arXiv:2512.18594v1 [math.GN] 21 Dec 2025

关于 Grzegorek 和 Labuda 的一个定理

SANJIB BASU 和 NAVDEEP TAMANG

Abstract. 本文给出了 Grzegorek 和 Labuda 在范畴基中的一个定理的推广版本，并尝试在 Marczewski 结构中建立该定理的一种变体表述。

1. INTRODUCTION

在 [3] Grzegorek 和 Labuda 给出了 Sierpi´nski 的两个定理的共同抽象。这些定理又与卢津和诺维科夫的结果及方法有关， [5] 具体如下:

定理 1.1 ([11],定理 II)。 设 Q 是实数集的一个无限子集。那么 Q 包含无穷多个两两不相交的子集，且每个子集的勒贝格外测度都与 Q 相同。

定理 1.2 ([10],补充)。 设 Q 是区间 J 的一个子集。若 Q 在 J 中处处属于第二纲，则 Q 是无穷多个两两不相交子集的并，且其中每个子集在 J 中都处处属于第二纲。

（这里，Q 在 J 中处处属于第二纲，是指 Q 在每个点 $x \in J$ 处都属于第二纲。换言之，对于 x 的每个邻域 V，交集 $V \cap Q$ 都是第二纲集。）

为了对上述两个定理作出统一的抽象，Grzegorek 和 Labuda 选择了一个三元组$(X, \mathscr{A}, \mathscr{I})$作为基本框架，其中$X$ 是一个非空集合， $\mathscr{A}$ 是其子集的一个 σ-代数（这些子集称为可测集），而 $\mathscr{I}$ 是其子集的一个 σ-理想（这些子集称为零集），并满足 $\mathscr{I} \subset \mathscr{A}$。在这一框架中，给定 X 的两个子集 E 和Q，且 $E \subset Q$，他们定义了相对于$(\mathscr{A}, \mathscr{I})$的“$E$ 是 Q的满子集”这一概念，这是对早期“相同大小”概念的重新表述，该概念见于 [2]。沿着 [14] 的思路，Grzegorek 和 Labuda 还定义了 Q 的子集 E 的$(\mathscr{A}, \mathscr{I})$-完全不可测性（在 Q 中），并

2020 *Mathematics Subject Classification.* AMS。*Key words and phrases.* 点贫Baire 基、贫集、丰集、 π-基、满子集、完美基、Marczewski 分类。

证明（命题 1.4,[3]）：对于 $E \subset Q$， E 在 Q 中是($\mathscr{A}$,$\mathscr{I}$)-完全不可测的，当且仅当 E 和 Q\E是 Q.的满子集

我们在本节末尾陈述 Grzegorek 和 Labuda 关于 (X， $\mathscr{A}$,$\mathscr{I}$) 的两个假设，以及他们在 [3]中陈述的主要定理；正是该定理促使我们撰写本文。

- 族 $\mathscr{A}\backslash\mathscr{I}$ 满足可数链条件（ccc），也就是说，任意由非零测可测集组成的两两不交族都是可数的。众所周知，也很容易证明，在 ccc 条件下， X 的每个子集都有一个包络。
- X 相对于 $\mathscr{A}$具有非分离性质。也就是说，若 $E \notin \mathscr{I}$，则存在 E 的两个不交子集，它们无法被 $\mathscr{A}$ 中的集合分离（尤其是，单点集必须属于 $\mathscr{I}$）。

定理 1.3。 X 中的每个无限子集 E 都可分解为两个不交的满子集。因此，它可以写成其满子集（等价地说，完全不可测子集）的可数无穷不交并。

本文将定理 1.3 推广到更一般的范畴基情形，并给出了该定理在 Marczewski 结构中的一种变体表述。我们发现，基于区域概念的范畴基公理基础并不需要上述类型的任何假设。

2. PRELIMINARIES AND RESULTS

范畴基是一种点集抽象理论，它在统一的框架下整合了大量关于勒贝格测度、贝尔性质以及点集分类其他方面的结果。该理论由 J.C Morgan II [8]（另见 [6]）提出，此后通过一系列论文 [7],[9],[12],[13] 等不断发展。

定义 2.1 ([6]). 若一对 $(X, \mathscr{C})$ 中， X 是非空集，且$\mathscr{C}$ 是 X 的子集族，则称其为范畴基，条件是 $\mathscr{C}$ 的非空成员（称为区域）满足以下公理:

