arXiv:2512.18677v1 [math.NT] 21 Dec 2025

傅里叶插值的基函数

DAVIDBERGHAUS、ANDRIY BONDARENKO、DANYLO RADCHENKO、KRISTIAN SEIP 和 QIHANG SUN

ABSTRACT. Radchenko 和 Viazovska 的傅里叶插值公式的基函数，是借助 Hecke theta群的弱全纯模形式构造的，它们是具有有趣时频性质的二阶整函数。我们给出了精确的大小估计，并研究了这些函数的零点分布。特别地，我们给出了实轴上或其附近额外零点的位置和数量的渐近估计。该结果揭示了一个令人惊讶的事实：存在这样的傅里叶非唯一性对，其相较于 Radchenko 和 Viazovska 的傅里叶唯一性对所表现出的“过剩”可以任意大。我们的估计还表明，这些基函数无法在 Kulikov、Nazarov 和 Sodin 最近研究傅里叶唯一性对所使用的希尔伯特空间中构成 Riesz 基。文中还给出了一些数值数据，显示出其他精细尺度性质。

CONTENTS

1. 引言 2 论文大纲 7 2. 定义 7 2.1. 弱全纯模形式 $g_n(\tau)$ 7 2.2. $f_n(x)$ 的定义 9 2.3. 克洛斯特曼和 10 3. $g_m(\tau)$ 系数的拉德马赫型公式 11 4. f_n 的近似公式及特殊函数 $\Phi(z)$ 14 4.1. $x > n/9$ 14 时 $f_n(x)$ 的近似公式 4.2. Φ 15 的解析延拓 4.3. $x < 0$ 16 时 $\Phi(x)$ 的估计 4.4. 右半平面中的额外零点 18 4.5. 正的多余零点 19 5. f_n 22 正自变量的进一步估计 5.1. $0 \le x \le n/8$ 22 时 $f_n(x)$ 的行为 5.2. 通过 Carleson 测度论证估计平方和的积分 25 6. f_n 的进一步估计及靠近 0 的额外零点 31

Bondarenko 和 Seip 获得了挪威研究理事会 334466 号资助的部分支持。Radchenko 和 Sun 感谢欧盟的资助（欧洲研究理事会，FourIntExP，101078782）。本研究的部分工作是在 Bondarenko、Radchenko 和 Seip 入驻国际数学会议中心（CIRM）开展研究期间完成的，谨此衷心感谢该中心提供的支持与热情接待。

6.1. $x < 0$ 31 时 $f_n(x)$ 的估计 6.2. f_n 32 的全局估计 6.3. 右半平面中靠近 0 的额外零点 33 7. 这些基函数不能构成 $\mathcal{H}$ 35 的 Riesz 基 8. 数值计算与开放问题 37 8.1. $f_n(x)$ 的数值计算 37 8.2. 问题与猜想 37 参考文献 40

1. 引言

我们的出发点是 Radchenko 和 Viazovska [19] 关于如何用函数 f 本身及其傅里叶变换的取样值来表示该函数的以下结果

$$\widehat{f}(\xi) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi i \xi x} dx.$$

定理 A. 存在一个偶施瓦茨函数序列 a_n: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$，具有如下性质：对于每个偶施瓦茨函数 f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$，都有

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f(\sqrt{n}) a_n(x) + \sum_{n=0}^{\infty} \widehat{f}(\sqrt{n}) \widehat{a_n}(x), \tag{1.1}$$

其中右端的两个级数对每个实数 x都绝对收敛。函数 a_n 满足以下插值性质：$a_n(\sqrt{m}) = \delta_{n,m}$ 且当 $m \geq 1$时，$\widehat{a_n}(\sqrt{m}) = 0$，此外

$$a_0(0) = \widehat{a_0}(0) = \tfrac{1}{2}, \quad a_{n^2}(0) = -\widehat{a_{n^2}}(0) = -1, \quad a_n(0) = -\widehat{a_n}(0) = 0 \quad \textit{otherwise.} \tag{1.2}$$

文献 [19, 命题 4] 证明，只需较弱地假设 $f(x)$ 和 $\widehat{f}(x)$ 均为 $O((1+|x|)^{-13})$，(1.1) 实际上仍然成立。关于该结果的进一步改进，参见 [3, 定理 7.1] 。

下文 [19], 我们将 (1.1) 称为傅里叶插值公式。得益于 Ramos 和 Sousa [20], Kulikov、Nazarov 和 Sodin [14], 以及 Lysen [17]近期的研究，我们得到了大量如下形式的傅里叶插值公式

$$f(x) = \sum_{\lambda \in \Lambda} f(\lambda) g_\lambda(x) + \sum_{w \in W} \widehat{f}(w) h_w(x) \tag{1.3}$$

对于适当的实数序列 Λ W 及其相应的函数 g_λ h_w。然而，鉴于对称性 $\Lambda = W$ 以及基函数 a_n 的插值性质，(1.1) 脱颖而出，成为临界时频密度的典型情形。相比之下，例如 [14] 的公式均具有超临界密度，这意味着存在一个 $\varepsilon > 0$，使得

$$|\{\lambda \in \Lambda : |\lambda| \leq R_1\}| + |\{w \in W : |w| \leq R_2\}| \geq (4+\varepsilon) R_1 R_2$$

对所有充分大的 R_1 和 R_2 都成立。在这里，我们使用“临界密度”和“超临界密度”这两个术语，是有 Kulikov 的一个定理 [13], 作为依据的；该定理断言，在对 f 以及序列 Λ、W、g_λ、h_w 施加某些温和限制的条件下，类似于 (1.3) 的公式只有在满足以下条件时才能成立：

$$|\{\lambda \in \Lambda : |\lambda| \le R_1\}| + |\{w \in W : |w| \le R_2\}| \ge 4R_1R_2 - C\log^2(4R_1R_2)$$

对于 $R_1,\ R_2 \ge 1$ 以及某个常数 C。

在不确定性原理的限制下取得微妙平衡的基函数 a_n 似乎值得进一步研究。然而，函数 a_n（下文称为傅里叶插值的基函数）是通过 Hecke theta群的弱全纯模形式隐式定义的（详情见第 2 节）。因此，还需要付出一些额外努力，才能揭示它们在函数论方面的基本性质。本文的目标是较为详细地完成这项工作，进一步推进 [19, 3], 中的研究，以准确把握傅里叶插值基函数的本质。

沿用 [19], ，我们将 a_n 分解为傅里叶变换的特征函数之和，$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$即写作 $a_n = (b_n^+ + b_n^-)/2$，其中 $b_n^+ = b_n^+$ 且 $b_n^- = -b_n^-$。由于 $b_n^\pm(x)$的性质相似，我们将只关注“+”情形。正如 [19],中所证明的，函数 $b_n^+(x)$是傅里叶变换不变的 Schwartz 函数，并由性质 $b_n(\sqrt{m}) = \delta_{n,m}$ 对所有 $m \ge 0$唯一确定。为方便起见，我们作变量替换并考虑

$$f_n(x) := b_n^+(\sqrt{x}), \quad x \ge 0\,.$$

这些函数的性质是本文关注的主要内容。第 2 节给出了将 $f_n(x)$ 定义为某个模形式的积分变换。

由 [3, 第 7] 节 $f_n(x) \ll n^{1/4}(1+\log^2 n)$ 可知，该关系对 x 一致成立。我们无法在一致性方面改进这一估计，但以下界相当精确地说明了 $|f_n(x)|$ 的大小如何取决于 x （当 $x > 0$ 时）。

定理 1.1 （小实数值的渐近性）。 我们有

$$|f_n(x)| \ll (1+\log^2 n)n^{1/4}(1+x)^{-1/4}, \quad 0 \le x \le n/8. \tag{1.4}$$

对于较大的 x 值，情况则清晰得多。

定理 1.2 （大实数值的渐近性）。 我们有

$$\frac{f_n(x)}{\sin\pi(x-n)} = \begin{cases} O\Big(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\Big(\dfrac{n-x}{\sqrt{n}}\Big)^{0.216}\Big), & n/8 \le x < n-\sqrt{n}, \\ \dfrac{1}{2\pi\sqrt{n}(\sqrt{x}-\sqrt{n})} + O(n^{-1/2}), & n-\sqrt{n} \le x \le n+\sqrt{n}, \\ \dfrac{e^{-\pi\sqrt{3}(\sqrt{x}-\sqrt{n})}}{\sqrt{n}} + O\Big(\dfrac{e^{-\pi\sqrt{11}(\sqrt{x}-\sqrt{n})}}{\sqrt{n}}\Big), & n+\sqrt{n} < x. \end{cases} \tag{1.5}$$

定理 1.2 的证明基于以下近似（见引理 4.1）

$$\frac{f_n(z)}{\sin\pi(z-n)} = \frac{\Phi(\sqrt{z}-\sqrt{n})}{\sqrt{n}} + O_\varepsilon\big(e^{\pi\sqrt{3}(\sqrt{n}/3-\operatorname{Re}\sqrt{z})}\big),$$

当 $\operatorname{Re}\sqrt{z} \geq \sqrt{n}(\frac{1}{3}+\varepsilon)$ 时成立（对任意 $\varepsilon>0$），其中特殊函数 $\Phi(w)$ 关于 $\mathbb{C}$ 是亚纯的，并在 $\operatorname{Re} w > 0$ 时由级数定义

$$\Phi(w) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-2\pi w\sqrt{2(n+3/8)}}}{\sqrt{2(n+3/8)}}.$$

（Φ 到 $\mathbb{C}^\times$ 的解析延拓见 (4.4)。）(1.5) 中的三种情形分别对应于 $\Phi(w)$ 在 w 为较大的正值、w 接近 0，以及 w 为较大的负值时的行为。(1.5) 中较难处理的是范围 $n/8 \leq x \leq n-\sqrt{n}$，它对应于 w 为较大的负值时的 $\Phi(w)$；结果表明，当 $w<0$ 时，函数 $\Phi(w)$ 的表现类似于指数和

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\cos\left(\frac{3n-1}{4}\pi - \frac{w^2}{n}\pi\right)}{\sqrt{n}}.$$

对这个和进行估计，得到 (1.5) 中的指数 0.216；根据指数对猜想，它可以降至任意 $\varepsilon>0$。这个指数和的影响在图 1 所示的 f_{500} 图中清晰可见，该图还可以与定理 1.2 的估计进行比较。

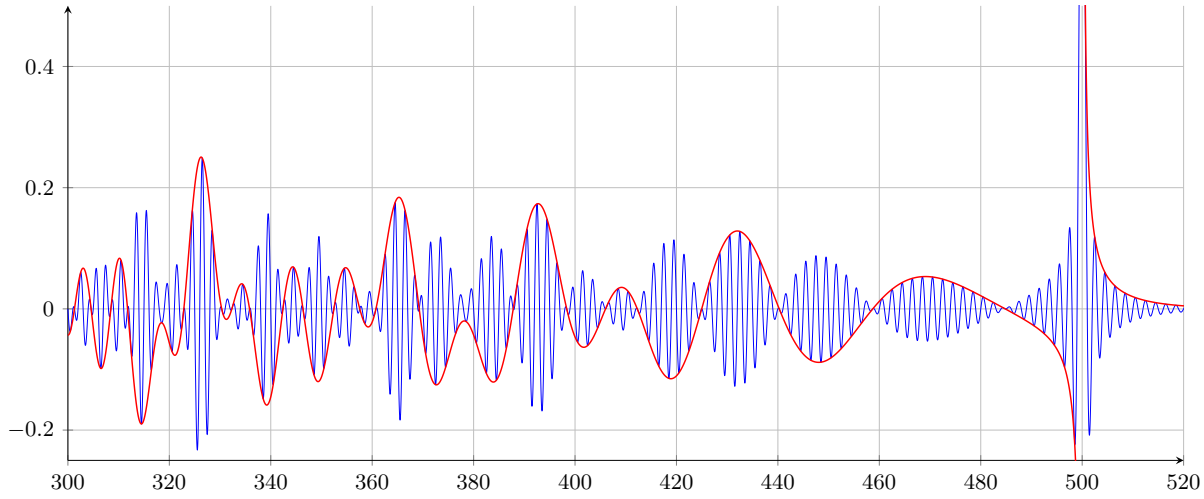

FIGURE 1. $f_{500}(x)$（蓝色）和 $\Phi_{(\sqrt{x}-\sqrt{500})\sqrt{500}}$（红色）的图像。

计算上述指数和的二阶矩（见下文定理 4.2），我们发现，平均而言，f_n 在 $[n/8, n]$ 上确实相当小，即

$$\int_{n/8}^{n} |f_n(x)|^2 dx \asymp \log n. \tag{1.6}$$

另一方面，正如我们将在推论 7.1 中看到的，(1.6) 中的积分在 $n \to \infty$时无界，这一事实排除了(1.1)中的级数以与 [14], 的傅里叶插值公式相同的稳健方式收敛的可能性；也就是说，不能在由满足以下条件的函数 f 组成的希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 中，以框架的意义收敛

$$\|f\|_{\mathcal{H}}^2 \coloneqq \int_{-\infty}^{\infty} \big(|f(x)|^2 + |\widehat{f}(x)|^2\big)(1+x^2)dx < \infty.$$

定理 1.1 和定理 1.2 一起给出 L^2 界

$$\int_0^{\infty} |f_n(x)|^2 dx \ll n \log^4 n. \tag{1.7}$$

对 n取平均后，我们得到一个结果，表明定理 1.1 还有大幅改进的空间。

定理 1.3 （关于 n的 L^2 积分平均）。 我们有

$$\xi \log \xi \ll \int_0^{\infty} \sum_{n \le \xi} |f_n(x)|^2 dx \ll \xi \log^2 \xi \tag{1.8}$$

当 $\xi \ge 2$ 时。

定理 1.3 表明，(1.7) 右端的对数幂可以降至 $\log^2 n$，但它也暗示了一个强得多的断言，即 (1.7) 中的积分为$O(\log^2 n)$。由 (1.6) 可立即得到 (1.8) 中的下界，因此定理 1.3 的主要关注点是上界；该上界通过改进 [3] 中的技巧，并结合一个关于上半平面 H^2 的 L^1 Carleson 测度结果而得出。在第 8 节中，我们给出数值证据，表明 (1.8) 中正确的增长速率应为 $\xi \log \xi$。

我们将 $f_n(z)/\sin \pi(z-n)$ 的零点称为 f_n 的额外零点。事实证明，随着 n 增大，在正实轴上或其附近会出现大量这样的零点。我们将对这些零点的数量和位置作出相当精确的估计，并证明其中相当一部分实际上位于实轴上。研究 f_n 的额外零点需要以下渐近估计。

定理1.4 （ $\mathbb{C}$ 中及负实轴上的渐近行为）。 我们有

$$f_n(x+iy) \ll n^{\frac{1}{4}}(1+\log^2 n) e^{\pi|y|} e^{2\pi\sqrt{n}\,\mathrm{Re}\,\sqrt{-z}} \tag{1.9}$$

在 $z = x+iy$ 和 n 上一致地成立。此外，

$$f_n(-m) = \frac{e^{2\pi\sqrt{nm}}}{2\sqrt{n}} \Big(1 + O\big(m^2 n^2 e^{-\pi\sqrt{mn}}\big)\Big), \quad m, n \in \mathbb{Z}_{>0}; \tag{1.10}$$

$$f_n(-x) \sim \frac{e^{2\pi\sqrt{nx}}}{2\sqrt{n}}, \quad x \to +\infty. \tag{1.11}$$

全局界 (1.9) 表明， f_n 属于卡特赖特类，这意味着 f_n 是指数型 π，并且

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\log^+ |f_n(x)|}{1+x^2} dx < \infty.$$

因此，我们很容易获得关于 f_n 的零点全局分布的相当精确的信息。为陈述一个精确的结果，我们将 z_k 记作 f_n的零点，并按通常方式计入重数。令 $n_{\pm}(r,\ \alpha)$ 分别表示扇形区域 $\{z\colon\ |z|<r,\ |\arg z|\le\alpha\}$ 和 $\{z\colon\ |z|<r,\ |\arg z-\pi|\le\alpha\}$ 中零点 z_k 的个数。于是，由整函数理论中的一个经典定理（见 [15, 第 17] 章），可得如下结论。

(a) 布拉施克条件成立:

$$\sum_{z_k\neq 0} |\operatorname{Im}(1/a_k)| < \infty.$$

(b) 我们有

$$\lim_{r\to\infty} \frac{n_+(r,\alpha)}{r} = \lim_{r\to\infty} \frac{n_-(r,\alpha)}{r} = 1$$

对每个 $\alpha\in(0,\ \pi)$ 都成立。

(c) 极限

$$\lim_{R\to\infty} \sum_{0<|a_k|\le R} \operatorname{Re}(1/z_k)$$

存在。

由 (b) 可知，在任意狭窄扇形 $|\arg z-\pi|<\varepsilon$ 中，零点的密度为 1；但鉴于 (1.11)，其中只有有限多个零点可能位于实轴上。这与“相反”扇形 $|\arg z|<\varepsilon$ 中的情况形成对照，在那里，大多数零点确实位于实轴上。为了更精确地量化正实半轴上或其附近的额外零点数量，引入集合

$$\Delta(t,\ n) := \{z\colon\ 0<\operatorname{Re} z\le n,\ 3\le \operatorname{Re}(\sqrt{z}-\sqrt{n})^2\le t, |\operatorname{Im}(\sqrt{z}-\sqrt{n})^2|\le \log^3 n\}$$

