) = 1\}$，第二个映射则将 $\mathcal{U}_U$ 发送到原像 $\kappa_X^{-1}(\mathcal{U}_U)$，根据先前的推理，该原像等于 U。

最后，结合命题 B.9 和定理 B.10 可知，对于所有帧 F，$\kappa_{\sigma F}$ 都是一个同胚，因此 $\kappa\sigma$ 是一个自然同构。显然，空间框架和饱和空间分别是这些函子的不动点，因此我们得到了所需的范畴等价。□

利用定理 2.3 给出的范畴等价，我们可以根据需要在拓扑语境和框架论语境之间转换。这也表明，空间框架的全子范畴是反射子范畴 **Frame**，这意味着包含函子有一个左伴随。类似地，sober 拓扑空间的全（对偶）子范畴是余反射子范畴 $\mathbf{Top}^{\mathrm{op}}$，这意味着包含函子有一个右伴随。对偶化可知，sober 空间也是**Top**的反射子范畴。

References

[1] M˘ad˘alina Roxana Buneci 和 Piotr Stachura。《赋予 Haar 系统的局部紧群胚的态射》。2006年。arXiv: math/0511613 [math.OA].URL: https://arxiv.org/abs/math/0511613.[2] Alcides Buss、RuyExel 和 Ralf Meyer。“逆半群作用作为群胚作用”。载于：《半群论坛》85（2012年），第227–243页。DOI: https://doi.org/10.1007/s00233-012-9418-y.[3] Gilles G. de Castro 和 Ralf Meyer。作为群胚作用子的图态射。2025年。arXiv: 2512.06165 [math.OA]。URL: https://arxiv.org/abs/2512.06165.[4] Robin Cockett 和 Richard Garner。“推广 Étale 群胚—完备伪群对应关系”。载于：《数学进展》392（2021年），第108030页。ISSN: 0001-8708。DOI: https://doi.org/10.1016/j.aim.2021.108030。URL: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0001870821004692.[5] Ruy Exel。“逆半群与组合 C*-代数”。载于：《巴西数学会通报》，新系列39（2007年4月），第191–313页。DOI: 10.1007/s00574-008-0080-7.[6] Eusebio Gardella 和 Owen Tanner。源自纯无限群胚的 Thompson 群 V 的推广。2024年。arXiv: 2302.04078 [math.GR].URL: https://arxiv.org/abs/2302.04078.[7] Piotr Hajac、Sarah Reznikoff 和 Mariusz Tobolski。“由图的容许推出得到的图 C^*代数的拉回”。载于：《巴拿赫中心出版物》120（2020年1月），第169–178页。DOI: 10.4064/bc120-13.[8] Philip J. Higgins 和 K. C. H. Mackenzie。“向量丛、模、李代数丛和泊松结构的基变换态射的对偶”。载于：《剑桥哲学学会数学论文集》114.3（1993年），第271–488页。DOI: 10.1017/S0305004100071760.[9] Peter T. Johnstone。《大象素描：托扑斯理论纲要》。第43、44卷。《牛津逻辑指南丛书》。牛津大学出版社，2002年，第xxii+1160.ISBN: 9780198534259。

[10] Peter T. Johnstone。《Stone空间》。第3卷。《高级数学研究》。剑桥大学出版社，1982年，第xxi+370页。 ISBN：0-521-23893-5。[11] Mark V. Lawson。《逆半群：部分对称理论》。G—参考、信息与跨学科主题丛书。世界科学出版社，1998年。 ISBN：9789810233167。 URL： https://books.google.de/books?id=2805q4tFiCkC.[12] Mark V. Lawson 和 Daniel H. Lenz。“伪群及其 Étale 群胚”。载于：《数学进展》244（2013年），第117–170页。 ISSN：0001-8708。 DOI：https://doi.org/10.1016/j.aim.2013.04.022。 URL： https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0001870813001734.[13] Saunders Mac Lane。《工作数学家的范畴论》。《数学研究生教材》。施普林格，1978年。 ISBN：978-1-4419-3123-8。 DOI： 10.1007/978-1-4757-4721-8.[14] Dmitry Matsnev 和 Pedro Resende。“Étale 群胚作为芽群胚及其基扩张”。载于：《爱丁堡数学学会会刊》53.3（2010年），第765–785页。 DOI： 10.1017/S001309150800076X.[15] Hiroki Matui。“有限型单侧移位的拓扑全群”。载于：《纯粹与应用数学杂志》（克雷尔杂志）2015.705（2015年），第35–84页。 DOI： doi:10.1515/crelle-2013-0041。 URL： https://doi.org/10.1515/crelle-2013-0041.[16] Ralf Meyer 和 Chenchang Zhu。“带有预拓扑的范畴中的群胚”。载于：Theory Appl. Categ. 30（2015年），第1906–1998页。 ISSN：1201-561X。电子印本：http://www.tac.mta.ca/tac/volumes/30/55/30-55abs.html.[17] Alan L.T. Paterson。“图逆半群、群胚及其 C^*代数”

载于：算子理论杂志 48.3（2002年），第645–662页。 ISSN：03794024, 18417744。 URL： http://www.jstor.org/stable/24715591 （访问于2025年12月19日）。[18] Jorge Picado 和 Aleˇs Pultr。帧与局部。数学前沿。Birkh¨auser，2011年，第XIX+398页。 ISBN：978-3-0348-0154-6。 DOI： 10.1007/978-3-0348-0154-6。[19] Pedro Resende。“ ́Étale 群胚及其量子格”。载于：数学进展208.1（2007年），第147–209页。 ISSN：0001-8708。 DOI： https://doi.org/10.1016/j.aim.2006.02.004。 URL： https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S000187080600048X。[20] E. Riehl。语境中的范畴论。Aurora：多佛现代数学原著。多佛出版社，2017年。 ISBN：978-0-486-82080-4。[21] Aidan Sims。*´Étale* 群胚及其 C^*-代数。2018年。arXiv：1710.10897 [math.OA]。 URL： https://arxiv.org/abs/1710.10897。[22] JonathanTaylor。群胚与 *Fell* 丛的函子性 C^*-代数。2023年。arXiv： 2310.03126 [math.OA]。 URL： https://arxiv.org/abs/2310.03126。

Jonathan Taylor, Institut für Mathematik, University of Potsdam, Campus Golm,Haus 9, Karl-Liebknecht-Str. 24–25, 14476, Germany电子邮箱地址：jonathan.taylor@uni-potsdam.de