(1) X 中的每个点都至少包含在一个区域中；即， $X = \cup\mathscr{C}$(2) 设 A 为一个区域， $\mathscr{D}$ 为一个由两两不相交的区域组成的非空族，其基数小于 $\mathscr{C}$的基数。如果 $A \cap (\cup\mathscr{D})$包含一个区域，则存在一个区域 $D \in \mathscr{C}$，使得 $A \cap D$ 包含一个区域。ii 如果 $A \cap (\cup\mathscr{D})$不包含任何区域，则存在一个区域$B \subset A$，它与 $\mathscr{D}$中的每个区域都不相交。

范畴基的若干例子可见于 Morgan 的著名专著[6] ，也可见于上述参考文献。关于本文的工作，我们想重点介绍以下几个例子。

例 2.2。 $X=\mathbb{R}^n$ 且 $\mathscr{C}$ 是 X上的通常拓扑。

例 2.3。 $X=\mathbb{R}^n$ 且 $\mathscr{C}$ 是 X中具有正勒贝格测度的紧子集族。

例 2.4。 $X=\mathbb{R}^n$ 且 $\mathscr{C}$ 是 X的所有完美子集组成的族。这构成一个完美基，也称为 Marczewski 基。

例 2.5。 $X\neq\phi$ 且 $\mathscr{C}=\mathscr{A}\backslash\mathscr{I}$ ，其中 $\mathscr{A}$ 是一个 σ-代数，而$\mathscr{I}$($\subset\mathscr{A}$)是 X 的子集的一个 σ-理想，且 $\mathscr{A}\backslash\mathscr{I}$满足可数链条件。

定义 2.6。 在范畴基 (X,$\mathscr{C}$) 中，一个集合称为

(i) 奇异集：若每个区域都包含一个与该集合本身不相交的子区域；(ii) 贫集：若它可以表示为可数个奇异集的可数并。每个单点集都是贫集的范畴基称为“点贫基”；(iii) 丰集：若它不是贫集。每个区域都是丰集的范畴基称为“Baire 基”；(iv) 贝尔集：若每个区域都包含一个子区域，在该子区域中，该集合或其补集是贫集。

所有贫集（分别为贝尔集）的类在此分别记为符号 $\mathscr{M}$($\mathscr{C}$)（分别为$\mathscr{B}$($\mathscr{C}$)）。此外，我们指出，在一个范畴基 (X， $\mathscr{C}$) 中，

定义 2.7 ([4])。 $\mathscr{C}$ 的子族 $\mathscr{C}'$ 称为 π-基，如果每个区域 $A\in\mathscr{C}$ 都包含一个子区域 $B\in\mathscr{C}'$。

定义 2.8 ([1])。如果 $F\subset E$ ，且对于每个丰 Baire 集 B，只要 $B\cap E$ 是丰集， $B\cap F$ 就是丰集，则称集合 F 是 E 的满子集。如果 E 是贝尔集，这等价于断言 $E\backslash F$ 不包含任何丰 Baire 集。在这种情况下，我们称 E 为“ F的包”；它在如下意义下是唯一的：若 E_1 和 E_2 是 F的任意两个包，则 $E_1\triangle E_2\in\mathscr{M}$($\mathscr{C}$)。

这里值得指出的是，Grzegorek 和 Labuda 所使用的三元组(X， $\mathscr{A}$,$\mathscr{I}$)产生了一个范畴基（例 2.5），因为根据他们的第一个假设， $\mathscr{C}$=$\mathscr{A}\backslash\mathscr{I}$满足可数链

条件；另一方面，如果$(X, \mathscr{C})$是一个范畴基，且$\mathscr{C}$ 满足可数链条件，那么可以为它关联三元组$(X, \mathscr{B}(\mathscr{C}) \mathscr{M}(\mathscr{C}))$，其中 $\mathscr{B}(\mathscr{C})\backslash\mathscr{M}(\mathscr{C})$满足可数链条件（定理 5，III，第 $1, [6]$ 章）。因此，范畴基提供了一个更为基础且适用范围更广的平台，可在此基础上推广 Grzegorek 和 Labuda 的定理。