关于额外零点的结果可归纳如下。

定理 1.5。 函数 $f_n(z)/\sin\pi z$ 在充分大的 n 下具有

(i) $x+O(1)$ 个零点，位于 $\Delta(x,n)$，当 $3<x\le n/2$ 时；(ii) $\gg \sqrt{x}/\log^2 n$ 个实零点，位于 $\Delta(x,\overline{n})$，当 $\log^2 n<x<n/2$ 时；(iii) $\gg x^{0.784}$ 个非实零点，位于 $\Delta(x,n)$，当 $\log n<x<n/2$ 时；(iv) $\asymp\sqrt{rn}$ 个零点，位于矩形 $0\le\operatorname{Re} z\le r$, $|\operatorname{Im} z|\le r$ 内，当 $10\le r\le\overline{n/8}$ 时。

定理 1.5 对傅里叶唯一性和非唯一性对有一个有趣的推论。为准确说明这一点，我们首先回顾 [14]：$(\Lambda,\ W)$ 中，Λ 和 W 为两个实数序列。对于一类 $\widehat{\ }$函数 H，如果函数 f 在 H 上 Λ，且其傅里叶变换 f 在 W 上消失，则称 $(\Lambda,\ W)$ 是一个傅里叶唯一性对，并记为 $f\equiv 0$。反之，如果存在一个非平凡函数 f，属于 H，且分别在 f 和 f 上消失，则称 $(\Lambda,\ W)$ 是关于 H 的傅里叶非唯一性$\widehat{\ }$对

在 Λ 和 W 上。根据这一定义，我们允许一个点在 $\widehat{\ }$ 中出现多次，或在 Λ 或 W 中出现多次，并按照通常的方式，依据重数来解释 f 或 f 在该点的消失。

现在令 Ξ_n 为 b_n的额外正实零点集合。根据定理 1.5， Ξ_n的基数为$\gg \sqrt{n}/\log^2 n$。现在我们令 $\Lambda_n := \{\sqrt{k}\colon\ k \geq 0,\ \ k \neq n\} \bigcup \Xi_n$，并注意到$(\Lambda_n,\ \Lambda_n)$是偶施瓦茨函数的一个傅里叶非唯一性对。引人注目的是，如果我们从序列 $\Lambda := \{\sqrt{k}\colon\ k \geq 0\}$ 中（其中$(\Lambda,\ \Lambda)$是偶施瓦茨函数的一个傅里叶唯一性对）取出两个点，换成 $\gg \sqrt{n}/\log^2 n$个点，那么最终得到的就是一个傅里叶非唯一性对。

本文结构。 本文另有 7 节。我们在第 2 节介绍基本定义，并简要讨论克洛斯特曼和。在第 3 节，我们推导弱全纯模形式系数的拉德马赫型公式 g_n ，这些系数出现在 f_n的定义中，为第 4 节定义特殊函数 Φ 铺平道路。第 4 节的一个关键点是， Φ 满足一个函数方程，使我们能够用某个指数和来估计它。随后我们证明定理 1.2，建立 Φ 的二阶矩（进而得到 (1.6)），并推导出定理 1.5 的条目 (i)–(iii)。在第 5 节，我们运用 [3]中的技巧证明定理 1.1 和定理 1.3 的上界。在第 6 节，我们应用圆法的一种形式来证明定理 1.4。随后，我们将该定理与詹森公式适当结合，推导出定理 1.5 的最后一项 (iv)。基函数无法为 $\mathcal{H}$ 中的偶函数构成框架（更准确地说，无法构成 Riesz 基），这一事实将在第 7 节证明。最后，在第 8 节，我们展示一些数值计算和数据，以更深入地了解 f_n的行为。部分基于这些信息，我们提出若干问题与猜想，希望能激发进一步的研究。

2. Definitions

本节将简要回顾如何通过对 θ 群的弱全纯模形式进行围道积分，从 [19] 构造 $f_n(x)$（或 $b_n^+(x)$） Γ_θ。我们还将回顾一些关于克洛斯特曼和的基本定义，这些定义将在第 3 节中用到。

2.1. 弱全纯模形式 $g_n(\tau)$。回顾

$$\Gamma_\theta = \left\{\gamma \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})\colon \gamma \equiv \left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right) \text{ or } \left(\begin{smallmatrix}0&1\\1&0\end{smallmatrix}\right) \pmod 2\right\}$$

由 $S = \left(\begin{smallmatrix}0&-1\\1&0\end{smallmatrix}\right)$ 和 $T^2 = \left(\begin{smallmatrix}1&2\\0&1\end{smallmatrix}\right)$（其中 $T = \left(\begin{smallmatrix}1&1\\0&1\end{smallmatrix}\right)$）生成，它们满足一个关系式 $S^2 = 1$。我们将使用以下 Γ_θ 的基本域：

$$\mathcal{F} := \{\tau \in \mathfrak{H}\colon |\operatorname{Re}\tau| < 1, |\tau| > 1\},$$

其中 $\mathfrak{H}$ 表示复平面中的上半平面（见图 2）。

令 $j(\gamma,\tau) = c\tau + d$ 为 Γ_θ 中 $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ 的自守因子，并将雅可比 theta 函数定义为

$$\theta(\tau) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{\pi i n^2 \tau}. \tag{2.1}$$

它满足变换律

$$\theta(\gamma\tau) = \nu_\theta(\gamma) j(\gamma,\tau)^{1/2}\theta(\tau), \quad \gamma \in \Gamma_\theta, \tag{2.2}$$

$j(\gamma,\tau)$ 的自变量固定在 $(-\pi,\pi]$，且 ν_θ 是权为 $1/2$ 的乘子系统，定义为

$$\nu_\theta(\gamma) := \begin{cases} \varepsilon_d^{-1}(\frac{2c}{d}), & c \equiv 0 \pmod 2, \\ \mathbf{e}(-\frac{1}{8})\varepsilon_c(\frac{2d}{c}), & c \equiv 1 \pmod 2, \end{cases} \qquad \varepsilon_d := \begin{cases} 1, & d \equiv 1 \pmod 4, \\ i, & d \equiv 3 \pmod 4, \\ 0, & \text{otherwise}, \end{cases} \tag{2.3}$$

对于 $c > 0$，且 $\nu_\theta(-\gamma) := i\nu_\theta(\gamma)$ 对于 $c < 0$。这里 $\left(\frac{a}{n}\right)$ 是克罗内克符号（详情见 [18, 第 32] 页和 [21, 第 2] 节），并且

$$\mathbf{e}(\tau) := e^{2\pi i\tau}, \qquad \tau \in \mathbb{C}.$$

用 $g_n(\tau)$，$n \geq 0$ 表示群 Γ_θ 上权为$3/2$ 、乘子系统为 ν_θ^3 的唯一弱全纯模形式，该形式在尖点 1 处消失，并满足

$$g_n(\tau) = e^{-\pi i n\tau} + O(e^{\pi i\tau})$$

如 $\tau \to i\infty$ 所示（见 [19, 第 3] 节）。第 0 个函数 $g_0(\tau)$ 就是 $\theta^3(\tau)$（其中 θ 如 (2.1) 所示），并且对于所有 $n \geq 0$，都有 $g_n(\tau) = \theta^3(\tau)Q_n(J(\tau))$，其中 Q_n 是次数为 n 的多项式，并且

$$J(\tau) := \frac{16}{\lambda(\tau)(1-\lambda(\tau))} = q^{-1/2} + 24 + 276q^{1/2} + 2048q + \cdots,$$

其中 $\lambda(\tau)$ 是模 λ 函数，且按照惯例

$$q^a := e^{2a\pi i\tau}.$$

（J 是群 Γ_θ 的主模，见图 2；我们遵循 [3,§3.2.2] 中的归一化。）多项式 Q_n 没有简单的公式，但 $g_n(z)$ 的生成级数可以用闭式表示：

$$K(\tau,z) := \sum_{n\geq 0} g_n(z)e^{\pi i n\tau} = \theta^3(z)\frac{\theta(\tau)(1-2\lambda(\tau))J(\tau)}{J(\tau)-J(z)}, \tag{2.4}$$

当 $\operatorname{Im}\tau$ 足够大时成立。由此我们看到

$$g_n(z) = \frac{1}{2}\int_{\tau_0-1}^{\tau_0+1} K(\tau,z)e^{-\pi i n\tau}d\tau$$

对于任意满足 $\tau \mapsto K(\tau,z)$ 在 $\operatorname{Im}\tau > \operatorname{Im}\tau_0$ 中是解析的 τ_0。

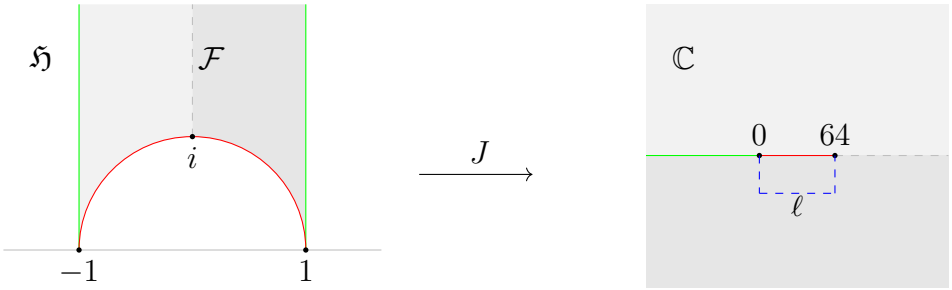

FIGURE 2. 基本域 $\mathcal{F}$，$J(z)$ 作为保角映射，以及一条变形后的积分路径 ℓ。

我们还要回顾一下 [3, 式（3,4）、（3.5）、（3.6）]: 在以下位置的傅里叶展开 1

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}(\tfrac{\tau}{i})^{-1/2}\theta(1-\tfrac{1}{\tau}) &= q^{1/8}+q^{9/8}+q^{25/8}+\dots, \\ -2^{-12}J(1-\tfrac{1}{\tau}) &= q+24q^2+300q^3+\dots, \\ 8\big(1-2\lambda(1-\tfrac{1}{\tau})\big) &= q^{-1/2}+20q^{1/2}-62q^{3/2}+\dots, \end{aligned} \tag{2.5}$$

微分恒等式

$$J'(\tau) = -\pi i\,\theta^4(\tau)J(\tau)(1-2\lambda(\tau)),$$

及其推论

$$\theta^4(\tau)d\tau = \pi^{-1}w^{-1/2}(64-w)^{-1/2}dw\,, \qquad w=J(\tau). \tag{2.6}$$

2.2. **De的定义** $f_n(x)$。 根据 [19, 式（22）], , 我们将函数 b_n^+ 定义为

$$b_n^+(x) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} g_n(z)e^{\pi i z x^2}dz\,,$$

其中，积分沿上半平面中的一条半圆路径进行。在 [19]中已证明⌢， b_n^+ 是满足条件 $b_n^+ = b_n^+$ 的唯一偶施瓦茨函数，并且 $b_n^+(\sqrt{m}) = \delta_{m,\ n}$,$m$, $n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$。 我们令 $f_n(x) = b_n^+(\sqrt{x})$，于是

$$f_n(x) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} g_n(z)e^{\pi i z x}dz\,, \qquad x\geq 0\,. \tag{2.7}$$

由 (2.7) 可知， $f_n(w)$ 是指数型为 π 的整函数。改变积分路径（见 [19, 第 79] 页），我们得到 f_n 的如下拉普拉斯变换表示:

$$f_n(x) = \sin(\pi x)\int_0^{\infty} g_n(1+it)e^{-\pi x t}dt\,, \qquad x>n\,. \tag{2.8}$$

我们将在第 4.1 节中使用它。

对于每个 $x\geq 0$，在所有增长至多为多项式的复数序列中，序列 $\{f_n(x)\}_{n\geq 0}$ 由以下函数方程唯一确定

$$F(\tau,x)+(\tau/i)^{-1/2}F(-1/\tau,x) = e^{\pi i x\tau}+(\tau/i)^{-1/2}e^{-\pi i x\tau^{-1}}, \tag{2.9}$$

其中

$$F(\tau,x):=\sum_{n=0}^{\infty}f_n(x)e^{\pi in\tau} \tag{2.10}$$

是 $f_n(x)$ 的生成函数。由 $g_n(\tau)$ 的生成函数，我们还得到积分表示

$$F(\tau,z)=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}K(\tau,w)e^{i\pi wz}dw\,, \tag{2.11}$$

这对基本域 $\mathcal{F}$ 中的 τ 成立。

2.3. 克洛斯特曼和。 我们主要沿用 [10, 第 4] 章中广义克洛斯特曼和的记号。回顾一下，Γ_θ 有两个尖点： ∞ 和 1。尖点∞ 的稳定子为 $\Gamma_\infty=\{\pm\left(\begin{smallmatrix}1&2t\\0&1\end{smallmatrix}\right):\ t\in\mathbb{Z}\}$，且 ∞ 的宽度为 $h=2$。尖点 1 的稳定子为 $\Gamma_1=\{\pm\left(\begin{smallmatrix}1-t&t\\-t&1+t\end{smallmatrix}\right):\ t\in\mathbb{Z}\}$，并且我们取满足 $\sigma_1\infty=1$ 和 $\sigma_1^{-1}\Gamma_1\sigma_1=\Gamma_\infty$ 的缩放矩阵 $\sigma_1=\left(\begin{smallmatrix}1/\sqrt{2}&-\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}&0\end{smallmatrix}\right)\in\mathbf{GL}_2(\mathbb{R})$。

尖点参数为 $\alpha_\infty=0$ 和 $\alpha_1=3/8$，因为

$$\nu_\theta^3(T^2)=1\ \text{ and }\ \nu_\theta^3(\sigma_1\left(\begin{smallmatrix}1&2\\0&1\end{smallmatrix}\right)\sigma_1^{-1})=\nu_\theta^3(\left(\begin{smallmatrix}0&1\\-1&2\end{smallmatrix}\right)=\left(i\,\nu_\theta(\left(\begin{smallmatrix}0&-1\\1&-2\end{smallmatrix}\right)\right)^3=\mathbf{e}(\tfrac{3}{8}).$$

我们有如下双陪集分解

$$\begin{aligned}\Gamma_\theta\sigma_1&=\left\{\begin{pmatrix}\frac{a+b}{\sqrt{2}}&-\sqrt{2}\,a\\ \frac{c+d}{\sqrt{2}}&-\sqrt{2}\,c\end{pmatrix}:\left(\begin{smallmatrix}a&b\\c&d\end{smallmatrix}\right)\in\Gamma_\theta\right\}\\&=\bigcup_{\text{odd }C>0}\Gamma_\infty\Big\{\begin{pmatrix}A/\sqrt{2}&\sqrt{2}\,B\\C/\sqrt{2}&\sqrt{2}\,D\end{pmatrix}:\ \begin{matrix}A\pmod{2C}^*,\ D\pmod{C}^*\\ AD\equiv1\pmod{C},\ A\ge0,\ D>0,\end{matrix}\Big\}\Gamma_\infty.\end{aligned} \tag{2.12}$$

现在定义克洛斯特曼和：

$$S(m,n,c):=S_{\infty\infty}(m,n,c,\nu_\theta^3)=\sum_{\gamma=\left(\begin{smallmatrix}a&*\\c&d\end{smallmatrix}\right)\in\Gamma_\infty\backslash\Gamma_\theta/\Gamma_\infty}\nu_\theta(\gamma)^{-3}\mathbf{e}\left(\frac{ma+nd}{2c}\right). \tag{2.13}$$

明确地，我们有

$$S(m,n,c)=\begin{cases}\displaystyle\sum_{\substack{a,d\pmod{2c}\\ ad\equiv1\pmod{2c}}}\varepsilon_d^{-1}(\tfrac{2c}{d})\mathbf{e}\left(\frac{ma+nd}{2c}\right), & c\equiv0\pmod2,\\ \displaystyle\sum_{\substack{\text{even }a,d\pmod{2c}\\ ad\equiv1\pmod{c}}}\mathbf{e}(\tfrac{3}{8})\varepsilon_c(\tfrac{2d}{c})\mathbf{e}\left(\frac{ma+nd}{2c}\right), & c\equiv1\pmod2.\end{cases} \tag{2.14}$$

对于（2.12）中的奇数 $C>0$, $\gamma=\begin{pmatrix} A/\sqrt{2} & \sqrt{2}\,B \\ C/\sqrt{2} & \sqrt{2}\,D \end{pmatrix}$，我们定义

$$\tilde{S}(m,n,C) := S_{\infty 1}\left(m,n,\frac{C}{\sqrt{2}},\nu_\theta^3\right) = \sum_{\gamma\in\Gamma_\infty\backslash\Gamma_\theta\sigma_1/\Gamma_\infty} (\nu_\theta)_{\infty 1}^{-3}(\gamma)\,\mathbf{e}\left(\frac{m\frac{A}{\sqrt{2}}+n_+\sqrt{2}\,D}{2C/\sqrt{2}}\right)$$

$$= \sum_{\substack{D \pmod{C}^* \\ \text{odd } A \pmod{2C}^* \\ AD\equiv 1 \pmod{C}}} \nu_\theta\begin{pmatrix} * & * \\ -D & C+D \end{pmatrix}^{-3}\mathbf{e}\left(\frac{mA+2n_+D}{2C}\right). \tag{2.15}$$

在上述公式中，$n_+ = n+3/8$。克洛斯特曼和 S 及 S 满足一些非平凡关系。根据 [21, 命题 2.2]，对于奇数 $c>0$,

$$S(m,4n,2c) = \begin{cases} -\sqrt{2}\,S(m,n,c), & m\equiv 0,3 \pmod 4,\\ \sqrt{2}\,S(m,n,c), & m\equiv 1,2 \pmod 4.\end{cases}$$

类似地，对于奇数 $c>0$,

$$\mathbf{e}(-\tfrac{3}{8})S(m,8n+3,2c) = \begin{cases} -\sqrt{2}\,\tilde{S}(m,n,c), & m\equiv 0,3 \pmod 4,\\ \sqrt{2}\,\tilde{S}(m,n,c), & m\equiv 1,2 \pmod 4.\end{cases} \tag{2.16}$$

我们将使用 后一个公式来获得关于第 § S 节中克洛斯特曼和之和的估计 3.

