矢量玻色子库仑束缚态的崩塌

V. V. Flambaum[1*] 和 H. B. Tran Tan[2†] *School of Physics, University of New South Wales, Sydney 2052, Australia and*[3] *Los Alamos National Laboratory, P.O. Box 1663, Los Alamos, New Mexico 87545, USA*（日期：2025年12月23日）

带电自旋-1（矢量）粒子在库仑场中的行为与电子或标量粒子截然不同。对于无限重的 *point-like* 原子核，它们的束缚态波函数会“坠向中心”；即使将系统置于可重整化电弱型理论中，这种短程病态也无法消除。因此，我们求解有限核半径R 下的纯库仑问题，并令 $R \to 0$，以恢复点状原子核极限。这种方法使我们能够在波动方程中纳入至关重要的 Υ 项；对于点状原子核，该项正比于 $\delta(r)$，此前的能谱计算却忽略了这一项。由此出现了若干反常效应：（i） Υ 项支持一座态塔 *located mainly inside the nucleus*。随着 $R \to 0$，其数量趋于无穷，其中大多数位于负能连续谱中（能量 $\epsilon < -mc^2$）。它们会引发真空崩塌——粒子-反粒子对产生，最终屏蔽核电荷。（ii）普通的类索末菲态（其束缚能较小 mc^2）依然存在，但每个波函数都有有限比例泄漏到原子核内，即使在 $R \to 0$时也是如此。（iii）带电矢量粒子的电荷密度 *negatively* 会在原子核附近改变符号并变为 *positive* 电荷密度，而 Υ 项则确保其在原子核内部的密度仍为负值。（iv）在弱耦合下， $Z\alpha \ll 1$，但当 $mR < Z\alpha$时，即使束缚能远低于 mc^2，“非相对论”解在定性上仍不同于薛定谔理论；只有当 $Z\alpha \ll mR$时，两者才重新一致。这些现象凸显了自旋-1粒子在库仑场中独特而微妙的行为。

arXiv:2512.18691v1 [hep-ph] 21 Dec 2025

I. 引言

描述有质量自旋1粒子与电磁场相互作用的普罗卡-麦克斯韦方程 [1], 在库仑问题中给出了不可接受的结果，例如，在高能下，散射截面并不随能量增加而减小，反而趋于一个常数 [2–4]。Corben 和 Schwinger [5], 尝试改善这一状况，他们在相互作用拉格朗日量中引入了一个新项，其作用是迫使粒子的回旋磁比取值为$g = 2$（实际上， $g = 2$ 是标准模型中 W玻色子的回旋磁比）。取 g这一数值时，得到的物理上可接受的能谱与描述原子电子能谱的同一个索末菲公式一致，只需为自旋1粒子的总角动量 $j = 0$，1,... 取适当的值。

然而，Corben-Schwinger形式主义并非毫无缺陷。特别是，人们发现，对于满足 $j = 0$ 且 $j = 1$， $l = 0$的量子态，粒子靠近库仑中心时，其电荷会变为无穷大，这意味着粒子会落向中心。因此可以得出结论：对于点状原子核，自旋1/2粒子的临界电荷对应于 $Z\alpha = 1$，自旋0粒子对应于 $Z\alpha = 1/2$，自旋1粒子对应于 $Z\alpha = 0$。为解决这一问题，一些作者提出了进一步的改进方案 [6–8]，或为矢量玻色子提出了全新的方程 [9, 10]。

有趣的特征还包括正电荷密度在原子核附近，带负电粒子的电荷密度却为正 [11]。这种矢量粒子独有的行为由其电四极矩和自旋轨道相互作用导致；在波函数快速变化的区域，它们对电荷密度的贡献占主导地位。如果波函数处处有限，这些贡献对电荷密度积分的净影响为零。然而，在库仑情形下，这种符号错误的奇异电荷密度的积分发散，使问题看起来像是电荷不守恒。

文献 [12] 在可重整化的电弱型框架内考察了波函数坍缩问题，并指出，对于束缚态等非微扰问题，仅有可重整化性并不能确保解在短距离处具有良好的行为。特别是，带电矢量粒子的波函数会坍缩到半径 $r \sim 1/M$，其中 M 是重库仑源的质量——而且 M 可以任意大。

参考文献 [12, 13]指出，然而，Corben-Schwinger形式主义能够得出合理的结果；如果从一开始就考虑量子电动力学真空极化，坍缩问题便会消失。这与标量粒子和旋量粒子的情况截然不同：真空极化在这两种情况下仅是对纯库仑场的微扰，因此对粒子行为的影响很小。区别在于，描述自旋 1 粒子的方程中包含一个依赖于外部电流的特殊项（Υ 项）。考虑量子电动力学真空极化后，该项会在 $r = 0$ 附近产生一种排斥性的不可穿透势，阻止粒子落向中心。然而，其他电弱真空极化修正会改变势能的符号；这些修正在标准模型（以及任何渐近自由模型）中都会出现