为建立我们的主要结果，我们作出如下假设：

(i) card(X) 是正则基数。(ii) 我们的范畴基 $(X, \mathscr{C})$ 具有一个 π-基 $\mathscr{C}'$，其 card($\mathscr{C}'$) 不超过 card(X)。(iii) $\mathscr{M}(\mathscr{C})$ 是 card(X)-可加的，这意味着当 $\mathscr{E} \subset \mathscr{M}(\mathscr{C})$ 且 card($\mathscr{E}$)<card(X) 时，有 $\cup\mathscr{E} \in \mathscr{M}(\mathscr{C})$。(iv) card($X$)=min$\{\chi$: $\mathscr{C}$ 是 χ-饱和的；其中，“$\mathscr{C}$ 是 χ-饱和的”是指：若 $\mathscr{E} \subset \mathscr{C}$ 且 card($\mathscr{E}$) $= \chi$，则至少存在两个不同的成员 E、 $F(\in \mathscr{E})$，使得 $E \cap F \neq \phi$。(v) $(X, \mathscr{C})$ 中的每个丰集都具有一个包。

令 $\mathscr{K}$ 表示所有补集属于 $\mathscr{C}'$ 的集合所组成的族。令$\bigcap \quad \mathscr{K}$ 表示：所有可表示为 $\mathscr{K}$ 的 $<card\ (X)$ 子族之交的集合，其中这些子族的基数小于 card(X)。

定理 2.9。 在 $(X, \mathscr{C})$ 中的任意奇异集都包含于一个属于族$\bigcap \quad \mathscr{K}$的奇异集中。 $\mathscr{M}(\mathscr{C})$ 中的任意集合都是$_{<card(X)}$中某个集合的子集，该集合属于 $\mathscr{M}(\mathscr{C}) \bigcap(\bigcup_{\sigma} \quad \bigcap_{<card(X)} \quad \mathscr{K})$。

证明。 设 A 是 $(X, \mathscr{C})$ 中的一个奇异集。由于 $\mathscr{C}'$ 是一个 π-范畴基，对于每个$C \in \mathscr{C}$，都存在一个集合 $D \in \mathscr{C}'$，使得 $D \subset$C 且 D 与A不相交。这构成了 $\mathscr{C}$ 的一个子族 $\mathscr{N}$，满足上述性质，并且 $\mathscr{C}$ 的每个成员都包含 $\mathscr{N}$的一个成员。令 $Y = \cup\mathscr{N}$。那么 $(Y, \mathscr{N})$ 是一个范畴基；由引理 4，II，Ch $1,[6]$，可从 $\mathscr{N}$中选出一个由两两不相交集合组成的子族$\mathscr{M}$，使得对于每个 $N \in \mathscr{N}$，都存在 $M \in \mathscr{M}$，满足 $N\cap$M 含有一个区域。这使得 $Y\backslash(\cup\mathscr{M})$ 是 $(Y, \mathscr{N})$ 中的奇异集，因此根据引理 3，II，Ch 1，$[6]$，$X\backslash(\cup\mathscr{M})$ 是 $(X, \mathscr{C})$ 中的奇异集。此外，$A \subset X\backslash(\cup\mathscr{M})$。

现在，根据我们的假设 (iv)， $X\backslash(\cup\mathscr{M})$ 属于族$\bigcap \quad \mathscr{K}_{<card(X)}$，这表明 A 包含于一个属于

族$\bigcap \mathscr{K}$的奇异集。因此，$\mathscr{M}(\mathscr{C})$ 的任一成员都是$<card(X)$中某个集合的子集，该集合属于 $\mathscr{M}(\mathscr{C}) \bigcap(\bigcup \bigcap \mathscr{K})$。$\sigma$

□

根据假设 (i) 和 (ii)，可以注意到

$$\operatorname{card}(\mathscr{M}(\mathscr{C}) \bigcap(\bigcup_{\sigma} \bigcap \mathscr{K})) \text{ does not exceed } \operatorname{card}(X).$$

定理 2.10. *$(X,\mathscr{C})$* 中的任意丰集都包含形如 $F\backslash G$ 的集合，其中 $F \in \mathscr{C}$ 且 $G \in \mathscr{M}(\mathscr{C}) \bigcap(\bigcup \bigcap \mathscr{K})$。

