arXiv:2512.18520v1 [math-ph] 20 Dec 2025

一维非平稳安德森模型的局域化

KARL ZIEBER

Abstract. 本文研究定义在 $\ell^2(\mathbb{Z})$ 上的 Schr¨odinger 算子族，其势相互独立，但不一定同分布，并且可能无界。我们假设势具有有限指数矩，并允许所选分布来自任意一个远离确定性分布的紧集。在这些假设下，我们证明了谱局域化（对应指数衰减特征函数）以及动力学局域化。本文的主要工具之一是关于非平稳矩阵乘积的 Furstenberg 型定理。

1. Introduction

本文关注著名的安德森模型，即定义在 $\ell^2(\mathbb{Z})$ 上的 Schr¨odinger 算子，其定义如下：

$$[H\psi](n) = \psi(n+1) + \psi(n-1) + V(n)\psi(n) \tag{1}$$

其中，势 $V(n)$ 是随机且相互独立地选取的。该模型由 P. W. Anderson 于 1958 年 提出，旨在理解随机性如何阻碍电子在无序介质中的传播 [And58]。当电子（即特征函数）以足够高的概率被“困”在有限体积区域内时，我们称该算子发生了局域化。人们提出了多种局域化概念，包括“谱局域化”及其更强的形式——“动力学局域化”。自原始模型问世以来，物理学家和数学家研究了安德森模型的诸多变体及其性质。除了改变维数之外，人们还研究了连续介质中的类似算子，以及定义在结构不同于 $\mathbb{Z}^d$ 的格点上的类似算子，参见例如 AW15、DFS20、Kle94、KLS90、MS22]。

在一维情形下从数学上确立局域化的首个结果由 Goldsheid、Molchanov 和 Pastur 证明 [GMP77], ，他们研究了安德森模型的一维连续版本。之后，Kunz 和 Souillard 在 [KS80], 中研究了离散情形，先证明动力学局域化，再由此得到谱局域化。最初发展的这些方法仅适用于势的分布足够良好（例如绝对连续）的情形 $V(n)$）。Carmona、Klein 和 Martinelli [CKM87] 使用卓有成效的多尺度分析（MSA），证明了奇异势情形下的局域化，这是一个重要进展。值得注意的是，[CKM87] 对一维情形仅要求有限阶矩满足较弱的条件，并采用了关于随机矩阵乘积的 Furstenberg 定理；这种方法至少可追溯到 1985年（见[FMSS85]）。一维、离散、平稳情形下的局域化（其中

K.Z. 部分获得美国国家科学基金会 DMS 项目 2247966 的资助。

Date: 2025年12月23日。

平稳是指势 $V(n)$ 为独立同分布）由 [CKM87]解决。1993 年，Aizenman 和 Molchanov 在 [AM93], 中提出了分数矩方法，作出了一些改进。该方法避开了多尺度分析的一些繁复工具，同时仍保留了其许多优点。特别是， [AM93] 要求随机势具有绝对连续分布，但不要求平稳性或有界性。有关背景、现有方法或当前结果的更详细介绍，请参见 [BDF+19，CL90，Dam11，Dam17，DF22，DF25，His08，Hun07，Sto11]。

最近，Bucaj 等人给出了 [BDF+19] 中局域化证明的一个更直接版本，重新引发了人们对一维离散模型的兴趣。不久之后，Jitomirskaya 和 Zhu 采用 Jitomirskaya 最初为研究几乎 Mathieu 算子而提出的方法，证明了整个谱上的局域化 [JZ19] 。大约在同一时期，Gorodetski 和 Kleptsyn 证明了 Furstenberg 定理的一个参数版本，并将其应用于平稳一维 Anderson 模型 [GK21], ，通过不同于 Jitomirskaya 和 Zhu 的方法，得到了谱局域化和动力学局域化。随后，Gorodetski 和 Kleptsyn 将这一结果推广到了非平稳情形。他们在 [GK] 中证明了 Furstenberg 定理的非平稳类比，并利用这一结果，在 [GK25] 中实现了形式如 (1) 的非平稳一维安德森模型的谱局域化和动力学局域化。此外，Hurtado 在 [Hur24] 中证明，对于定义在 $\ell^2(\mathbb{Z}^2)$ 上的二维 Anderson 模型，在谱底部也存在非平稳势的局域化。然而，[GK25] 和 [Hur24] 都假设势的分布 $V(n)$ 的支撑集均包含于某个公共紧区间内。本文去除了得出一维安德森模型谱局域化结论时对一致有界势函数的要求，具体如下述定理所述：

定理 1.1。 考虑作用于 ℓ^2(整数集) 上的随机薛定谔算子 H ，其定义为

$$(H\psi)(n) = \psi(n-1) + \psi(n+1) + V(n)\psi(n)$$

其中，势 $V(n)$ 是随机且相互独立地选取的，每个势的分布记为 μ_n。假设：

- 有限 γ阶矩： 存在 $\gamma > 0$ 和 C_0 ，使得对任意 n ，都有 $\int |x|^\gamma d\mu_n(x) < C_0$。
- 不存在确定性分布： 存在一个紧区间，使得所有分布限制在该区间上时都具有一定的最小变差。具体而言，存在一个 $\varepsilon > 0$ 和一个 $k > 0$ ，使得对任意 n ，都有 方差(max$\{\min\{V(n)\ k\}, -k\}) > \varepsilon$。

那么，几乎必然地， H 是谱局域的。

我们想指出，当 $\gamma > 2$时，第二个假设可以稍作弱化，只需假设方差($V(n)$) $> \varepsilon$，而无需在限制到 $[-k, k]$时仍保持变差。关于 $\gamma > 2$ 和 $\gamma \leq 2$ 情形的要求差异，将在附录 A中作更详细的说明。

此外，还存在一种更强的局域化概念。若自伴算子 H：$\ell^2(\mathbb{Z}) \to \ell^2(\mathbb{Z})$ 满足动力学局域化，则称其具有动力学局域化；对于任意 $q > 0$ ，都有

$$\sup_t \sum_{n\in\mathbb{Z}} (1+|n|)^q \left|\langle \delta_n, e^{-itH}\delta_0\rangle\right| < \infty.$$

定理 1.2。 在满足定理 *1.1*的假设时， H 具有动态局域化性质。

事实上，我们将证明更强的性质，即 H 具有半一致局域化特征函数（SULE）。详见第7 节。

用于建立这些结果的方法依赖于 Furstenberg 定理的一个非平稳版本，该版本由 Gorodetski 和 Kleptsyn 在 [GK]中证明，并用于他们 2025年的局域化结果 [GK25]。本文其余大部分内容受到 Jitomirskaya 和 Zhu 在 [JZ19]以及 Rangamani 在 [Ran19]中采用的方法启发。 [GZ20]也采用了这种方法，从而在一维安德森模型中实现了期望意义下的指数动力学局域化。关于无界势下的谱局域化，在重尾平稳情形中已有研究，采用的是多尺度分析方法，见 [Hur25]。

本文其余部分安排如下。我们主要致力于证明谱局域化，随后再调整若干引理，以便也能得出动力学局域化。在第2节中，我们讨论由截断薛定谔算子的性质导出的常用工具，包括有限体积格林函数，以及如何利用这些工具将 定理 1.1 中的谱局域化结论归结为技术性更强的 定理 2.2。第3 节介绍 [GK] 中的非平稳 Furstenberg 定理及其必要推论。这些结果使我们不仅能对传递矩阵，而且能对其各个元素建立大偏差估计；这是一个技术性强但十分重要的结果，体现了 [Tsa99、BDF+19]的思路。第 4节中，我们利用这些大偏差估计，证明刻画矩阵乘积“典型”行为的函数具有等度连续性。非平稳情形面临的挑战之一是李雅普诺夫指数的缺失，而这族函数的等度连续性起到了类似于李雅普诺夫指数连续性的作用。接着，在第5 节中，我们证明大偏差确实发生的那些集合满足相应的估计。第6 节证明 定理 2.2 （谱局域化），第7 节则给出动力学局域化的证明。我们在附录 γ A 中讨论不同矩阶条件下“无确定性分布”假设的必要性，并在附录定理 1.1 中给出一个分布序列的例子。此前该例中的局域化问题尚未解决，如今则可通过B得以证明。

2. Standard Spectral Tools

本节旨在介绍研究一维离散安德森算子时所用的一些标准工具。我们特别关注的两个对象是与该算子的有限体积截断版本 H 相关的格林函数和特征多项式。二者之间存在密切关系，可供我们利用（见（5）），并且它们也与我们将在第 3 节讨论的“传递矩阵”密切相关。我们还将讨论如何利用已有的结果和方法，将主要结果 定理 1.1 化归为定理 2.2 。

回顾一下，我们将 $V(n)$ 的分布记为 μ_n。设 $\mathrm{P} := \prod_{n\in\text{整数集}} \mu_n$ 为 $\Omega :=$ 实数集$^{\mathbb{Z}}$ 上的完整概率测度，除非另有说明。本文余下部分将考虑如下薛定谔算子族 $H_\omega : \ell^2(\mathrm{Z}) \to \ell^2(\mathrm{Z})$:

$$[H_\omega\psi](n) = \psi(n+1) + \psi(n-1) + V_\omega(n)\psi(n), \tag{2}$$

其中 $\omega \in \Omega$，且 $V_\omega(n)$ 是 $V(n)$ 的一个特定实现。注意，对于任意 ω， H_ω 都是自伴的，因此只有实特征值。我们称 H_ω 经历了谱

局域化 并具有指数衰减特征函数（有时称为安德森局域化），当算子 H_ω 满足以下两个条件时：

(1) H_ω 的谱几乎必然是“纯点谱”。如果对于几乎所有 $\omega \in \Omega$ 和每个 $\psi \in \ell^2(\mathbb{Z})$，谱测度 μ_ψ（其中 μ_ψ 满足 $\langle \psi, f(H)\psi \rangle = \int_{\sigma(H_\omega)} f(E) d\mu_\psi(E)$ 对所有 $f \in C(\sigma(H_\omega))$）都是纯点测度，则称 H_ω 几乎必然具有纯点谱。(2) 特征函数 ψ（对应于某个适当范围内的特征值 E）呈指数衰减，即 $|\psi(n)|$ 至少以指数速度衰减，当 $n \to \pm\infty$ 时。

关于谱局域化的更多技术细节，参见 [CL90、DF22、DF25]。在我们的情形中，施诺尔定理（参见 [Shn57、）保证谱几乎必然为纯点谱，前提是我们能够证明所有多项式有界解 $H_\omega \psi = E\psi$ 至少以指数速度衰减。由此引出以下定义：

定义 2.1。若存在一个 $\psi \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$，它按多项式有界，且满足 $H_\omega \psi = E\psi$，则称能量 $E \in \mathbb{R}$ 为广义特征值。此时，称 ψ 为广义特征函数。

有鉴于此，我们可以通过证明以下定理来证明定理 1.1：

定理 2.1。在*定理1.1*的假设下，对于几乎处处的 ω，对每个广义特征值 E，相应的广义特征函数 $\psi_{\omega, E}(n)$ 在 $|n| \to \infty$ 时指数衰减。

为证明这一点，我们借助于截断薛定谔算子的成熟工具。我们提供必要的背景知识，并请读者参阅 [DF22]第 2.2 节，了解更多详情。令 a，$b \in \mathbb{Z}$，并令 $H_{[a,b],\omega}$ 表示限制在区间 $[a,b] \cap \mathbb{Z}$ 上、满足狄利克雷边界条件的薛定谔算子。记 $\sigma(H_{[a,b],\omega})$ 为 $H_{[a,b],\omega}$ 的谱，我们定义与 $E \notin \sigma(H_{[a,b],\omega})$ 相关联的格林函数为

$$G_{[a,b],E,\omega} := (H_{[a,b],\omega} - E)^{-1}.$$

由于

$$H_{[a,b],\omega} - E = \begin{bmatrix} V_\omega(a) - E & 1 & & & 0 \\ 1 & V_\omega(a+1) - E & 1 & & \\ & 1 & \ddots & & \\ & & \ddots & & 1 \\ 0 & & & 1 & V_\omega(b) - E \end{bmatrix},$$

我们有 $G_{[a,b],E,\omega}$ 也是一个 $(b-a+1)$ 维矩阵。对于矩阵 A，我们将 j，k 处的元素记为 A $A(j, k)$。已知（参见 [DF22] 第 2 章第 2 节），若 ψ 满足 $H_\omega \psi = E\psi$，则

$$\psi(x) = -G_{[a,b],E,\omega}(x,a)\psi(a-1) - G_{[a,b],E,\omega}(x,b)\psi(b+1), \quad x \in [a,b]. \tag{3}$$

该方程使我们能够利用格林函数和选定的端点，控制广义特征函数在特定点处的行为。因此，我们的策略是在合适的点控制格林函数，以证明指数衰减。为此，我们定义：

定义 2.2。对于 $C>0$， $n\in\mathbb{N}$，若 $x\in\mathbb{Z}$ 是 $(C,\ n,\ E,\ \omega)$-正则的，则
$$\left|G_{[x-n,x+n],E,\omega}(x,x-n)\right|\leqslant e^{-Cn}\quad\text{and}\quad\left|G_{[x-n,x+n],E,\omega}(x,x+n)\right|\leqslant e^{-Cn}.$$
否则，我们称其为 $(C,\ n,\ E,\ \omega)$-奇异。

据此，我们可以重新表述定理 2.1：

定理 2.2。对于几乎处处的 ω，对于 H_ω的每个广义特征值 E ，都存在某个 $C>0$和 $N(\omega,E)$，使得对于每个 $n>N$， $2n$和 $2n+1$都是(C,n,E,ω)-正则的。

为说明这如何推出定理 2.1，设对所有 n 充分大时， $2n+1$是 (C,n,E,ω)-正则的。于是，对于具有广义特征值 E的广义特征函数 ψ，我们调用 (3)：

$$\begin{aligned}|\psi(2n+1)|&\leq\left|G_{[n+1,3n+1],E,\omega}(2n+1,(2n+1)-n)\psi(n)\right|]\\&\quad+\left|G_{[n+1,3n+1],E,\omega}(2n+1,(2n+1)+n)\psi(3n+2)\right|\\&\leq e^{-Cn}\cdot|\psi(n)|+e^{-Cn}\cdot|\psi(3n+2)|.\end{aligned}$$

由于 ψ 是多项式有界的，这给出了 $|\psi(2n+1)|$ 在$n\to\infty$时的指数衰减。对于 $2n$ 的论证完全相同。为了得到在 $n\to-\infty$时的衰减，证明$2n+1$是 $(C,|n|,E,\omega)$-正则的论证也完全相同。

3. Furstenberg's Theorem and Large Deviation Estimates

本节将建立随机矩阵理论中的工具，这些工具将在我们对格林函数的估计中发挥关键作用。最重要的是定理 3.1 ，它给出了关于随机矩阵的大偏差估计。利用这一结果，还可以在第 4 节中，为上述特征多项式建立类似的偏差结果以及一个关键函数族的等度连续性。

在本文余下部分，我们考虑任意选定的紧区间 $E\in J$ 内的能量。令

$$A_{k,E,\omega}=\begin{bmatrix}E-V_\omega(k)&-1\\1&0\end{bmatrix}$$

作为我们的传递矩阵。令 $T_{[a,b],E,\omega}=\prod_{k=a}^{b}A_{k,E,\omega}$。若 ψ 是 $H_\omega\psi=E\psi$ 的解，则 ψ 的各项由两个初始点以及 $A_{k,E,\omega}$ 的乘积决定。事实上，

$$\begin{bmatrix}\psi(b+1)\\\psi(b)\end{bmatrix}=T_{[a,b],E,\omega}\begin{bmatrix}\psi(a)\\\psi(a-1)\end{bmatrix}.\tag{4}$$

为简化记号，令 $T_{n,E,\omega}=\prod_{k=1}^{n}A_{k,E,\omega}$。记 $L_{n,E}=\mathbb{E}[\log\|T_{n,E,\omega}\|]$，其中期望是对分布 $\mu_1^E\times\mu_2^E\times\ldots\times\mu_n^E$ 取的；该分布是由势的原始分布推导出的、关于 SL(2, R) 上 $A_{k,E,\omega}$ 的推前分布。类似地，记 $L_{[a,b],E,\omega}=\mathbb{E}[\log\|T_{[a,b],E,\omega}\|]$，我们将其简称为“增长函数”。理解这些增长函数的一种方式是，将它们视为追踪传递矩阵范数平均（即典型）增长行为的函数。我们希望为 $\log\|T_{n,E,\omega}\|$ 建立一个大偏差估计，并将借助这些增长函数来实现。

为建立这些大偏差估计，我们将调用 [GK25]中的一个定理，该定理有一些技术要求。我们来检查这些要求在当前情形下是否满足。对于每个 $A\in$ SL(2,实数集)，令 $f_A:{}^1\to\mathbb{S}^1\ \mathbb{S}$ 表示 A的射影化。现在，定理 1.1 中的假设推出：