*电子邮箱：v.flambaum@unsw.edu.au

使 Υ 势能由排斥性变为吸引性[12]。加入轻费米子可以阻止坍缩，因为它们会将理论的紫外行为从渐近自由转变为朗道极点（类似于纯量子电动力学）。

为进一步探究这一行为，我们采用研究库仑问题的另一种方法：不再将库仑中心（下文称为原子核）视为点状物体，而是考虑其具有有限尺寸 R。随后，令 $R \to 0$，即可恢复该问题的点状原子核极限。在这种有限 R 情况下，中心附近电荷无限大的问题不复存在，因为在小距离处，原点处具有奇点的纯库仑势被原子核内部弥散的核电荷分布所产生的规则势取代。这个经过“圆滑化”的库仑势对矢量玻色子的能谱和波函数有何影响，也值得探究。事实上，在原子中，原子核的有限尺寸会导致人们熟知的场同位素位移：两个原子具有相同电荷 Z、但质量数 A 不同的原子核时，其能级会发生位移。电子能级和波函数的这些核尺寸修正，至少在非相对论极限下，可以通过常规微扰理论精确计算（相对论情形则表明，简单的微扰理论方法会出现某些偏差，这是因为点状原子核情形下狄拉克波函数在原点处存在奇点，参见例如 [14]）。相比之下，即便核半径极小，也会使自旋1粒子的结果发生根本性变化。

为避免误解，我们在此不考虑任何电弱效应和有限核质量效应。我们求解的是一个纯理论问题：轻带电矢量粒子处于有限尺寸库仑中心的场中，并着重研究最有趣的情形 $mR \ll Z\alpha \ll 1$。请注意，在这种情形下，核内库仑势超过质量 $Z\alpha/R > m$。这对自旋 1/2 粒子和自旋0粒子并非问题，薛定谔方程仍能给出正确结果。然而，对于自旋1粒子，当相互作用常数较小 $Z\alpha$、$mR < Z\alpha \ll 1$ 时，其“非相对论”解与使用薛定谔方程得到的解并不相同，尽管薛定谔式能级的束缚能 $E_b \ll mc^2$ 如此（在真正的非相对论情形 $Z\alpha/R \ll m$ 下，结果与薛定谔方程一致）。

有限大小原子核问题也可能与矢量粒子在小型带电黑洞场中的行为有关。

本文结构如下。第二节中，为了统一符号，我们给出了矢量玻色子与静电场相互作用时的 Corben-Schwinger 方程。第三节中，我们采用 Wentzel–Kramers–Brillouin（WKB）半经典方法，求得了原子核具有有限尺寸时矢量玻色子的能量。我们还讨论了电荷密度的特殊行为以及真空极化势的影响。第四节对研究结果进行了总结。

作为比较，附录中我们介绍了磁极化情形，此时波函数不会坍缩，而有限核半径 R 只会带来微小修正；这种情形下的波动方程与自旋为零粒子的克莱因-戈尔登方程一致。全文采用自然单位制 $\hbar = c = 1$ 和$e^2 = 4\pi\alpha$，其中 $e < 0$。

II. 矢量粒子的波动方程

在外部电磁场中传播的质量为 m 、电荷为 e的矢量玻色子的拉格朗日量形式为 [2]

$$\begin{aligned}\mathcal{L} = &-\frac{1}{2}\left(\nabla_\mu W_\nu - \nabla_\nu W_\mu\right)^\dagger \left(\nabla^\mu W^\nu - \nabla^\nu W^\mu\right) \\ &+ ieF^{\mu\nu}W_\mu^\dagger W_\nu + m^2 W_\mu^\dagger W^\mu \,,\end{aligned} \tag{1}$$

其中， W_μ 为矢量玻色子场， $F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$为电磁场张量， $\Delta_\mu \equiv \partial_\mu + ieA_\mu$ 为协变导数。此处， A_μ 为电磁四维势。

由拉格朗日量(1)得到的欧拉-拉格朗日方程为

$$(\nabla^2 + m^2)W^\mu + 2ieF^{\mu\nu}W_\nu - \nabla^\mu\nabla^\nu W_\nu = 0\,, \tag{2}$$

对其取协变导数后，得到

$$m^2\nabla_\mu W^\mu + iej_\mu W^\mu = 0\,, \tag{3}$$

其中， $j^\mu \equiv \partial_\nu F^{\mu\nu}$ 为产生势 A_μ的外部电流。

在 $j^\mu = (\rho(\mathbf{r}),\mathbf{0})$ 的静态情形下，可以假设

$$\nabla_0^2 W_\mu = -(\epsilon - U)^2 W_\mu\,, \tag{4}$$

其中 ϵ 是矢量玻色子的能量， $U(\mathbf{r})$ 是其势能。于是，方程 (3) 变为

$$iW_0 = (\epsilon - U - \Upsilon)^{-1}\nabla\cdot\mathbf{W}\,, \tag{5}$$

其中 W_0 和$\mathbf{W}$ 分别是 W^μ 的时间分量和空间分量， Υ 定义为

$$\Upsilon \equiv e\rho/m^2 = -\Delta U/m^2\,. \tag{6}$$

将方程 (5) 代入方程 (2)，可得方程

$$\left[(\epsilon - U)^2 - m^2\right]\mathbf{W} = -\Delta\mathbf{W} - 2w\Delta U - \nabla(\Upsilon w)\,, \tag{7}$$