证明。令 $S \in \mathscr{B}(\mathscr{C})\backslash\mathscr{M}(\mathscr{C})$。根据定理 2，III，Ch $1, [6],$，存在 $C \in \mathscr{C}$，使得 $C\backslash S \in \mathscr{M}(\mathscr{C})$。再次根据定理 2.9，$C\backslash S \subset G \in \mathscr{M}(\mathscr{C}) \bigcap(\bigcup \bigcap \mathscr{K})$。令 $F \in \mathscr{C}'$，使得 $F \subset C$。现在通过选取集合 $F\backslash G$，即可证明定理σ。 □

定理 2.11. 设 *E* 是 *Baire* 基 *(X,𝒞)* 中的一个丰集，且$E = \bigcup E_t$ 是 *E* 在 *(X,𝒞)* 中按贫集作出的划分。那么，$t\in T$存在 *T* 的两个不相交子族 Φ_1 和 Φ_2，使得 *T*=$\Phi_1 \cup \Phi_2$，并且并集$\bigcup E_t$ 和$\bigcup E_t$ 均为 *E* 的满子集。因此，$t\in\Phi_1$ $t\in\Phi_2$$\infty$存在 *T* 的一个可数无穷序列 $\{\Phi_n\}$，其元素两两不相交，且为 *T* 的$n=1\infty$子族，使得$\bigcup \Phi_n$=*T*，并且并集$\bigcup E_t$ 均为 *E* 的$n=1$ $t\in\Phi_n$满子集。

为了证明上述定理，我们需要以下众所周知的辅助命题 [4]。

命题 2.12. 设 $\{X_i\}_{i\in I}$ 是无限集 X 的子集族，使得

(a) 对每个 *i*$\in I$，*card*(X_i)= *card(X)*。*(b) card(I)*≤*card(X)*。

则存在集合 Y、Z，它们构成 X 的一个分解，使得对每个 *i*$\in I$，*card(*$Y \cap X_i$*)*=*card(*$Z \cap X_i$*)*=*card(X)*。

证明。令 S 为 E 的包，它由假设 (v) 保证存在。于是 $S \in \mathscr{B}(\mathscr{C})\backslash\mathscr{M}(\mathscr{C})$，并且对于每个 $A \in \mathscr{B}(\mathscr{C})\backslash\mathscr{M}(\mathscr{C})$，只要 $A\cap\$\notin \mathscr{M}(\mathscr{C})$，就有 $A\cap\mathfrak{E}\notin \mathscr{M}(\mathscr{C})$。令 $\mathscr{H}=\{F\backslash G: F \in \mathscr{C}', G \in \mathscr{M}(\mathscr{C}) \bigcap(\bigcup \bigcap \mathscr{K})\sigma$

以及 $F\backslash G \subset S\}$。由定理 2.10，(X,$\mathscr{C}$) 中包含于 S 的每个丰 Baire 集都包含族 $\mathscr{H}$ 中的一个集合。对于任意 $H \in \mathscr{H}$，令$Y(H) = \{t \in T$: $E_t \cap H \neq \phi\}$。由于 $(X, \mathscr{C})$ 是一个 Baire 基，由假设 (iii) 以及定理 2.9 证明末尾的观察可得，对于每个 $H \in \mathscr{H}$，card($Y(H)$) =card(X), 此外，card(Σ)$\leq$ $card(X)$，其中 $\Sigma=\{Y(H) : H \in \mathscr{H}\}$。由命题 2.12, 存在不相交子族 Φ_1 和 Φ_2，使得$T = \Phi_1 \cup \Phi_2$，且对于每个 $H \in \mathscr{H}$, card($\Phi_1 \cap Y(H)$)=card($\Phi_2 \cap Y(H)$)=card(T)。考虑并集 $\bigcup_{t\in\Phi_1} E_t$ 和 $\bigcup_{t\in\Phi_2} E_t$。我们断言这些并集中的每一个都是 E 的满子集。否则，将存在某个 $A \in \mathscr{B}(\mathscr{C})\backslash\mathscr{M}(\mathscr{C})$，使得 $A \cap S \in \mathscr{B}(\mathscr{C})\backslash\mathscr{M}(\mathscr{C}$但$A \cap (\bigcup_{t\in\Phi_1} E_t) \in \mathscr{M}(\mathscr{C})$。但根据定理 2.9 和 2.10，族 $\mathscr{H}$ 中存在某个集合 $t\in\Phi_1$，该集合与 $\bigcup_{t\in\Phi_1} E_t$ 不相交——这就产生了矛盾。因此，$\bigcup_{t\in\Phi_1} E_t$ 是 E 的满子集。同样地，我们可以证明 $\bigcup_{t\in\Phi_2} E_t$ 也是 E 的满子集。