(A1) 所有 μ_n^E 都属于某个弱*-紧集的测度 $\mathcal{K}$。
(A2) 存在 $\gamma > 0$, C 使得对每个 $E \in J$ 和每个 $\mu^E \in \mathcal{K}$:

$$\int_{\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})} \|A\|^\gamma d\mu^E(A) < C.$$

(A3) 对于任意 $E \in J$ 以及任意测度 $\mu^E \in \mathcal{K}$，在 RP^1 上不存在博雷尔概率测度 ν_1, ν_2 使得 $(f_A)*\nu_1 = \nu_2$ 对 μ^E-几乎每个矩阵$A \in \in$SL(2，实数集) 都成立。

确认这些陈述在我们的情形下成立，首先注意到 γ-矩假设定理 1.1 蕴含 **(A2)**。

陈述 **(A3)** 由我们的传递矩阵的形式可得，严格来说，对于任意一对 来自 SL(2，实数集) 的传递矩阵均成立（见 [GK25], 第 4 节）。假设我们有两个定义在 $\mathbb{RP}^1$ 上的博雷尔概率测度，且 $f*\nu_1 = g*\nu_1 = \nu_2$，其中 f 和 g 分别是两个不同传递矩阵的射影化。那么 $(f \circ g^{-1}) * \nu_2 = \nu_2$。然而，请注意

$$A_{k,E,\omega_1} \cdot A^{-1}_{k,E,\omega_2} = \begin{bmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

因此， ν_2 必定是一个在$[1,0]^T$方向上具有点质量的概率测度，即 $\delta_{[1,0]^T}$。然而，对于任意传递矩阵 A， $f_A * \nu_1 = \delta_{[1,0]^T}$蕴含$\nu_1 = \delta_{[0,-1]^T}$。由于 $\nu_1 \neq \nu_2$，在两个传递矩阵的复合下，不存在像是确定性的测度，并且**(A3)** 成立。

对于 **(A1)**，我们关注弱* 意义下的紧性，但实际上我们将证明弱拓扑[1], 下的序列紧性 μ_n^E。分布、上的分布与势 μ_n在上的分布通过连续推前映射相关联，因此根据连续映射定理，只需证明 $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$在弱意义下是紧的。普罗霍罗夫定理（见 [Bil99]第1章第5节）指出，只要证明这一族概率测度是紧的，我们就可以断言其弱紧性。在这里，若对每个，都存在一个紧集 $\varepsilon > 0$ $K \subseteq$，使得 $\mu_n(K)$ $> 1 - \varepsilon$ 对所有 n都成立，则称一族测度是紧的。事实上，根据马尔可夫不等式，我们有

$$\mu_n(\{|x| > R\}) \leq \frac{1}{R^\gamma} \int |x|^\gamma d\mu_n < \frac{C}{R^\gamma}$$

对于任意 $R > 0$。令 $\varepsilon > 0$，选取 $R_\varepsilon \gg 1$ 使得 $\frac{C}{R_\varepsilon^\gamma} <\!\!-\!\!\varepsilon$。记 $K_\varepsilon = \{|x| \leq R_\varepsilon\}$，并注意到这是一个紧集，我们有

$$\mu_n(K_\varepsilon) > 1 - \frac{C}{R_\varepsilon^\gamma} > 1 - \varepsilon$$

对于任意 n，这就确立了紧性。因此，陈述**(A1)** 在我们的情形下成立。

这些陈述**(A1)**-**(A3)**使我们能够应用 Gorodetski 和 Kleptsyn 的以下定理。我们给出关于 SL(2,实数集) 的结果，但请注意，原定理适用于 SL(d,实数集)。

定理 3.1（非平稳 Furstenberg 定理与大偏差估计， [GK25]中的定理 2.1）。设 $\mathcal{K}$ 是SL(2,实数集)上的一个概率测度紧集。假设以下条件成立:

[1]这里，如果对于每个连续函数 f: 实数集 $\to$ 实数集（在 ∞处消失），都有 $\int f d\mu_n \to \int f d\mu$，我们就称 $\mu_n \to \mu$ 在弱* 拓扑下成立。如果对于每个连续有界函数 f:实数集 $\to$ 实数集，都有 $\int f d\mu_n \to \int f d\mu$，我们就称 $\mu_n \to \mu$ 在弱拓扑下成立。

- （有限矩条件）存在 $\gamma > 0$， C 使得

$$\forall \mu \in \mathcal{K} \quad \int_{\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})} \|A\|^{\gamma} d\mu(A) < C.$$

- （测度条件）对于任意 $\mu \in \mathcal{K}$，不存在 *Borel* 概率测度 ν_1, ν_2 定义在 实射影空间[1] 上，使得 $(f_A)_* \nu_1 = \nu_2$ 对于 μ-几乎处处的 $A \in \mathrm{SL}(2, \text{实数集})$ 都成立。

那么，对于任意 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta > 0$，使得对于来自 $\mathcal{K}$ 的任意分布序列$\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n, \ldots$，当 $n \in$ 足够大时 $\mathbb{N}$，我们有

$$\mathbb{P}\left\{|\log \|T_n\| - L_n| > \varepsilon n\right\} < e^{-\delta n},$$

其中，$T_n = A_n A_{n-1} \ldots A_1$、$\{A_j\}$ 是相对于 $\{\mu_j\}$、$\mathbb{P} = \mu_1 \times \mu_2 \times \ldots \times \mu_n$和 $L_n = \mathbb{E}(\log \|T_n\|)$随机且独立选取的。此外，对于任意给定的初始单位向量 v_0，其随机像的长度也满足相同的估计：

$$\forall v_0 \in \mathbb{R}^d, |v_0| = 1 \quad \mathbb{P}\left\{|\log \|T_n v_0\| - L_n| > \varepsilon n\right\} < e^{-\delta n}.$$

最后，期望值 L_n 满足下界

$$L_n \geq nh,$$

其中，常数 $h > 0$ 可以对所有可能的序列 $\{\mu_n\} \in \mathcal{K}^{\mathbb{N}}$一致选取。

因此，我们还得到了 定理 3.1 的一个参数化版本：

推论3.2 (参数化非平稳富斯滕贝格定理，[GK25]中的定理 2.2)。 在 定理 *3.1* 的假设下，对任意 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta > 0$，使得对所有充分大的 $n \in \mathbb{N}$ 以及所有 $E \in J$，都有

$$\mathbb{P}\left\{|\log \|T_{n,E,\omega}\| - L_{n,E}| > \varepsilon n\right\} < e^{-\delta n},$$

其中 $\mathbb{P} = \mu_1^E \times \mu_2^E \times \ldots \times \mu_n^E$。此外，对于任意给定的初始单位向量 v_0，其随机像的长度也满足相同的估计：

$$\forall v_0 \in \mathbb{R}^2, |v_0| = 1 \quad \mathbb{P}\left\{|\log \|T_{n,E,\omega} v_0\| - L_{n,E}| > \varepsilon n\right\} < e^{-\delta n}.$$

为了将传递矩阵的大偏差估计与格林函数联系起来，我们需要引入一个新的对象作为桥梁。定义特征多项式 of$H_{[a,b],\omega}$ 为

$$P_{[a,b],E,\omega} := \det(H_{[a,b],\omega} - E) \quad \text{for} \quad a \leq b.$$

按照惯例，如果 $a > b$ 令 $P_{[a,b],\ E,\ \omega} = 1$。我们将 $P_{[a,b],\ E,\ \omega}$ 视为关于变量 $b - a + 1$ 的 E次多项式。一个有用的恒等式（见 [DF22] 命题 2.2.9）可用于将特征多项式与格林函数联系起来：

$$\left|G_{[a,b],E,\omega}(x,y)\right| = \frac{\left|P_{[a,x-1],E,\omega} P_{[y+1,b],E,\omega}\right|}{\left|P_{[a,b],E,\omega}\right|} \quad \text{for} \quad x \leq y. \tag{5}$$

因此，我们将控制多项式 $P_{[a,b],\ E,\ \omega}$ 的行为，以控制广义特征函数的增长。进而，$P_{[a,b],\ E,\ \omega}$ 和$T_{[a,b],\ E,\ \omega}$ 通过 [DF22]命题 2.2.5 相联系：

$$T_{[a,b],E,\omega} = \begin{bmatrix} P_{[a,b],E,\omega} & -P_{[a+1,b],E,\omega} \\ P_{[a,b-1],E,\omega} & -P_{[a+1,b-1],E,\omega} \end{bmatrix}. \tag{6}$$

我们的技术需要对多项式 $P_{[a,b],E,\omega}$ 给出大偏差估计。由于我们的传递矩阵的元素

$T_{[a,b],E,\omega}$ 恰好就是这些多项式，因此可以合理地预期这一结果成立。这可视为 [Tsa99、BDF+19] 中定理 2 的非平稳扩展。

为了利用 推论3.2 得到这样的估计，我们还需要 Gorodetski、Kleptsyn 和 Monakov 关于我们分布乘积的 H¨older 正则性的一个结果。我们将该定理表述为适用于我们的情形，但它对一般的随机动力系统也成立。

定理 3.3 ([GKM]中的定理 2.8。 在 定理 *3.1*的假设下，存在 $\alpha > 0$、C、$\kappa < 1$，使得对于任意初始测度 ν_0、任意 n以及任意分布 μ_1、.....、$\mu_n \in \mathcal{K}$， n阶像 ν_0 满足 (α, C)-*H¨older* 性质，其尺度不超过 κ^n:

$$\forall x \in \mathbb{R}^2 \quad \forall r > \kappa^n \quad (\mu_n \times \cdots \times \mu_1 \times \nu_0)\left(B_r(x)\right) < Cr^{\alpha}.$$

现在，我们证明传递矩阵各项的大偏差估计$T_{[a,b],\ E,\ \omega}$。

定理 3.4。 在 定理 *3.1*的假设下，对于任意 $\varepsilon > 0$， 存在$\delta > 0$， 使得对于所有充分大的 $b-a$，以及所有 $E \in J$，均有

$$\mathbb{P}\left\{\left|\log\left|P_{[a,b],E,\omega}\right| - L_{[a,b],E}\right| > \varepsilon(b-a+1)\right\} < e^{-\delta(b-a+1)}.$$

证明。 我们先证明

$$\mathbb{P}\left\{\left|\log\left|\langle T_{n,E,\omega}e_1, e_1\rangle\right| - L_{n,E}\right| > \varepsilon n\right\} < \tilde{C}e^{-\delta n} \tag{7}$$

对某个常数 $\tilde{C}$、某个 $\delta > 0$ 以及充分大的 n，其中 $e_1 = [1,0]^T$。首先，由于$|\langle T_{n,\ E,\ \omega}e_1,\ e_1\rangle| \le \|T_{n,\ E,\ \omega}e_1\|^{1/2}$:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left\{\log\left|\langle T_{n,E,\omega}e_1, e_1\rangle\right| - L_{n,E} > \varepsilon n\right\} &\le \mathbb{P}\left\{\log\left(\|T_{n,E,\omega}e_1\|^{1/2}\right) - L_{n,E} > \varepsilon n\right\}\\ &\le \mathbb{P}\left\{\log\|T_{n,E,\omega}e_1\| - L_{n,E} > \varepsilon n\right\}\\ &< e^{-\delta n}\end{aligned}$$

根据 推论3.2。

对于另一个界，考虑集合包含关系

$$\{|\langle T_{n,E,\omega}e_1, e_1\rangle| \le e^{L_{n,E}-\varepsilon n}\} \subseteq \{\|T_{n,E,\omega}e_1\| \le e^{L_{n,E}-\frac{\varepsilon}{2}n}\} \cup \left\{\frac{|\langle T_{n,E,\omega}e_1, e_1\rangle|}{\|T_{n,E,\omega}e_1\|} \le e^{-\frac{\varepsilon}{2}n}\right\}$$

因为若$|\langle T_{n,\ E,\ \omega}e_1,\ e_1\rangle| = \|T_{n,\ E,\ \omega}e_1\| \cdot \frac{|\langle T_{n\ E,\omega}e_1\ e_1\rangle|}{\|T_{n\ E}\|} \le e^{L_{n\ E}-\varepsilon n}$ 且$\|T_{n,\ E,\ \omega}e_1\| > e^{L_{n,\ E}-\frac{\varepsilon}{2}n}$，则

$$\frac{|\langle T_{n,E,\omega}e_1, e_1\rangle|}{\|T_{n,E,\omega}e_1\|} \le e^{L_{n,E}-\varepsilon n} \cdot e^{-L_{n,E}+\frac{\varepsilon}{2}n} = e^{-\frac{\varepsilon}{2}n}.$$

因此我们有

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}\left\{\log\left|\langle T_{n,E,\omega}e_1, e_1\rangle\right| - L_{n,E} \le -\varepsilon n\right\}\\ &= \mathbb{P}\left\{\left|\langle T_{n,E,\omega}e_1, e_1\rangle\right| \le e^{L_{n,E}-\varepsilon n}\right\}\\ &\le \mathbb{P}\{\|T_{n,E,\omega}e_1\| \le e^{L_{n,E}-\frac{\varepsilon}{2}n}\} + \mathbb{P}\left\{\frac{|\langle T_{n,E,\omega}e_1, e_1\rangle|}{\|T_{n,E,\omega}e_1\|} \le e^{-\frac{\varepsilon}{2}n}\right\}.\end{aligned}$$

第一项由 $e^{-\delta_0 n}$ 对某个 $\delta_0 > 0$ 与 $\frac{\varepsilon}{2}$ 根据推论3.2得以界定。为界定第二项，我们使用定理 3.3。令 $e_2 = [0,1]^T$:

$$\left\{\frac{|\langle T_{n,E,\omega}e_1, e_1\rangle|}{\|T_{n,E,\omega}e_1\|} \le e^{-\frac{\varepsilon}{2}n}\right\}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left\{ \frac{|\langle T_{n,E,\omega} e_1, e_1 \rangle|^2}{\|T_{n,E,\omega} e_1\|^2} \le e^{-\varepsilon n} \right\} \\
&= \left\{ \frac{\|T_{n,E,\omega} e_1\|^2 - |\langle T_{n,E,\omega} e_1, e_2 \rangle|^2}{\|T_{n,E,\omega} e_1\|^2} \le e^{-\varepsilon n} \right\} \\
&= \left\{ \frac{|\langle T_{n,E,\omega} e_1, e_2 \rangle|^2}{\|T_{n,E,\omega} e_1\|^2} \ge \left(1 - e^{-\varepsilon n}\right) \right\} \\
&= \left\{ \left(1 - e^{-\varepsilon n}\right)^{1/2} \le \frac{|\langle T_{n,E,\omega} e_1, e_2 \rangle|}{\|T_{n,E,\omega} e_1\|} \right\}.
\end{aligned}
$$

因此，在此事件下，我们有

$$
\left(1 - e^{-\varepsilon n}\right)^{1/2} \le \frac{|\langle T_{n,E,\omega} e_1, e_2 \rangle|}{\|T_{n,E,\omega} e_1\|} \le 1 \quad \text{and} \quad 0 \le \frac{|\langle T_{n,E,\omega} e_1, e_1 \rangle|}{\|T_{n,E,\omega}\|} \le e^{-\frac{\varepsilon}{2} n}.
$$

因此

$$
\begin{aligned}
\left\| \frac{T_{n,E,\omega} e_1}{\|T_{n,E,\omega} e_1\|} - e_2 \right\|^2 &= \left(\frac{|\langle T_{n,E,\omega} e_1, e_1 \rangle|}{\|T_{n,E,\omega} e_1\|} \right)^2 + \left(\frac{|\langle T_{n,E,\omega} e_1, e_2 \rangle|}{\|T_{n,E,\omega} e_1\|} - 1 \right)^2 \\
&\le e^{-\varepsilon n} + \left((1 - e^{-\varepsilon n})^{1/2} - 1 \right)^2 \\
&\le e^{-\varepsilon n} + \left(1 - e^{-\frac{\varepsilon}{2} n} - 1\right)^2 \\
&= 2 e^{-\varepsilon n}.
\end{aligned}
$$

因此，当 $\frac{|\langle T_{n,E,\omega} e_1, e_1 \rangle|}{\|T_{n,E,\omega} e_1\|} \le e^{-\frac{\varepsilon}{2} n}$ 时，我们有

$$
\frac{T_{n,E,\omega} e_1}{\|T_{n,E,\omega} e_1\|} \in B_{\sqrt{2} e^{-\varepsilon n/2}} (e_2).
$$

因此

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P} \left\{ \frac{|\langle T_{n,E,\omega} e_1, e_1 \rangle|}{\|T_{n,E,\omega} e_1\|} \le e^{-\frac{\varepsilon}{2} n} \right\} &\le \mathbb{P} \left\{ \frac{T_{n,E,\omega} e_1}{\|T_{n,E,\omega} e_1\|} \in B_{\sqrt{2} e^{-\varepsilon n/2}} (e_2) \right\} \\
&= (\mu_n \times \cdots \times \mu_1 \times \delta_{e_1}) \left\{ \frac{T_{n,E,\omega} v}{\|T_{n,E,\omega} v\|} \in B_{\sqrt{2} e^{-\varepsilon n/2}} (e_2) \right\}
\end{aligned}
$$