其中 $w \equiv iW_0$。为便于后续使用，我们指出，矢量玻色子的电荷密度为

$$\begin{aligned}\rho^W = 2e\big[&(\epsilon - U)(\mathbf{W}^\dagger\cdot\mathbf{W} + w^\dagger w) \\ &+ \mathbf{W}^\dagger\cdot\nabla w + \mathbf{W}\cdot\nabla w^\dagger - \Upsilon w^\dagger w\big]\,.\end{aligned} \tag{8}$$

如果我们假设势 U 具有球对称性，那么矢量粒子的总角动量 j 守恒，其（矢量）波函数 $\mathbf{W}$ 可以分解为磁、電和纵向分量。此外，由于它们具有不同的宇称，磁极化会与电极化和纵向极化解耦。因此，得益于这种解耦，我们可以独立地考虑磁极化模式，其中

$$\mathbf{W} = f(r)\mathbf{Y}^{(m)}_{jm}\,, \tag{9}$$

以及电纵向极化模，其中

$$\mathbf{W} = u(r)\mathbf{Y}^{(e)}_{jm} + v(r)\mathbf{Y}^{(l)}_{jm}\,. \tag{10}$$

这里， $f(r)$、 $u(r)$ 和 $v(r)$ 是径向波函数，而$\mathbf{Y}^{(m,e,l)}_{jm}$ 是矢量球谐函数，定义为

$$\mathbf{Y}^{(e)}_{jm} \equiv \nabla_{\mathbf{n}} Y_{jm}(\mathbf{n})/\sqrt{j(j+1)}\,, \tag{11a}$$
$$\mathbf{Y}^{(m)}_{jm} \equiv \mathbf{n}\times\mathbf{Y}^{(e)}_{jm}\,, \tag{11b}$$
$$\mathbf{Y}^{(l)}_{jm} \equiv \mathbf{n}Y_{jm}(\mathbf{n})\,, \tag{11c}$$

其中，$\mathbf{n}=\mathbf{r}/r$ 是沿$\mathbf{r}$方向的单位向量，Y_{jm} 是球谐函数，而 $\nabla_{\mathbf{n}}$ 是梯度算符的角向部分，即 $\nabla F(\mathbf{n}) = \nabla_{\mathbf{n}} F(\mathbf{n})/r$。与方程 (9) 和 (10) 中的$\mathbf{Y}^{(l)}_{jm}$ 和$\mathbf{Y}^{(e)}_{jm}$ 项相对应的磁模和电纵向模，仅在 $j>0$ 时有定义。对于 $j=0$，只有与方程 (10) 中的 $Y_{jm}(\mathbf{n})$项相对应的纯纵向模存在。

下面，我们将在有限大小原子核势中求解方程 (7) 的纯纵向极化情形（j=0），这是最有趣的情况。

III. 纵向极化， $j=0$

A. 纵向极化的波动方程 tion

在 $j=0$的情况下，波函数$\mathbf{W}$ 为纯纵向极化，我们有

$$\mathbf{W} = v(r)\mathbf{n}\,, \tag{12}$$

将其代入方程（7），得到关于 v的下列方程

$$\frac{d^2v}{dr^2} + G\frac{dv}{dr} + Hv = 0\,, \tag{13}$$

其中

$$\begin{aligned} G &= \frac{2}{r} + \frac{U'}{\epsilon-U} + \frac{U'+\Upsilon'}{\epsilon-U-\Upsilon}, \\ H &= \frac{(\epsilon-U-\Upsilon)\left[(\epsilon-U)^2-m^2\right]}{\epsilon-U} \\ &\quad -\frac{2}{r}\left(\frac{1}{r} - \frac{U'}{\epsilon-U} - \frac{U'+\Upsilon'}{\epsilon-U-\Upsilon}\right). \end{aligned} \tag{14}$$

对于原子核外部的解，其中 $U=-\zeta/r(\zeta=Z\alpha)$ 且 $\Upsilon=0$，方程 (13) 化简为

$$\begin{aligned} &\frac{d^2v}{dr^2} + 2\left(\frac{1}{r} + \frac{U'}{\epsilon+\zeta/r}\right)\frac{dv}{dr} \\ &+\left[\left(\epsilon+\frac{\zeta}{r}\right)^2 - m^2 - \frac{2}{r^2} + \frac{4U'}{r(\epsilon+\zeta/r)}\right]v = 0\,. \end{aligned} \tag{15}$$

我们遵循文献 [13]，引入无量纲变量 $x\equiv\epsilon r/\zeta$，并进行如下变换

$$v = \frac{1+x}{x^2}\left(\frac{d}{dx} + L\frac{1+x}{x} - \frac{1}{1+x}\right)\tilde{\varphi}\,, \tag{16}$$

由此，方程（13）变为

$$\frac{d^2\tilde{\varphi}}{dx^2} + \left[\frac{2\zeta^2}{x} - \frac{L(L+1)}{x^2}\right]\tilde{\varphi} = \eta^2\tilde{\varphi}\,, \tag{17}$$

其中 $\eta\equiv\zeta\sqrt{m^2-\epsilon^2}/\epsilon$ 和 $L\equiv\gamma+1/2=\sqrt{1/4-\zeta^2}+1/2$。方程（17）是惠特克方程，其解为

$$\tilde{\varphi} = c_1 M_{\frac{\zeta^2}{\eta},L+\frac{1}{2}}(2\eta x) + c_2 W_{\frac{\zeta^2}{\eta},L+\frac{1}{2}}(2\eta x)\,. \tag{18}$$