为证明剩余部分，我们进行如下处理：设 Φ_1 和 Ψ_1 是 T 的不相交子族，使得 $T = \Phi_1 \cup \Psi_1$ 以及并集 $\bigcup_{t\in\Phi_1} E_t$ 和 $\bigcup_{t\in\Psi_1} E_t$ 中的每一个都是 E 的满子集。由于 S 是 E 的包，同样也是 $\bigcup_{t\in\Psi_t} E_t$ 的包；采用与上述类似的过程，找到 Ψ_1 的不相交子族 Φ_2 和 Ψ_2，使得 $\Psi_1 = \Phi_2 \cup \Psi_2$ 以及并集 $\bigcup_{t\in\Phi_2} E_t$ 和 $\bigcup_{t\in\Psi_2} E_t$ 中的每一个都是 E 的满子集。我们可以无限地继续这一过程，从而得到两两不相交的子族 Φ_2，Φ_3，.....,...Φ_n，....., 使得并集 $\bigcup_{t\in\Phi_{n\infty}} E_t$(n=2,3,....) 中的每一个都是 E 的满子集。最后，我们用 $T\backslash \bigcup_{n=2} \Phi_n$ 替换 Φ_1 。这就证明了该定理。□

推论 2.13. 设 E 是 *Baire* 基 $(X, \mathscr{C})$ 中的一个丰集，且$E = \bigcup_{t\in T} E_t$ 是 $(X, \mathscr{C})$ 中将 E 划分为稀疏集的划分。那么，存在两个不相交子族 Φ_1 和 Φ_2，它们属于 T，使得 $T = \Phi_1 \cup \Phi_2$，且两个并集 $\bigcup_{t\in\Phi_1} E_t$ 和 $\bigcup_{t\in\Phi_2} E_t$ 无法通过贝尔集分离。因此，存在一个可数无穷序列 $\{\Phi_n\}_{n=1}^{\infty}$，由两两不相交的子族组成，使得 $T = \bigcup_{n=1} \Phi_n$，并且任意两个

不同的子族，其对应的并集都无法通过贝尔集分离。

由于每个集合都是由单点集构成的划分，因此下面这个由定理 2.11 得出的推论推广了 Grzegorek 和 Labuda 的定理 1.3。

推论 2.14。设 E 是点稀疏贝尔基 $(X,\mathscr{C})$ 中的一个丰集。那么存在互不相交的子集 E_1 和 E_2，它们属于 E，且 $E = E_1 \cup E_2$，并且集合 E_1 和 E_2 各自都是 ∞E 的满子集。因此，存在一个由 $\{E_n\}$ 个 $n=1\infty$ 两两不相交子集组成的可数无穷序列，这些子集属于 E，且 $E = \bigcup E_n$，其中每个 $n=1$ 集合 E_n（$n=1, 2, 3,\ldots\ldots$）都是 E 的满子集，因此该族中任意两个不同的成员都不能被贝尔集分离。

这里我们给出定理 2.11 的一个变体：我们不使用任何组合定理，而是采用一种不依赖于上述任何假设的伯恩斯坦型构造。可以验证（定理 33，I，第 $5, [6]$ 章），有序对 $(\mathbb{R}, \mathscr{P})$ 是一个完美基（例 2.4），其中 $\mathscr{P}$ 表示实数集 $\mathbb{R}$ 中所有完美集构成的族；这个基称为 Marczewski 基。在这个范畴基中，奇异集、贫集、丰集和贝尔集构成了集合的 Marczewski 分类。这个范畴基中的贝尔集称为 Marczewski(s) 集；奇异集、贫集（s_0）和丰集分别称为 Marczewski 奇异集、Marczewski 贫集和 Marczewski 丰集。