其中 μ_k 是 A_k 的分布. $_{E,\ \omega(\cdot)\ \|A_{k,\ E,\ \omega(\cdot)}\|_\circ}$

应用 定理 3.3，令 $\tilde{\kappa} =$ 最大值 $\left\{\kappa, e^{-\varepsilon/2}\right\} < 1$ 以及 $r = \sqrt{2} \tilde{\kappa}^n$。那么，取此 r:

$$
(\mu_n \times \cdots \times \mu_1 \times \delta_{e_1}) \left(B_{\sqrt{2} e^{-\varepsilon n/2}} (e_2) \right) \le C \cdot r^\alpha
$$

对某个 $\alpha > 0$ 成立。因此

$$
\mathbb{P} \left\{ \frac{|\langle T_{n,E,\omega} e_1, e_1 \rangle|}{\|T_{n,E,\omega} e_1\|} \le e^{-\frac{\varepsilon}{2} n} \right\} \le C (\sqrt{2}^\alpha) \tilde{\kappa}^{n\alpha} = C (\sqrt{2}^\alpha) e^{n\alpha \log(\tilde{\kappa})}
$$

令 $\delta =$ 最小值$\{\delta_0, \alpha \log(\tilde{\kappa})\}$ 即可证明（7）。

关于该结论，回顾上面的（6）。因此 $P_{[1,n],\ E,\ \omega} = \langle T_{[1,n],\ E,\ \omega} e_1,\ e_1 \rangle$，该结论对形式为 $[1, n]$ 的区间成立。要得到一般 $[a, b]$ 的结论，我们重新编号以获得所需的界。□

由此可得一个技术推论，在证明主要结果时将会用到:

推论 3.5. 对于几乎处处的 ω，对于每个 $\varepsilon > 0$ 以及所有 $E \in J$，都存在一个$N(\omega, \varepsilon, E) = N \in \mathbb{N}$ 充分大，使得对于所有 $n \geq N$，我们都有

$$\max\left\{\log\left|P_{[n+1,2n],E,\omega}\right| - L_{[n+1,2n],E,\omega}, \log\left|P_{[2n+2,3n+1],E,\omega}\right| - L_{[2n+2,3n+1],E,\omega}\right\} < \varepsilon n.$$

证明。 着眼于第一项，根据 定理 3.4，我们知道

$$\mathbb{P}\left\{\left|\log\left|P_{[n+1,2n],E,\omega}\right| - L_{[n+1,2n],E,\omega}\right| > \varepsilon n\right\} < e^{-\delta n}$$

对于某个 $\delta > 0$。由博雷尔-坎特利引理,

$$\mathbb{P}\left\{\left|\log\left|P_{[n+1,2n],E,\omega}\right| - L_{[n+1,2n],E,\omega}\right| > \varepsilon n \text{ infinitely often}\right\} = 0.$$

因此，对于某个充分大的 $N_1 \in \mathbf{N}$， $n \geq N_1$ 蕴含

$$\left|\log\left|P_{[n+1,2n],E,\omega}\right| - L_{[n+1,2n],E,\omega}\right| \leq \varepsilon n$$

这显然蕴含

$$\log\left|P_{[n+1,2n],E,\omega}\right| - L_{[n+1,2n],E,\omega} \leq \varepsilon n.$$

另一项的证明类似，取 $N \geq N_1$， N_2 即可完成证明。 □

4. Properties of the Growth Functions

现在我们对 $\log\|T_n\|$ 相对于其期望的变化有了更具体的认识，因此可以据此证明这一族$\left\{\frac{1}{n}L_{n,E}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$关于参数 $E \in J$ (定理4.5)等度连续。可以将此视为李雅普诺夫指数连续性的非平稳对应结果。这一事实使我们能够控制所有增长函数在一个小区间内的变化，这对于引理 5.1 至关重要；在该引理中，我们分析发生大偏差的集合的结构。本节的证明与 [GK25]中的引理 2.3 的证明非常相似。

我们引入一些记号，以便在接下来的证明中使用。对于任意固定的 $k \in \mathbf{N}$，我们可以将乘积 $T_{n,E,\omega}$ 分解为若干组 k传递矩阵的乘积:

$$T_{n,E,\omega} = B_m(E) \dots B_1(E), \quad n = m \cdot k$$

其中

$$B_j(E) := \left(A_{kj,E,\omega} \dots A_{k(j-1)+1,E,\omega}\right), \quad j = 1, \dots, m.$$

现在，取任意一个单位向量 v_0 并定义

$$\xi_{j,E} := \log\|B_j(E)\|, \quad S_{j,E} := \log\left|T_{kj,E,\omega}(v_0)\right|, \quad R_{j,E} = S_{j,E} + \xi_{j+1,E} - S_{j+1,E}.$$

用这种记号，我们有

引理4.1 （ [GK25]中的命题2.5）。 对于任意 $\varepsilon^* > 0$ 存在 k_1，使得对于任意 $k > k_1$ 存在某个 $\delta^* > 0$ 对所有 $n = km$ 以及任意 $E \in J$

$$\mathbb{P}\left\{R_{0,E} + R_{1,E} + \dots + R_{m-1,E} > n\varepsilon^*\right\} < e^{-\delta^* m}.$$

我们还要求

引理 4.2 (引理 3.5 的部分内容，见 [GK])。 存在 B 使得对于任意 $\mu \in \mathcal{K}$

$$\int \log\|A\| \, d\mu(A) < B, \qquad \int \log^2\|A\| \, d\mu(A) < B^2.$$

证明。 首先注意到，$\log^2(x)\ x^\gamma$ 在 $[1,\infty$ 上一致有界。因此，对于任意传递矩阵 $A \in$ SL(2,实数集)，$\log^2(\|A\|)\ \|A\|^\gamma$也一致有界。于是，该不等式由 γ 阶矩的一致有界性得出。

其次，由于 μ 是一个概率测度：

$$\int \log \|A\| \, d\mu(A) \leq \left(\int \log^2 \|A\| \, d\mu(A) \right)^{1/2} < B$$

□

引理4.3。固定 $k \in \mathbb{N}$。令

$$\Omega_{M,j} = \{\omega \in \Omega : \exists i \in \{k(j-1)+1, \ldots, kj\} \ such \ that \ \|A_{i,E,\omega}\| > M\}.$$

对于所有 $\varepsilon > 0$ 和所有 $E \in J$，存在 $M = M(\varepsilon) \gg 1$，使得

$$\mathbb{P}(\Omega_{M,j}) < \frac{\varepsilon^2}{25 \cdot k^2 \cdot B^2}$$

其中 M 可相对于 j一致选取。

证明。 注意到

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\Omega_{M,j}) &\leq \sum_{i=k(j-1)+1}^{kj} \mathbb{P}\{\|A_{i,E,\omega}\| > M\} \\
&= \sum_{i=k(j-1)+1}^{kj} \mathbb{P}\{\|A_{i,E,\omega}\|^\gamma > M^\gamma\} \\
&\leq \sum_{i=k(j-1)+1}^{kj} \mathbb{E}[\|A_{i,E,\omega}\|^\gamma] \cdot M^{-\gamma} \\
&\leq k \cdot C \cdot M^{-\gamma} \\
&< \frac{\varepsilon^2}{25 \cdot k^2 \cdot B^2}
\end{aligned}$$

其中，最后一行是通过适当增大 M 得到的，因为 $\gamma > 0$。 □

为了证明 $\left\{\frac{1}{n} L_n(E)\right\}_{n\in\mathbb{N}}$的等度连续性，我们像上面那样将$T_{n,E,\omega}$ 切分成长度为 k的块。接下来的引理说明，当势有界时，这些块是等度连续的。

引理4.4。 设给定 $M, k \gg 1$。对于任意 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta > 0$，使得对于任意 $V_1, \ldots, V_k \in [-M, M]$，若 $E_1, E_2 \in J$且 $|E_1 - E_2| < \delta$，则

$$\left\| A_{V_k,E_1} A_{V_{k-1},E_1} \cdots A_{V_1,E_1} - A_{V_k,E_2} \cdots A_{V_1,E_2} \right\| \leq \varepsilon$$

其中，$A_{V_i,E}$ 表示势为 V_i 且能量参数为E的转移矩阵。

证明。 若对所有 i都有 $|V_i| \leqslant M$，则$\|A_{V_k,E} \ldots A_{V_i,E}\|$ 的导数也有界，因为$A_{V_k,E} \cdots A_{V_1,E}$的各项都是次数有界的多项式，且其系数在紧区间 J上一致有界。此外，这一界的一致性保证了对任意势的选取 $V_1, \ldots, V_k$，它们都是等度连续的。□

这些引理将帮助我们确立以下结果：

定理4.5。 函数序列 $\left\{\frac{1}{n}L_{n,E}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是等度连续的（关于参数 $E\in J$）。

证明。 固定 $k\in\mathbf{N}$。根据上述定义并迭代应用$R_{j,E}=S_{j,E}+\xi_{j+1,E}-S_{j+1,E}$，可得

(8) $\log|T_{km,E,\omega}v_0|=S_{m,E}=(\xi_{1,E}+\cdots+\xi_{m,E})-(R_{0,E}+R_{1,E}+\cdots+R_{m-1,E})$,

因此，

$$\begin{aligned}&\text{对数}\|T_{n,E,\omega}\|\geq\text{对数}|T_{n,E,\omega}v_0|\\ &=(\xi_{1,E}+\cdots+\xi_{m,E})-(R_{0,E}+R_{1,E}+\cdots+R_{m-1,E})\,.\end{aligned}\tag{9}$$

固定 $\varepsilon>0$ 并取 $\varepsilon^*:=\frac{\varepsilon}{5}$。根据 引理4.1，对于任意充分大的 k，存在$\delta^*>0$，使得对于任意 $E\in J$

$$R_{0,E}+R_{1,E}+\cdots+R_{m-1,E}<\frac{\varepsilon}{5}n\tag{10}$$

概率至少为 $1-e^{-\delta^*m}$。一旦（10）成立，由（9）可得

$$(\xi_{1,E}+\cdots+\xi_{m,E})-\log\|T_{n,E,\omega}\|\leq R_{0,E}+R_{1,E}+\cdots+R_{m-1,E}<\frac{\varepsilon}{5}n$$

并且，根据矩阵范数的次可乘性，

$$\log\|T_{n,E,\omega}\|-(\xi_{1,E}+\cdots+\xi_{m,E})\leq 0<\frac{\varepsilon}{5}n$$

因此，将这些结果合并可得，

$$|\log\|T_{n,E,\omega}\|-(\xi_{1,E}+\cdots+\xi_{m,E})|<\frac{\varepsilon}{5}n.$$

因此，对于任意两个参数值 E_1，$E_2\in J$ 这两个不等式

$$|\log\|T_{n,E_i,\omega}\|-(\xi_{1,E_i}+\cdots+\xi_{m,E_i})|<\frac{\varepsilon}{5}n,\quad i=1,2\tag{11}$$

以至少 $1-2e^{-\delta^*m}$ 的概率成立。

现在，我们希望对 $\mathbf{E}\left[|\xi_{j,E_1}-\xi_{j,E_2}|\right]$ 进行界定。为此，注意到

$$\mathbb{E}\left[|\xi_{j,E_1}-\xi_{j,E_2}|\right]=\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\Omega_{M,j}}\cdot|\xi_{j,E_1}-\xi_{j,E_2}|\right]+\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\Omega_{M,j}^C}\cdot|\xi_{j,E_1}-\xi_{j,E_2}|\right]$$

其中 $\Omega_{M,\ j}$ 如引理4.3所述。根据引理4.4，第二个求和项可由以下式子控制：$\frac{\varepsilon}{5}$ 前提是 $|E_1-E_2|<\delta$。聚焦第一个求和项，注意到

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\Omega_{M,j}}\cdot|\xi_{j,E_1}-\xi_{j,E_2}|\right]\\ &=\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\Omega_{M,j}}\cdot\left|\log\left\|A_{kj,E_1,\omega}\cdots A_{k(j-1)+1,E_1,\omega}\right\|-\log\left\|A_{kj,E_2,\omega}\cdots A_{k(j-1)+1,E_2,\omega}\right\|\right|\right]\\ &\leq\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\Omega_{M,j}}\cdot\sum_{i=k(j-1)+1}^{kj}\log\|A_{i,E_1,\omega}\|\right]+\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\Omega_{M,j}}\cdot\sum_{i=k(j-1)+1}^{kj}\log\|A_{i,E_2,\omega}\|\right]\\ &=\sum_{i=k(j-1)+1}^{kj}\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\Omega_{M,j}}\cdot\log\|A_{i,E_1,\omega}\|\right]+\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\Omega_{M,j}}\cdot\log\|A_{i,E_2,\omega}\|\right]\\ &\leq\sum_{i=k(j-1)+1}^{kj}\sqrt{\mathbb{P}\left(\Omega_{M,j}\right)}\cdot\sqrt{\mathbb{E}\left[\log^2\|A_{i,E_1,\omega}\|\right]}+\sqrt{\mathbb{P}\left(\Omega_{M,j}\right)}\cdot\sqrt{\mathbb{E}\left[\log^2\|A_{i,E_2,\omega}\|\right]}\end{aligned}$$

$$< \sum_{i=k(j-1)+1}^{kj} \frac{\varepsilon}{5\cdot k\cdot B}\cdot B + \frac{\varepsilon}{5\cdot k\cdot B}\cdot B$$
$$= \frac{2}{5}\varepsilon.$$

因此，$\mathbf{E}\left[|\xi_{j,E_1}-\xi_{j,E_2}|\right] < \frac{3}{5}\varepsilon$，前提是 $|E_1-E_2|<\delta$，其中 $\delta>0$可相对于 $j\in\mathbf{N}$ 一致地选取。因此，令 $|E_1-E_2|<\delta$，我们有

$$\sum_{j=1}^{m}\mathbb{E}\left[|\xi_{j,E_1}-\xi_{j,E_2}|\right] \le \frac{3}{5}\cdot m\cdot\varepsilon.$$

将其与（11）结合可得

$$\mathbb{E}\left[\left|\frac{1}{n}\log\|T_{n,E_1,\omega}\| - \frac{1}{n}\log\|T_{n,E_2,\omega}\|\right|\right] \le \varepsilon \tag{12}$$

其概率至少为 $1-2e^{-\delta^* m}$。

现在我们可以考察期望值 $L_{n,\ E_i} = \mathbf{E}\log\|T_{n,\ E_i,\ \omega}\|$。我们有

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\left|L_{n,E_1}-L_{n,E_2}\right| &\le \mathbb{E}\left[\left|\frac{1}{n}\log\|T_{n,E_1,\omega}\| - \frac{1}{n}\log\|T_{n,E_2,\omega}\|\right|\right]\\ &= \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{(12)\text{ holds}}\left|\frac{1}{n}\log\|T_{n,E_1,\omega}\| - \frac{1}{n}\log\|T_{n,E_2,\omega}\|\right|\right]\\ &\quad + \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{(12)\text{ does not hold}}\left|\frac{1}{n}\log\|T_{n,E_1,\omega}\| - \frac{1}{n}\log\|T_{n,E_2,\omega}\|\right|\right].\end{aligned}$$

满足（12）的第一个求和项显然有界于 ε。对于第二个求和项，注意到

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{(12)\text{ does not hold}}\left|\frac{1}{n}\log\|T_{n,E_1,\omega}\| - \frac{1}{n}\log\|T_{n,E_2,\omega}\|\right|\right]\\ &\le \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{(12)\text{ does not hold}}\left|\frac{1}{n}\log\|T_{n,E_1,\omega}\|\right|\right]\\ &\quad + \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{(12)\text{ does not hold}}\left|\frac{1}{n}\log\|T_{n,E_2,\omega}\|\right|\right]\\ &\le \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\mathbb{P}\left((12)\text{ does not hold}\right)}\sqrt{\mathbb{E}[\log^2\|A_{i,E_1,\omega}\|]}\\ &\quad + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\mathbb{P}\left((12)\text{ does not hold}\right)}\sqrt{\mathbb{E}[\log^2\|A_{i,E_2,\omega}\|]}\\ &\le \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}2e^{-\delta^* m}\cdot B\\ &= 4e^{-\delta^* m}\cdot B\end{aligned}$$

当 $m\to\infty$ 时趋于 0。简单处理不能被 k 整除的 n，以及有限个过小的 n 后，我们便得到所需的等度连续性。□

推论 4.6. 函数序列 $\left\{\frac{1}{b-a+1}L_{[a,b],\ E}\right\}$ 是等度连续的（关于参数 $E\in J$）。

等度连续性的一项实用推论是，我们现在可以控制相邻窗口上的增长函数如何变化。例如，考虑 $L_{[1,n],\ E}$，我们可以估计它与 $L_{[1,c],\ E} + L_{[c+1,n],\ E}$ 之间的差距，其中某个 c介于 1 和 n 之间。等度连续性使我们能够以对$E \in J$一致的方式进行估计。