3. Rademacher-type formulas for the coefficients of $g_m(\tau)$

令$a_{m,\,n}$ 和 $\tilde{a}_{m,\,n}$ 分别为 g_m 在 ∞ 处和在 1 处的傅里叶展开系数:

$$g_m(\tau) - e^{-m\pi i\tau} = \sum_{n\geq 1} a_{m,n}e^{n\pi i\tau}\,, \tag{3.1}$$

$$(\tau/i)^{-3/2}g_m\Big(1-\frac{1}{\tau}\Big) = \sum_{n\geq 0}\tilde{a}_{m,n}e^{2(n+3/8)\pi i\tau}\,. \tag{3.2}$$

下一个结果给出了这些系数的拉德马赫型公式，其表达式涉及第 2 节中的克洛斯特曼和。

引理 3.1。设 m 为正整数。我们有

$$a_{m,n} = \pi\mathbf{e}(-\tfrac{3}{8})\left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{1}{4}}\sum_{c=1}^{\infty}\frac{S(-m,n,c)}{c}I_{1/2}\Big(\frac{2\pi\sqrt{mn}}{c}\Big), \qquad n\geq 1\,, \tag{3.3}$$

$$\tilde{a}_{m,n} = 2\pi\left(\frac{2(n+3/8)}{m}\right)^{\frac{1}{4}}\sum_{\text{odd } c>0}\frac{\tilde{S}(-m,n,c)}{c}I_{1/2}\Big(\frac{2\pi\sqrt{2m(n+3/8)}}{c}\Big), \qquad n\geq 0. \tag{3.4}$$

证明。该技巧是标准的，基本上重复了 [11] 中定理 3.2 和命题 5.1 的证明（另见 [4, 1, 12]），因此我们只简要概述。设权重为 $k=\frac{3}{2}$，并且

$$\varphi_m(\tau,s) := |4\pi my|^{-k/2}M_{\operatorname{sgn}(m)k/2,\,s-1/2}(4\pi|m|y)\mathbf{e}(mx)$$

如 [11, (2.15)]（M 是惠特克函数 M，见公式 (3.14.2) [5, ），它是权重为 $3/2$ 的双曲拉普拉斯算子 $\Delta_{3/2}$ 的特征函数，对应特征值为 $(s-3/4)(1/4-s)$，且 $\varphi_{-m/2}(\tau,\ 3/4) = e^{-m\pi i\tau}$。考虑弱 Maass–Poincar´e 级数

$$P_m(\tau,s) \coloneqq \sum_{\gamma\in\Gamma_\infty\backslash\Gamma_\theta} \nu_\theta(\gamma)^{-3} j(\gamma,\tau)^{-3/2}\varphi_{-m/2}(\gamma\tau,s), \tag{3.5}$$

该级数在 $\operatorname{Re} s>1$ 的紧子集上一致绝对收敛。我们将通过其傅里叶展开，计算它在 $s=k/2=3/4$ 上的解析延拓。我们有

$$P_m(\tau,s) = |2\pi my|^{-3/4} M_{-3/4,\,s-1/2}(2\pi my)\mathbf{e}(-mx/2) + \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_m(n,y,s)\mathbf{e}(nx/2), \tag{3.6}$$

其中 $a_m(n,\ y,\ s)$ 由下式给出

$$\frac{\Gamma(2s)\mathbf{e}(-\frac{3}{8})}{(2\pi my)^{\frac34}}\sum_{c=1}^{\infty}\frac{S(-m,n,c)}{c}\begin{cases}\frac{\pi\sqrt{|m/n|}}{\Gamma(s+\frac34)}W_{\frac34,s-\frac12}(2\pi ny)I_{2s-1}\big(\frac{2\pi\sqrt{mn}}{c}\big), & n>0,\\ \frac{2\pi^{1+s}}{(2s-1)\Gamma(s-\frac34)\Gamma(s+\frac34)}\frac{m^s}{2^s c^{2s}y^{s-1}}, & n=0,\\ \frac{\pi\sqrt{|m/n|}}{\Gamma(s-\frac34)}W_{-\frac34,s-\frac12}(2\pi|n|y)J_{2s-1}\big(\frac{2\pi\sqrt{|mn|}}{c}\big), & n<0.\end{cases} \tag{3.7}$$

这里，W 是惠特克 W 函数 [5, 式 (3.14.3)]。

利用 [21, 命题 7.1、命题 7.3 和命题 7.8], ，并注意到上面对 c 的求和在 $\mathbb{Z}_{>0}$ 中分解为来自 [21, §7], 的两种情况 $2|c$ 和 $2\nmid\widetilde{c}$ 之和，我们得到

$$\sum_{1\le c\le x}\frac{S(-m,n,c)}{c} \ll_\varepsilon \begin{cases}(|mn|^{1/4}+x^{1/6})|mnx|^{\varepsilon}, & n\neq 0,\\ m^{1/4+\varepsilon}x^{1/6+\varepsilon}, & n=0.\end{cases} \tag{3.8}$$

根据贝塞尔函数的简单估计，我们发现 (3.7) 中的级数在 $\operatorname{Re} s\ge 3/4$ 时条件收敛（详情参见 [23, §9.2] 中的论证）。

关于 $a_m(n,\ y,\ s)$ 的条件收敛性和估计保证了 (3.6) 在 $\operatorname{Re} s\ \ge\ 3/4$ 时绝对收敛。通过解析延拓，我们可以在 (3.6) 中取 $s\ =\ 3/4$ 。由于 $a_m(n,\ y,\ 3/4)\ =0$ 对于 $n\le 0$ 是，$P_m(\tau,\ 3/4)$ 弱全纯，并且由唯一性可知它等于 $g_m(\tau)$。这就证明了 (3.3)。

另一个公式的证明类似。对于 $\operatorname{Re} s>1$，我们有

$$(P_m(\cdot,s)|_{\frac32}\sigma_1)(\tau) = \sum_{\gamma\in(\Gamma_\theta)_\infty\backslash\Gamma_\theta\sigma_1}(\nu_\theta)_{\infty 1}^{-3}(\gamma)j(\gamma,\tau)^{-\frac32}\varphi_{-m/2}(\gamma\tau,s), \tag{3.9}$$

其傅里叶展开为

$$\Big(\frac{\tau}{\sqrt2}\Big)^{-\frac32}P_m\Big(1-\frac{2}{\tau},s\Big) = \sum_{n\in\mathbb{Z}}\tilde a_m(n,y,s)e^{\pi i n_+ x}, \tag{3.10}$$

其中 $\tilde a_m(n,y,s)$ 由 $\Gamma(2s)(2\pi my)^{-\frac34}\mathbf{e}(-\frac38)$ 乘以……给出

$$\sum_{\text{odd } c>0}\frac{\tilde S(-m,n,c)}{c/\sqrt2}\begin{cases}\frac{\pi|m/n_+|^{\frac12}}{\Gamma(s+\frac34)}W_{\frac34,s-\frac12}(2\pi n_+y)I_{2s-1}\big(\frac{2\pi\sqrt{mn_+}}{c/\sqrt2}\big), & n\ge 0,\\ \frac{\pi|m/n_+|^{\frac12}}{\Gamma(s-\frac34)}W_{-\frac34,s-\frac12}(2\pi|n_+|y)J_{2s-1}\big(\frac{2\pi\sqrt{m|n_+|}}{c/\sqrt2}\big), & n<0.\end{cases} \tag{3.11}$$

（回想一下， $n_+ = n + 3/8$ 以及 $\sigma_1 = \left(\begin{smallmatrix} 1/\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 0 \end{smallmatrix}\right)$。）由于对于 $\mathbb{Z}$ 中的 n， $8n+3$ 不能为 0 或负平方数，结合 (2.16) 并采用与 [21, 命题 7.3], 中类似的论证，我们可得

$$\sum_{1\le c\le x} \frac{\tilde{S}(-m,n,c)}{c} \ll_\varepsilon (|mn_+|^{1/4} + x^{1/6})|mn_+x|^\varepsilon \quad \text{for } n \in \mathbb{Z}. \tag{3.12}$$

我们可以像上文证明 (3.3) 那样，得出 (3.11) 在 Re $s \ge 3/4$ 时对 $\tilde{a}_m(n, y, s)$ 条件收敛、$\tilde{a}_m(n, y, 3/4) = 0$ 在 $n < 0$ 时成立、(3.10) 在 Re $s \ge 3/4$ 时绝对收敛，以及 (3.4)。□

注意，(3.4) 和 (3.3) 可以改写为

$$\tilde{a}_{m,n} = \frac{2}{\sqrt{m}} \sum_{\text{odd } c>0} \frac{\tilde{S}(-m,n,c)}{\sqrt{c}} \sinh\Big(\frac{2\pi\sqrt{2m(n+3/8)}}{c}\Big)$$

and

$$a_{m,n} = \frac{\mathbf{e}(-\frac{3}{8})}{\sqrt{m}} \sum_{c=1}^{\infty} \frac{S(-m,n,c)}{\sqrt{c}} \sinh\Big(\frac{2\pi\sqrt{mn}}{c}\Big).$$

由这些恒等式以及 (3.8) 和 (3.12)，我们得到以下推论（较大的 O 项并非最优，但足以满足我们的需要）。

引理 3.2。 对于任意 $k, m \ge 1$，有

$$\tilde{a}_{m,n} = \frac{2}{\sqrt{m}} \sum_{\substack{1\le c<2k+1 \\ c \text{ odd}}} \frac{\tilde{S}(-m,n,c)}{\sqrt{c}} \sinh\Big(\frac{2\pi\sqrt{2mn_+}}{c}\Big) + O\bigg(m^{3/2}n_+^2 \exp\Big(\frac{2\pi\sqrt{2mn_+}}{2k+1}\Big)\bigg)$$

并且若还有 $n \ge 1$，则

$$a_{m,n} = \frac{\mathbf{e}(-\frac{3}{8})}{\sqrt{m}} \sum_{1\le c<k+1} \frac{S(m,n,c)}{\sqrt{c}} \sinh\Big(\frac{2\pi\sqrt{mn}}{c}\Big) + O\bigg(m^{3/2}n^2 \exp\Big(\frac{2\pi\sqrt{mn}}{k+1}\Big)\bigg).$$

我们只考虑 $k = 1$ 这一种情况，由此得出，对于 $m \ge 1$

$$\tilde{a}_{m,n} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{m}} e^{2\pi\sqrt{2m(n+3/8)}} + O\bigg(m^{3/2}(n+3/8)^2 \exp\Big(\frac{2\pi\sqrt{2m(n+3/8)}}{3}\Big)\bigg) \tag{3.13}$$

且当 $m,\ n \ge 1$

$$a_{m,n} = \frac{e^{2\pi\sqrt{mn}}}{2\sqrt{m}} + O\Big(m^{3/2}n^2 e^{\pi\sqrt{mn}}\Big). \tag{3.14}$$

4. Approximate formula for f_n and the special function $\Phi(z)$

本节将利用 (3.13)，对 $f_n(x)$ 在 $x > n/9$ 的情形给出简明而精确的近似。这实质上将此范围内对 f_n 的研究归结为对一个新的特殊函数 $\Phi(z)$ 的研究，该函数定义于下文的 (4.2)。我们将证明 $\Phi(z)$ 可延拓为 $\mathbb{C}$ 上的亚纯函数，且在 $z = 0$ 处有一个单极点；随后，我们将估计 $\Phi(x)$ 在负实数 x 处的取值，并证明 Φ 有无穷多个负实零点。

4.1. () 的近似公式 $f_n(x)$ 当 $x > n/9$时。我们先说明 (3.13) 如何导出一个在 $x > n/9$ 时对 $f_n(x)$ 有效的近似公式。思路是从 (2.8) 出发，将其改写为

$$\frac{f_n(x)}{\sin(\pi x)} = \int_0^\infty g_n(1+it)e^{-\pi x t}dt\,, \qquad x > n\,,$$

然后使用 $(\tau/i)^{-3/2}g_n(1-1/\tau)$ 的傅里叶展开。由

$$\int_0^\infty e^{-2\pi\alpha t^{-1}-\pi x t}t^{-3/2}dt = \frac{e^{-2\pi\sqrt{2\alpha x}}}{\sqrt{2\alpha}}\,, \qquad \operatorname{Re}\alpha,\, \operatorname{Re}x > 0,$$

结合 (3.2)，我们得到恒等式

$$\frac{f_n(x)}{\sin(\pi x)} = \sum_{\nu\ge 0}\tilde{a}_{n,\nu}\frac{e^{-2\pi\sqrt{2x(\nu+3/8)}}}{\sqrt{2(\nu+3/8)}}\,, \qquad x > n.$$

由 (3.13),

$$\frac{f_n(x)}{\sin\pi(x-n)} = \sum_{\nu\ge 0}\frac{e^{2\pi\sqrt{2(\nu+3/8)}(\sqrt{n}-\sqrt{x})}}{\sqrt{2n(\nu+3/8)}} + E_n(x)\,, \qquad x > n\,, \tag{4.1}$$

其中

$$E_n(x) := \sum_{\nu\ge 0}\Big(\tilde{a}_{n,\nu} - \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}e^{2\pi\sqrt{2n(\nu+3/8)}}\Big)\frac{e^{-2\pi\sqrt{2x(\nu+3/8)}}}{\sqrt{2(\nu+3/8)}}\,.$$

注意，由（3.13）中的误差项可知，$E_n(x)$ 定义良好，并且在 $\operatorname{Re}\sqrt{x} > \sqrt{n}/3$ 时是解析的；在此区域内，它满足

$$E_n(x) = O\Big(\frac{e^{-\pi\sqrt{3}\operatorname{Re}(\sqrt{x}-\sqrt{n}/3)}}{|\sqrt{x}-\sqrt{n}/3|^5}\Big)\,.$$

我们定义

$$\Phi(z) := \sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{e^{-2\pi z\sqrt{2(\nu+3/8)}}}{\sqrt{2(\nu+3/8)}}\,, \qquad \operatorname{Re}z > 0. \tag{4.2}$$

在下面的第 4.2 节中，我们将证明，$\Phi(z)$ 可解析延拓为 $\mathbb{C}$ 中的一个亚纯函数，在 $z = 0$ 处有一个单极点，且没有其他奇点。于是，由 (4.1) 以及解析函数的唯一性，可得以下结果。

引理 4.1。 对于 $z \neq n$，若 $\operatorname{Re} z > 0$ 且 $\operatorname{Re} \sqrt{z} > (1/3+\varepsilon)\sqrt{n}$，则有

$$\frac{f_n(z)}{\sin \pi(z-n)} = \frac{\Phi(\sqrt{z}-\sqrt{n})}{\sqrt{n}} + E_n(z)\,, \tag{4.3}$$

其中 $E_n(z)$ 在上述范围内是解析的，并且满足

$$E_n(z) = O_\varepsilon\big(e^{\pi\sqrt{3}(\sqrt{n}/3 - \operatorname{Re}\sqrt{z})}\big)\,.$$

为了从 (4.3) 中提取关于 f_n 的更多信息，我们转而更详细地研究特殊函数 Φ。

4.2. 的解析延拓。由 (4.2)，我们计算 Φ 的梅林变换，得到

$$\int_0^\infty \Phi(t) t^{s-1} dt = (2\pi)^{-s} 2^{-(s+1)/2} \Gamma(s) \zeta\Big(\frac{s+1}{2}, \frac{3}{8}\Big),$$

其中 $\zeta(s,x) = \sum_{n\geq 1}(n+x)^{-s}$ 是赫尔维茨 ζ 函数。先应用逆梅林变换，再将积分路径的实部移至 $-\infty$ 并收集留数，经过这一标准论证，便可得到 Φ 的下列表达式：

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi z} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{(k-1)/2}\zeta(\frac{1-k}{2}, \frac{3}{8})(-2\pi z)^k}{k!}\,. \tag{4.4}$$

由此可立即看出，Φ 在 $\mathbb{C}$ 上是亚纯的，在 0 处有一个单极点，且没有其他奇点。我们对 Φ 性质的深入分析基于以下函数方程。

引理 4.2。 对于 $z \in \mathbb{C}^\times$，有

$$\Phi(z) + \Phi(-z) = \sum_{n\geq 1} \frac{2\cos(\pi(\frac{3n-1}{4} - \frac{z^2}{n}))}{\sqrt{n}}\,. \tag{4.5}$$

证明。 根据 (4.4)，(4.5) 的左端显然是一个偶整函数。将右端改写为

$$2\sum_{n\geq 1} \frac{\cos(\pi\frac{3n-1}{4})}{\sqrt{n}} + 2\sum_{n\geq 1} \frac{\cos(\pi(\frac{3n-1}{4} - \frac{z^2}{n})) - \cos(\pi\frac{3n-1}{4})}{\sqrt{n}}$$

并利用第二个级数在紧集上的绝对一致收敛，可得 (4.5) 的右端同样是偶整函数。因此，只需验证 (4.5) 两端具有相同的泰勒系数。根据 (4.4)，(4.5) 左端的 z^{2m} 的系数为

$$A_m = \frac{(-2\pi)^{2m} 2^{m+1/2} \zeta(1/2-m, 3/8)}{(2m)!}.$$

对于（4.5）的右端，第 $2m$个泰勒系数为

$$B_m = \frac{\pi^m}{m!} \sum_{n\geq 1} \Big(\mathbf{e}(-\tfrac{m}{4}) \frac{\mathbf{e}(\frac{3n-1}{8})}{n^{m+1/2}} + \mathbf{e}(\tfrac{m}{4}) \frac{\mathbf{e}(-\frac{3n-1}{8})}{n^{m+1/2}}\Big).$$

于是可以很容易地由赫尔维茨公式推出等式 $A_m = B_m$

$$\zeta(1-s,a) = \frac{\Gamma(s)}{(2\pi)^s}\Big(\mathbf{e}(-\tfrac{s}{4})\sum_{n\geq 1}\frac{\mathbf{e}(na)}{n^s} + \mathbf{e}(\tfrac{s}{4})\sum_{n\geq 1}\frac{\mathbf{e}(-na)}{n^s}\Big),$$

对于 $0 < a < 1$，$\operatorname{Re} s > 0$ 成立，并结合伽马函数的倍增公式。□

由于当 $z \to +\infty$ 时，$\Phi(z)$呈指数衰减，(4.5) 表明，要理解 $\Phi(z)$ 在负的大 z 时的行为，只需了解较简单函数的行为

$$\Psi(x) := \sum_{n\geq 1}\frac{2\cos(\pi(\frac{3n-1}{4} - \frac{x}{n}))}{\sqrt{n}}\,. \tag{4.6}$$

4.3. 对 $\Phi(x)$ 在 $x < 0$ 上的估计。如果 (4.6) 中有平方根消去，那么 $\Psi(x)$ 的增长速度将慢于 x 的任何正幂。虽然尚未能证明这一点，但我们有以下较弱的结果。

定理 4.1。我们有

$$\Psi(x) \ll |x|^{0.108}$$

当 $x \to +\infty$ 时。

我们需要 以下经典结果，它可由 [24, 引理 4.2、引理 4.8推出].