定理 2.15. 在 *Marczewski* 基 $(\mathbb{R}, \mathscr{P})$ 中，若 $\mathscr{A} = \{A_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ 是一族彼此不相交的 s_0集，且 $\bigcup A_\alpha$ 不属于 s_0，$\alpha\in\Lambda$则存在 Λ 的不相交子族 Λ_1 和 Λ_2，使得 $\Lambda = \Lambda_1 \cup \Lambda_2$，并且并集$\bigcup A_\alpha$ 和 $\bigcup A_\alpha$ 各自都是$\alpha\in\Lambda_1$ $\alpha\in\Lambda_2\infty\bigcup A_\alpha$的满子集。因此，存在 Λ 的可数无穷序列 $\{\Lambda_n\}$，其元素是 $\alpha\in\Lambda$ $n=1\infty$ 的不相交子族，使得 $\Lambda = \bigcup \Lambda_n$，并且并集 $n=1\bigcup A_\alpha$*(n=1,2,...)* 各自都是 $\bigcup A_\alpha$ 的满子集，因此不能由 *s* 集将其分离。

证明。令 $B = \bigcup A_\alpha$。由于 B 不是 s_0，根据基本定理（II，第 2 章，P），它在某个完美集中的每个$\alpha\in\Lambda$处都是丰集

[6]）。首先，我们证明 card($\mathscr{A}_p$) $= 2^\omega$（连续统的基数），其中 $\mathscr{A}_p = \{A_\alpha \cap P\colon\ A_\alpha \in \mathscr{A}\}$。

将 $\mathscr{A}$ 划分为 $\mathscr{A}_0$ 不相交子族 $\mathscr{A}_1$，并选取完美集 P_0，$P_1(\subset P)$，使得 $B\cap P_o$和 $B\cap P_1$是丰集，$B \cap P_0 \subset\cup\mathscr{A}_0$ 以及 $B \cap P_1 \subset \cup\mathscr{A}_1$。假设在第 n 阶段，我们已经构造了子族 $\{\mathscr{A}_h\colon\ h \in 2^n\}$，满足以下条件:

(1) $\mathscr{A}_h \subset \mathscr{A}_{h|n-1}$(2) $\mathscr{A}_h \cap \mathscr{A}_{h'} = \phi$ 若 h，$h'(\in 2^n)$，则 $h \neq h'$。
(3) 存在不相交的完美集 $P_h \subset P_{h|n-1}$，使得 $B\cap \mathrm{P}_h$ 是丰集，并且 $B \cap P_h \subset \cup\mathscr{A}_h$。

现在固定 $h \in 2^n$，并将 $\mathscr{A}_h$ 划分为不相交子族 $\mathscr{A}^\frown{}_{h_0}$和 $\mathscr{A}^\frown{}_{h_1}$，使得对于某些不相交的完美集 $P^\frown{}_{h0}$，$P^\frown{}_{h1} \subset P_h$，$B\cap P^\frown{}_{h0}$和$B \cap P^\frown{}_{h1}$均为丰集；$B \cap P^\frown{}_{h0} \subset \cup\mathscr{A}_{\hat{h0}}$ 以及 $B \cap P^\frown{}_{h1} \subset \cup\mathscr{A}_{\hat{h1}}$。如果继续这一构造，我们将得到一个子族集合 $\{\mathscr{A}_f\colon\ f \in 2^\omega\}$，其满足以下性质:

(i) $\mathscr{A}_{f|n} \subset \mathscr{A}_{f|m}$ 对于任意 $f \in 2^\omega$ 和 $m < n$.(ii) $\mathscr{A}_{f|n} \subset \mathscr{A}_{f'|n}$ 对于任意 f，$f' \in 2^\omega$, $f \neq f'$. (iii) $\cup\{\mathscr{A}_{f|n}\colon f \in 2^\omega\} = \cup\mathscr{A}$(iv) 存在互不相交的完美集 $P_{f|n} \subset P_{f|_{n-1}}$，使得 $B \cap P_{f|n}$是丰集，并且 $B \cap P_{f|n} \subset \cup\mathscr{A}_{f|n}$

$_\infty$设 $Q = \{\bigcap P_{f|n}\colon\ f \in 2^\omega\}$。显然，$Q$ 是包含于 $P_{n=1}$和 $card$ $(B \cap Q)$=2^ω中的完美集；否则，根据定理 24，I, Ch 5,[6],，将存在完美集 $T \subset Q$，使得 $B \cap T = \phi$，这与 B 在 P中处处丰集这一事实矛盾。此外，我们的构造过程表明，集合 $\{\alpha \in \Lambda\colon A_\alpha \cap Q \neq\phi\}$ 的基数为 2^ω。