在证明这样的结果之前，我们需要控制上文讨论中像 $[1, c]$ 这样“较小”的窗口会发生什么。

引理 4.7。对于任意 $\varepsilon' > 0$ 和任意 $E \in J$，存在 $\delta' > 0$，使得对所有充分大的 $n \in \mathbb{N}$，以下结论成立：以至少 $1 - \exp(-\delta' n)$ 的概率，对所有满足 $0 \le a < b \le n$ 的 a、b，均有

$$\left|\log \left\|T_{[a,b],E,\omega}\right\| - L_{[a,b],E}\right| \le n\varepsilon'.$$

证明。固定 $\varepsilon > 0$ 和 $E \in J$。证明思路是分两种情况，考察 $b - a + 1$ 相对于 n 何时“较大”、何时“较小”。当 $b - a + 1$较大时，证明过程与 [GK25] 中推论 2.10 的证明大致相同。当 $b - a + 1$ 较小时，[GK25] 中的论证依赖于一致有界的势。为处理这种情况，我们改为利用有限的 γ-阶矩。

首先考虑“$b - a + 1$ 很大”的情形；设 $b - a + 1 \ge 2^{\frac{\gamma n \varepsilon}{C^{(\log(\cdot)+\gamma B)}}}$，~~其中~~ $B > 0$ 是增长函数的线性上界，如引理 4.2所示（因此 $L_{[a,b],E} \le (b - a + 1) \cdot B$ 对所有 $a \le b$都成立）。在这种情况下，如果我们有

$$\left|\log \left\|T_{[a,b],E,\omega}\right\| - L_{[a,b],E}\right| > n\varepsilon$$

那么 $b - a + 1 \le n$ 意味着

$$\left|\log \left\|T_{[a,b],E,\omega}\right\| - L_{[a,b],E}\right| > (b - a + 1)\varepsilon.$$

后一个事件发生的概率至多为 $e^{-\delta(b-a+1)} < e^{-\delta 2^{\frac{\gamma\varepsilon}{C^{(\log(\cdot)+\gamma B)}}}n}$，根据推论3.2可知。令 a和 b遍历 $[0, n]$，这样的事件少于 n^2 个。因此，至少发生其中一个事件的概率至多为 $n^2 e^{-\delta 2^{\frac{\gamma\varepsilon}{C^{(\log(\cdot)+\gamma B)}}}n}$。所以，在这种情况下，对任意 a 和 b，$\left|\log \left\|T_{[a,b],E,\omega}\right\| - L_{[a,b],E}\right| > n\bar{\varepsilon}$ 的概率至多为 $n^2 e^{-\delta 2^{\frac{\gamma\varepsilon}{C^{(\log(\cdot)+\gamma B)}}}n}$。

现在考虑“$b - a + 1$ 较小”的情形。设 $b - a + 1 < 2^{\frac{\gamma n \varepsilon}{C^{(\log(\cdot)+\gamma B)}}}$。~~为了界定其概率~~，

$$\left|\log \left\|T_{[a,b],E,\omega}\right\| - L_{[a,b],E}\right| > n\varepsilon,$$

我们分别界定上偏差和下偏差的概率。

首先，我们计算上偏差概率的一个界：

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left\{\log \left\|T_{[a,b],E,\omega}\right\| - L_{[a,b],E} > n \cdot \varepsilon\right\} &= \mathbb{P}\left\{\log \left\|T_{[a,b],E,\omega}\right\| > n \cdot \varepsilon + L_{[a,b],E}\right\} \\
&= \mathbb{P}\left\{\left\|T_{[a,b],E,\omega}\right\|^{\gamma} > \exp\left[\gamma(n \cdot \varepsilon + L_{[a,b],E})\right]\right\} \\
&\le \mathbb{E}\left[\left\|T_{[a,b],E,\omega}\right\|^{\gamma}\right] \exp\left[-\gamma(n \cdot \varepsilon + L_{[a,b],E})\right] \qquad (13) \\
&\le \mathbb{E}\left[\prod_{i=a}^{b} \|A_{i,E,\omega}\|^{\gamma}\right] \exp\left[-\gamma(n \cdot \varepsilon + L_{[a,b],E})\right] \\
&= \prod_{i=a}^{b} \mathbb{E}\left[\|A_{i,E,\omega}\|^{\gamma}\right] \exp\left[-\gamma(n \cdot \varepsilon + L_{[a,b],E})\right] \qquad (14) \\
&\le C^{b-a+1} \exp\left[-\gamma(n \cdot \varepsilon + L_{[a,b],E})\right]
\end{aligned}$$

$$= \exp\left[-n\gamma\varepsilon + (b-a+1)\log(C) - \gamma L_{[a,b],E}\right]$$

其中，(13) 是马尔可夫不等式，而 (14) 源于传递矩阵 $A_{i,E\omega}$ 的独立性。我们可以用类似的方法给出下偏差概率的一个界：

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left\{-(\log\left\|T_{[a,b],E,\omega}\right\| - L_{[a,b],E}) > n\cdot\varepsilon\right\}\\
&= \mathbb{P}\left\{-\log\left\|T_{[a,b],E,\omega}\right\| > n\cdot\varepsilon - L_{[a,b],E}\right\}\\
&= \mathbb{P}\left\{\left\|T_{[a,b],E,\omega}\right\|^{-\gamma} > \exp\left[\gamma(n\cdot\varepsilon - L_{[a,b],E})\right]\right\}\\
&\le \mathbb{E}\left[\left\|T_{[a,b],E,\omega}\right\|^{-\gamma}\right]\exp\left[-\gamma(n\cdot\varepsilon - L_{[a,b],E})\right] \qquad (15)\\
&\le \mathbb{E}\left[\left\|T_{[a,b],E,\omega}\right\|^{\gamma}\right]\exp\left[-\gamma(n\cdot\varepsilon - L_{[a,b],E})\right] \qquad (16)\\
&\le C^{b-a+1}\exp\left[-\gamma(n\cdot\varepsilon - L_{[a,b],E})\right]\\
&= \exp\left[-n\gamma\varepsilon + (b-a+1)\log(C) + \gamma L_{[a,b],E}\right]\\
&\le \exp\left[-n\gamma\varepsilon + (b-a+1)(\log(C)+\gamma B)\right]
\end{aligned}$$

其中，(15)再次是马尔可夫不等式，而(16)成立，因为$\left\|T_{[a,b],\ E,\ \omega}\right\| \ge 1$ 对所有 $a \le b$均成立，因此$\left\|T_{[a,b],\ E,\ \omega}\right\|^{-\gamma} \le 1 \le \left\|T_{[a,b],\ E,\ \omega}\right\|^{\gamma}$。

由于对所有 $a \le b$都有$L_{[a,b],\ E} \ge 0$，我们知道$(b-a+1)(\log(C)+\gamma B) \ge (b-a+1)\log(C) - \gamma L_{[a,b],\ E}$。因此，上偏差与下偏差具有相同的界：

$$\mathbb{P}\left\{\log\left\|T_{[a,b],E,\omega}\right\| - L_{[a,b],E} > n\cdot\varepsilon\right\} \le \exp\left[-n\gamma\varepsilon + (b-a+1)(\log(C)+\gamma B)\right].$$

由于我们假设$b-a+1 < \frac{\gamma n\varepsilon}{2\ C\ (\log()+\gamma B)}$，因此有

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left\{\left|\log\left\|T_{[a,b],E,\omega}\right\| - L_{[a,b],E}\right| > n\cdot\varepsilon\right\}\\
&\le \exp\left[-n\gamma\varepsilon + (b-a+1)\left(\log(C)+\gamma B\right)\right]\\
&\le \exp\left[-n\gamma\varepsilon + \frac{\gamma n\varepsilon}{2\left(\log(C)+\gamma B\right)}\left(\log(C)+\gamma B\right)\right]\\
&= \exp\left[-\frac{\varepsilon\gamma}{2}n\right]
\end{aligned}$$

最后结合这两种情况，选取足够小的 δ'，使得$n^2 e^{-\delta\frac{\gamma\varepsilon}{2D}n} \le e^{-\delta' n}$和 $e^{-\frac{\varepsilon\gamma}{2}n} \le e^{-\delta' n}$，即可得到结论。□

现在我们可以讨论这样的情形：对于增长函数，考虑不同的“窗口”：

推论 4.8. 对于任意 $\varepsilon > 0$，存在 $N \in \mathbb{N}$，使得对于任意 $n \ge N$、任意a、b、$c \in \mathbb{N}$且满足 $0 \le a < b < c \le n$，以及任意 $E \in J$，我们都有

$$0 \le L_{[a,b],E,\omega} + L_{[b,c],E,\omega} - L_{[a,c],E,\omega} \le n\varepsilon.$$

其证明可由 推论 4.6和 引理 4.7 以与 [GK25]中的命题 3.8 相同的方式推出。其思路是利用这样一个事实：对于单位向量v,

$$T_{[a,c],E,\omega}v = T_{[b,c],E,\omega}T_{[a,b],E,\omega}v,$$

因此

$$\log\left\|T_{[a,c],E,\omega}v\right\| = \log\left\|T_{[b,c],E,\omega}\left(\frac{T_{[a,b],E,\omega}v}{\left\|T_{[a,b],E,\omega}v\right\|}\right)\right\| + \log\left\|T_{[a,b],E,\omega}v\right\|.$$

因此，以很高的概率，我们可以论证 $L_{[a,b],E,\omega}+L_{[b,c],E,\omega}-L_{[a,c],E,\omega}\leq n\varepsilon$。将 J 划分为大小不超过 δ 的区间，并利用等度连续性，我们可以使这一估计对 $E\in J$一致成立。

5. Analysis of the Large Deviation Sets

至此，我们已经很好地理解了 log 在大概率集上的 $\|T_n\|$ 表现。为了完成定理 2.2的证明，我们还需要了解在确实存在大偏差的集合中会发生什么。更具体地说，我们需要建立大偏差集与相对于格林函数的奇异点之间的联系（推论 5.3）。我们还需要了解截断算子的特征值在这些大偏差集中的表现（引理 5.1 和引理 5.5）。在第 6节证明定理 2.2的过程中，我们将分三种情况讨论，剩余的引理届时会发挥作用。其中许多引理都与 [Ran19]中的引理非常相近，或者与其完全相同，只是根据我们的语境对证明进行了必要的修改。

首先，定义“大偏差”集：

$$B^{+}_{[a,b],\varepsilon}=\left\{(E,\omega):\log\left|P_{[a,b],E,\omega}\right|-L_{[a,b],E}\geq(b-a+1)\varepsilon\right\}$$

$$B^{-}_{[a,b],\varepsilon}=\left\{(E,\omega):\log\left|P_{[a,b],E,\omega}\right|-L_{[a,b],E}\leq-(b-a+1)\varepsilon\right\}$$

其中，我们将 B^{+} 视为“上偏差”集，将 B^{-} 视为“下偏差”集。将这些集合的截面记为

$$B^{\pm}_{[a,b],\varepsilon,\omega}=\left\{E:(E,\omega)\in B^{\pm}_{[a,b],\varepsilon}\right\}$$

$$B^{\pm}_{[a,b],\varepsilon,E}=\left\{\omega:(E,\omega)\in B^{\pm}_{[a,b],\varepsilon}\right\}$$

最后令 $B_{[a,b],\ *}=B^{+}_{[a,b],\ *}\cup B^{-}_{[a,b],\ *}$。

注意，如果我们将下偏差集（固定 ω）重新表示为

$$\left\{E:\left|P_{[a,b],E,\omega}\right|\leq e^{L_{[a,b],E}-(b-a+1)\varepsilon}\right\},$$

显然，我们的特征多项式 $P_{[a,b],\ E,\ \omega}$ 的根包含在这些集合中。实际上，由于所有对象都是连续的，集合附近的一个区间包含在下偏差集中。我们希望证明 $B^{-}_{[a,b],\ \varepsilon,\ \omega}$ 完全由特征多项式根附近的这些区间构成。这正是引理 5.1的结论，也正是这一目标促使我们进行下面的推理。

由于上一节已证明 $\left\{\frac{1}{b-a+1}L_{[a,b],\ E}\right\}$ 具有等度连续性，不失一般性，我们可以令 J 足够小，以确保

$$\sup_{a<b}\left\{\max\left\{\frac{1}{b-a+1}L_{[a,b],E}:E\in J\right\}-\min\left\{\frac{1}{b-a+1}L_{[a,b],E}:E\in J\right\}\right\}\leq\frac{\varepsilon}{2}.$$

采用这一 J 的选择。令

$$\rho(a,b)=\frac{1}{2}\left(\max\left\{\frac{1}{b-a+1}L_{[a,b],E}:E\in J\right\}+\min\left\{\frac{1}{b-a+1}L_{[a,b],E}:E\in J\right\}\right)$$

使得

$$\sup_{a<b}\left|\frac{1}{b-a+1}L_{[a,b],E}-\rho(a,b)\right|\leq\frac{\varepsilon}{4}.$$

采用上述记号，我们证明以下结论：

引理 5.1。该集合

$$B^{-}_{[n+1,3n+1],\varepsilon,\omega}=\left\{E:\left|P_{[n+1,3n+1],E,\omega}\right|\leq e^{L_{[n+1,3n+1],E}-(2n+1)\varepsilon}\right\}$$

由至多 $2n+1$ 个以 $P_{[n+1,3n+1],E,\omega}$ 的根为中心的区间组成。

证明。显然，这些区间包含于 $B^{-}_{[n+1,3n+1],\varepsilon_0,\omega}$ 中。为说明这就是所有区间，注意水平集

$$\{E:\left|P_{[n+1,3n+1],E,\omega}\right|=e^{(2n+1)(\rho(n+1,3n+1)-\frac{3}{4}\varepsilon)}\}$$

至多由 $2(2n+1)$ 个点组成，因为 $P_{[n+1,3n+1],E,\omega}$ 的次数为 $2n+1$，且所有根都是单根（见 [DF22] 推论 2.2.3）。因此

$$\{E:\left|P_{[n+1,3n+1],E,\omega}\right|<e^{(2n+1)(\rho(n+1,3n+1)-\frac{3}{4}\varepsilon)}\} \tag{17}$$

由这些点之间至多 $2n+1$ 个开区间组成。注意到 $B^{-}_{[n+1,3n+1],\varepsilon,\omega}$ 包含于上述集合中，由此即可完成证明，因为 $P_{[n+1,3n+1],E,\omega}$ 的根是单根，这确保了在包含于（17）的每个区间内，$B^{-}_{[n+1,3n+1],\varepsilon,\omega}$ 中至多有一个区间。事实上，$L_{[n+1,3n+1],E}-(2n+1)\varepsilon\leq(2n+1)\left(\rho(n+1,3n+1)+\frac{\varepsilon}{4}\right)-(2n+1)\varepsilon=(2n+1)(\rho(n+1,3n+1)-\frac{3}{4}\varepsilon)$，因此

$$\left|P_{[n+1,3n+1],E,\omega}\right|\leq e^{L_{[n+1,3n+1],E}-(2n+1)\varepsilon}\leq e^{(2n+1)(\rho(n+1,3n+1)-\frac{3}{4}\varepsilon)}.$$

□

对于下一个引理，我们希望将格林函数的行为与上述大偏差集联系起来。回忆一下，h 是由定理 3.1给出的常数，使得 $L_n\geq n\cdot h$ 对所有 n均成立。

引理 5.2。设 $0<\varepsilon<\frac{h}{5}$。对于某个 $N\in\mathbb{N}$，$n\geq N$，若有

$$\log\left|G_{[x-n,x+n],E,\omega}(x,x-n)\right|\geq-n(h-5\varepsilon)+\varepsilon$$

or

$$\log\left|G_{[x-n,x+n],E,\omega}(x,x+n)\right|\geq-n(h-5\varepsilon)+\varepsilon$$

则 $(E,\omega)\in B^{-}_{[x-n,x+n],\varepsilon}\cup B^{+}_{[x-n,x-1],\varepsilon}\cup B^{+}_{[x+1,x+n],\varepsilon}$。

可以注意到，大偏差集下标中的窗口（即区间）并不对称。这种现象的原因在于格林函数的矩阵元的结构，如式（5）所示；这些窗口正是由该恒等式推导而来。

证明。我们用逆否命题进行证明；假设

$$(E,\omega)\in\left(B^{-}_{[x-n,x+n],\varepsilon}\right)^{C}\cap\left(B^{+}_{[x-n,x-1],\varepsilon}\right)^{C}\cap\left(B^{+}_{[x+1,x+n],\varepsilon}\right)^{C}$$

其中，为清晰起见，

$$\left(B^{-}_{[x-n,x+n],\varepsilon}\right)^{C}=\left\{\omega:\log\left|P_{[x-n,x+n],E,\omega}\right|-L_{[x-n,x+n],E}>-(2n-1)\varepsilon\right\},$$

$$\left(B^{+}_{[x-n,x-1],\varepsilon}\right)^{C}=\left\{\omega:\log\left|P_{[x-n,x-1],E,\omega}\right|-L_{[x-n,x-1],E}<n\varepsilon\right\},$$

$$\left(B^{+}_{[x+1,x+n],\varepsilon}\right)^{C}=\left\{\omega:\log\left|P_{[x+1,x+n],E,\omega}\right|-L_{[x+1,x+n],E}<n\varepsilon\right\}.$$