引理 4.3. 设 f 是定义在 $C^1([a,b])$ 上的实值函数，且 f' 单调。若对于所有 t 属于 $[a,b]$，都有 $0 < m \leq |f'(t)| \leq \frac{2}{3}$，则

$$\sum_{a<n\leq b}\mathbf{e}(f(n)) \ll \frac{1}{m}.$$

定理 4.1 的证明. 注意到 $\Psi(x)/2$ 是

$$\Theta(x) := \sum_{n\geq 1}\frac{\exp(i\pi(\frac{3n-1}{4} - \frac{x}{n}))}{\sqrt{n}}, \tag{4.7}$$

因此，我们的目标是估计大 x 时 $\Theta(x)$ 的大小。

我们开始n，并估算大 n对总和的贡献。令 g

$$\Theta_y(x) := \sum_{n>y}\frac{\exp(i\pi(\frac{3n-1}{4} - \frac{x}{n}))}{\sqrt{n}}$$

and

$$F_y(t) := \sum_{y<n\leq t}\frac{\exp(\frac{i\pi(3n-1)}{4})}{\sqrt{n}},$$

通过分部求和，我们得到

$$\Theta_y(x) = i\pi x\int_y^\infty \frac{F_y(\infty) - F_y(t)}{t^2}e^{-i\pi\frac{x}{t}}dt. \tag{4.8}$$

因此，由于 $F_y(\infty) - F_y(t) \ll 1/\sqrt{t}$，当 $y = x^{\frac{2}{3}}$ 时，$\Theta_y(x)$ 显然有界。因此，剩下的问题是估计

$$R(x) \coloneqq \sum_{1\le n\le x^{\frac{2}{3}}} \frac{\exp(i\pi(\frac{3n-1}{4} - \frac{x}{n}))}{\sqrt{n}}.$$

由于指数函数 $\exp(i\pi\frac{(3n-1)}{4})$ 的周期性，只需估计如下形式的和

$$\sum_{k\le x^{\frac{2}{3}}} \frac{\exp(i\pi\frac{x}{8k+q})}{\sqrt{8k+q}},$$

其中 $0 \le q < 8$。现在我们证明

$$\sum_{x^{\frac{1}{2}}<k\le x^{\frac{2}{3}}} \frac{\exp(i\pi\frac{x}{8k+q})}{\sqrt{8k+q}} \ll 1. \tag{4.9}$$

事实上，令

$$G_x(t) \coloneqq \sum_{x^{\frac{1}{2}}<k\le t} \exp(i\pi\frac{x}{8k+q}),$$

由分部求和可得

$$\sum_{x^{\frac{1}{2}}<k\le x^{\frac{2}{3}}} \frac{\exp(i\pi\frac{x}{8k+q})}{\sqrt{8k+q}} \ll \frac{G_x(x^{\frac{2}{3}})}{x^{\frac{1}{3}}} + \int_{x^{\frac{1}{2}}}^{x^{\frac{2}{3}}} \frac{G_x(t)}{t^{\frac{3}{2}}}dt.$$

由引理 4.3，得 $|G_x(t)| \ll t^2/x$，从而得到所需的界 (4.9)。

我们剩下的任务是为

$$\sum_{0\le k\le x^{\frac{1}{2}}} \frac{\exp(i\pi\frac{x}{8k+q})}{\sqrt{8k+q}}.$$

我们将求和按二进方式拆分，得到

$$\sum_{y<k\le 2y} \frac{\exp(i\pi\frac{x}{8k+q})}{\sqrt{8k+q}} \ll x^{\kappa}y^{\lambda-\frac{1}{2}-2\kappa},$$

其中 $(\quad \kappa\ \lambda \quad \frac{4742}{38463}+\varepsilon\ \frac{35371}{51284}+\varepsilon \quad x^{0.27} <,)$ 是一个 $y \le x^{\frac{1}{2}} \quad \frac{18}{199}+\varepsilon\ \frac{593}{796}+\varepsilon \quad 1 \le y \le x^{0.27} \quad [25, \quad 1\ 1]$ 指数对。在范围内使用指数对 (,)，并在（参见引理 .）时使用指数对 (,)，即可得到所需结果。□

下面的结果给出了 (1.8) 中的下界。

定理 4.2。我们有

$$\int_T^{2T} |\Psi(x)|^2 dx = T\log T + O(T)$$

当 $T \to \infty$ 时。

证明。 定理 4.1 的证明表明， $\Theta_{\sqrt{T}}(x)$ 是 $[-2T,2T]$ 上的有界函数。令

$$E_{\sqrt{T}}(x) := \sum_{n\le\sqrt{T}} \frac{\exp(i\pi(\frac{3n-1}{4} - \frac{x}{n}))}{\sqrt{n}},$$

因此我们有

$$\int_T^{2T} |\Psi(x)|^2 dx = \int_T^{2T} |E_{\sqrt{T}}(x)|^2 dx - 2\,\mathrm{Re}\int_T^{2T} E_{\sqrt{T}}(x)\overline{\Theta_{\sqrt{T}}(x)}dx + O(T). \tag{4.10}$$

展开平方并逐项积分，运用希尔伯特不等式可知，(4.10) 右端的第一项为 $T\log T + O(T)$。中间项为 $O(T)$。事实上，由于 $E_{\sqrt{T/2}} - E_{\sqrt{T}}$ 和 $\Theta_{\sqrt{T}} - \Theta_{\sqrt{2T}}$ 均为 $\ll 1$，只需注意到

$$\int_T^{2T} E_{\sqrt{T/2}}(x)\overline{\Theta_{\sqrt{2T}}(x)}dx \ll \sum_{n\le\sqrt{T}} \sqrt{n} \ll T^{\frac{3}{4}},$$

这可通过逐项积分以及对证明定理4.1第一部分所用方法稍作变通而得。□

4.4. 右半平面内的额外零点。现在我们将证明定理 1.5 的 (i) 和 (iii) 项。我们先建立一个引理，它可立即推出 (i) 项，同时也是证明 (iii) 项的关键。令

$$\Delta(t_1,t_2,n) := \{z:\ 0<\mathrm{Re}\,z\le n,\ t_1<\mathrm{Re}(\sqrt{z}-\sqrt{n})^2<t_2, |\,\mathrm{Im}(\sqrt{z}-\sqrt{n})^2|<\log n\}$$

并令 $N(f;\,t_1,t_2,n)$ 表示 f 在 $\Delta(t_1,t_2,n)$ 中的零点数，按通常方式计入重数。

引理 4.4. 当 n 足够大且 $3\le t_1<t_2\le n/2$ 时，我们有

$$|N(f_n;t_1,t_2,n) - (t_2-t_1)| \le 4. \tag{4.11}$$

证明. 令

$$\varphi(z) := (\sqrt{z}-\sqrt{n})^2$$

并注意到 φ 将 $\Delta(t_1,t_2,n)$ 映射到矩形

$$R(t_1,t_2,n) := \{w:\ t_1<\mathrm{Re}\,w<t_2, |\,\mathrm{Re}\,w|<\log n\}.$$

函数

$$F(w) := f_n(\varphi^{-1}(w))/\sin(\pi\varphi^{-1}(w))$$

于是有 $N(f_n;\,t_1,t_2,n)$ 个零点，位于 $R(t_1,t_2,n)$ 中。

设 m_1 和 m_2 为整数，使得

$$m_1-\tfrac12 \le t_1 < m_1+\tfrac12 \quad\text{and}\quad m_2-\tfrac12 < t_2 \le m_2+\tfrac12.$$

记 $w=u+iv$ 和 $F=U+iV$，并令 k 为整数。那么，由于

$$\cos\pi(k+iv) = \cos\pi k\cosh\pi v,$$

根据引理 4.1、引理 4.2 以及级数表示 (4.6)，我们得到 $\frac{d^2}{dy^2}U(k+iy)$ 的符号恒定。这意味着 U 本身沿任意一段竖直直线 $y \mapsto k+iy$ 至多改变符号两次。现在，我们在两个矩形 $R_n(m_1-\frac{1}{2},\ m_2+\frac{1}{2})$ 和 $\underline{R}_n(m_1+\frac{1}{2},\ m_2-\frac{1}{2})$ 中应用辐角原理。重复导出定理 4.1 时所用的论证，我们得到

$$F(u \pm i\log n) = 2\cos\pi\big(\tfrac{1}{2} - i\log n - u\big)(1+o(1)),$$

这意味着，F 沿这些矩形边界的水平部分所产生的辐角总变化分别为

$$2\pi(m_2-m_1+1)+o(1) \quad \text{and} \quad 2\pi(m_2-m_1-1)+o(1).$$

如果 F 在矩形边界的垂直部分上没有零点，那么无论哪种情况，辐角至多还会额外变化 4π。必要时，稍微移动任一矩形的垂直边，实际上就可以假设F 在这些垂直线段上没有零点，因此我们得出辐角总变化介于

$$2\pi(m_2-m_1-3) \quad \text{and} \quad 2\pi(m_2-m_1+3).$$

根据辐角原理和上述观察，我们得到式（4.11）。 □

定理 *1.5* 的 *(iii)* 项的证明。 我们沿用前一个证明中的记号。取一个较大的 M，并令

$$E(M) \coloneqq \{3 \le u \le x : |F(u)| \ge M\}.$$

根据定理 4.2 和定理 4.1，我们有

$$x\log x \ll_M x + |E(M)|x^{0.216}$$

这意味着

$$|E(M)| \gg x^{0.784}$$

如果 T 足够大。集合

$$\widetilde{E}(M) \coloneqq \bigcup_{u\in E(M)} (u-3, u+3)$$

~是若干开区间 I的并集，每个区间的长度为 ≥ 6，并且当 x 属于 $E(M)$时，如果 M足够大，则 $|\Psi(x)| \ge M/2$。在 $\{z=x+iy$中将有 $\ge |I|-4$个非实零点：$x\in I,\ |y| \le$对数$n\}$，因此 F在 $R(3,\ x,\ n)$中的非实零点数为 $\gg |E(M)| \gg x^{0.784}$。□

4.5. 正的额外零点。 本节将证明定理 1.5 的第 (ii) 部分。我们将通过证明 Ψ 与 $|\Psi|$在足够长的区间上的积分大小不同来实现这一点。根据引理 4.1 和引理 4.2，这进而意味着 f_n 与 $|f_n|$ 的相应积分存在差异，因此至少存在一个实零点。

我们从以下引理开始。

引理 4.5。我们有

$$\int_T^{T+V} \Psi(x)dx \ll T^{\frac{1}{2}} \log T \tag{4.12}$$

当 $\sqrt{T}\overline{\log}^2 T \le V \le T$ 和 T 足够大时。

证明。 改为证明以下结论会更方便:

$$\int_T^{T+V} \Theta(x)dx \ll T^{\frac{1}{2}} \log T$$

由于 $\Psi/2$ 是 Θ的实部，这显然意味着 (4.12)。我们首先注意到，根据 (4.8)， $\Theta_y(x) \ll \frac{x}{y^{\frac{3}{2}}}$。由此可得

$$\int_T^{T+V} \Theta_T(x)dx \ll VT^{-\frac{1}{2}}.$$

我们将 (4.7) 中剩余的和式 $\Theta(x) - \Theta_T(x)$ 按二进方式拆分，并考虑

$$S_y(x) := \sum_{y<n\le 2y} \frac{\exp(i\frac{\pi}{4}(\frac{3n-1}{4} - \frac{x}{n}))}{\sqrt{n}}. \tag{4.13}$$

逐项积分可得

$$\Big|\int_T^{T+V} S_y(x)dx\Big| \le \frac{2}{\pi} \max_{T\le x\le T+V} \Big|\sum_{y<n\le 2y} \sqrt{n}\exp(i\pi(\tfrac{3n-1}{4} - \tfrac{x}{n}))\Big|. \tag{4.14}$$

再次利用引理 4.3，我们得到

$$\int_T^{T+V} S_y(x)dx \ll \frac{y^{\frac{5}{2}}}{T} \tag{4.15}$$

当 $y \ge \sqrt{T}$ 时。然而，令

$$G_1(t) := \sum_{y<n\le t} \exp(i\pi(\tfrac{3n-1}{4})),$$

对 (4.14) 的右端应用分部求和，可得

$$\int_T^{T+V} S_y(x)dx \ll x\int_y^{2y} G_1(t)\frac{e^{-i\pi\frac{x}{t}}}{t^{\frac{3}{2}}}dt + O(\sqrt{y}).$$

我们注意到 G_1 是一个 8 周期函数。现在递归定义

$$G_k(t) := \int_y^t G_{k-1}(u)du - \int_y^{y+8} G_{k-1}(u)du,$$

通过反复分部积分，我们得到，

$$\int_T^{T+V} S_y(x)dx \ll x^k\int_y^{2y} G_k(t)\frac{e^{-i\pi\frac{x}{t}}}{t^{2k-\frac{1}{2}}}dt + O(\sqrt{y}) \ll \frac{T^k}{y^{2k-\frac{3}{2}}} + O(\sqrt{y}). \tag{4.16}$$

当.....时，(4.15) 和 (4.16) 中的上界相同

$$y = T^{\frac{k+1}{2k+1}},$$

因此我们得到

$$\int_T^{T+V} (\Theta_{\sqrt{T}}(x) - \Theta_T(x))dx \ll T^{\frac{1}{2}}$$

i若我们选择 $k = 2$。（通过令 k 足够大，我们可以得到指数 $\frac{1}{4} + \varepsilon$.)