设 $\{P_\alpha\colon\ \alpha < 2^\omega\}$ 是 P的所有完美子集的一个枚举，并且对每个 $\alpha \in \Lambda$，令 $\Lambda_\alpha = \{\beta \in \Lambda\colon\ A_\beta \cap P_\alpha \neq \phi\}$。由上文可知，对每个 $\alpha \in \Lambda$，card(Λ_α) $= 2^\omega$，因此我们选取不相交集合A^0_α,$A^1_\alpha \in \{A_\beta\colon\ \beta \in \Lambda_\alpha\}\backslash(\{A^0_\gamma\colon\ \gamma < \alpha\} \cup \{A^1_\gamma\colon\ \gamma < \alpha\})$，并构造不相交子族 $\{A^0_\alpha\colon\ \alpha \in \Lambda\}$ 和 $\{A^1_\alpha\colon\ \alpha \in \Lambda\}$。令 $C = \bigcup\{A^0_\alpha\colon\ \alpha \in \Lambda\}$和 $D = \bigcup\{A^1_\alpha\colon\ \alpha \in \Lambda\}$。于是 C 和 D 是 B的满子集。由于 D包含于 B中 C 的补集，因此 C 及其在 B 中的补集是两个不相交的并，且各自都是 $\bigcup_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha$的满子集。

对这一论证进行可数次重复即可证明该定理。 □

Marczweski 基是一个完美基（例 2.4），而且由于每个完美基都是点贫基（定理 3，I，Ch 5,[6]），因此得出下面的推论。

推论 2.16。在 Marczewski 基 ($\mathbb{R}$, $\mathscr{P}$) 中，若 E 是一个不属于 s_0 的集合，则存在 E 的两个不相交子集 E_1 和 E_2，使得 $E = E_1 \cup E_2$，且集合 E_1 和 E_2 各自都是 E 的满子集。因此，∞存在一个两两 s_0 不相交的 E 子集的可数无穷序列 $\{E_n\}_{n=1\infty}$，使得 $E = \bigcup E_n$，且集合 E_n (n=1,2,...)$_{n=1}$ 各自都是 E 的满子集，因此该集合族中任意两个不同成员都不能被 s-集分离。

References

[1]S.Basu 和 A.C Pramanik，《关于范畴基中的非贝尔稀有集》，已获 Mathematica Bohemica 接收，即将发表。[2] E.Grzegorek，《关于 Karel Prikry 一篇涉及测度族上 Ulam 问题的论文》，Coll.Math，52，1979年，第197-208页。[3] E.Grzegorek 和 I.Labuda，《关于谢尔宾斯基的两个定理》，Archiv der Mathematik，110，2018年，第637-644页。[4] J.Hejduk，《范畴基中的非贝尔并》，Georgian Mathematical Journal，3(6)，1996年，第543-546页[5]N.Luzin，《关于集合的分解》，C.R.Acad.Sci.Paris，198(1934)，1671-1674。[6] J.C.Morgan，《点集论》，Marcel Dekker, Inc，1990。[7].....，《从抽象观点看贝尔范畴》，Fund. Math，94，1976年，第13-23页。[8]... singular.，《无限博弈与奇异集》，Colloq.Math，29，1974年，第7-17页。[9].....，《绝对贝尔性质》，Pacific.J.Math，65(2)，1976年，421-436。[10]W.Sierpi´nski，《连续统假设》，Monografje Matematyczne，华沙-L´wow，1934年。[11].....，《关于任意线性集合的一个性质》，Fund.Math，23，1934年，第125-134页。[12] K.Schilling，《一些与拓扑等价的范畴基》，Real.Anal.Exchange，14(1)，1988-89年，第210-214页。[13] W.Sander，《一个分解定理》，Proc .Amer.Math.Soc.83(2)，1981年，第553-554页。[14] S.´Zeberski，《关于完全不可测并》，Math.Log. Quart，53(1)，2007年，38-42页。

Department of Mathematics, Bethune College, 181 Bidhan Sarani

Email address: sanjibbasu08@gmail.com

Department of Pure Mathematics, University of Calcutta, 35, Ballygunge Circular Road, Kolkata 700019, West Bengal,India

Email address: navdeeptamang007@gmail.com