由于 $G_{[a,b],E,\omega}$ 是对称的，因此有

$$\log\left|G_{[x-n,x+n],E,\omega}(x,x-n)\right|=\log\left|G_{[x-n,x+n],E,\omega}(x-n,x)\right|$$

$$= \log \left| \frac{P_{[x-n,x-n-1],E,\omega} \cdot P_{[x+1,x+n],E,\omega}}{P_{[x-n,x+n],E,\omega}} \right| \tag{18}$$

$$= \log \left| \frac{P_{[x+1,x+n],E,\omega}}{P_{[x-n,x+n],E,\omega}} \right| \tag{19}$$

$$= \log \left| P_{[x+1,x+n],E,\omega} \right| - \log \left| P_{[x-n,x+n],E,\omega} \right|$$

其中（18）来自（5），而（19）成立是因为 $x-n > x-n-1$。应用我们的假设：

$$\begin{aligned} &\log \left| P_{[x+1,x+n],E,\omega} \right| - \log \left| P_{[x-n,x+n],E,\omega} \right| \\ &< L_{[x+1,x+n],E} + n\varepsilon - L_{[x-n,x+n],E} + (2n+1)\varepsilon \\ &= (L_{[x+1,x+n],E} - L_{[x-n,x+n],E}) + (3n+1)\varepsilon \\ &< 2n\varepsilon - L_{[x-n,x+1],E} + (3n+1)\varepsilon \qquad (20) \\ &= -L_{[x-n,x+1],E} + (5n+1)\varepsilon \end{aligned}$$

其中（20）由推论 4.8得出。因此我们有

$$\log \left| G_{[x-n,x+n],E,\omega}(x, x-n) \right| < -L_{[x-n,x+1],E} + (5n+1)\varepsilon.$$

同理，我们得到

$$\log \left| G_{[x-n,x+n],E,\omega}(x, x+n) \right| < -L_{[x-1,x+n],E} + (5n+1)\varepsilon.$$

现在，由定理 3.1，我们知道$L_{[a,b],\ E,\ \omega} \geq (b-a+1)\cdot h$，其中 $h>0$ 是均匀选取的。因此

$$-L_{[x-n,x+1],E}, -L_{[x-1,x+n],E} \leq -(n+2)h \leq -nh$$

因此

$$\log \left| G_{[x-n,x+n],\ E,\ \omega}(x,\ x-n) \right|,\ \log \left| G_{[x-n,x+n],\ E,\ \omega}(x,\ x+n) \right| < -n(h-5\varepsilon) + \varepsilon$$

如所需。 □

推论 5.3。令 $\varepsilon > 0$。当 n 足够大时，若 $2n+1$ 是 $(h-6\varepsilon, n, E, \omega)$-奇异的，即若

$$\left| G_{[n+1,3n+1],E,\omega}(2n+1, n+1) \right| \geq e^{-(h-6\varepsilon)n}$$

or

$$\left| G_{[n+1,3n+1],E,\omega}(2n+1, 3n+1) \right| \geq e^{-(h-6\varepsilon)n}$$

则 $E \in B^{-}_{[n+1,3n+1],\ \varepsilon,\ \omega}$。

证明。推论 3.5 表明$B^{+}_{[n+1,2n],\ \varepsilon}$ 和$B^{+}_{[2n+2,3n+1],\ \varepsilon}$ 在 N足够大时均为空。因此，该推论由 引理 5.2得出。 □

令 m 表示 $\mathbb{R}$上的勒贝格测度。以下引理将使我们能够控制大偏差集合相对于勒贝格测度的大小；在 定理 2.2的证明中，我们主要利用这一点来控制某些截断算子的特征值之间的间距。

引理 5.4. 设 $0<\varepsilon$ 并令 δ 为相应的大偏差参数（见 定理 *3.4*），且 $0<\eta<\delta$，则对几乎处处的 ω，存在 $N_1(\omega)$使得对 $n > N_1$，最大值 $\left\{ m\left(B^{-}_{[n+1,3n+1],\varepsilon,\omega}\right), m\left(B^{-}_{[-n,n],\varepsilon,\omega}\right) \right\} \leq e^{-(\delta-\eta)(2n+1)}$。

证明。我们有

$$\mathbb{E}\left(m\left(B^{-}_{[a,b],\varepsilon,\omega}\right)\right)=\int_{\mathbb{R}}\mathbb{P}\left(B^{-}_{[a,b],\varepsilon,E}\right)dm(E)$$
$$\leq m(J)e^{-\delta(b-a+1)}.$$

第一个等式由富比尼定理得到，第二行由定理 3.4推出。令

$$F_n=\left\{\omega: m\left(B^{-}_{[n+1,3n+1],\varepsilon,\omega}\right)\geq e^{-(\delta-\eta)(2n+1)}\right\},$$

and

$$G_n=\left\{\omega: m\left(B^{-}_{[-n,n],\varepsilon,\omega}\right)\geq e^{-(\delta-\eta)(2n+1)}\right\}.$$

注意，由马尔可夫不等式:

$$\mathbb{P}(F_n)\leq\frac{\mathbb{E}\left[m\left(B^{-}_{[n+1,3n+1],\varepsilon,\omega}\right)\right]}{e^{-(\delta-\eta)(2n+1)}}$$

因此，根据上述推导，

$$\mathbb{P}(F_n)\leq m(J)e^{-\eta(2n+1)}.$$

类似地，$\mathbf{P}(G_n)\leq m(J)e^{-\eta(2n+1)}$。因此，

$$\mathbb{P}\left(F_n\cup G_n\right)\leq 2m(J)e^{-\eta(2n+1)}$$

由此，结论可由博雷尔-坎特利引理得出。 □

接下来的三个引理虽然具有技术性，但在我们将定理 2.2 的证明拆分为三种情形时，有助于进行估计。

引理 5.5. 设 $0<\varepsilon$，令 δ 为相应的大偏差参数（见定理 *3.4*），且 $p>3/\delta$。令 E_j 为 $H_{[n+1,3n+1],\omega}$的 j^{th} 特征值。对于 $n\in\mathbb{N}$，令

$C_n=\{\omega:\ \exists y\in[-n,n], |-n-y|\geq\ln\left(n^p\right)$，以及 $E_j\in B_{[-n,y],\varepsilon,\omega}$，其中某个 $1\leq j\leq 2n+1\}$,

and

$D_n=\{\omega:\ \exists y\in[-n,n], |n-y|\geq\ln(n^p)$，以及 $E_j\in B_{[y,n],\varepsilon,\omega}$，其中某个 $1\leq j\leq 2n+1\}$.

那么， $P\left[C_n\cup D_n\text{ 无穷多次}\right]=0$。

证明。 取 $n\in\mathbf{N}$ 和 y，使得 $|-n-y|\geq\ln\left(n^p\right)$，并且 $1\leq j\leq 2n+1$。令

$$A_{y,j}=\left\{\omega: E_j\in B_{[-n,y],\varepsilon,\omega}\right\}=B_{[-n,y],\varepsilon,E_j}.$$

由定理 3.4 可得

$$\mathbb{P}\left(B_{[-n,y],\varepsilon,E_j}\right)\leq e^{-\delta|-n-y|}.$$

现在，对每个 n，若 $Q'_n=\{y\in[-n,n]:\ |-n-y|\geq\ln(n^p)\}$,

$$C_n=\bigcup_{\substack{y\in Q'_n,\\ 1\leq j\leq 2n+1}}A_{y,j}.$$

由上述可得 $\mathbf{P}(C_n)\ \leq(2n+1)^2e^{-\delta\ln(n^p)}=(2n+1)^2\cdot n^{-p\delta}$。因此，根据博雷尔-坎特利引理，$\mathbf{P}(C_n$ 无穷多次发生$)\ =0$。对 D_n应用相同的论证，即得所需结果。□

引理 5.6。假设 $p>0$ 和 $r>1$。令
$J_n=\left\{\omega:\ \exists k\in[-n,n],\ \text{其中}\ |-n-k|\le \ln(n^p)\ \text{或}\ |k-n|\le \ln(n^p),\ \text{且}\ |V_\omega(k)|\ge n^{r/\gamma}\right\}.$
于是，$\mathbb{P}(J_n\ \text{无穷多次发生})=0$。

证明。令 $Q_n=\{k\in[-n,n]:\ |-n-k|\le \ln(n^p)\ \text{或}\ |n-k|\le \ln(n^p)\}$，并令$A_{k,n}=\{\omega:\ |V_\omega(k)|\ge n^{r/\gamma}\}$。于是，

$$J_n=\bigcup_{k\in Q_n}A_{k,n}.$$

由马尔可夫不等式:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A_{k,n})&=\mathbb{P}\left\{|V_\omega(k)|^\gamma\ge n^r\right\}\\&\le\frac{\mathbb{E}[|V_\omega(k)|^\gamma]}{n^r}\\&<\frac{C}{n^r}\end{aligned}$$

其中最后一行由假设 **(A2)** 得出。因此，$\mathbb{P}(J_n)\le 2C(\ln(n^p)+1)n^{-r}$。由于 p 是固定的，这显然关于 n 可求和。由博雷尔-坎泰利引理，$\mathbb{P}\{J_n\ \text{无穷多次发生}\}=0$。□

推论 5.7。若 $p>0$ 且 $r>1$，则对几乎处处的 ω，存在 $N(\omega)$ 使得对于 $n>N$ 以及任意满足 $|-n-k|\le\ln(n^p)$（分别地，$|n-k|\le\ln(n^p)$）的 $k\in[-n,n]$，

$$\left|P_{[-n,k],E,\omega}\right|\le n^{p(\ln(n^p)+1)+r/\gamma}$$

（分别地，$\left|P_{[k,n],\ E,\ \omega}\right|\le n^{p(\ln(n^p)+1)^{+r/\gamma}}$）。

证明。注意，引理 5.6 的证明仅用到了势的有限 γ 阶矩假设。由于 J是紧集，$\max\{\sup_{E\in J}\{V_\omega(j)-E\},\ 1\}$ 关于 γ 阶矩也存在一个一致于 j的上界。因此，在满足引理 5.6 中相应假设的条件下，我们有

$$\left|\max\left\{\sup_{E\in J}\{V_\omega(k)-E\},1\right\}\right|<n^{r/\gamma}$$

当 n 充分大且 k 满足 $|n\pm k|\le\ln(n^p)$ 时。

现在，利用行列式的组合定义，我们得到

$$\begin{aligned}\left|P_{[-n,k],E,\omega}\right|&=\left|\det\left(H_{[-n,k],\omega}-E\right)\right|\\&=\left|\sum_{\tau\in S_{n+k}}(-1)^{|\tau|}\prod_{i=1}^{n+k}\left(H_{[-n,k],\omega}-E\right)_{i,\tau(i)}\right|\\&\le\sum_{\tau\in S_{n+k}}\prod_{i=1}^{n+k}\left|\left(H_{[-n,k],\omega}-E\right)_{i,\tau(i)}\right|\\&\le\sum_{\tau\in S_{n+k}}\prod_{i=1}^{n+k}\left|\max\left\{\sup_{E\in J}\{V_\omega(i-(n+1))-E\},1\right\}\right|\\&\le|S_{n+k}|\cdot(n+k)\cdot\max_{j\in[-n,k]}\left\{\sup_{E\in J}\{V_\omega(j)-E\},1\right\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \ln(n^p)! \cdot (n+k) \cdot n^{r/\gamma} \\
&\leq \ln(n^p)^{\ln(n^p)+1} \cdot n^{r/\gamma} \\
&\leq n^{p(\ln(n^p)+1)} \cdot n^{r/\gamma} \\
&= n^{p(\ln(n^p)+1)+r/\gamma}
\end{aligned}$$

$\left|P_{[k,n],\ E,\ \omega}\right|$ 的证明类似。 □

6. 证明

我们希望提醒读者，为了证明谱局域化（定理 1.1），只需证明定理 2.2。也就是说，我们需要证明，对于几乎处处的 ω，对于每个广义特征值 E （属于） H_ω，存在某个 $C>0$ ，使得对所有 n 充分大的 $2n$ ，以及 $2n+1$ 都是（C， n， E， ω）-正则的。

本证明的策略如下：

(1) 证明的主要思路是说明，离奇异点足够远时，我们具有正则性。我们将论证：对于广义特征函数 $\psi \neq 0$，可以把 0 取为该奇异点，而在足够远处，我们会看到所需的指数衰减。(2) 我们用反证法：假设 $2n+1$ 对任意大的 n 都是奇异的。这意味着广义特征值属于大偏差集合。然而，这些集合是特征多项式的根周围的小邻域，因此我们得到两个任意接近的特征值。(3) 我们利用这些特征值之间的接近性，证明格林函数的某个元素有指数级的下界。正是这个界导出了我们所要的矛盾。(4) 不过，为了得到这个矛盾，我们根据这个“大元素”距离格林函数矩阵边缘的远近，分为三种情形：**情形 1：** 靠近矩阵中部，且远离边缘。**情形 2：** 靠近矩阵边缘，但远离角落。**情形 3：** 靠近矩阵角落。由于格林函数矩阵是对称的，我们只需考虑这些情形。在每种情形中，对于足够大的 n，我们都会导出矛盾。

现在我们开始正式证明。

证明定理 2.2。 固定 $\varepsilon>0$ ，并令 $\delta>0$ 为定理 3.4中相应的偏差参数。我们将证明，对于充分大的 n， $2n+1$ 是˜$(C,\ n,\ E,\ \omega)$-正则的，且 $C=h-6\varepsilon$。对于 $2n$ 的证明类似。

为证明我们的技术性引理，设 $r>1$, $0<\eta<\delta$, $0<\varepsilon_0<\min\{(\delta-\eta)/5,\varepsilon\}$ 和 $p>6/\delta_0$。这里， δ_0 是对应于 ε_0的偏差参数， η 与引理 5.4 中的相同，而 r 和 p 分别见引理 5.5、引理 5.6 和推论 5.7。取一个满 P-测度集 Ω_0 ，使得对每个 $\omega\in\Omega_0$ ，推论 3.5、推论 4.8、引理 5.2、推论 5.3、引理 5.4、引理 5.5、引理 5.6 和推论 5.7 的结论均成立。固定 $\omega\in\Omega_0$ ，并按照这些引理的要求，取 N 充分大。

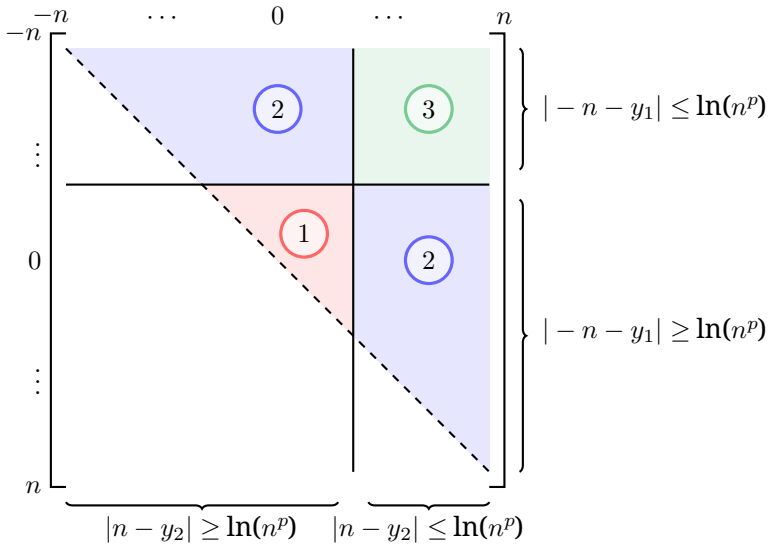


FIGURE 1. 定理 2.2 证明中三种情形的示意图定理 2.2。

˜设 $E \in J$ 是 H_ω 的一个广义特征值，其广义特征函数为 ψ。˜不失一般性，假设 $\psi(0) \neq 0$。我们通过˜矛盾证明 0 是 $(h-6\varepsilon, n, E, \omega)$-奇异的。因此暂且假设 0 是 $(h-6\varepsilon, n, E, \omega)$-正则的。˜在 (3) 中令 $x = 0$, $a = -n$, $b = n$, $E = E$，得到

$$\psi(0) = -G_{[-n,n],\tilde{E},\tilde{\omega}}(0,-n)\psi(-n-1) - G_{[-n,n],\tilde{E},\omega}(0,n)\psi(n+1). \tag{21}$$

如果 0 是 $\left(h-6\varepsilon, n, \tilde{E}, \omega\right)$-正则的，那么我们有

$$\left|G_{[-n,n],\tilde{E},\tilde{\omega}}(0,-n)\right| \leq e^{-(h-6\varepsilon)n} \quad \text{and} \quad \left|G_{[-n,n],\tilde{E},\tilde{\omega}}(0,n)\right| \leq e^{-(h-6\varepsilon)n}.$$