对于点状原子核的情况，解$W_{\frac{\zeta^2}{\eta},\,L+\frac{1}{2}}(2\eta x)$在 $r=0$处是奇异的，因此必须舍弃。要求 $\tilde{\varphi}$ 在无穷远处正则，这迫使本征值 η 取如下形式

$$\eta = \frac{\zeta^2}{L+n-1}\,, \qquad n=2,3,\ldots, \tag{19}$$

由此得到能谱 [5]

$$\epsilon = \epsilon_{n0} = m\left[1+\frac{\zeta^2}{(\gamma+n-1/2)^2}\right]^{-1/2}. \tag{20}$$

这一结果看起来与费米子的索末菲公式相似。不同之处在于，在我们的情况中 $j=0$。

请注意，此解未包含 Υ的贡献；对于点状原子核，该贡献与$\delta(r)$成正比（即接触相互作用）。如下文所示，纳入 Υ贡献会彻底改变结果。

B. 有限大小原子核情形的半经典（WKB）解

我们考虑纵向模 $j=0$ 的解，其中包含局域于原子核内部的 Υ 势的影响。通过代换 [13]，我们可以消去 v 的一阶导数。

$$v = \frac{1}{mr}[(\epsilon-U)(\epsilon-U-\Upsilon)]^{1/2}\phi\,. \tag{21}$$

随后， ϕ 的方程呈现出类似薛定谔方程的形式。

$$-\frac{d^2\phi}{dr^2}+V\phi=0\,, \tag{22}$$

其中

$$V=-H+\frac{1}{4}G^2+\frac{1}{2}\frac{dG}{dr} \tag{23}$$

注意，在非相对论情形（$E=\epsilon-m$,$m\gg(E-U)$, $m\gg\Upsilon$）下，式（21）可化为 $v=\phi/r$。这是将径向方程变换为一维薛定谔方程的常规代换，其有效势为 $U_{eff}=U+l(l+1)/(2mr^2)$。

一维薛定谔方程的半经典 WKB 解表示为

$$\phi\sim\frac{1}{\sqrt{p}}\sin\left(\int_a^r pdr+\theta_0\right), \tag{24}$$

其中， $\theta_0\lesssim 1$, p 为经典动量， a 为经典转向点，满足 $p=0$。

首先考虑非相对论库仑能级 $E_n=\epsilon_n-m$，依据由式（24）中 ϕ 的边界条件导出的玻尔–索末菲量子化规则：

$$\int_a^b pdr=\pi n+\theta, \tag{25}$$

其中， $\theta\lesssim 1$和 a， b 为经典转向点，满足 $p=0$；在距离 $r>b$ 处，波函数呈指数衰减。

作为示例，我们首先由这个方程求出点状原子核情况下通常的非相对论库仑能级。假设非相对论能量 $E\ll m$ 以及势能$U\ll m$。由此得到针对 ϕ的传统薛定谔方程。半经典近似假设动量很大（$pr\gg 1$），且其导数相对较小。在方程 22 中只保留占主导地位的项 $\frac{d^2\phi}{dr^2}\propto p^2$，便可得到经典动量 $p=\sqrt{2m(E-U_{eff})}$ 的传统表达式，其中$U_{eff}=-Z\alpha/r+l(l+1)/(2mr^2)$。对于 $j=0$ 和自旋为 1 的情况，轨道角动量为 $l=1$ 。

对方程 (25) 的积分得

$$\pi\left[Z\alpha\sqrt{\frac{m}{2(-E_n)}}-\sqrt{l(l+1)}\right]\approx\pi n_0, \tag{26}$$

由此得到库仑能量

$$E_n=-\frac{mZ^2\alpha^2}{2n^2}\,, \tag{27}$$

其中主量子数为 $n\approx n_0+\sqrt{l\ (l+1)}$ 。与精确表达式 $n=n_0+l$ 略有差异。不过，对于 $n\gg 1$，玻尔–索末菲规则给出的结果准确，此时 WKB 近似在形式上适用。

此外，对于 $n\gg l$，我们可以直接忽略离心项对能量的贡献。

现在考虑有限核尺寸对玻尔-索末菲积分方程 (25) 的贡献：

$$\int_0^R(p_i-p_c)dr, \tag{28}$$

其中， p_i 是原子核内的经典动量，而 $p_c=\sqrt{2m(E+Z\alpha/r}$ 是点状原子核库仑场中的经典动量；由于我们已将其贡献计入方程（26），因此应将其减去。

我们将考虑最有趣的情况 $mR\ll Z\alpha\ll 1$。这一条件给出原子核内部的 $m\ll U\ll\Upsilon$ 。我们在本小节中讨论的非相对论库仑能级$E_n\ll m\ll U\ll\Upsilon$，还会带来一个与能量无关的额外贡献

$$\int_0^R(p_i-p_c)dr\equiv\pi\Delta, \tag{29}$$

加到玻尔-索末菲方程中

$$\pi\left(\Delta+Z\alpha\sqrt{\frac{m}{2(-E_n)}}\right)=\pi n, \tag{30}$$

由此得到修正后的能量

$$E_n=-\frac{mZ^2\alpha^2}{2\nu^2}. \tag{31}$$

其中， $\nu=n-\Delta$ 是有效主量子数。可以说，能级被重新编号了。 $\Delta=n-\nu$的大小表示原子核内部具有相同角量子数（纵向极化时为 $j=0$ ）的轨道数， $n_{in}\sim\Delta$。