最后，对于 $y \leq \sqrt{T}$，选取一个合适的指数对（κ， λ），由 (4.13) 可知

$$\int_T^{T+V} S_y(x)dx \ll T^{\kappa} y^{\lambda + \frac{1}{2} - 2\kappa}.$$

选择 $\kappa = \lambda = \frac{1}{2}$，因此我们得到

$$\int_T^{T+V} (\Theta(x) - \Theta_{\sqrt{T}}(x))dx \ll \sqrt{T} \log T. \qquad \square$$

另一方面，我们还有如下结论。

引理 4.6。 存在一个正数 M，使得

$$\int_T^{T+M} |\Psi(x)|\, dx \geq 1$$

对所有实数 T均成立。

证明。 利用这一事实

$$\Psi''(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{2\pi^2 \cos(\pi(\frac{3n-1}{4} - \frac{x}{n}))}{n^{\frac{5}{2}}}$$

以及 Rouch´e 定理，我们发现 Ψ'' 的零点都是实的且为单零点。此外，该零点集是一致离散的，并且对于每个整数 k，区间（k， $k+1$）内恰有一个零点。对于两个相邻的零点 t_k 和 t_{k+1}，令 f 为一个 4 次多项式，使其在 t_k 和 t_{k+1} 处与其导数同时为零，并且在（t_k， t_{k+1}）上满足 $f\Psi'' > 0$。于是

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} \Psi''(x)f(x)dx = \int_{t_k}^{t_{k+1}} \Psi(x)f''(x)dx \leq \max_{x \in [t_k, t_{k+1}]} |f''(x)| \int_{t_k}^{t_{k+1}} |\Psi(x)|\, dx.$$

由于序列 t_k 是一致离散的，且 $|\Psi''|$ 在整数集上有一致的下界，左侧的积分有一致的下界，而右侧的最大值有一致的上界。□

现在可以立即得到定理 1.5 的第 (ii) 项的证明。事实上，只需将区间 $[x/2, x]$ 划分为 $\gg \sqrt{x}/\log^2 x$ 个子区间，使引理 4.5 适用于每个子区间。再次应用引理 4.1 和引理 4.2，以及引理 4.6,_我们看到这 $\gg \sqrt{x}/\log^2 x$ 个子区间中的每一个都必须包含 f_n 的至少一个零点。

5. Further estimates for positive arguments of f_n

本节给出定理 1.1 的证明，以及定理 1.3 中 (1.8) 的上界。对于 $\operatorname{Re}\sqrt{z} > (1/3+\varepsilon)\sqrt{n}$ 之外的 f_n，我们将采用其他的渐近表达式，因为此时关于 f_n 的定量信息较难获得。

我们将通过以下方式获得 $f_n(x)$ 的界 (1.4)：

$$f_n(x) = e^{c\pi n}\int_{-1}^{1} F(t+ic,x)e^{-i\pi nt}dt,$$

其中，$F(\tau,\ z)$ 是 f_n 的生成函数（见 (2.10)、(2.11)）。为证明定理 1.3，我们不直接使用这一事实，而是将对偶论证与 [3] 中用于估计以下形式函数的傅里叶系数的一般方法结合起来：

$$F_\varphi(\tau) := \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} K(\tau,w)\varphi(w)dw$$

其中 φ 是关于 $\mathfrak{H}$ 具有中等增长的函数。

5.1. () 在 $0 \le x \le n/8$ 时的行为。本节给出范围 $0 \le x \le n/8$ 内逐点界 (1.4) 的证明。证明技术依赖于 [3, 第 6] 节。

我们首先回顾 [3, 第 6] 节中的设定。令 γ_τ 为将 $\mathfrak{H}$ 中的 τ映射到基本域 $\mathcal{F}$的（通常唯一的）元素。我们用$\mathbf{I}(\tau)$表示 $\gamma_\tau\tau$的虚部，即，

$$\mathbf{I}(\tau) = \operatorname{Im}\gamma_\tau\tau.$$

容易看出，函数$\mathbf{I}\colon\ \mathfrak{H}\to\mathbb{R}$ 是连续的且具有 Γ_θ-不变性。我们定义$\mathbf{N}\colon\ \mathfrak{H}\to\mathbb{Z}_{\ge 0}$ 为 1 加上 γ_τ的标准表示中出现的反演 S 的数量，即，

$$\mathbf{N}(\tau) = j+\varepsilon_0+\varepsilon_1, \qquad \gamma_\tau = S^{\varepsilon_0}T^{2m_1}ST^{2m_2}\dots ST^{2m_j}S^{\varepsilon_1}.$$

当 γ_τ未被唯一确定时，也就是说，当 τ位于 $\Gamma_\theta\partial\mathcal{F}$中时，令$\mathbf{N}(\tau)$取两个可能值中较大的一个。

我们需要三个引理。第一个是对 [3, 命题 6.1]的一个小幅改述。考虑图 3 所示的定义域 $\mathcal{D}$。具体而言，我们令

$$\mathcal{D} := \{\tau\in\mathfrak{H}\colon\ |\operatorname{Re}\tau|<1,\ \sqrt{3/4}<|\tau|<\sqrt{4/3},\ |\tau\pm 1/2|>1/2\};$$

$\mathcal{D}$ 的具体形状并不重要，只要它包含从 -1到 1 的测地线且位于 $\mathcal{F}\cup S\mathcal{F}$中即可。再令 ℓ 为图 2 所示的路径。ℓ 的关键特征是它在 0 处与实轴形成一个正角。用 $J^{-1}(\ell)\subset\mathcal{F}$ 表示路径 ℓ 在保角映射 $J|_{\mathcal{F}}$ 下的原像（见图 2）。

引理 5.1。存在一个常数 C，仅取决于 ℓ 和 q，使得

$$\int_{J^{-1}(\ell)} |K(\tau,z)|^q|dz| \le C\max(1,(\operatorname{Im}\tau)^{-2(q-1)}).$$

当 τ 属于 $\mathcal{F}$ 且 $q\ge 1$时。

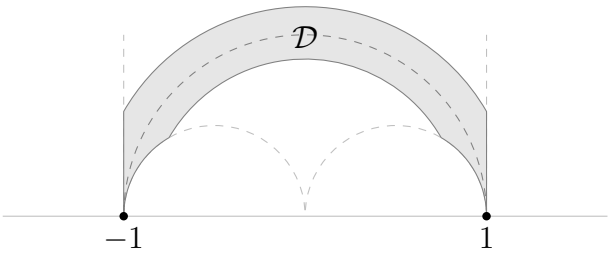

FIGURE 3. 定义域 $\mathcal{D}$。

证明。 不失一般性，我们可以假设 Re τ属于 $(-1,0)$， $|\tau|>1$ 且 Im $\tau\le 1/2$。为了估计该积分，我们将积分变量替换为 $w=J(z)$。令 $t(w)$为 $z\mapsto J(z)$的反函数。利用 (2.6) 进行变量替换，我们得到

$$\int_{J^{-1}(\ell)}|K(\tau,z)|^q|dz|=\pi^{-1}|\theta(\tau)|^q\int_\ell\frac{|\theta(t(w))|^{3q-4}|w|^{q-1}|1-64/w|^{(q-1)/2}}{|J(\tau)-w|^q}|dw|.$$

由于 $J(\tau)$ 位于上半平面，而 w 位于下半平面，并且 ℓ 在 0 处与实轴形成正角，因此我们有 $|J(\tau)-w|\gg\sqrt{|J(\tau)|^2+|w|^2}$，由此

$$\int_{J^{-1}(\ell)}|K(\tau,z)|^q|dz|\ll|\theta(\tau)|^q\int_\ell\frac{|\theta(t(w))|^{3q-4}|w|^{(q-1)/2}}{(|J(\tau)|^2+|w|^2)^{q/2}}|dw|.$$

Now

$$\begin{aligned}\int_\ell\frac{|\theta(t(w))|^{3q-4}|w|^{(q-1)/2}}{(|J(\tau)|^2+|w|^2)^{q/2}}|dw|&\ll 1+\int_0^{\frac12}\frac{t^{7q/8-1}\left(\log\frac1t\right)^{(3q-4)/2}}{(|J(\tau)|^2+t^2)^{q/2}}dt\\&\ll|J(\tau)|^{-q/8}\left(\log\frac{1}{|J(\tau)|}\right)^{-q/2+2(q-1)},\end{aligned}$$

由此可得结论。（这里我们关键地使用了由傅里叶展开 (2.5) 得出的 $\tau\to 1$ 的界。）□

下一个引理是 [3, 命题 6.6] 的推广。

引理 5.2。 对于 $0<y\le 1/2$，我们有

$$\int_{-1}^1\mathbf{I}(x+iy)^\alpha dx\ll_\alpha\begin{cases}1, & |\alpha|<1,\\ \log\frac1y, & |\alpha|=1,\\ y^{1-|\alpha|}, & |\alpha|>1.\end{cases}$$

证明。 我们断言

$$\mathbf{I}(\tau)\mathbf{I}(\tau+1)\ge 3/4\,,\qquad \tau\in\mathfrak{H}\,,$$

这将情形 $\alpha\le 0$ 归结为情形 $\alpha\ge 0$，而情形 $\alpha\ge 0$ 已由 [3, 命题 6.1]涵盖。

为了理解该断言为何成立，令 $\mathcal{F}_1:=\{z\colon |z|>1, |\operatorname{Re} z|<1/2\}$ 表示 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ 的标准基本域，并注意到 $\mathcal{F}'=\mathcal{F}_1\cup T\mathcal{F}_1\cup TS\mathcal{F}_1$是一个基本

域，它与 $\mathcal{F}$平移等价。令 $\tau_1 = \gamma_\tau \tau$和 $\tau_2 = \gamma_{\tau+1}(\tau+1)$ 分别为 τ和 $\tau+1$ 在 $\mathcal{F}$中的代表元。我们需要证明 $\operatorname{Im}\tau_1 \operatorname{Im}\tau_2 \geq 3/4$。如有必要，应用 T^2，我们可以假设 τ_1, τ_2 位于 $\mathcal{F}'$中。注意，对于一般的 τ，有 $\tau_1 \neq \tau_2$。由于 τ_1 和 τ_2 在 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$-等价，因此存在 $\tau_2 = \gamma\tau_1$ ，使得 γ 属于$\{T, TS, T^{-1}, ST^{-1}, TST^{-1}\}$。在所有情况下，该断言都可由不等式 $(\operatorname{Im} z)^2 \geq \frac{3}{4}|z|^2$ 推出，该不等式对所有属于 $\mathcal{F}_1$的 z 均成立。□

我们的第三个引理是 [3, 命题 6.7]。

引理 5.3. 我们有

$$\int_{-1}^{1} \mathbf{N}(x+iy) = \frac{2}{\pi^2}\log^2 y + O(\log y), \quad y \to 0.$$

现在我们可以证明所需的 f_n界了。

对(1.4)的证明。 鉴于 [3, 第 7], 节，只需估计 $|f_n(x)|$ ，其中 $1 \leq x \leq n$。由于

$$f_n(x) = \int_{-1+i/n}^{1+i/n} F_g(\tau) e^{-i\pi n\tau} d\tau,$$

其中 $g(z) := e^{i\pi xz}$，且 $F_g(\tau) = F(\tau, x)$（见 (2.10)），我们得到

$$|f_n(x)| \leq e^{\pi} \int_{-1}^{1} |F_g(t+i/n)|\, dt. \tag{5.1}$$

由于 $|g(x+iy)| \leq e^{-\pi xy}$， g 是 $\mathfrak{H}$ 中的有界函数，因而具有中等增长。这意味着我们可以使用 [3]的方法。为此，我们首先得到

$$F_g(\tau) \ll x^{-1/2} \max(1, (\operatorname{Im}\tau)^{-1}), \quad \tau \in \mathcal{F}. \tag{5.2}$$

事实上，通过作出与 [3,命题 6.1] 的证明中相同的积分路径变形，并使用引理 5.1，我们得到

$$\left| \int_{J^{-1}(\ell)} K(\tau, z) g(z) dz \right|^2 \leq \max(1, (\operatorname{Im}\tau)^{-2}) \int_{J^{-1}(\ell)} |g(z)|^2 |dz|.$$

这个界由下式推出 (5.2)，因为

$$\int_{J^{-1}(\ell)} |g(z)|^2 |dz| \ll x^{-1}.$$

为了估计 (5.1) 的右端，我们从 [3, 式 (6.3)，第 40] 页开始：

$$|F_g(\tau)|(\operatorname{Im}\tau)^{1/4} \leq |F_g(\tau_0)|(\operatorname{Im}\tau_0)^{1/4} + |\psi(\tau_0)|(\operatorname{Im}\tau_0)^{1/4} + \sum_{i=1}^{\mathbf{N}(\tau)} |\psi(\tau_i)|(\operatorname{Im}\tau_i)^{1/4}, \tag{5.3}$$

其中

$$\psi(z) := g(z) + (z/i)^{-1/2} g(-1/z),$$

点 τ_0 位于 $\cup_{j\in\mathbb{Z}}(2j + \mathcal{F})$ 中，并且

$$\tau_j := T^{2m_j} S \cdots T^{2m_1} S\tau_0, \quad \tau = S\tau_{\mathbf{N}(\tau)}. \tag{5.4}$$

根据 (5.2) 和引理 5.2，(5.3) 右端的第一项产生一个阶为 $n^{1/4}x^{-1/2}$ 的项。为处理剩下的两项，我们注意到现在有（记 $\eta_i := \operatorname{Im}\tau_i$）

$$|\psi(\tau_i)| \ll e^{-\pi x\eta_i} + |\tau_i|^{-1/2}e^{-\pi x\eta_{i+1}} = e^{-\pi x\eta_i} + \eta_i^{-1/4}\eta_{i+1}^{1/4}e^{-\pi x\eta_{i+1}}.$$

这给出

$$|\psi(\tau_0)|\eta_0^{1/4} \ll \eta_0^{1/4}e^{-\pi x\eta_0} + \eta_1^{1/4}e^{-\pi x\eta_1} \ll x^{-1/4} \tag{5.5}$$

以及

$$\sum_{i=1}^{\mathbf{N}(\tau)} |\psi(\tau_i)|\eta_i^{1/4} \le 2\mathbf{N}(\tau) \max_{1\le i\le \mathbf{N}(\tau)+1} \eta_i^{1/4}e^{-\pi x\eta_i} \ll \mathbf{N}(\tau)x^{-1/4}. \tag{5.6}$$

利用 (5.5) 和 (5.6) 估计 (5.3) 右端的后两项，并应用引理 5.3，即可得到所需的界。□

5.2. **利用 Carleson 测度论证估计平方和的积分**。现在我们将证明定理 1.3 中 (1.8) 的上界。此处将要发展的技巧，是对上一节所用方法的拓展。为便于阐述，我们将论证分为三个小节。

5.2.1. 空间 $H^2(\mathfrak{H})$。我们先介绍关于函数 f 属于 $H^2(\mathfrak{H})$以及相关函数 F_f 的一些一般事实，后者定义为

$$F_f(\tau) := \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} K(\tau, z)f(z)dz \tag{5.7}$$

对于基本域 $\mathcal{F}$ 中的 τ。我们回顾一下，如果 f 在 $\mathfrak{H}$ 中是解析的，并且

$$\|f\|^2_{H^2(\mathfrak{H})} := \sup_{y>0}\int_{-\infty}^{\infty} |f(x+iy)|^2dx < \infty.$$

$H^2(\mathfrak{H})$ 中的函数 f 在实轴上几乎处处都有非切向极限。相应的极限函数也记作 f，具有 L^2 范数 $\|f\|_{H^2(\mathfrak{H})}$。根据这一对应关系，我们可以将 $H^2(\mathfrak{H})$ 视为 $L^2(\mathbb{R})$ 的子空间，其中的函数的傅里叶变换在负频率处为零。有关 H^p 空间的一般信息，请参见 [6, 第 II 章]。

$H^2(\mathfrak{H})$ 中的函数具有中等增长。更准确地说，我们有

$$|f(u+iv)| \le v^{-1/2}\|f\|_{H^2(\mathfrak{H})} \tag{5.8}$$

这由柯西公式得到

$$f(w) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x-w}dx.$$

F_f 的相应界如下。

引理 5.4. 存在绝对常数 C，使得若 f 属于 $H^2(\mathfrak{H})$ 且 w 属于 $\mathcal{F}$，则

$$|F_f(w)| \le C \max(1, v^{-1})\|f\|_{H^2(\mathfrak{H})}.$$

证明。根据定义 (5.7) 和引理 5.1，我们有

$$|F_f(u+iv)|^2 \le C \max(1, v^{-2}) \int_\ell |f(z)|^2 |dz|.$$

显然，ℓ 上的弧长测度构成一个 Carleson 测度（见 [6, 第 30] 页），因此我们得到

$$|F_f(u+iv)|^2 \le C' \max(1, v^{-2})\|f\|^2_{H^2(\mathfrak{H})}$$

根据 Carleson 嵌入定理 [6,第 61] 页。 □

5.2.2. 利用 *Carleson* 测度条件进行估计。我们固定一个数 $\tau = t + i/\xi$，其中 $\xi \ge 10$。链 $\tau_0, \dots, \tau_{\mathbf{N}(\tau)}$ 与之前相同，而我们的目标是估计

$$|F_f(\tau)|(\operatorname{Im}\tau)^{1/4} \le |F_f(\tau_0)|(\operatorname{Im}\tau_0)^{1/4} + \mathcal{C}_f(\tau), \tag{5.9}$$

其中，$\mathcal{C}_f(\tau)$将是一个和式的模，该和式类似于 (5.3) 右端的和式。我们用 $\mathbf{C}(\tau)$ 表示满足下式的最小常数 C

$$\mathcal{C}_f(\tau) \le C\|f\|_{H^2(\mathfrak{H})} \tag{5.10}$$

成立 对所有 f 属于 $H^2(\mathfrak{H})$ 均成立。我们的关键估计包含在以下引理中 .