注意到二者都呈指数衰减。此外，我们假设 ψ 是一个广义特征函数，因此它是多项式有界的。结合（21），这表明 $0 \neq \psi(0) = O(e^{-cn})$，矛盾。因此，关于 0 是正则点的假设必定是错误的。

现在，为了导出矛盾，假设对于无穷多个 n，$2n+1$ 是 $(h-6\varepsilon, n, E, \omega)$-奇异的。由 推论 5.3，$E \in B^-_{[n+1,3n+1],\varepsilon,\tilde{\omega}} \subseteq B^-_{[n+1,3n+1],\varepsilon_0,\omega_0}$ 由引理 5.1

$$B^-_{[n+1,3n+1],\varepsilon_0,\omega} = \left\{E : \left|P_{[n+1,3n+1],E,\omega}\right| \leq e^{L_{[n+1,3n+1],E}-(2n+1)\varepsilon_0}\right\}$$

由至多 $2n+1$ 个以$P_{[n+1,3n+1]}$的根为中心的区间组成E,ω_0。因此，˜必定落在这些区间之一中。令 E 为离 E_j 最近的根（即$H_{[n+1,3n+1]}$的特征值，ω）。由 $\tilde{E}$，根据引理 5.4，我们知道 $\left|E_j - \tilde{E}\right| < m\left(B^-_{[n+1,3n+1],\varepsilon_0,\omega}\right) \leq e^{-(\delta-\eta)(2n+1)}$。

将上述论证应用于 0 代替 $2n+1$，可得到H_ω的特征值 E_i，$_{[-n,n]}$ 其中 $|\tilde{E} - E_i| \leq e^{-(\delta-\eta)(2n+1)}$。因此

$$|E_j - E_i| \leq 2e^{-(\delta-\eta)(2n+1)}.$$

回顾矩阵范数的一个事实

$$\left\|(A-\lambda I)^{-1}\right\| = \sup_{\mu\in\sigma(A)} \frac{1}{|\mu-\lambda|}.$$

令 $\lambda = E_j$, $\mu = E_i$，则有

$$\left\|G_{[-n,n],E_j,\omega}\right\| \geq \frac{e^{(\delta-\eta)(2n+1)}}{2}.$$

因此，由于 $G_{[-n,n],E_j,\omega}$ 是 $(2n+1)\times(2n+1)$ 维的，存在 $y_1, y_2 \in [-n,n]$使得

$$\left|G_{[-n,n],E_j,\omega}(y_1,y_2)\right| \geq \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \cdot \frac{e^{(\delta-\eta)(2n+1)}}{2}$$

利用弗罗贝尼乌斯范数。由于 $G_{[-n,n],E_j,\omega}$ 是对称的，取 $y_1 \leq y_2$。应用 (5) 得到

$$\frac{\left|P_{[-n,y_1-1],E_j,\omega}P_{[y_2+1,n],E_j,\omega}\right|}{\left|P_{[-n,n],E_j,\omega}\right|} \geq \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \cdot \frac{e^{(\delta-\eta)(2n+1)}}{2}. \tag{22}$$

由引理 5.5 （其中 $y=n$），$E_j \notin B_{[-n,n],\ \varepsilon_0,\ \omega}$。因此

$$\left|P_{[-n,n],E_j,\omega}\right| \geq e^{-(2n+1)\varepsilon_0 + L_{[-n,n],E_j}}. \tag{23}$$

结合（22）和（23）可得

$$\left|P_{[-n,y_1-1],E_j,\omega}\right| \cdot \left|P_{[y_2+1,n],E_j,\omega}\right| \geq \frac{1}{2\sqrt{2n+1}} e^{(\delta-\eta)(2n+1)-(2n+1)\varepsilon_0+L_{[-n,n],E_j}}. \tag{24}$$

为了运用所有引理，我们现在考虑三种情形：

Case 1: $|-n-y_1| \geq \ln(n^p)$ and $|n-y_2| \geq \ln(n^p)$

Case 2: $|-n-y_1| \geq \ln(n^p)$ and $|n-y_2| \leq \ln(n^p)$

Case 3: $|-n-y_1| \leq \ln(n^p)$ and $|n-y_2| \leq \ln(n^p)$

当 $|-n-y_1| \leq \ln(n^p)$ 且 $|n-y_2| \geq \ln(n^p)$ 时，论证与情形 2 的论证相同。在每种情形下，我们都会导出一个矛盾。

情形 1： 通过应用引理 5.5 于 $\left|P_{[-n,y_1-1],\ E_j,\ \omega}\right|$ 和 $\left|P_{[y_2+1,n],\ E_j,\ \omega}\right|$ 我们得到 $\left|P_{[-n,y_1-1],\ E_j,\ \omega}\right| \leq e^{(y_1+n)\varepsilon_0+L_{[-n,y_1-1],\ E_j}}$ 和 $\left|P_{[y_2+1,n],\ E_j,\ \omega}\right| \leq e^{(n-y_2)\varepsilon_0+L_{[y_2+1,n],\ E_j}}$因此，利用（24），

$$e^{(y_1+n)\varepsilon_0+L_{[-n,y_1-1],E_j}} e^{(n-y_2)\varepsilon_0+L_{[y_2+1,n],E_j}} \geq \frac{1}{2\sqrt{2n+1}} e^{(\delta-\eta)(2n+1)-(2n+1)\varepsilon_0+L_{[-n,n],E_j}}$$

$$e^{(2n+y_1-y_2)\varepsilon_0+L_{[-n,y_1-1],E_j}+L_{[y_2+1,n],E_j}} \geq \frac{1}{2\sqrt{2n+1}} e^{(\delta-\eta)(2n+1)-(2n+1)\varepsilon_0+L_{[-n,n],E_j}}$$

因此

$$\exp\left[(4n+y_1-y_2+1)\varepsilon_0 - (\delta-\eta)(2n+1) + L_{[-n,y_1-1],E_j} + L_{[y_2+1,n],E_j} - L_{[-n,n],E_j}\right] \geq \frac{1}{2\sqrt{2n+1}}. \tag{25}$$

现在，根据推论 4.8，我们知道

$$0 \leq L_{[-n,y_1-1],E_j} + L_{[y_1-1,n],E_j} - L_{[-n,n],E_j} \leq 2n\varepsilon_0$$

and

$$0 \leq L_{[y_1-1,y_2+1],E_j} + L_{[y_2+1,n],E_j} - L_{[y_1-1,n],E_j} \leq 2n\varepsilon_0$$

将这些相加可得

$$0 \le L_{[-n,y_1-1],E_j} + L_{[y_1-1,y_2+1],E_j} + L_{[y_2+1,n],E_j} - L_{[-n,n],E_j} \le 4n\varepsilon_0.$$

利用 $L_{[y_1-1,y_2+1],\ E_j}$ 为正这一事实，我们得到

$$L_{[-n,y_1-1],E_j} + L_{[y_2+1,n],E_j} - L_{[-n,n],E_j} \le 4n\varepsilon_0.$$

因此（25）变为

$$\exp\left[(8n + y_1 - y_2 + 1)\varepsilon_0 - (\delta - \eta)(2n+1)\right] \ge \frac{1}{2\sqrt{2n+1}}$$
$$\exp\left[(8n + 2)\varepsilon_0 - (\delta - \eta)(2n+1)\right] \ge \frac{1}{2\sqrt{2n+1}}$$

这就导出了矛盾，因为当 $n \to \infty$ 时，左端比右端衰减得更快并趋于 0，因为 $\varepsilon_0 \le (\delta - \eta)/5$。

情形 2： 将引理 5.5 应用于 $\left|P_{[-n,y_1-1],\ E_j,\ \omega}\right|$，并将推论 5.7 应用于 $\left|P_{[y_2+1,n],\ E_j,\ \omega}\right|$，我们得到

$\left|P_{[-n,y_1-1],\ E_j,\ \omega}\right| \le e^{(y_1+n)\ \varepsilon_0 + L_{[-n,y_1-1],\ E_j}}$ 和 $\left|P_{[y_2+1,n],\ E_j,\ \omega}\right| \le n^{p(\ln(n^p)\ +1)\ +r/\gamma}$因此，利用（24），

$$e^{(y_1+n)\varepsilon_0 + L_{[-n,y_1-1],E_j}} \cdot n^{p(\ln(n^p)+1)+r/\gamma} \ge \frac{1}{2\sqrt{2n+1}} e^{(\delta-\eta)(2n+1)-(2n+1)\varepsilon_0 + L_{[-n,n],E_j}}$$

因此

$$\exp\left[(\eta - \delta)(2n+1) + (3n + y_1 + 1)\varepsilon_0 - L_{[-n,n],E_j} + L_{[-n,y_1-1],E_j}\right] \cdot n^{p(\ln(n^p)+1)+r/\gamma} \ge \frac{1}{2\sqrt{2n+1}}. \tag{26}$$

利用上述结果，我们有 $L_{[-n,y_1-1],\ E_j} - L_{[-n,n],\ E_j} \le 4n\varepsilon_0$ 因此（26）变为

$$\exp\left[4(2n+1)\varepsilon_0 - (\delta - \eta)(2n+1)\right] \cdot n^{p(\ln(n^p)+1)+r/\gamma} \ge \frac{1}{2\sqrt{2n+1}}.$$

由假设，$4(2n+1)\varepsilon_0 - (\delta - \eta)(2n+1) < 0$，左端随$n \to \infty$ 趋于 0 的速度快于右端，因此再次得到矛盾。

情形 3： 两次应用推论 5.7 可得

$$\left|P_{[-n,y_1-1],E_j,\omega}\right| \cdot \left|P_{[y_2+1,n],E_j,\omega}\right| \le n^{2p(\ln(n^p)+1)+2r/\gamma}.$$

将其应用于（24），

$$\frac{1}{2\sqrt{2n+1}} \le n^{2p(\ln(n^p)+1)+2r/\gamma} \cdot \exp\left[(2n+1)\varepsilon_0 - (2n+1)(\delta-\eta) - L_{[-n,n],E_j}\right]$$
$$\le n^{2p(\ln(n^p)+1)+2r/\gamma} \cdot \exp\left[(2n+1)\varepsilon_0 - (2n+1)(\delta-\eta) - n \cdot h\right]$$

其中 h 由定理 3.1得到。同样，我们的假设意味着（$2n+1$）ε_0 −（$2n+1$）（$\delta - \eta$）$- n \cdot h < 0$ 因此，我们再次得到矛盾，因为右端随 $n \to \infty$ 趋于 0 的速度快于左端。

在所有情况下，都获得矛盾，因此 $2n+1$ 最终是（$h - 6\varepsilon$， n，

7. Proof of Dynamical Localization

既然我们已经证明了谱局域化，只需稍作努力并改编上述思路，便也能证明动力学局域化。实际上，我们将证明一个更强的性质：半一致局域化特征函数：

定义 7.1. 自伴算子 $H: \ell^2(\mathbb{Z}) \to \ell^2(\mathbb{Z})$ 若具有半一致局域化特征函数（SULE），则称其满足 SULE；也就是说，H 有一组完备的 $\{\psi_E\}$ 正交归一特征函数（其中 ψ_E 表示对应特征值为 E的特征函数），且存在$\alpha > 0$，使得对每个 $\xi > 0$，都存在常数 C_ξ，从而对任意特征值E，存在 $l_E \in \mathbb{Z}$，使得

$$|\psi_E(m)| \le C_\xi e^{\xi|l_E| - \alpha|m - l_E|}$$

对所有 $m \in \mathbb{Z}$ 均成立。

通过 [dRJLS96], 证明 SULE 将导出动力学局域化。事实上，我们将证明

$$|\psi_E(x)| \leqslant \tilde{C} e^{C\ln^2(1+|l_E|)} e^{-\alpha|x-l_E|}. \tag{27}$$

我们将利用前文的成果来完成这一点；我们会借鉴第 6 节中的证明，得到一个更一般的结论，从而可以考察除以 0 为中心的窗口之外的其他窗口。我们还希望确保较大的N对于 4 和 5 节中的技术引理成立，且在 $E \in J$上是一致的。除了推论 3.5 之外，其他结果都已满足这一点。为了得到一个类似于推论 3.5且在 $E \in J$上是一致的结论，我们需要一个关于大偏差估计的单侧版本，该版本在$E \in J$上是一致的。这可由以下关于$\{\frac{1}{n} L_{n,E}\}$的等度连续性推论得到：

引理7.1。 对于任意 $\bar{\varepsilon} > 0$，存在 c_2、$C_2 > 0$和 $N' \in \mathbb{N}$，使得对任意$n > N'$，以下陈述以至少 $1 - C_2 \exp(-c_2 n)$ 的概率成立：对任意 $E \in J$，有

$$\log \|T_{n,E,\omega}\| - L_{n,E} \le n\bar{\varepsilon}.$$

证明。 固定 $\varepsilon > 0$ 并取 ε^*， δ^*， k，以及 δ，如 定理4.5的证明中所述。取点 $\{E_1, ..., E_N\} \subseteq J$使得 J被划分为长度小于 δ的区间。注意， N 不依赖于 $m = \frac{n}{k}$，因为 δ 不依赖于 m。按照 定理4.5中对（11）的同样论证，对所有 $1 \le i \le N$，以下所有不等式均成立

$$|\log \|T_{n,E_i,\omega}\| - (\xi_{1,E_i} + \cdots + \xi_{m,E_i})| < \frac{\varepsilon}{5} n \tag{28}$$

以至少 $1 - Ne^{-\delta^* m}$ 的概率成立。因此我们有

$$\begin{aligned} &|L_{n,E_i} - (\xi_{1,E_i} + \cdots + \xi_{m,E_i})| \\ &\le |L_{n,E_i} - \log \|T_{n,E_i,\omega}\|| + |\log \|T_{n,E_i,\omega}\| - (\xi_{1,E_i} + \cdots + \xi_{m,E_i})| \\ &< \frac{\varepsilon}{5} n + \frac{\varepsilon}{5} n \end{aligned} \tag{29}$$

由 $1 \le i \le N$ 推论3.2 和（28），以至少 $1 - 2Ne^{-\delta^* m}$ 的概率同时对所有 $1 \le i \le N$ 成立。

现在取 $E \in J$为任意值，并令 $E_i \in \{E_1, ..., E_N\}$满足 $|E - E_i| < \delta$。由$\xi_{j的}{}_E$ 等度连续性，根据定理4.5中的证明，我们有

$$\log \|T_{n,E,\omega}\| \le (\xi_{1,E} + \cdots + \xi_{m,E})$$

$$\leq (\xi_{1,E_i} + \cdots + \xi_{m,E_i}) + \frac{\varepsilon}{5} n.$$

将此与（29）结合起来，我们得到

$$\log \|T_{n,E,\omega}\| \leq L_{n,E_i} + \frac{3}{5} \cdot \varepsilon \cdot n.$$

调用定理4.5 可得

$$\log \|T_{n,E,\omega}\| \leq L_{n,E} + \frac{8}{5} \cdot \varepsilon \cdot n$$

其概率为 $1 - 2Ne^{-\delta^* m}$。令 $\bar{\varepsilon} = \frac{8}{5}\varepsilon$, $C_2 = 2N$, $c_2 = \delta^*$，即可完成证明。□

这一结果也适用于特征多项式，因为

$$\begin{aligned} \log \left|P_{[1,n],E,\omega}\right| - L_{n,E} &= \log \left|\langle T_{n,E,\omega} e_1, e_1 \rangle\right| - L_{n,E} \\ &\leq \log \|T_{n,E,\omega} e_1\|^{1/2} - L_{n,E} \\ &\leq \log \|T_{n,E,\omega}\| - L_{n,E} \\ &< \bar{\varepsilon} n \end{aligned}$$

用此结果代替定理 3.4，下面推论的证明与推论 3.5的证明相同。

推论 7.2. 对于几乎处处的 ω，对每个 $\varepsilon > 0$，存在一个 $N(\omega, \varepsilon) = N \in \mathbb{N}$足够大，使得对所有 $n \geq N$ 和所有 $E \in J$，我们都有
最大值 $\{$对数$\left|P_{[n+1,2n],E,\omega}\right| - L_{[n+1,2n],E,\omega}$，对数$\left|P_{[2n+2,3n+1],E,\omega}\right| - L_{[2n+2,3n+1],E,\omega}\} < \varepsilon n.$

利用这一点，我们能够将第6节中谱局域化的证明推广到更一般的窗口，并且 N 关于 $E \in J$一致：

引理 7.3。 存在一个全测度集Ω_1，使得对于任意 l 和 $\omega \in \Omega_1$，存在 $N(l, \omega)$，使得对于任意 $n > N(l, \omega)$ 以及所有 $E \in \sigma(H_\omega)$，要么 l，要么 $l \pm (2n+1)$ 是$(h - 6\varepsilon, n, E, \omega)$-正则的。