参数 Δ和有效主量子数 $\nu=n-\Delta$预计都不是整数，因此其能级不会与点状原子核的库仑势对应的能级重合。然而， $l=1$ 的离心势垒将经典径向运动分为两个区域：原子核外部和内部，因此相位有两个近乎独立的贡献。对能级重新编号后，这可能会缩小其能谱与纯库仑能谱之间的差异。

这个公式 (31) 与里德伯公式相似，后者描述了外层电子在剩余离子的库仑场中远离原子实运动时的能量。解释也类似。外层电子的能量 E_n 在电子实心内部可以忽略不计，$E_n\ll U$。因此，相移 $\pi\Delta$ 与能量无关。考虑到原子实外部外层电子所受的势为 $U=-(Z-N+1)\alpha/r$，我们得到外层电子能量的里德伯公式

$$E_n^{Rydberg}=-\frac{m(Z-N+1)^2\alpha^2}{2\nu^2}, \tag{32}$$

其中 N 是电子总数（对于中性原子， $N = Z$），而 $\nu = n - \Delta$ 是有效主量子数。 $\Delta = n - \nu$ 的大小表示电子实心内部具有相同角量子数的轨道数目，$n_{core} \sim \Delta - n_{min}$，其中$n_{min} = l + 1$ 是给定轨道角动量 l 所对应的最小主量子数。中性原子中最低外层电子能级的ν 典型值由 $1 < \nu < 2$给出。

我们可以说，实际上，我们将外层电子的边界条件从 $r = 0$ 移到了电子实心的边界 $R_c \sim a_B$ （a_B 是玻尔半径），然后求解通常的库仑问题。对于自旋1粒子的情况，我们可以对能级的里德伯型方程 (31) 给出类似的定性解释：我们实际上将边界条件从 $r = 0$ 移到了核表面 $r = R$，然后在势 $U = -Z\alpha/r$ 中求解库仑问题，并在 $r = R$处采用这一新的边界条件。

由于条件 $E \ll m \ll U \ll \Upsilon$，我们可以忽略原子核内部的 E 和 m，并利用方程 (22,23) 估算经典动量：$p^2 \approx U\Upsilon$。假设核电荷密度 $\rho = 3Z|e|/$为常数（$4\pi R^3$），我们得到

$$\Upsilon = -\frac{3Z\alpha}{m^2R^3}\,, U = -\frac{Z\alpha}{R}(\frac{3}{2} - \frac{r^2}{2R^2})\,. \tag{33}$$

对方程 (28) 积分，得到主量子数的偏移

$$\Delta \approx 0.6\frac{Z\alpha}{mR} \gg 1. \tag{34}$$

这意味着有许多轨道被束缚在原子核内，距离为 $r \lesssim R$。对于 $R \to 0$，这类态的数量趋于无穷大。这一结果与参考文献 [15] 的结论一致。

C. 原子核内的矢量粒子态

条件 $mR \ll Z\alpha \ll 1$ 给出了原子核内的 $m \ll U \ll \Upsilon$。然而，局域态的不确定性关系 $p \gtrsim 1/R$ 表明，我们不能忽略 ϵ。接着，将半经典波函数 (24) 代入方程 (22,23)，得到 $p^2 \approx \Upsilon(U - \epsilon)$，以及玻尔–索末菲量子化方程

$$\int_0^{r_t} [\Upsilon(U - \epsilon)]^{1/2} dr \approx \pi n, \tag{35}$$

当经典转向点 $r_t < R$（等价于 $\epsilon < -Z\alpha/R$）时，该方程成立。计算此积分可得

$$\epsilon \approx -\frac{3Z\alpha}{2R} + \sqrt{\frac{8}{3}} m\, n\,, \tag{36}$$

条件 $\epsilon < -Z\alpha/R$ 给出

$$n < 0.3\frac{Z\alpha}{mR}\,. \tag{37}$$

较高的 n 能级可能有一部分延伸到原子核外。对于 $R \to 0$，原子核内的能级数趋于无穷大。

在远距离处，当势 U 可以忽略时，波动方程取决于 ϵ^2，因此 $\epsilon > m$ 和 $\epsilon < -m$ 解都属于连续谱。这意味着，方程 (36) 描述的所有态都不是真正具有实能量值的本征态，而是具有较大宽度的共振态，在 W^+ 散射振幅中对应于复能量极点（可与综述 [16] 中所述原子核内电荷为 $Z > 170$ 、具有 $\epsilon < -m$ 的类似复能量电子态相比较）。在波动方程的形式解中，这类共振态在实能量下的波函数（方程 (36)）具有振荡的长距离尾部，而非指数衰减。在方程 (36) 描述的共振位置附近，小距离处波函数的平方与大距离处波函数振幅平方之比呈现布赖特–维格纳型增强。请注意，对于具有 $\epsilon < -m$ 的态，势 U 是一个势垒，因为它在波动方程中以组合形式 $\epsilon - U$ 出现。