引理 5.5. 我们有

$$\int_{-1}^{1} \mathbf{C}^2(t + i/\xi)dt \ll \xi^{1/2}\log^2\xi. \tag{5.11}$$

我们先为该引理的证明做准备，找出 $\mathcal{C}_f(\tau)$ 的一个合适上界。首先定义 n_0 为满足下列任一条件的最大 ℓ

$$|\tau_\ell - 1|^2 \le \eta_\ell \quad \text{or} \quad |\tau_\ell + 1|^2 \le \eta_\ell.$$

不失一般性，假设 $|\tau_{n_0} - 1|^2 \le \eta_{0}$。那么所有点 $\tau_0, \dots, \tau_{n_0}$ 都位于圆上

$$D(\tau_{n_0}) := \Big\{ z : \ \Big| z - 1 - i\frac{|\tau_{n_0} - 1|^2}{2\eta_{n_0}} \Big| = \frac{|\tau_{n_0} - 1|^2}{2\eta_{n_0}} \Big\},$$

因此

$$\frac{|\tau_{n_0} - 1|^2}{2\eta_{n_0}} \le \mathbf{I}(\tau) \le \frac{|\tau_{n_0} - 1|^2}{\eta_{n_0}}. \tag{5.12}$$

我们可以将 C_f 表示为

$$C_f(\tau) = \Big| \sum_{i=0}^{\mathbf{N}(\tau)} \lambda_i \psi(\tau_i)(\operatorname{Im}\tau_i)^{1/4} \Big|,$$

其中 λ_i 是模为 1 的数，并且

$$\psi(z) := f(z) + (z/i)^{-1/2} f(-1/z). \tag{5.13}$$

我们可以在范围 $0 \le i \le n_0$ 内计算 λ_i。事实上，此时我们发现

$$\mathcal{C}_f(\tau) \le \mathcal{C}_{f,1}(\tau) + \mathcal{C}_{f,2}(\tau),$$

其中

$$\mathcal{C}_{f,1}(\tau) \coloneqq \eta_{n_0}^{1/4} \Big| \sum_{j=0}^{n_0} \psi(\tau_{n_0-j})(-1)^j \Big(\frac{j(\tau_{n_0}-1)+1}{i} \Big)^{-1/2} \Big|, \ \tau_{n_0-j} = \frac{(j+1)\tau_{n_0} - j}{j(\tau_{n_0}-1)+1}, \tag{5.14}$$

and

$$\mathcal{C}_{f,2}(\tau) \coloneqq \sum_{j=n_0+1}^{\mathbf{N}(\tau)} |\psi(\tau_j)| (\operatorname{Im} \tau_j)^{1/4}.$$

我们以这种方式分解 $\mathcal{C}_f(\tau)$，以利用 (5.14) 右端求和中的抵消项。为此，我们有如下结果。

引理 5.6. 存在指标 $0 = j_1 < \cdots < j_k = n_0$ 以及点 $\kappa_{j_1}, \dots, \kappa_{j_k}$，使得

$$|\tau_{j_\ell} - \kappa_{j_\ell}| \le \eta_{j_\ell}/2, \quad \#\{\kappa_{j_i} : \ |\kappa_{j_i} - \kappa_{j_\ell}| \le \operatorname{Im} \kappa_{j_\ell}\} \ll 1, \quad 1 \le \ell \le k, \tag{5.15}$$

$$\mathcal{C}_{f,1}(\tau) \ll \sum_{\ell=1}^{k} |\psi(\kappa_{j_\ell})| (\operatorname{Im} \kappa_{j_\ell})^{1/4} \big(1 + \mathbf{I}(\tau)^{-1/2} (\operatorname{Im} \kappa_{j_\ell})^{1/2} \big). \tag{5.16}$$

证明。 我们令 $j_0 = 0$，并通过要求下列条件成立，归纳地定义数 j_ℓ

$$|\tau_{j_\ell} - \tau_{j_{\ell+1}}| \le \eta_{j_\ell}/4 < |\tau_{j_\ell} - \tau_{j_{\ell+1}+1}|$$

只要这些不等式对某个 $j_{\ell+1} < n_0$成立；否则，我们令 $j_{\ell+1} = n_0$，终止这一过程。计算可得

$$|\tau_{n_0-j} - \tau_{n_0-(j+1)}| \asymp \frac{|\tau_{n_0} - 1|^2}{\eta_{n_0}} \eta_{n_0-j},$$

由此

$$j_{\ell+1} - j_\ell \ll \mathbf{I}(\tau)^{-1} \tag{5.17}$$

根据（5.12）。

为了估计$\mathcal{C}_{f,\ 1}$，我们写成

$$\mathcal{C}_{f,1} \le \sum_{\ell=1}^{k} \sigma_\ell,$$

其中

$$\sigma_\ell \coloneqq \eta_{n_0}^{1/4} \Big| \sum_{j=j_\ell}^{j_{\ell+1}-1} \psi(\tau_{n_0-j})(-1)^j \Big(\frac{j(\tau_{n_0}-1)+1}{i} \Big)^{-1/2} \Big|. \tag{5.18}$$

我们将通过分部求和和柯西估计来估计 σ_ℓ。首先，令$H(x) := \sum_{M\le j\le x}(-1)^j$，通过分部求和可得

$$\sum_{j=M}^{M+N}(-1)^j(j(\tau_{n_0}-1)+1)^{-1/2} = H(M+N)((M+N)(\tau_{n_0}-1)+1)^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}(\tau_{n_0}-1)\int_M^{M+N} H(x)(x(\tau_{n_0}-1)+1)^{-\frac{3}{2}}dx.$$

若 $M = j_\ell$ 且 $M+N \le j_{\ell+1}-1$，则利用 (5.17) 和界 $|H(x)| \le 2$，可得

$$\eta_{n_0}^{1/4}\sum_{j=j_\ell}^{j_\ell+N}(-1)^j(j(\tau_{n_0}-1)+1)^{-1/2} \ll \eta_{n_0-j_\ell}^{1/4} + \mathbf{I}(\tau)^{-1/2}\eta_{n_0-j_\ell}^{3/4}. \tag{5.19}$$

由分部求和及 (5.19)，

$$\sigma_\ell \ll \big(\mathbf{I}(\tau)^{-1/2}\eta_{n_0-j_\ell}^{3/4} + \eta_{n_0-j_\ell}^{1/4}\big)\Big(|\psi(\tau_{n_0-j_\ell})| + \int_{\tau_{n_0-j_\ell}}^{\tau_{n_0-j_{\ell+1}+1}+1}|\psi'(z)||dz|\Big),$$

其中，我们在右端沿两点之间的线段进行积分。回顾 (5.13) 和 (5.8)，对该线段上的每个 z，在其周围半径为 $\eta_{n_0-j_\ell}/4$ 的圆上作柯西估计，即可得到所需结果。具体而言，我们取 κ_{j_ℓ} 为满足以下条件的 w： $|\psi(w)|$ 在距 $\tau_{n_0-j_\ell}$ 与 $\tau_{n_0-j_{\ell+1}+1}$ 之间的线段不超过 $\eta_{n_0-j_\ell}/4$ 的点集上于此处达到最大值。□

现在引入如下记号

$$\Gamma_\alpha(u) := \{x+iy \in \mathfrak{H} : |x-u| < \alpha y\},$$

其中 $\alpha > 0$。我们需要以下关于 $H^2(\mathfrak{H})$ 的 L^1 Carleson 测度的描述。

引理 5.7。设 μ 是 $\mathfrak{H}$ 上的非负测度。则

$$\left(\int_{\mathfrak{H}}|G(z)|d\mu(z)\right)^2 \ll_\alpha \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{\Gamma_\alpha(u)} y^{-1}d\mu(x+iy)\right)^2 du\ \|G\|_{H^2(\mathfrak{H})}^2. \tag{5.20}$$

这一结果见 [16, 定理 C]。如其中所示，该不等式是 Hardy–Littlewood 定理关于非切向极大函数 [6, p 的 L^p 有界性 55] 的直接推论。另一个更微妙的结果（亦在 [16], 中证明）是，常数的数量级

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{\Gamma_\alpha(u)} y^{-1}d\mu(x+iy)\right)^2 du$$

在 (5.20) 的右端是最优的。

证明 of 引理 5.5. 我们令$\mathbf{C}_i(\tau)$，$i = 1, 2$ 为满足以下条件的最小常数 C：

$$\mathcal{C}_{f,i}(\tau) \le C\|f\|_{H^2(\mathfrak{H})}$$

对所有 $f \in H^2(\mathfrak{H})$均成立。显然，只需证明

$$\int_{-1}^{1} \mathbf{C}_i^2(t + i/\xi)dt \ll \xi^{1/2} \log^2 \xi, \quad i = 1, 2. \tag{5.21}$$

两种情况下的证明基本相同。

为证明当 $i = 2$ 时的 (5.21)，我们令

$$\mu = \sum_{j=n_0+1}^{\mathbf{N}(\tau)-1} \left(\eta_j^{1/4} \delta_{\tau_j} + \eta_{j+1}^{1/4} \delta_{S\tau_j} \right)$$

且 $\alpha = 1/4$。由引理 5.7，得到

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{1} \mathbf{C}_2^2(t + i/\xi)dt &\ll \int_{-1}^{1} \int_{-\infty}^{\infty} \Big(\sum_{\tau_i \in \Gamma_{1/4}(u)} \eta_i^{-3/4} + \sum_{S\tau_i \in \Gamma_{1/4}(u)} \eta_{i+1}^{-3/4} \Big)^2 du\, dt \\ &\le 2 \int_{-1}^{1} \int_{-\infty}^{\infty} \Big(\sum_{\tau_i \in \Gamma_{1/4}(u)} \eta_i^{-3/4} \Big)^2 du\, dt + 2 \int_{-1}^{1} \int_{-\infty}^{\infty} \Big(\sum_{S\tau_i \in \Gamma_{1/4}(u)} \eta_{i+1}^{-3/4} \Big)^2 du\, dt. \end{aligned} \tag{5.22}$$

因此，我们剩下的问题是估计 (5.22) 中的两个二重积分。两者都可以用同样的方法处理，因此我们只详细说明第一个。展开平方后，我们得到

$$\int_{-1}^{1} \int_{-\infty}^{\infty} \Big(\sum_{\tau_i \in \Gamma_{1/4}(u)} \eta_i^{-3/4} \Big)^2 du\, dt \ll \int_{-1}^{1} \sum_{i=n_0+1}^{\mathbf{N}(t+i/\xi)} \eta_i^{-3/4} \sum_{j \ge i,\, |\operatorname{Re}(\tau_i - \tau_j)| < \eta_i/2} \eta_j^{1/4} dt.$$

如果我们能够证明

$$\sum_{j \ge i,\, |\operatorname{Re}(\tau_i - \tau_j)| < \eta_i/2} \eta_j^{1/4} \ll \eta_i^{1/4}, \tag{5.23}$$

于是所需的界便得到了，因为我们得到

$$\int_{-1}^{1} \int_{-\infty}^{\infty} \Big(\sum_{\tau_i \in \Gamma_{1/4}(u)} \eta_i^{-3/4} \Big)^2 du\, dt \ll \int_{-1}^{1} \sum_{i=0}^{\mathbf{N}(t+i/\xi)} \eta_i^{-1/2} dt \ll \xi^{1/2} \int_{-1}^{1} \mathbf{N}(t + i/\xi)dt$$

应用引理 5.3 后即可得出结论。

下面还需证明（5.23）。令

$$Q_i := \{u + iv : \ |u - \operatorname{Re} \tau_i| \le \eta_i/2, \ 0 < v \le \eta_i\}$$

并假设 τ_i 位于矩形 $\{u + iv : \quad 1 < u < 4/3, \quad 0 < v < 1/9\}$，其中界 $0 < v < 1/9$ 来自条件 $(\xi_i - 1)^2 > \eta_i - \eta_i^2$。只需考虑这种情形，因为如果 τ_i 位于该矩形的右侧，问题便是平凡的；而当 $\xi_i < -1$ 时，我们也可以完全相同地进行论证。

假设 τ_j、τ_{j+1}、……、τ_{j+k}都属于 Q_i，但 τ_{j+k+1}不属于。我们要证明，这意味着 $k \le 5$，并且如果 $\ell > j + k + 1$ 且 τ_ℓ属于 Q_i，那么 $\eta_\ell < 9\eta_{j+k}/25$。显然，这将推出 (5.23)。

关于 τ_j、τ_{j+1}、……、τ_{j+k}的假设意味着

$$\tau_{j+\nu+1} = T^2 S\tau_{j+\nu}, \quad 0 \le \nu \le k-1.$$

一般而言，对于 $\mathfrak{H}$ 中的点 $w = u + iv$，我们有

$$u - \mathrm{Re}(T^2 Sw) = u - 2 + \frac{u}{|w|^2} = \frac{u(1-u)^2 + uv^2 - 2v^2}{u^2+v^2}. \tag{5.24}$$

如果 w 属于 Q_i，则有

$$u - \mathrm{Re}(T^2 Sw) \ge \frac{9}{16}\big((1-\mathrm{Re}\,\tau_i)^2 - \eta_i(\mathrm{Re}\,\tau_i - 1) - 5\eta_i^2/4\big).$$

另外，考虑到 $(1-\mathrm{Re}\,\tau_i)^2 > \eta_i - \eta_i^2$，由此界可推得

$$u - \mathrm{Re}(T^2 Sw) > \frac{9}{16}\big((2-\mathrm{Re}\,\tau_i)\eta_i - 5\eta_i^2/2\big) \ge \frac{7}{32}\eta_i.$$

这意味着 $k \le 5$。

最后，显然，如果对于某个 $\ell > j+k+1$，τ_ℓ 属于 Q_i，那么在 $j+k$ 和 ℓ 之间必定存在一个 ℓ'，使得 $|\mathrm{Re}\ \tau_{\ell'}| \ge 5/3$，这意味着 $\eta_\ell < 9\eta_{j+k}/25$。

现在我们转而证明 $i=1$ 的 (5.21)。利用引理 5.6 的 (5.15)，我们得到

$$\mathbf{I}(\tau)^{-1/2}\sum_{i=1}^{k}|\psi(\kappa_{j_i})|(\mathrm{Im}\,\kappa_{j_i})^{3/4} \ll \mathbf{I}(\tau)^{-1/2}\xi^{1/4}\|f\|_{H^2(\mathfrak{H})},$$

因此，根据柯西–施瓦茨不等式和引理 5.2，(5.16) 中相应部分的和对 (5.21) 中的积分贡献了 $\ll \xi^{1/2}\log\xi$ 这一项。

为处理 (5.16) 中和式的剩余部分，我们首先注意到，对于位于水平线 $y = r/10$ 之上（设 r 为 $D(\tau)$ 的半径）的点 κ_{j_i}，相应的各项之和至多为 $O(\xi^{1/4})\|f\|_{H^2(\mathfrak{H})}$。因此，我们可以从 (5.16) 中删去这些项；然后，借助引理 5.6，基本上逐字重复情形 $i=2$ 下的证明。我们省略这一论证的细节。□

5.2.3. 证明定理 *1.3* 中 (1.8) 上界的推导。我们从公式开始

$$e^{-\pi}\sum_{n\le\xi}|f_n(x)|^2 \le \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}|F_g(t+i/\xi)|^2 dt, \tag{5.25}$$

其中与之前一样，$g(z) := e^{i\pi xz}$。因此，根据对偶性，我们有

$$\int_0^\infty \sum_{n\le\xi}|f_n(x)|^2 dx \le \frac{e^\pi}{2}\sup_{\|h\|_2=1}\left|\int_0^\infty\int_{-1}^{1} F_g(t+i/\xi)h(t,x)\,dtdx\right|, \tag{5.26}$$

其中

$$\|h\|_2^2 := \int_0^\infty\int_{-1}^{1}|h(t,x)|^2 dtdx.$$

根据富比尼定理，该函数

$$H_t(z) := \int_0^\infty h(t,x)e^{\pi ixz}dx$$

将 b 当 $\|h\|_2 = 1$ 时，几乎所有 t 都有 e 属于 Hardy空间 $H^2(\mathfrak{H})$，并且我们有

$$\int_{-1}^{1} \|H_t\|^2_{H^2(\mathfrak{H})} dt = 2 \tag{5.27}$$

根据 Plancherel恒等式。(5.26) 右端的二重积分可以写成

$$\int_0^\infty \int_{-1}^{1} F_g(t + i/\xi) h(t, x) dt dx = \int_{-1}^{1} F_{H_t}(t + i/\xi) dt. \tag{5.28}$$

利用 (5.9) 和 $f = H_t$，并应用引理 5.4，我们得到

$$|F_{H_t}(t + i/\xi)| \xi^{-1/4} \ll \max(\mathbf{I}(\tau)^{-3/4}, \mathbf{I}(\tau)^{1/4}) \|H_t\|_{H^2(\mathfrak{H})} + \mathbf{C}(t + i/\xi) \|H_t\|_{H^2(\mathfrak{H})}.$$

进行积分，并结合柯西–施瓦茨不等式、引理 5.2 和引理 5.5，我们得到

$$\int_{-1}^{1} |F_{H_t}(t + i/\xi)| dt \ll \xi^{1/2} \log \xi \Big(\int_{-1}^{1} \|H_t\|^2_{H^2(\mathfrak{H})} \Big)^{1/2}.$$

现在重新 代入 (5.28) 和 (5.27)，再回到 (5.26)，即可得到所需的界

$$\int_0^\infty \sum_{n \le \xi} |f_n(x)|^2 dx \ll \xi \log^2 \xi.$$

6. Further estimates of f_n and extraneous zeros close to 0

本节将证明定理 1.4 的 (1.9) 和 (1.11)（注意，(1.10) 可直接由 (3.14) 得出）。随后，我们将结合前一个界和 (1.10)，证明定理 1.5 的 (iv)。首先给出 f_n 在负参数下的渐近估计 (1.11)。

6.1. **估计　关于 $f_n(x)$ 在 $x < 0$ 下的**。我们的目标是证明定理 1.4 的 (1.11)，即 y,

$$f_n(-x) \sim \frac{e^{2\pi\sqrt{nx}}}{2\sqrt{n}}, \qquad x \to +\infty. \tag{6.1}$$

首先，记录一下 g_n 在基本域中的几个简单一致估计。由 (3.14) 可得

$$|g_n(\tau)| \le e^{\pi n y}(1 + O(e^{\pi n(1-y)})), \qquad \tau = x + iy, \quad y \ge 1,$$

由 (3.13) 可得粗略估计 $|g_n(\tau)| \ll e^{2\pi n}$，适用于 $\mathcal{F}$ 中满足 $y \le 1$ 的 $\tau = x + iy$。因此，在基本域中，我们有

$$|g_n(\tau)| \ll e^{\pi n \max(2,y)}, \qquad \tau = x + iy. \tag{6.2}$$

我们将应用一种圆法。固定 n，并定义 $\varepsilon := \sqrt{n/x}$。我们假设 $x \ge 10\overline{n}$。于是

$$f_n(-x) = \frac{e^{\pi x \varepsilon}}{2} \int_{-1}^{1} g_n(t + i\varepsilon) e^{-\pi i x t} dt + \sin(\pi x) \int_0^\varepsilon g_n(1 + it) e^{\pi x t} dt.$$