证明。在第 6 节定理 2.2 的证明中，我们证明了，对于 H_ω 的每个广义特征值 E，当 0 是 $(h - 6\varepsilon, n, E, \omega)$- 奇异时，对于所有 $n > N(\omega)$，只要 $N(\omega)$ 足够大，就有 $2n + 1$ 必为 $(h - 6\varepsilon, n, E, \omega)$- 正则。令 T 为序列空间 Ω 上的移位算子，并设 $N(l, \omega) = \max \{N(T^l(\omega)) \; N(T^{-l}(\omega))\}$。在第 6 节的证明中以 l 替代 0，重复该证明。于是我们可以使用 $\Omega_1 = \bigcap_{l \in \mathbb{Z}} T^l(\Omega_0)$，其中 Ω_0 是第 6 节定理 2.2 的证明中所述的全测度集。□

下一个引理将使我们能够在指数中得到 $\ln^2(1 + |l_E|)$ 项，该指数出现在 (27) 中。首先介绍一些记号：令 $N_1(\omega)$ 如引理 5.4 中所定义，并类似地，设$N_2(\omega)$ 为满足以下条件的最小指标：$n > N_2(\omega)$ 蕴含 $\omega \notin C_n \cup D_n$，如引理 5.5所述。

引理 7.4. 存在一个全测度集 Ω_2，，使得对于任意 $\omega \in \Omega_2$，存在$L(\omega)$，使得对于任意 $|l| > L(\omega)$，我们有

$$\max \{N_1(l, \omega), \; N_2(l, \omega)\} \leqslant \ln^2 |l|$$

其中 $N_i(l、\omega) = N_i(T^l(\omega))$。

证明。我们先证明 $N_1(l、\ \omega)$ 的情形；对于 $N_2(l、\ \omega)$ 的证明类似。令 $\omega \in \Omega_1$„ 其中 Ω_1 如 引理 7.3所述。我们有

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left\{N_1(l,\omega) > k\right\} \\
&\leq \sum_{n=k+1}^{\infty} \mathbb{P}\left\{N_1(l,\omega) = n\right\} \\
&\leq \sum_{n=k+1}^{\infty} \mathbb{P}\left\{\max\left\{m\left(B^-_{[n+1,3n+1],\varepsilon,\omega}\right),\ m\left(B^-_{[-n,n],\varepsilon,\omega}\right)\right\} > e^{-(\delta-\eta)(2n+1)}\right\} \\
&\leq \sum_{n=k+1}^{\infty} 2m(J)e^{-\eta(2n+1)} \qquad (30) \\
&\leq Ce^{-\eta(2k+1)}
\end{aligned}
$$

其中，公式（30）来自引理 5.4的证明。因此

$$\mathbb{P}\left\{N_1(l,\omega) > \ln^2|l|\right\} \leq Ce^{-\eta(2\ln^2|l|+1)}$$

该结果现可由博雷尔-坎特利引理推出。 □

现在，我们可以通过证明（27）来证明动力学局域化。策略如下：

(1) 我们首先确定特征函数 ψ_E 中最大值出现的位置，并将该指标记为 l_E。这个指标在谱局域化的证明中起到 0 的作用；也就是说，它将是奇异点，也是我们窗口的中心。(2) 我们考察 ψ_E 中由 $x = l_E \pm (2n+1)$ 定义的项 x，对形如 $l_E \pm 2n$ 的项也可类似处理。我们希望证明所有项x都满足（27），因此将分析分为两种情况：当 n 足够大、使得 x 是正则点时，以及当它不是正则点时。(a) “x 是正则点”的情况稍作处理即可证明满足（27）。(b) 另一种情况则需要更多处理。我们考虑两种情形：最大值点 l_E 远离 0，或靠近 0（分别对应证明中的 $|l_E| \geq L$ 和 $|l_E| < L$ ）。当 l_E “远离”时，我们使用引理 7.4 得到所需的（27）。当 l_E “靠近”时，只需通过调整常数 C_ε，处理这一情形涵盖的有限个项。

˜ ˜定理 *1.2* 的证明。取 $\Omega = \Omega_1 \cap \Omega_2$,，其测度为满，并固定 $\omega \in \Omega$。现在从记号中省略 ω 。令 L 如引理 7.4 中所示，并且 $N(l)$ =最大值$\{N_1(l)\ N_2(l)\}$。

令 l_E 为 $|\psi_E|$的最大值点的位置。不失一般性，将 ψ_E归一化，使得 $\|\psi_E\| = 1$。注意，对于 $n > {}^{ln}{}_{(2)\,h-6\varepsilon}$， l_E是（$h-6\varepsilon, n, E, \omega$）-奇异的。为此，假设 l_E 是（$h-6\varepsilon, n, E, \omega$）-正则的。那么

$$\left|G_{[l_E-n,l_E+n],E,\omega}(l_E, l_E \pm n)\right| < \exp\left[-(h-6\varepsilon)\left(\frac{\ln(2)}{h-6\varepsilon}\right)\right] = \frac{1}{2}$$

因此，由（3），我们有

$$\begin{aligned}|\psi_E(l_E)| &= |G_{[l_E-n,l_E+n],E,\omega}(l_E, l_E-n)\cdot\psi_E(l_E-n-1)\\ &\quad + G_{[l_E-n,l_E+n],E,\omega}(l_E, l_E+n)\cdot\psi_E(l_E+n+1)|\\ &< \frac{1}{2}\left(|\psi_E(l_E-n-1)|+|\psi_E(l_E+n+1)|\right)\end{aligned}$$

不可能，因为 l_E 是最大点，因此 l_E 是 $(h-6\varepsilon,\ n,\ E,\ \omega)$-奇异的。

现在，考虑 $|x-l_E|\geq N(l_E)$ 的情形。由上述结果和 引理 7.3，$x=l_E\pm(2n+1)$ 是 $(h-6\varepsilon,\ n,\ E,\ \omega)$-正则的。再次由（3），我们得到

$$\begin{aligned}|\psi_E(x)| &= |G_{[x-n,x+n],E,\omega}(x, x-n)\cdot\psi_E(x-n-1)\\ &\quad + G_{[x-n,x+n],E,\omega}(x, x+n)\cdot\psi_E(x+n+1)|\\ &\leq \left|G_{[x-n,x+n],E,\omega}(x, x-n)\right| + \left|G_{[x-n,x+n],E,\omega}(x, x+n)\right|\\ &\leq 2e^{-(h-6\varepsilon)n}\\ &= 2e^{-(h-6\varepsilon)\left[\frac{1}{2}|x-l_E|-\frac{1}{2}\right]}\\ &= (2e^{\frac{1}{2}(h-6\varepsilon)})e^{-\frac{1}{2}(h-6\varepsilon)|x-l_E|}\\ &\leq (2e^{\frac{1}{2}(h-6\varepsilon)})e^{-\frac{1}{2}(h-6\varepsilon)|x-l_E|}\cdot e^{\frac{1}{2}(h-6\varepsilon)\ln^2(|l_E|+1)} \qquad (31)\end{aligned}$$

最后一行成立是因为 $(h-6\varepsilon)\ln^2(|l_E|+1)\geq 0$。

现在考虑 $|x-l_E|<N(l_E)$ 且 $|l_E|\geq L$ 的情形。回想一下，ψ_E 已归一化，因此对所有 x，$|\psi_E(x)|\leq 1$。因此

$$|\psi_E(x)|\leq 1\leq 2e^{-\frac{1}{2}(h-6\varepsilon)|x-l_E|}\cdot e^{\frac{1}{2}(h-6\varepsilon)N(l_E)}.$$

应用 引理 7.4，我们得到

$$|\psi_E(x)|\leq 2e^{-\frac{1}{2}(h-6\varepsilon)|x-l_E|}\cdot e^{\frac{1}{2}(h-6\varepsilon)\ln^2(|l_E|+1)}. \qquad (32)$$

最后，考虑 $|x-l_E|<N(l_E)$ 且 $|l_E|<L$ 的情形。令

$$M_\varepsilon = \min_{k\in[-L,L],\ |x-k|<N(k)}\left\{e^{\frac{1}{2}(h-6\varepsilon)\ln^2(k+1)}e^{-\frac{1}{2}(h-6\varepsilon)|x-k|}\right\}.$$

取 $C_\varepsilon=M_\varepsilon^{-1}$，则对所有 $|x-l_E|<N(l_E)$

$$|\psi_E(x)|\leq 1\leq C_\varepsilon\cdot e^{-\frac{1}{2}(h-6\varepsilon)|x-l_E|}\cdot e^{\frac{1}{2}(h-6\varepsilon)\ln^2(|l_E|+1)}. \qquad (33)$$

结合估计式 (31)、(32) 和 (33)，并令 $\tilde{C}=\max\{C_\varepsilon, 2e^{\frac{1}{2}(h-6\varepsilon)}2\}$,$\alpha=C=\frac{1}{2}(h-6\varepsilon)$，可得 SULE，进而得到动力学局域化。□

Appendix A. Necessity of the Main Assumptions

定理 1.1 中的第二个假设 旨在确保在极限情况下，没有任何分布是确定性的。若存在一个收敛到确定性分布的势子序列，那么对于我们的概率测度紧集 $\mathcal{K}$，定理 3.1 中的“测度条件”便不成立，因此我们无法应用非平稳 Furstenberg 定理。

然而，就我们对势的方差所提出的要求而言，$0<\gamma\leq 2$ 与 $\gamma>2$ 情形之间存在差异。当 $\gamma>2$时，我们可以采用这样的朴素假设：对每个势而言，其变差一致地有一个远离 0 的下界。然而，当 $0<\gamma\leq 2$ 时，这还不够。在本节中，我们将讨论这些 γ情形之间的具体差异。

当 $0 < \gamma \leq 2$时： 在 $0 < \gamma \leq 2$的情形下，我们的“无确定性分布”条件旨在表达这样一项要求：每个势的非平凡方差必须有相当一部分位于某个公共紧区间内。为此，我们考察 $\mathrm{Var}(\max\{\min\{V_\omega(n)\ k\},\ -k\})$；其中，势 $V_\omega(n)$被截断到 $[-k,k]$，区间外的质量被置于 $-k$ 和 k中距离更近者处。正如下一个引理所示，要求存在某个 $\varepsilon > 0$ 使得

$$\mathrm{Var}(\max\{\min\{V_\omega(n),k\},-k\}) > \varepsilon$$

对于所有 n，都意味着每个 $V_\omega(n)$ 都具有非确定性。

引理 A.1. 设 $k > 0$。对于随机变量 X，若 $\max\{\min\{X,k\},$ 则 $-k\}$ 不是几乎处处常数，因此 X 也不是几乎处处常数。

证明。 我们采用逆否命题进行证明。假设 X 几乎处处为常数，即 $X = c$ 以概率 1 成立。那么

$$\max\{\min\{X,k\},-k\} = \begin{cases} -k & \text{if } c < -k \\ c & \text{if } -k \leq c \leq k \\ k & \text{if } k < c \end{cases}$$

由于 c 是常数，$\max\{\min\{X,k\},\ -k\}$ 以概率 1 落入这些可能性之一，因此几乎处处为常数。□

读者或许会想，为什么有必要考虑更复杂的条件 $\mathrm{Var}(\max\{\min\{V_\omega(n)\ k\},-k\}) > \varepsilon$。问题在于，在较弱但更简单的条件 $\mathrm{Var}(V_\omega(n)) > \varepsilon$ 下，分布序列在弱极限下仍可能收敛到一个确定性测度（显式例子见引理 A.1）。然而，如果我们假设 $\mathrm{Var}(\max\{\min\{V_\omega(n)\ k\},-k\}) > \varepsilon$，那么非平凡方差在弱极限下会得以保留。形式化表述如下：

引理 A.2。 设$(V_\omega(n))_n$ 是一个独立随机变量序列。假设存在 $\varepsilon, k > 0$，使得对所有 n，均有$\mathrm{Var}(\max\{\min\{V_\omega(n)\ k\},-k\}) > \varepsilon$。如果$\max\{\min\{V_\omega(n)\ k\},-k\}$ 的分布弱收敛，那么极限分布的方差也有下界 ε。

证明。 为简化记号，令 $W(n,k) := \max\{\min\{V_\omega(n)\ k\},-k\}$。假设对所有 n，$\mathrm{Var}(W(n,k)) > \varepsilon$。另外，假设 $\{V_\omega(n)\}_n$，因此$\{W(n,k)\}_n$在 $n \to \infty$时弱收敛。我们希望证明，方差 $\mathrm{Var}(W(n,k))$ 的极限就是极限分布的方差。由此可以得出，极限分布的方差也有下界 ε。

由于 $\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}[X^2] - \mathrm{E}[X]^2$，只需证明 $W(n,k)$ 在$\mathcal{L}^1$和 $\mathcal{L}^2$中收敛。为此，我们将证明 $W(n,k)$ 和 $W(n,k)^2$都在 $\mathcal{L}^1$中收敛。注意，对于所有 n， $W(n,k) \in [-k,k]$，因此 $|W(n,k)| \leq k$, $W(n,k)^2 \leq k^2$。也就是说，$\{|W(n,k)|\}_n$和 $\{W(n,k)^2\}_n$都是一致有界随机变量族。一致有界随机变量族也是一致可积的[2]。如果一个随机变量族一致可积且依分布（即弱）收敛，那么它们也在 $\mathcal{L}^1$ 中收敛（参见 [Bil99], 定理 3.5）。

[2]我们称一类 $\mathcal{C}$ 随机变量为 *uniformly integrable*，如果对于给定的 $\varepsilon > 0$，存在K属于 $[0,\infty)$, 使得对所有 $X \in \mathcal{C}$, $\mathrm{E}(|X|; |X| > K) < \varepsilon$

因此， $\{|W(n,k)|\}_n$ 和 $\{W(n,k)^2\}_n$ 都在 $\mathcal{L}^1$ 中收敛，而且极限分布的方差确实为 $\lim_{n\to\infty}\mathrm{Var}(W(n,k)) \geq \varepsilon > 0$。□

最后需要检查的是：如果我们的原始序列 $V_\omega(n)$ 依分布（即弱）收敛到某个 $V(\infty)$，那么 $V(\infty)$ 并非几乎处处为常数。事实上，注意到 $g(x) = \max\{\min\{x,k\},-k\}$ 是连续的。连续映射定理（见 [Dur19] 中的定理 3.2.10 ）指出，依分布收敛在连续映射下得以保持，因此 $g(V_\omega(n)) \to g(V(\infty))$ 依分布收敛。也就是说， $V_\omega(n) \to V(\infty)$ 蕴含 $\max\{\min\{V_\omega(n)\ k\},-k\} \to \max\{\min\{V(\infty)\ k\},-k\}$。引理 A.2 表明 $\max\{\min\{V(\infty)\ k\},-k\}$ 的方差非零，而引理 A.1 使我们得以断定 $V(\infty)$ 不是确定性的。因此，我们证明了以下结论：

引理 A.3. 设 $V_\omega(n)$ 是一个随机势序列，其分布为 μ_n，并且存在 $\varepsilon > 0$，使得对所有n，$\mathrm{Var}\left(\max\{\min\{V_\infty(n)\ k\},-k\}\right) > \varepsilon$。那么，每个 $V_\omega(n)$ 都不是确定性的；此外，任何收敛的子序列极限（依分布）也不是确定性的。

当 $\gamma > 2$：相反，当 $\gamma > 2$ 时，要求方差在某个紧集上非零并非必要。只需假设存在一个$\varepsilon > 0$ ，使得 $\mathrm{Var}(V_\omega(n)) > \varepsilon$ 即可。原因在于，我们可以利用有限 γ 阶矩条件，直接应用 [Wil08] 第 13.3 节中的定理 (a)：该定理指出，具有一致有界 p-范数的随机变量序列 $p > 1$ 一致可积。有了 $\gamma > 2$，这意味着 $\{|V_\omega(n)|\}_n$ 和 $\{V_\omega(n)^2\}_n$ 均一致可积，因此在 $\mathcal{L}^1$中收敛。无需人为地对随机变量进行有界化，我们便可得出方差的极限等于极限的方差。因此，极限分布也具有非零方差。关于一致可积性和弱收敛的进一步阅读，可参见 [Wil08] 第 13.3 节和 [Bil99] 第 3 节。

然而，情况并不像乍看之下那么严重。事实上，对于 $\gamma > 2$ 区域中的所有 n ，要求 $\mathrm{Var}(V_\omega(n)) > \varepsilon$ 意味着在某个公共紧区间上存在持续的方差：

引理 A.4. 设 $V_\omega(n)$ 是一个随机势序列，每个势都按 μ_n分布，使得

(1) 存在 $\gamma > 2$ 和 C_0 ，使得对任意 n ，都有 $\int |x|^\gamma d\mu_n(x) < C_0$；且 *(2)* 存在 $\varepsilon > 0$ ，使得对所有 n，都有方差$(V_\omega(n)) > \varepsilon$ 。

那么存在 $k > 0$，使得对所有 n，都有方差$(\max\{\min\{V_\omega(n)\ k\},-k\}) \geq \frac{3\varepsilon}{4}$。

证明。利用有限的 γ 阶矩条件和马尔可夫不等式，我们知道，对于所有 n，$\mathrm{P}\{|V_\omega(n)| > k\} < \frac{C_0}{k^\gamma}$。如上所述，令 $W(n,k) = \max\{\min\{V_\omega(n)\ k\},-k\}$，注意到