存在具有 $Re(\epsilon) < -m$ 的态，对应于粒子-反粒子对的产生，即真空破裂。从动力学角度看，以这种方式产生的带负电粒子会中和核电荷，从而阻止进一步的对产生。换言之，真空中的粒子会完全屏蔽核电荷。

我们的估算基于不等式 $\Upsilon \gg U$。然而，波动方程（22,23,14）中的奇点$\sim 1/(\epsilon - U)$靠近经典转向点 $\epsilon - m = U$，这可能影响我们对能级的半经典估算精度。不过，这个奇异项只会使经典转向点 $p = 0$发生轻微偏移。转向点附近被忽略项影响显著的区间很小，$x \sim (mR/Z\alpha)^{2/3}R$；若满足$n \gg 1$，排除这一区间不会显著影响玻尔-索末菲积分。类似的论证也说明可以忽略离心项 $\sim 1/r^2$。

为便于进一步分析，我们将波动方程写成二分量形式（v， w），其形式类似于电子的径向狄拉克方程。

$$\begin{aligned} \left[(\epsilon - U)^2 - m^2\right] v &= -(\epsilon - U)w' - U'w\,, \\ (\epsilon - U - \Upsilon)w &= \frac{2v}{r} + v'\,. \end{aligned} \tag{38}$$

由这些方程可知， v 和 w 在（$\epsilon - U$）$= 0$处没有奇点，并且平滑地经过该点。与狄拉克方程类似，只有当我们将下分量 w 代入上分量 v 的方程，并将方程除以（$\epsilon - U$），使 v'' 前的系数等于 1 时，才会出现这种奇点。

请注意，在非相对论极限下，当距离较大时，下分量 w 与（p/m）v成正比，这与狄拉克方程中的下分量相似。

D. 真空极化

对于点状原子核，短距离处的真空极化势 $rm_z \ll 1$ （m_z 是真空粒子的最大质量）可以表示为

$$U_v(r) = [\alpha\beta \ln(m_z r)]\frac{Z\alpha}{r}\,, \tag{39}$$

其中， β 是 Gell-Mann–Low β函数的最低阶系数。这给出 $r > 0$

$$\Upsilon_v = \frac{e\rho_v}{m^2} = -\frac{\Delta U_v}{m^2} = \frac{Z\alpha^2\beta}{m^2 r^3}\,. \tag{40}$$

在量子电动力学中， $\beta > 0$ 和 Υ会产生不可穿透的势垒，阻止矢量粒子波函数 [13]发生坍缩。然而，在满足 $\beta < 0$ 的渐近自由理论中，并不存在这样的势垒。

除了原子核外部的极化电荷分布外，还存在一个 δ（r）项（来自方程（39、40）中的 Δ（$1/r$）因子），使真空极化总电荷为零。当 $\int dr/r$时，原子核外部的极化电荷积分呈对数发散，因此 δ（r）前的系数为无穷大。从方程（39、40）中在 $r \to 0$ 处发散的因子 $\ln$（$m_z r$）也可以看出这一点。

有限核半径 R 消除了这种发散，并在原子核内部产生 Υ_v ，其符号与原子核外部的 Υ_v 相反。在满足$\beta > 0$ 的量子电动力学情形中，粒子会穿透 Υ_v 势垒，落入原子核内部的深势阱；而在满足 $\beta < 0$ 的渐近自由情形中，真空极化势垒则出现在原子核内部。

E. 电荷密度

利用公式 (8) 和 (12)，我们将电荷密度写为

$$\rho^W = 2e\left[(\epsilon - U)(v^2 + w^2) + 2v\frac{dw}{dr} - \Upsilon w^2\right]\,, \tag{41}$$

其中 w 定义为

$$w \equiv \frac{1}{\epsilon - U - \Upsilon}\left(\frac{dv}{dr} + \frac{2v}{r}\right)\,. \tag{42}$$

对于点状原子核，在相对论区域 $r \ll \zeta/m$ 内，波函数 v 的行为为 $v \sim r^{L-2}$ ，因此

$$w \sim Lr^{L-2}\,, \tag{43}$$

因此，在此区域内，电荷密度的行为为（回忆 (41) $L = \sqrt{1/4 - \zeta^2} + 1/2$）

$$\rho^W \sim -2eL(3 - 2L)r^{2L-5}/\zeta\,. \tag{44}$$

这种电荷密度在 $r \to 0$ 处发散得极其严重，以至于局域在任意小原子核周围球体内的总电荷 e为无穷大。正如文献 [11] 中所指出的，它的符号也“错误”（带负电的矢量粒子却对应正电荷）。这看起来就像电荷密度的积分与粒子电荷 e符号相反。

现在考虑有限大小原子核的情况。如上文所示，存在一些主要局域在原子核内部的态。然而，我们将证明，即使对于具有薛定谔型谱的态，当 $R \to 0$时，其电荷仍有有限比例位于原子核内部。