注意，第二个积分是 $\ll e^{2\pi n+\pi\sqrt{nx}}$，因此与 $e^{2\pi\sqrt{nx}}$ 相比可以忽略不计。因此，只需估计第一个积分。为此，我们将区间 $[-1,1]=I_1\sqcup I_2$ 分为，其中

$$I_1 \coloneqq \Big\{t\in[-1,1]\colon \mathbf{I}(t+i\varepsilon)\le\frac{1}{2\varepsilon}\Big\}.$$

由 (6.2) 得到 $|\varepsilon^{3/4}g_n(z)|=|\operatorname{Im}(\tau_z)^{3/4}g_n(\tau_z)|\ll \mathbf{I}(t+i\varepsilon)^{3/4}e^{\pi n\max(2,\mathbf{I}(t+i\varepsilon))}$，因此

$$\Big|\frac{e^{\pi x\varepsilon}}{2}\int_{I_1} g_n(t+i\varepsilon)e^{-\pi ixt}dt\Big|\ll e^{\frac{3}{2}\pi\sqrt{nx}}.$$

从 [3, 命题 6.6], 的证明中很容易看出，$I_2=(-\varepsilon,\varepsilon)$。因此，只需证明对于 $x\to\infty$,

$$A=\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} g_n(t+i\varepsilon)e^{-\pi ix(t+i\varepsilon)}dt\sim\frac{e^{2\pi\sqrt{nx}}}{\sqrt{n}}.$$

将 $z\mapsto -1/z$ 变换应用于 g_n 后，得到

$$A=\int_{-h+ih}^{h+ih} g_n(z)(z/i)^{-1/2}e^{\pi ix/z}dz\,,$$

其中 $h=\frac{\varepsilon^{-1}}{2}$。由于 $h\to\infty$ 作为 $x\to\infty$，我们有 $g_n(z)=e^{-\pi inz}+o(1)$，对于 $z=t+ih$，因此问题归结为证明

$$\int_{-h+ih}^{h+ih}(z/i)^{-1/2}e^{-\pi inz+\pi ix/z}dz\sim\frac{e^{2\pi\sqrt{nx}}}{\sqrt{n}}\,,$$

将 z 按 $2h$ 重新缩放后，问题归结为研究渐近行为 o f

$$\int_{\frac{-1+i}{2}}^{\frac{1+i}{2}}(z/i)^{-1/2}e^{T(z/i+i/z)}dz\,,\qquad T\to\infty\,.$$

若选择经过 $\frac{-1+i}{2}\to\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\to\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\to\frac{1+i}{2}$ 的积分路径为 $\gamma_1\cup\gamma_2\cup\gamma_3$，其中 γ_1 和γ_3 是直线段，γ_2 是以 0 为圆心的单位圆弧，则利用鞍点法即可轻易证明这一点。然后，γ_1 和 γ_3 上的积分显然有界于 $Ce^{T\sqrt{3}}$，而对于 γ_2，我们计算

$$\int_{\gamma_2}(z/i)^{-1/2}e^{T(z/i+i/z)}dz=\int_{-\pi/6}^{\pi/6}\cos(t/2)e^{2T\cos(t)}dt\sim e^{2T}\sqrt{\pi/T}\,,\quad T\to\infty,$$

通过简单应用拉普拉斯方法即可得到。由此证明了 (6.1)。

6.2. **关于 f_n的全局估计**。现在我们将上述证明技巧推广，以证明定理1.4中的 (1.9)，即以下界

$$f_n(x+iy)\ll n^{\frac{1}{4}}(1+\log^2 n)e^{\pi|y|}e^{2\pi\sqrt{n}\operatorname{Re}\sqrt{-z}},\tag{6.3}$$

该界对 z 和 n一致成立。

由引理 4.1 可知，对于 $\operatorname{Re}\sqrt{z}>2\sqrt{n}$

$$|f_n(z)|\ll|\sin(\pi z)|\le e^{\pi|y|}.$$

现在让我们假设假设 $x \le -n^2$ 和 $|y| \le 4\sqrt{n|x|}$。我们再次从表示式开始 n

$$f_n(z) = \frac{e^{-\pi z\varepsilon}}{2}\int_{-1}^{1} g_n(t+i\varepsilon)e^{\pi i z t}dt - \sin(\pi z)\int_0^{\varepsilon} g_n(1+it)e^{-\pi z t}dt\,. \tag{6.4}$$

其中我们令 $\varepsilon = \sqrt{n/|x|}$ 显然，(6.4) 右端的第二项满足

$$\sin(\pi z)\int_0^{\varepsilon} g_n(1+it)e^{-\pi z t}dt \ll e^{\pi|y|}e^{\pi(2n+\varepsilon|x|)}.$$

其由 $e^{\pi|y|+3/2\pi\sqrt{n|x|}}$ 所界定。对第6.1节中的其余论证稍作简单修改后，我们得到界

$$|f_n(\tau)| \ll e^{\pi|y|}e^{2\pi\sqrt{n|x|}}\,, \qquad x \le -n^2, \quad |y| \le 4\sqrt{n|x|}\,.$$

汇总上述估计（注意，当 $\operatorname{Re} w > 0$ 时，我们有 $\operatorname{Re}\sqrt{w} \ge \sqrt{\operatorname{Re}\ w}$），可得界

$$f_n(z) \ll e^{\pi|y|}e^{2\pi\sqrt{n}\operatorname{Re}\sqrt{-z}}, \tag{6.5}$$

当 $\operatorname{Re}\sqrt{z} \ge 2\sqrt{n}$ 或 $x \le -n^2$ 时，该结果一致成立。这里，$\sqrt{-z}$ 定义在裂平面 $\mathbb{C}\setminus[0,\infty)$ 中，并且当 z 为负时为正。对于所有 z，该界都有意义，因为当 z 趋于正数时，$\operatorname{Re}\sqrt{-z}$ 变为零。

最后，为了证明 (6.3)，我们令

$$\Omega(n) := \left\{z:\ \operatorname{Re}\sqrt{z} < 2\sqrt{n},\ \operatorname{Re} z > -n^2\right\} \smallsetminus [0,4n)$$

并考虑函数

$$G(z) := f_n(z)e^{-2\pi\sqrt{n}\sqrt{-z}}.$$

由 (1.10) 以及对于正整数 $m \ne n$ 有 $f_n(m) = 0$ 这一事实，我们可以控制该函数在整数处的行为。特别地，函数

$$G_0(z) := z\sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \frac{G(k)}{k}\frac{\sin\pi(z-k)}{\pi(z-k)}.$$

定义良好，且满足 $G_0(z) \ll e^{\pi|y|}$。于是，函数 $(G(z) - G_0(z))/\sin\pi z$ is$\ll n^{\frac{1}{4}}\log^2 n$ 在 $\Omega(n)$ 的边界上。因此，由最大模原理，它在 $\Omega(n)$ 中也有相同的界。由于 $G_0(z) \ll e^{\pi|y|}$，所需结果 (6.3) 得证。

6.3. 右半平面中靠近 0 的额外零点。现在我们将结合 (1.10) 使用上述全局估计，以证明定理 1.5 的 (iv)。首先，对以 -1 为圆心、半径为 $R \ge 2$ 的圆应用詹森公式。由 (1.10) 和定理1.4的 (1.9)，可得

$$\int_0^R \frac{n(t)}{t}dt \le \log n + 2R + 4\sqrt{nR} + C$$

其中 C 是一个绝对常数，$n(t)$ 表示 f_n 在圆盘 $|z+1| \le t$ 中的零点数。这给出了 (i) 中的上界。

下界的证明需要更多工作。我们将通过两种不同的方法，计算圆盘 $|z| \le Mr$ 中的零点数，其中 $M > 1$ 取适当的值。我们假设 r 是一个正整数。令

$$\varphi_-(z) := -M^2 r \frac{r+z}{M^2 r + z}$$

并注意到 φ_- 是 $|z| \le Mr$ 的自映射，且 $\varphi_-(0) = -r$。令 $n_-(t)$ 为 $f_n(\varphi_-(z))$ 在圆盘 $|z| \le t$内的零点 z_j 计数函数，其中我们只计入满足 $\operatorname{Re}\varphi_-(z_j) \le 0$的零点 z_j。由詹森公式和 (1.10)，我们得到

$$2\pi\sqrt{nr} - \frac{1}{2}\log n + C + \int_0^{Mr} \frac{n_-(t)}{t} dt \le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f_n(Mre^{i\theta})| \left|\varphi_-'(Mre^{i\theta})\right| d\theta \tag{6.6}$$

其中绝对常数为 C。由于

$$\frac{M-1}{M+1} \le \left|\varphi_-'(Mre^{i\theta})\right| \le \frac{M+1}{M-1},$$

我们可知

$$\int_0^{2\pi} \log|f_n(Mre^{i\theta})| \left|\varphi_-'(Mre^{i\theta})\right| d\theta \le \int_0^{2\pi} \log|f_n(Mre^{i\theta})| d\theta + \frac{2}{M-1}\int_0^{2\pi} |\log f_n(Mre^{i\theta})| d\theta.$$

现在我们将次调和函数平均值不等式应用于

$$z \mapsto \log\left|f_n\Big(-M^2 r^2 \frac{1+z}{M^2 r^2 + z}\Big)\right|$$

对于圆 $|z| = Mr$。再次对 $m = 1$ 应用 (1.9) 和 (1.10)，于是得到

$$\int_0^{2\pi} |\log f_n(Mre^{i\theta})| d\theta \le C\sqrt{Mr}$$

其中 C 为绝对常数。回到 (6.6)，我们得到

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f_n(Mre^{i\theta})| d\theta - \int_0^{Mr} \frac{n_-(t)}{t} dt \ge c\sqrt{nr} \tag{6.7}$$

其中 c 为绝对常数，只要 M 足够大。

接下来，我们对 $f_n(\varphi_+(z))$ 应用詹森公式，其中

$$\varphi_+(z) := M^2 r^2 \frac{z + r + \alpha}{M^2 r^2 + (r+\alpha)z},$$

其中选择 $0 < \alpha < 1$，使得 $f_n(r+\alpha) \ne 0$。令 $n_+(t)$ 表示圆盘 $|z| \le t$ 中 $f_n(\varphi_+(z))$ 的零点 z_j 的计数函数，其中我们只计数满足 $\operatorname{Re}\varphi_+(z_j) > 0$的零点 z_j。关键在于，f_n 在左半平面内的零点在詹森公式中的贡献小于

它们在 $f_n(\varphi_-(z))$ 的公式中的贡献，因此以与上文类似的方式，我们得到

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f_n(Mre^{i\theta})|d\theta-\log|f_n(r+\alpha)|+O(M^{-1/2}\sqrt{rn})-\int_0^{Mr}\frac{n_+(t)}{t}dt\le\int_0^{Mr}\frac{n_-(t)}{t}dt.$$

结合 (6.7) 和 (1.4)，我们因此得到

$$\int_0^{Mr}\frac{n_+(t)}{t}dt\ge c'\sqrt{rn}-\log|f_n(r+\alpha)| \tag{6.8}$$

其中 c' 为绝对常数，若 M 足够大。

最后，我们将证明 (6.8) 再加上詹森公式的另一次应用可得

$$\int_{mr}^{Mr}\frac{n_+(t)}{t}dt\ge c'\sqrt{rn} \tag{6.9}$$

其中 $0<m<1$为绝对常数。这将推出所需的界 $n_+(Mr)\gg\sqrt{rn}$。为证明 (6.9)，我们令 $n_{r+\alpha}(t)$ 表示 f_n 在圆盘 $|z-r-\alpha|\le t$中的零点数，并注意到

$$\log|f_n(r+\alpha)|=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f_n(r+\alpha+mre^{i\theta})|d\theta-\int_0^{mr}\frac{n_{r+\alpha}(t)}{t}dt. \tag{6.10}$$

计算可知，当 $t\le mr$ 满足 m 足够小时，$n_+(t)\le n_{r+\alpha}(t)$。因此结合 (6.8) 和 (6.10)，我们得到

$$\int_{mr}^{Mr}\frac{n_+(t)}{t}dt\ge c'\sqrt{rn}-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f_n(r+\alpha+mre^{i\theta})|d\theta$$

当 m 足够小时。现在利用 (1.9) 并进行粗略估计，我们得到

$$\int_0^{2\pi}\log|f_n(r+\alpha+mre^{i\theta})|d\theta\ll m\sqrt{rn},$$

其中隐含常数是绝对常数。因此，当 m足够小时，我们得到 (6.9)。

7. The basis functions do not give a Riesz basis for $\mathcal{H}$

本节简要讨论一个由 Kulikov、Nazarov 和 Sodin [14] 的工作自然引出的问题。我们回顾一下引言中的定义：$\mathcal{H}$ 是由满足以下条件的函数 f 构成的集合

$$\|f\|_{\mathcal{H}}^2:=\int_{-\infty}^{\infty}\big(|f(x)|^2+|\widehat{f}(x)|^2\big)(1+x^2)dx<\infty.$$

该空间曾用于 [14], ，其中证明了在那里构造的所有傅里叶唯一性对（Λ，W）都在 $\mathcal{H}$ 中生成框架（见 [14, 推论 2]）。准确地说，这意味着，与 Λ 相关联的再生核以及与 W 相关联的再生核的傅里叶变换，经归一化后构成 $\mathcal{H}$中的一个框架。在我们的情形中，自然的做法是用 $\mathcal{H}$ 的子空间 $\mathcal{H}_{\mathrm{e}}$ 取代 $\mathcal{H}$ ，该子空间由 $\mathcal{H}$ 中的偶函数组成；接着考察与特定序列 $\{\sqrt{n}$ 相关联的 $\mathcal{H}_{\mathrm{e}}$ 中相应序列：$n\ge 0\}$

是否具有相同的性质。我们现在将看到，事实并非如此。为此，令K_x 为 $\mathcal{H}_{\mathrm{e}}$ 在 x 处的再生核，于是

$$f(x) = \langle f, K_x\rangle_{\mathcal{H}}$$

对 $\mathcal{H}_e$ 中的每个 f。以下结论是定理 4.2 的推论。

推论 7.1。 函数 $a_0/\|a_0\|_{\mathcal{H}}$, $a_n/\|a_n\|_{\mathcal{H}}$, $\widehat{a}_n/\|\widehat{a}_n\|_{\mathcal{H}}$, $n = 1, 2, \ldots$, 不构成 $\mathcal{H}_{\mathrm{e}}$ 的 *Riesz* 基。等价地，函数 $(K_0 + K_0)/\|K_0\|_{\mathcal{H}}$, $K_{\sqrt{n}}/\|K_{\sqrt{n}}\|_{\mathcal{H}}$、$K_{\sqrt{n}}/\|K_{\sqrt{n}}\|_{\mathcal{H}}$, $n = 1, 2, \ldots$, 不构成 $\mathcal{H}_e$ 的 *Riesz* 基。

这里回顾一下，若存在希尔伯特空间 H 的某个标准正交基 (e_n)，以及 H 上的某个有界可逆算子 T，使得 $f_n = Te_n$，则 (f_n) 是可分希尔伯特空间 H 的 Riesz 基。以下事实是这一点的直接推论。

引理 7.1。 设$(f_n)_{n=1}^{\infty}$ 是可分希尔伯特空间 H中的 *Riesz* 基。那么$\|f_n\|_H \asymp 1$。此外，存在唯一的序列$(g_n)_{n=1}^{\infty}$，它也是 H 的 *Riesz* 基，并满足 $\langle f_m、 g_n\rangle_H = \delta_{m,\ n}$ 对所有 m 和 n均成立。

$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$序列 $K_0 + K_0$、$K_{\sqrt{n}}$, $K_{\sqrt{n}}$、 $n = 1$, 2、....., 与推论 7.1 中出现的基函数序列双正交。因此，引理 7.1 给出了该推论关于再生核的等价表述。为将我们的结果与 [14], 的结果联系起来，我们注意到，如果这个双正交序列是一个框架，那么它必定是一个 Riesz 基，因为移除其任意一个元素 [7, p 后，我们得到的是一个不完备序列。 90]

推论 *7.1* 的证明。 我们先重申刚才关于双正交性的论点。事实上，鉴于函数 a_n 和 $\widehat{a}_n$ 的插值性质（见定理 A），我们可以看出

$$\langle a_n, K_{\sqrt{m}}\rangle_{\mathcal{H}} = \delta_{m,n} \quad \text{and} \quad \langle \widehat{a}_n, K_{\sqrt{m}}\rangle_{\mathcal{H}} = 0$$

当 $m \geq 1$ 时。因此，除去归一化因素，我们已经确定了一个双正交序列的子序列，而引理 7.1 要求该序列存在。现在我们将证明，这个子序列违反了引理 7.1。

我们发现

$$\begin{aligned}\|a_n\|_{\mathcal{H}}^2 &\geq \frac{1}{4}\int_{\sqrt{n}/2}^{\sqrt{n}} \big(|b_n^+(x) + b_n^-(x)|^2 + |b_n^+(x) - b_n(x)|^2\big)(1+x^2)dx \\ &\geq \frac{1}{4}\int_{\sqrt{n}/2}^{\sqrt{n}} |b_n^+(x)|^2(1+x^2)dx \gg \sqrt{n}\log n, \end{aligned} \tag{7.1}$$