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[V_\omega(n)^2 - W(n,k)^2\right] &= \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{|V_\omega(n)|>k}\cdot(V_\omega(n)^2 - k^2)\right] \\
&\leq \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{|V_\omega(n)|>k}\cdot V_\omega(n)^2\right] \\
&\leq \mathbb{E}\left[|V_\omega(n)|^\gamma\right]^{\frac{2}{\gamma}}\cdot\mathbb{P}\left\{|V_\omega(n)|>k\right\}^{\frac{\gamma-2}{\gamma}} \quad \text{by Hölder's inequality} \\
&< C_0^{\frac{2}{\gamma}}\cdot\left(\frac{C_0}{k^\gamma}\right)^{\frac{\gamma-2}{\gamma}} \\
&= \frac{C_0}{k^{\gamma-2}}
\end{aligned}$$

and

$$
\begin{aligned}
&\left|\mathbb{E}[V_\omega(n)]^2 - \mathbb{E}[W(n,k)]^2\right| \\
&= \left|\mathbb{E}[V_\omega(n) - W(n,k)] \cdot \mathbb{E}[V_\omega(n) + W(n,k)]\right| \\
&\le \left|\mathbb{E}[V_\omega(n) - W(n,k)]\right| \left(\mathbb{E}[|V_\omega(n)|] + \mathbb{E}[|W(n,k)|]\right) \\
&\le \left|\mathbb{E}[V_\omega(n) - W(n,k)]\right| \cdot 2C_0^{\frac{1}{\gamma}} \qquad (34) \\
&= \left|\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{V_\omega(n)>k} \cdot (V_\omega(n) - k) + \mathbb{1}_{V_\omega(n)<-k} \cdot (V_\omega(n) + k)\right]\right| \cdot 2C_0^{\frac{1}{\gamma}} \\
&\le \left(\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{|V_\omega(n)|>k} \cdot |V_\omega(n)|\right] + \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{|V_\omega(n)|>k} \cdot k\right]\right) \cdot 2C_0^{\frac{1}{\gamma}} \\
&\le \left(\mathbb{E}\left[|V_\omega(n)|^\gamma\right]^{\frac{1}{\gamma}} \cdot \mathbb{P}\left\{|V_\omega(n)| > k\right\}^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} + k \cdot \mathbb{P}\left\{|V_\omega(n)| > k\right\}^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right) \cdot 2C_0^{\frac{1}{\gamma}} \\
&< \left(C_0 \cdot \left(\frac{C_0}{k^\gamma}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} + k \cdot \left(\frac{C_0}{k^\gamma}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right) \cdot 2C_0^{\frac{1}{\gamma}} \\
&\le \frac{2C_0^2}{k^{\gamma-1}}
\end{aligned}
$$

[1]其中我们利用 $\gamma > 2$ 得到 $\mathbb{E}[|W(n,k)|] \le \mathbb{E}[|V_\omega(n)|] \le \mathbb{E}[|V_\omega(n)|^\gamma]^{1/\gamma} < C_0^\gamma$ 与公式（34）一致。综合以上结果，我们可以取 $k \gg 1$ 使得

$|\mathrm{Var}(V_\omega(n)) - \mathrm{Var}(W(n,k))| \le |\mathbb{E}[V_\omega(n)^2] - \mathbb{E}[W(n,k)^2]| + |\mathbb{E}[V_\omega(n)]^2 - \mathbb{E}[W(n,k)]^2| < \frac{\varepsilon}{4}$ 由此，对于所有 n，有 $\mathrm{Var}(\mathbb{1}_{[-k,k]}(V_\omega(n)) \cdot V_\omega(n)) \ge \mathrm{Var}(V_\omega(n)) - \frac{\varepsilon}{4} > \frac{3\varepsilon}{4}$。 □

例 A.1。 现在，如先前所承诺的，我们给出一个例子，说明为什么仅仅假设 $\mathrm{Var}(V_\omega(n)) > \varepsilon$ 处于 $0 < \gamma \le 2$ 情形还不够。事实上，考虑由下式定义的随机变量序列

$$
V_\omega(n) = \begin{cases} 0 & \text{with probability } 1 - \frac{1}{n^2} \\ n & \text{with probability } \frac{1}{n^2} \end{cases}
$$

并将其分布记为 μ_n。注意，该随机变量序列满足有限 γ 阶矩条件，即对于 $0 < \gamma \le 2$:

$$
\mathbb{E}[|V_\omega(n)|^\gamma] = n^\gamma \cdot \frac{1}{n^2} = n^{\gamma-2} \le 1
$$

对所有 n。此外，对于 $n \ge 2$，$\mathrm{Var}(V_\omega(n)) = 1 - \frac{1}{n^2} \ge \frac{3}{4}$。然而，对于任意 $f \in CB$(实数集)（在实数集上连续且有界）：

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \int f(x) d\mu_n(x) &= \lim_{n\to\infty} f(0) \cdot \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) + f(n) \cdot \frac{1}{n^2} \\
&= f(0) \\
&= \int f(x) d\delta_0(x)
\end{aligned}
$$

其中 δ_0 是一个在 0 处具有单个点质量的分布。

读者可能会注意到，在这个例子中，随着 $n \to \infty$，$V_\omega(n)$的方差确实收敛到 1。然而，这并不影响我们在本附录前文中的分析，因为尽管 $\mathrm{Var}(V_\omega(n))$ 收敛了，但它并没有收敛到

极限分布的方差（即 0）。在这个例子中，方差的极限并不是极限的方差。

现在，我们的方法并非只是无法证明这一势序列的局域化；事实上，这个例子给出了一个谱离域算子。令 $A_n = \{\omega : V_\omega(n) = \frac{1}{n^2}\}$，并对这族集合应用博雷尔-坎特利引理，我们可以看到，几乎必然地，至多对有限多个 n，有 $V_\omega(n) \neq 0$。因此，几乎必然地，H_ω是自由拉普拉斯算子加上一个紧算子。由于自由拉普拉斯算子的谱为 $[-2,2]$，且本质谱在加上紧算子后保持不变，H_ω 在这个例子中不具有谱局域化。

Appendix B. Example of Sequence Covered by This Result

我们希望给出一个新颖的分布序列的例子，本文证明该序列会发生局域化。据作者所知，这个例子中的局域化并非任何先前关于安德森局域化的结果所能推出。

例 B.1. 考虑如下定义的势序列：

$$V_\omega(n) = \begin{cases} a_n & \text{with probability } p_n \\ b_n & \text{with probability } 1 - p_n - \varepsilon_n \\ \varepsilon_n^{-1/\gamma} & \text{with probability } \varepsilon_n \end{cases}$$

其中 a_n和 b_n是任意有界序列，且 $|a_n - b_n|$一致远离 0；$\varepsilon_n \in [0,1)$是满足 $\varepsilon_n \to 0$的任意序列，而 $p_n \in (0, 1-\varepsilon_n)$是任意远离 0 和 1 的有界序列。

令 M 满足 $|a_n|, |b_n| \leq M$ 对所有 n均成立。我们计算得

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[|V_\omega(n)|^\gamma] &= |a_n|^\gamma \cdot p_n + |b_n|^\gamma \cdot (1 - p_n - \varepsilon_n) + |\varepsilon_n^{-1/\gamma}|^\gamma \cdot \varepsilon_n \\ &= |a_n|^\gamma \cdot p_n + |b_n|^\gamma \cdot (1 - p_n - \varepsilon_n) + 1 \\ &\leq 2M^\gamma + 1 \end{aligned}$$

对所有 n均成立。因此，我们得到 γ阶矩的一致有界。为检验方差，我们将利用恒等式 $\mathrm{Var}(X) = \frac{1}{2}\mathrm{E}[(X - X')^2]$，其中 X'是 X 的独立副本（事实上，$\mathrm{E}[(X-X')^2] = \mathrm{E}[X^2] - 2\mathrm{E}[XX'] + \mathrm{E}[(X')^2] = 2\mathrm{E}[X^2] - 2\mathrm{E}[X]^2 = 2\mathrm{Var}(X)$）。因此，当 n 充分大时，$\varepsilon_n^{-1/\gamma} > M$，于是

$$\begin{aligned} &\mathrm{Var}(\max\{\min\{V_\omega(n), M\}, -M\}) \\ &= \frac{1}{2}\mathbb{E}\left[(\max\{\min\{V_\omega(n), M\}, -M\} - \max\{\min\{V'_\omega(n), M\}, -M\})^2\right] \\ &= \frac{1}{2}\big((a_n - b_n)^2 p_n(1 - p_n - \varepsilon_n) + (b_n - a_n)^2 p_n(1 - p_n - \varepsilon_n) \\ &\quad + (a_n - M)^2 \cdot p_n \cdot \varepsilon_n + (M - a_n)^2 \cdot p_n \cdot \varepsilon_n\big) \\ &= (a_n - b_n)^2 p_n(1 - p_n - \varepsilon_n) + (M - a_n)^2 \cdot p_n \cdot \varepsilon_n \\ &\geq (a_n - b_n)^2 p_n(1 - p_n - \varepsilon_n). \end{aligned}$$

注意到，根据我们的设定，$|a_n - b_n|$、p_n和 $1 - p_n - \varepsilon_n$都一致地远离 0，因此该量也一致地远离 0。有了这一点，假设

定理 1.1 均成立（无论所需的 γ情形如何），因此我们可以得出谱局域化和动力学局域化。

Acknowledgements

我要感谢 Anton Gorodetski 向我介绍这个问题，并花时间与我讨论各种相关事宜。感谢 Grigorii Monakov 协助审阅稿件。也感谢 Omar Hurtado 和 Victor Kleptsyn 提供有益的意见。

References

[AM93] M. Aizenman 和 S. Molchanov。《大无序和极端能量下的局域化：一种初等推导》。 *Communications in Mathematical Physics* 157 2 245 278, , ( ): – 。[1993

And58] P. W. Anderson。《某些随机晶格中的扩散缺失》。 *Physical Review*，109 5 1492( ): – 1505，03 1958年。[AW15] M. Aizenman 和 S. Warzel。《 *Random operators: disorder effects on quantum spectra and dynamics* 168 》。数学研究生系列；第 卷。美国数学会，2015年。[BDF+19] V. Bucaj、D. Damanik、J. Fillman、V. Gerbuz、T. Vandenboom、F. Wang 和 Z. Zhang。《通过李雅普诺夫指数的正性和大偏差实现一维安德森模型的局域化》。 *Transactions of the American Mathe-matical Society*，372(5):3619–3667，2019年。[Bil99] P. Billingsley。《 *Convergence of probability measures*》。Wiley 概率与统计系列。概率与统计分册。Wiley，纽约，第2版，1999年。[BK05] J. Bourgain 和 C. E. Kenig。《高维连续安德森-伯努利模型中的局域化》。 *Inventiones mathematicae*，161(2):389–426，2005年。[CKM87] R. Carmona、A. Klein 和 F. Martinelli。《伯努利势及其他奇异势的安德森局域化》。 *Communications in Mathematical Physics*，108(1):41–66，1987年。[CL90] R. Carmona 和 J. Lacroix。《 *Spectral theory of random Schrödinger operators*》。概率及其应用。Birkh¨auser，波士顿，1990年。[Dam11] D. Damanik。《一维随机薛定谔算子简明教程》，2011年。arXiv:1107.1094。[Dam17] D. Damanik。《具有动力系统定义势的薛定谔算子》。 , ( ): – 。[DF22] D. Damanik 和 J. Fillman。《 *One-dimensional ergodic Schrödinger operators. Part I: general theory* 221 》。数学研究生系列，第 卷。美国数学会，普罗维登斯，罗德岛州，2022年。[DF25] D. Damanik 和 J. Fillman。《 *One-dimensional ergodic Schrödinger operators. Part II: specific classes* 249 》。数学研究生系列，第 卷。美国数学会，2025年。[DFS20] D. Damanik、J. Fillman 和 S. Sukhtaiev。《度量树图和离散树图上安德森模型的局域化》。 *Mathematische annalen*，376(3-4):1337–1393，2020年。[dRJLS96] R. del Rio、S. Jitomirskaya、Y. Last 和 B. Simon。《具有奇异连续谱的算子，IV：豪斯多夫维数、秩一扰动与局域化》。 *Journal d'analyse mathématique (Jerusalem)* 69 1 153 200, 1996 , ( ): – 。[Dur19] R. Durrett。《 *Probability: theory and examples*》。剑桥统计与概率数学丛书。剑桥大学出版社，第5版，2019年。[FMSS85] J. Fr¨ohlich、F. Martinelli、E. Scoppola 和 T. Spencer。《安德森紧束缚模型中局域化的构造性证明》。 *Communications in Mathematical Physics*，101:21–46，03 1985年。[Fur63] H. Furstenberg。《非交换随机乘积》。 *Transactions of the American Mathematical Society* 108 3 377 428, 1963 , ( ): – 。[GK] A. Gorodetski 和 V. Kleptsyn。《随机矩阵乘积的弗斯滕伯格定理的非平稳版本》。即将发表于 *Journal of the Association for MathematicalResearch*。arXiv:2210.03805。

[GK21] A. Gorodetski 和 V. Kleptsyn。《SL(2,R) 矩阵随机乘积的参数化弗斯滕伯格定理》。 *Advances in Mathematics*，378:107522，2021年。[GK25] A. Gorodetski 和 V. Kleptsyn。《非平稳安德森局域化》。*tions of the American Mathematical Society* 5 3 81 143, 2025 *Communica*，( )：–。[GKM] A. Gorodetski、V. Kleptsyn 和 G. Monakov。《平稳测度的 H¨older 正则性》。即将发表于 *Inventiones mathematicae*。arXiv:2209.12342。[GMP77] I. Y. Gol'dshtein、S. A. Molchanov 和 L. A. Pastur。《随机一维薛定谔算子的纯点谱》。，( )：–8，1977年。[GZ20] L. Ge 和 X. Zhao。《一维安德森模型的期望指数动力学局域化》。 *Journal of Spectral Theory*，10(3):887+，2025/12/16/ 2020。[Han 19] R. Han。《施诺尔定理与长程算子的谱》。 *Proceedings of the American Mathematical Society* 147 7 2887 2897, 2019，( )：–。[His 08] P. Hislop。《随机薛定谔算子讲义》， ¨ 476 *Contemporary* 第 卷，页码 –。 *Mathematics* 41 131 美国数学会，普罗维登斯，罗德岛州，2008年。[Hun07] D. Hundertmark。《安德森局域化简明导论》。 *Analysis and Stochas*，。 *tics of Growth Processes and Interface Models* 01 2007，。[Hur23] O. Hurtado。《一种用于指数大偏差估计的"提升"方法及其在某些非平稳 1 *Journal of mathematical* 维晶格安德森模 *physics* 64 6 2023 型中的应用》。，( )，。[Hur24] O. Hurtado。《二维晶格上非平稳薛定谔算子的局域化与唯一延拓》。2024年。arXiv:2405.10636。[Hur25] O. Hurtado。《重尾安德森模型的局域化》。2025年。arXiv:2505.09079。[Jit99] S. Jitomirskaya。《几乎马丢算子的金属-绝缘体转变》。 *Annals of Mathematics* 150 3 1159 1175, 1999，( )：–。[JZ19] S. Jitomirskaya 和 X. Zhu。《一维安德森模型中李雅普诺夫指数的大偏差与局域化》。 *Communications in mathematical physics*，370 1 311 324，2019 ( )：–。[Kle94] A. Klein。《Bethe 晶格上安德森模型的绝对连续谱》。*Mathematical research letters*，1(4):399–407，1994年。[KLS90] A. Klein、J. Lacroix 和 A. Speis。《具有奇异势的条带安德森模型的局域化》。 *Journal of functional analysis*，94(1):135–155，1990年。[KS80] H. Kunz 和 B. Souillard。《关于随机有限差分算子的谱》。*Communications in Mathematical Physics*，78(2):201–246，1980年。[MS22] D. Macera 和 S. Sodin。《准一维随机算子的安德森局域化》。 *Annales Henri Poincaré*，23(12):4227–4247，2022年。[Ran19] N. Rangamani。《奇异无界随机雅可比矩阵》。 *Journal of mathematical physics* 60 8 2019，( )，。[Shn 57] `E. ` ¨ *Mat.* E. *Sb. (N.S.)* 42 84 3 273 286, 1957 Shnol'。《薛定谔方程特征函数的行为》。，( )( )：–。[Sto11] G. Stolz。《安德森局域化数学导论》，第552卷，载于 *Contemporary Mathematics*，页码71–108。美国数学会，普罗维登斯，罗德岛州，2011年。[Tsa99] J. Tsay。《随机矩阵乘积的一些一致估计》。 *Taiwanese Journal of Mathematics* 3 3 291 302, 1999，( )：–，9月。[Wil08] D. Williams。《 *Probability with martingales*》。剑桥数学教科书。剑桥大学出版社，剑桥，第11次印刷版，2008年。