我们首先估算不含 Υ 项的电荷密度贡献。矢量粒子在外部的电荷密度奇异部分可表示为$\rho^W(r) = \rho^W(R)(r/R)^{2\gamma-4}$。内部的电荷密度为$\rho^{no\Upsilon}(r) \approx \rho^W(R)$。将内部电荷密度从 0 积分到 R，并将外部电荷密度从 R 积分到无穷大，再乘以$r^2 dr$ ，我们得到

$$\frac{Q_{\rm in}^{no\Upsilon}}{Q_{\rm out}} \approx \frac{1 - 2\gamma}{3} \approx \frac{2Z^2\alpha^2}{3}. \tag{45}$$

我们看到，这个比值与 R无关，也就是说，即使原子核大小为零，矢量粒子仍有非零概率处于原子核内部。此外，原子核内部及附近的电荷都具有错误的符号。

现在将$\Upsilon = -\frac{3Z\alpha}{m^2R^3} \gg$~~$U$~~对 w的贡献计入。由此得到内部电荷与外部电荷之比：

$$\frac{Q_{\rm in}}{Q_{\rm out}} \sim -\frac{2(Z\alpha)^4}{3}\,, \tag{46}$$

当 $R \to 0$时，该比值仍然有限。这意味着，即使对于具有薛定谔型谱的态，只要 $mR \ll Z\alpha$，其电荷仍有有限比例位于原子核内部。

注意，尽管粒子的电荷密度在原子核附近变号，且 ρ_W 变为正值，但由于方程（42）分母中的 Υ项很大，抑制了原子核内部的 w ，因此 ρ_W在原子核内部仍为负值。

IV. 总结

带电矢量 粒子的库仑束缚态问题在短距离处存在病态：即使耦合趋于无穷小，其波函数也会塌缩到库仑中心（ $\zeta = Z\alpha \to 0$） [5]。相比之下，点状原子核的临界电荷对于自旋零粒子为 $Z\alpha = 1/2$，对于自旋-1/2 粒子为 $Z\alpha = 1$ 。

为进一步研究这一行为，我们求解了轻带电矢量粒子处于有限尺寸、无限重原子核场中的问题，并忽略电弱修正和核反冲。令 $R \to 0$，即可得到点状极限。这种方法使我们能够在波动方程中纳入一个至关重要的 Υ项；对于点状原子核，该项正比于 $\delta(r)$，而此前计算能谱时忽略了这一项。

我们着重研究最有趣的情形：角动量为 $j = 0$的纵向偏振，以及较小的核半径 $mR \ll Z\alpha \ll 1$。请注意，在这种情况下，核内库仑势超过质量 $Z\alpha/R > m$。这对原子电子而言是典型情况，不会造成任何问题，薛定谔方程仍能给出正确结果。然而，对于自旋1粒子，与薛定谔方程解的差异十分显著，即使相互作用常数 $Z\alpha$ 非常小也是如此（在真正的非相对论情形 $Z\alpha/R \ll m$ 下，当 $\Upsilon \ll U \ll m$ 时，结果与薛定谔方程的结果一致）。

能谱自然分为两部分。一组“深”态主要位于原子核内部。其数量随 $N \sim 0.6Z\alpha/mR$ 增长，因此当核半径 R 缩小至零时， $N \to \infty$ 。这些核内态的能量（以高斯单位制表示）为

$$\epsilon \approx -\frac{3Ze^2}{2R} + \sqrt{\frac{8}{3}}mc^2\, n\,, \tag{47}$$

这使它们深深处于负能量连续谱中，
$\epsilon \sim -Ze^2/R < -mc^2$ [1] 。从物理上说，这意味着库仑场变得足够强，能够将粒子–反粒子对从真空中拉出（“真空崩塌”）。以这种方式产生的负电荷会屏蔽核电荷，阻止进一步的对产生，并推动系统趋向于完全电中性化[2]。

能谱的第二部分（以高斯单位制表示）为

$$E_n = -\frac{mZ^2e^4}{2\nu^2}, \tag{48}$$

其中 $E_n = \epsilon - mc^2$ 是非相对论能量， $\nu = n - \Delta$ 是有效主量子数，并且

$$\Delta \approx 0.6\frac{Z\alpha}{mR} \gg 1. \tag{49}$$

$\Delta = n - \nu$ 的大小表示原子核内具有 $j = 0$ 的能级数量。参数 Δ 和有效主量子数 $\nu = n - \Delta$ 都不是整数，因此，这些能级并不与点状原子核库仑势中的（重新编号的）能级重合。该公式类似于里德伯公式，该公式描述了在库仑场中远离原子实运动的外层电子的能量，而此时剩余离子

对于这类索末菲型能级，估算原子核内电荷与原子核外电荷之比为

$$\frac{Q_{\rm in}}{Q_{\rm out}} \sim -\frac{2(Z\alpha)^4}{3}\,, \tag{50}$$

该比值在 $R \to 0$ 时保持有限。这意味着，即使原子核无限小，具有“普通”索末菲型谱的态，其电荷仍有有限比例位于原子核内。

文献 [11] 发现，对于原子核附近带负电的矢量粒子，其电荷密度 ρ_W 会改变符号并变为正值。这一效应是由波函数快速变化区域内矢量玻色子的电四极矩和自旋轨道相互作用的主导贡献造成的。由于对于点状原子核，这种符号相反的电荷密度积分发散，因此看起来似乎存在一个悖论：矢量粒子在库仑场中的电荷改变了符号。然而，我们发现，对于有限的 R，原子核内的电荷密度 ρ_W 为负（这是由于 Υ 项的贡献）。