其中最后一步我们进行了变量替换，并使用了引理 4.1 和定理 4.2。另一方面， $\sqrt{n}$ 在 $\mathcal{H}_{\mathrm{e}}$ 上的点求值范数为 $\sim \sqrt{\pi/2}\, n^{-1/4}$，这可由 [26, 定理 5 和引理 7] 以及以下事实得出：若 K_x 是 $\mathcal{H}$在 x 处的再生核，则 $K_x(y) = \frac{1}{2}(\tilde{K}_x(y) + \tilde{K}_x(-y))$。因此，若向量 $a_n/\|a_n\|_{\mathcal{H}}$、$\widehat{a}_n/\|a_n\|_{\mathcal{H}}$ 构成 $\mathcal{H}_{\mathrm{e}}$的 Riesz 基，则我们将有

$$1 = a_n(\sqrt{n}) \asymp \|a_n\|_{\mathcal{H}}\ n^{-1/4} \tag{7.2}$$

根据引理 7.1。现在我们得到了所需结论，因为 (7.2) 与 (7.1) 不相容。□

8. Numerics and open questions

8.1. 的数值计算 $f_n(x)$。由于很难准确估计 f_n，因此获取数值数据以进一步了解这些函数的行为很有意义。计算 $f_n(x)$ 的一种方法是直接使用积分表示式 (2.7)。对于较小的 n（大致而言，对于 $n \le 100$），这种方法效果相当不错；但当 n 较大时，就变得不切实际：被积函数计算成本高、振荡剧烈，而且存在大量相消，因此必须以极高精度进行积分。

另一种方法是利用定义性质计算固定非负值 x 下的数值 $f_n(x)$，也就是函数方程

$$\sum_{n\ge 0} f_n(x)e^{\pi i n\tau} + (\tau/i)^{-1/2}\sum_{n\ge 0} f_n(x)e^{\pi i n(-1/\tau)} = e^{\pi i x\tau} + (\tau/i)^{-1/2}e^{\pi i x(-1/\tau)}\,.$$

其思路是将上述函数方程替换为关于 $f_n(x)$、$n \le N$ 的有限维线性方程组：截断无穷级数，并假设截断后的方程对 $\tau = \tau_0$、……、τ_N 成立，其中 τ_j 经过适当选取。将 τ_j、$j = 0$、……、N 选为线段 $[-1 + \frac{10}{N}i, 1 + \frac{10}{N}i]$ 上等间距的点（线段的高度是我们凭经验选定的），由此得到的方程组数值稳定性出奇地好，即使在机器精度下、对于非常大的 N，也能求解。

此方法遵循 Hejhal 在 [8]中描述的计算马斯尖点形式的步骤。我们指出，此方法已有更复杂的改进版本（见 [9, 22, 2]）。然而，这些方法假设线段上各点的虚部小于经函数方程变换后的点的虚部，并确保线性系统是对角占优的。由于存在第二个尖点，而该尖点具有非周期边界条件，因此无法进行关于 $e^{\pi i\tau}$ 的幂级数展开，这一假设在我们的情形中并不成立。

尽管我们无法为使用此方法得到的数值提供严格的误差界，但对于较小的 n，这些数值与使用 (2.7) 得到的 $f_n(x)$ 的严格高精度数值计算结果完全一致。此外，我们还改变了线段的高度，以启发式地估计系数的精度。

引言中的图 1 展示了使用上述方法得到的 $f_{500}(x)$ 的部分图像。特别是，对于较大的 x，可以观察到 $f_n(x)/\sin(\pi x)$ 呈现出规则的变化，这与 (4.3) 一致。对于较小的 x，$f_n(x)$ 的取值往往更加混乱，(4.3) 也不再能给出良好的近似；尽管如此，对于所有 n，这些值仍然很小。图 4 展示了 $f_n(x)$ 在 $0 \le x \le 2$和 $100 \le n \le 150$ 下的同步图像，表明在区间 $[0, 2]$ 上，这组函数的绝对值始终不超过 1。

8.2. 问题与猜想。根据对前 10000 个基函数进行的数值计算，我们发现 f_n 在正自变量处取绝对值大于 1 的情况极少

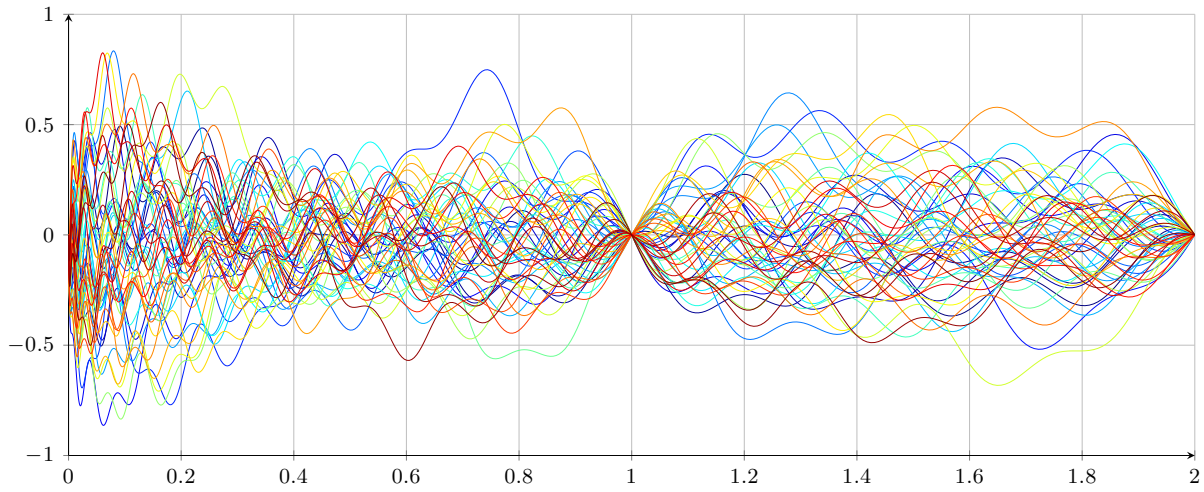

FIGURE 4. $100 \le n \le 150$的 f_n 图。

，且没有出现过取值大于 2 的情况。因此，我们很容易猜想如下结论。

猜想 8.1。 存在 $C > 0$，使得对所有 $n \in \mathbb{Z}_{\ge 0}$、$x \ge 0$，$|f_n(x)| < C$ 均成立。

对更大的 n 计算 $f_n(x)$，揭示出一种更为奇特的行为。图 5 展示了 $0 \le n \le 50000$时数值 $f_n(x)n^{1/4}$ 的分布。这幅图与正态分布非常相似，至少似乎表明数值 $f_n(x)n^{1/4}$, $n \ge 1$ 确实具有一个极限分布。我们不知道这个极限分布是否可能是正态分布（计算经验矩表明可能并非如此），但下面的问题似乎是合理的。

问题。 序列 $\{n^{1/4} f_n(x)\}_{n\ge 0}$ 是否具有矩有限的统计分布？如果没有，那么对于某个 $\alpha \in \mathbb{R}$, $\{n^{1/4}\log^{\alpha}(n) f_n(x)\}_{n\ge 2}$ 是否成立？

如果答案是肯定的，那么对于固定的 x，我们预期 $f_n(x)$的平均大小为 $n^{-1/4}$ （或者对于某些 α，可能为 $n^{-1/4}(\log n)^{\alpha}$ ）。因此，粗略地说，我们预期生成级数 $F(\tau,\ x)$的傅里叶系数满足类似于拉马努金–彼得森猜想的性质。注意，(1.5) 中的第一个估计给出了更强的界$f_n(x) = O(n^{-0.392})$，适用于$\overline{n}/8 < x < n - \sqrt{n}$。在下述猜想中，我们提出了在这一范围内的进一步改进。

猜想 8 .2. 对于任意 $\varepsilon, \delta > 0$，有 $f_n(x) = O_{\varepsilon,\ \delta}(n^{-1/2+\delta})$，其中 $\varepsilon n \le x \le n - \sqrt{n}$。

对于 $x \in [n/8, n - \sqrt{n}]$，这个猜想等价于 (4.6) 中定义的 $\Psi(t)$增长得比 t的任意正幂都慢。从定理 4.1 的证明可以看出，这可由指数对猜想推出。我们猜想还有一个更强的性质。

猜想 8.3. 存在 $k > 0$使得 $\Psi(x) = \sum_{n\ge 1} \frac{2}{\sqrt{n}} \cos(\pi(\frac{3n-1}{4} - \frac{x}{n}))$满足

$$\Psi(x) = O(\log^{k} |x|), \qquad x \to \pm\infty .$$

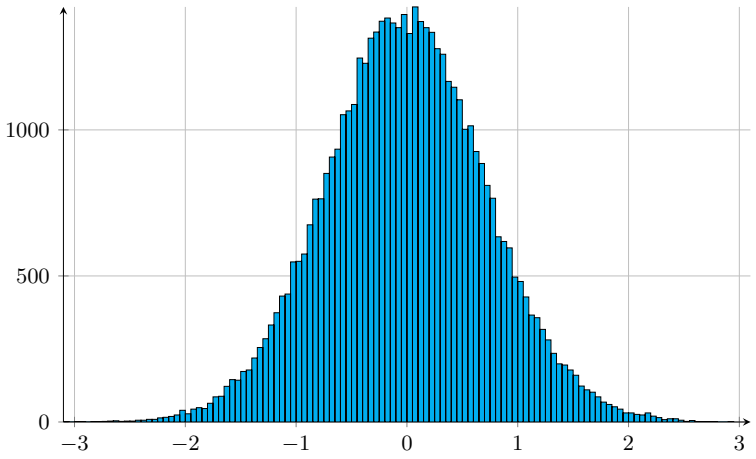

FIGURE 5. $n^{1/4} f_n(0.63)$的直方图，$0 \le n \le 50000$。

我们掌握的有限数值证据与上述猜想对 $k = 2 + \varepsilon$ 成立相一致。

接下来，受定理 1.3 启发，我们在图 6 中绘制了 $\int_0^\infty |f_n(x)|^2 dx$for $1 \le n \le 1000$ 的数值，并与对数曲线进行比较。图形之间的相似性引出了以下猜想。

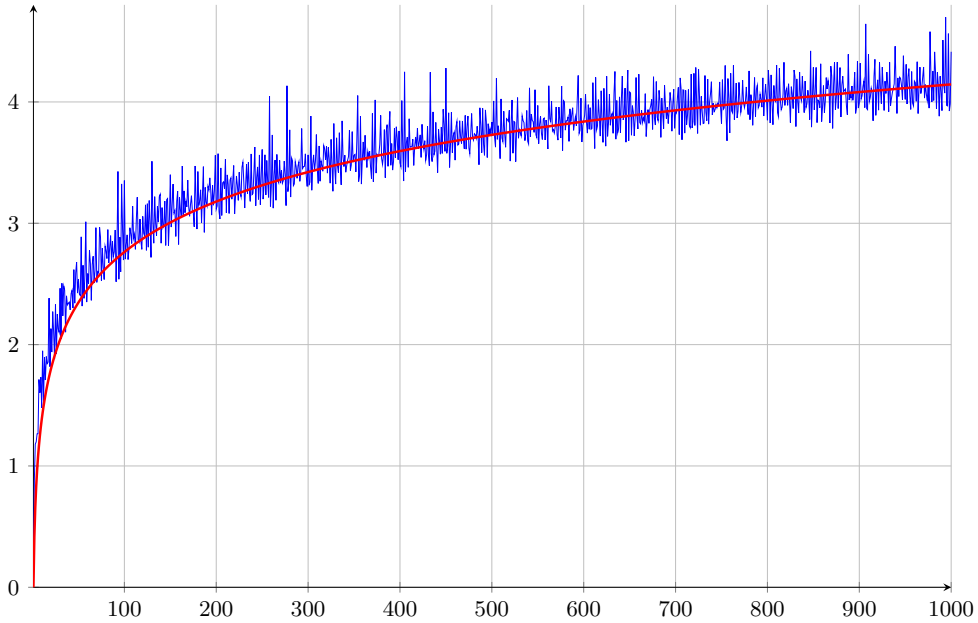

FIGURE 6. $\int_0^\infty |f_n(x)|^2 dx$的值，与 $1 \le n \le 1000$的$0.6 \log\ n$ 相比。

猜想 8.4。对于 $n > 1$，我们有

$$\int_0^\infty |f_n(x)|^2 dx \asymp \log n\,. \tag{8.1}$$

注意，由于 (1.6)，下界 $\int_0^\infty |f_n(x)|^2 dx \gg \log n$ 有效，因此唯一的问题在于上界。如果这个猜想成立，那么定理 1.3 中的下界在相差一个乘法常数的意义下是最优的。

我们在上一节看到，归一化基函数并不构成 $\mathcal{H}_e$ 的 Riesz 基。下面的猜想表明，序列 $\Lambda_0 := \{\sqrt{n} : \ n \geq 0\}$ 应当具有一种弱得多的性质。

猜想 8.5。(Λ_0, Λ_0) 是 $\mathcal{H}_e$ 的傅里叶唯一性对。

一个相关的问题是，归一化基函数能否为一个比 $\mathcal{H}_e$ 稍小一些的傅里叶不变希尔伯特空间构成 Riesz 基。

References

[1] J. H. Bruinier、P. Jenkins 和 K. Ono，希尔伯特类多项式与奇异模数的迹，《数学年刊》334（2006），373–393。[2] D. Berghaus、H. Monien 和 D. Radchenko，关于非同余子群上模形式的计算，《数学计算》93（2024），1399–1425。[3] A. Bondarenko、D.Radchenko 和 K. Seip，利用ζ函数及 L函数的零点进行傅里叶插值，《构造近似》57（2023），405–461。[4] W. Duke、 ¨O. Imamoglu 和 ´A. T´oth， j函数的周期积分与拟模形式，《数学年刊》173（2），947–981（2011）。[5] NIST数学函数数字图书馆，https://dlmf.nist.gov/，2025-03-15发布的1.2.4版，F. W. J. Olver、A. B. Olde Daalhuis、D. W. Lozier、B. I. Schneider、R. F. Boisvert、C. W. Clark、B. R. Miller、B. V. Saunders、H. S. Cohl 和 M. A. McClain 编。[6]J. B. Garnett，《有界解析函数》，修订第一版，数学研究生教材236，Springer，纽约，2007。[7] K. Gr¨ochenig，《时频分析基础》，应用与数值调和分析，Birkh¨auser Boston, Inc.，波士顿，MA，2001。[8] D. A. Hejhal，Hecke三角群的拉普拉斯算子特征值，纯数学高级研究，21，日本数学会出版，纪伊国屋书店发行，东京，1992，第359–408页。[9] D. A. Hejhal，Hecke三角群的拉普拉斯算子特征函数，IMA数学及其应用丛书，109，Springer-Verlag，纽约，1999，第291–315页。[10] H. Iwaniec，《经典自守形式专题》，数学研究生丛书第17卷。美国数学会，1997。[11] D. Jeon、S.-Y. Kang、C. H. Kim，弱马斯–庞加莱 ´级数与权为 $3/2$ 的拟模形式，《数论杂志》133（2013），2567–2587。[12] W. Kohnen，半整数权模形式的傅里叶系数，《数学年刊》271（1985），237–268。[13] A. Kulikov，傅里叶插值与时频局部化，《傅里叶分析与应用杂志》27（2021），论文编号58，共8页。[14] A. Kulikov、F. Nazarov 和 M. Sodin，傅里叶唯一性与非唯一性对，《数学物理分析与几何杂志》21（2025），84–130。[15] B. Ya. Levin，《整函数讲义》，数学专著译丛150，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，1996。

[16] D. Luecking，将哈代空间的导数嵌入勒贝格空间，《伦敦数学会会刊》**63**（1991），565–619。[17] T. K. Lysen，临界与非对称傅里叶唯一性对，arXiv:2509.17600。[18] D.Mumford，塔塔θ函数讲义I：雅可比θ函数与微分方程，数学进展丛书，**28**，Birkh¨auser Boston, Inc.，波士顿，MA，1983。[19] D. Radchenko 和 M. Viazovska，实轴上的傅里叶插值，《高等科学研究所数学出版物》´ Etudes Sci. **129**（2019），51–81。[20] J. P. G. Ramos 和 M. Sousa，扰动插值公式及其应用，《分析与偏微分方程》**16**（2023），2327–2384。[21] D. Radchenko 和 Q. Sun，*3*维和*4*维中的傅里叶插值与实变量克洛斯特曼和，arXiv:2510.04873。[22] F. Str¨omberg，（$\Gamma_0(N)$，χ）上的马斯波形式（计算方面），《伦敦数学会讲义系列》397，剑桥大学出版社，剑桥，2012，187–228。[23] Q. Sun，半整数权克洛斯特曼和的一致上界及其应用，《数学论坛》**37**（2025），75–109。[24] E. C. Titchmarsh，黎曼ζ函数理论，第二版，由 D. R. Heath-Brown 编辑并作序，牛津大学出版社，纽约，1986。[25] T. S. Trudgian 和 A. Young，迈向最优指数对，《数学计算》**94**（2025），1467–1502。[26] D. Zelent，傅里叶对称索伯列夫空间中的时频局部化，arXiv:2505.04286。

Fraunhofer IAIS, Institute for Intelligent Analysis and Information Systems, 53757Sankt Augustin, Germany电子邮箱地址: s6ddberg@uni-bonn.de
Department of Mathematical Sciences, Norwegian University of Science and Technology, NO-7491 Trondheim, Norway电子邮箱地址: andriybond@gmail.comUniversité de Lille, CNRS, Laboratoire Paul Painlevé, F-59655 Villeneuve d'Ascq,France电子邮箱地址: danradchenko@gmail.comDepartment of Mathematical Sciences, Norwegian University of Science and Technol-ogy, NO-7491 Trondheim, Norway电子邮箱地址: kristian.seip@ntnu.noUniversité de Lille, CNRS, Laboratoire Paul Painlevé, F-59655 Villeneuve d'Ascq,France电子邮箱地址: qihang.sun@univ-lille.fr