真空极化会在$r \ll 1/m_z$ 处修正库仑场，形式为 $U_v(r) = [\alpha\beta\ln(m_z r)]Z\alpha/r$，从而产生$\Upsilon_v(r) = Z\alpha^2\beta/m^2r^3$，并伴随一个补偿性的 $\delta(r)$ 项，使诱导电荷总量为零。对于量子电动力学（$\beta > 0$），这会在原子核外形成排斥性 $1/r^3$ 势垒，抑制短距离塌缩；有限核半径R 使发散正则化，并在原子核内产生符号相反的 Υ_v，有效地形成一个可通过穿透进入的深内势阱。在渐近自由理论（$\beta < 0$）中，外部势垒不存在，而原子核内会出现势垒。

这些结果表明，自旋为 1 的粒子的库仑问题需要特殊的正则化：除非有限核质量、有限核尺寸或额外的短程相互作用使其稳定下来，否则概率密度必然会发生短距离塌缩。值得注意的是，希格斯玻色子交换会产生吸引势，但无法解决这一问题。

进一步研究表明，在洛伦兹标量汤川势或引力场 [3] 中， W 波函数都不会坍缩。我们

[1] 具有 $\epsilon < -mc^2$ 的态的波函数在远距离处不为零。这些态并不是真正的束缚态，其能量为实数；相反，它们是具有有限宽度的共振态，对应于 W^+ 散射振幅中的复能量极点。[2] 通过加入额外的康普顿型图，可以消除负能量态和真空崩塌。该图出现在一种可重整化模型中，在该模型里，产生库仑势的重粒子具有一个中性伴粒子。该图在距离 $r \lesssim 1/M$ 处产生排斥势，其中 M 是伴粒子的质量 [12]。然而，波函数仍表现出病态行为，并坍缩至 $r \sim 1/M$，其中 M 可能任意大。

[3]文献 [17] 中发现了史瓦西黑洞度规下矢量粒子的非定态准束缚态。为研究定态，我们考察了近黑洞度规，其中中心天体的半径 R 略大于引力半径 r_g，随后取极限 $R \to r_g$。这一方法与文献 [18–21]，类似；这些文献研究了无质量矢量粒子（光子）、有质量费米子以及标量粒子的情形。相关研究报告了密集的共振谱；对于有质量粒子，还发现了天体内部的束缚态（当 $R \to r_g$ 时，能谱变得无限稠密）。然而，这一能谱与波函数的塌缩无关

因此，我们得出结论：波函数坍缩是矢量媒介相互作用（库仑光子交换和中性弱相互作用 Z ）所特有的现象，在洛伦兹标量相互作用或引力相互作用中不会发生。

致谢。— 我们感谢 Raghda Ab- del Khaleq 在本研究初期所作的贡献。本研究得到澳大利亚研究理事会资助，项目编号为 DP230101058。

附录 A：磁极化， $j \geq 1$

本节中，我们考察磁极化模式。将式 (9) 代入式 (7)，得到径向波函数 f 满足的下列方程

$$\left[\Delta_j + (\epsilon - U)^2 - m^2\right] f = 0\,, \tag{A1}$$

其中

$$\Delta_j \equiv \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d}{dr}\right) - \frac{j(j+1)}{r^2}. \tag{A2}$$

可以看出，式 (A1) 即为克莱因-戈尔登方程。

为简单起见，我们假设模型中的 U 是一个在核半径 R处急剧截断的库仑势

$$U = -\frac{\zeta}{R}\theta(R-r) - \frac{\zeta}{r}\theta(r-R)\,, \tag{A3}$$

其中 $\zeta \equiv Z\alpha$。这一势由均匀分布在原子核表面的核电荷产生，因此可以得到解析解。

在原子核内部，势为常数，此时$U = -\zeta/R$，方程 (A1) 在 $r = 0$ 处正则的解为

$$f_{\rm in} = j_j(kr)\,, \tag{A4}$$

其中$k \equiv \sqrt{(\epsilon + \overline{\zeta/R)^2 - m^2}}$，而 j_j 是第一类球贝塞尔波函数。

在原子核外部，$U = -\zeta/r$，方程 (A1) 的一般解具有如下形式

$$f = \left[c_1 M_{\lambda,\gamma}(2\beta r) + c_2 W_{\lambda,\gamma}(2\beta r)\right]/r\,, \tag{A5}$$

其中 $\beta \equiv \sqrt{m^2 - \epsilon^2}$, $\lambda \equiv \zeta\epsilon/\sqrt{m^2-\epsilon^2}$, $\gamma \equiv \sqrt{(j+1/2)^2 - \zeta^2}$。这里，$M_{\lambda,\gamma}$ 和 $W_{\lambda,\gamma}$ 分别是第一类和第二类惠特克函数。

在点状情形下，由于 $W_{\lambda,\gamma}(2\beta r)$ 在 r =0 处是奇异的，因此必须将其从解 (A5) 中排除。要求函数 $M_{\lambda,\gamma}(2\beta r)$ 在 $r = \infty$ 处有限，则得到能量本征值的索末菲公式

$$\epsilon_{nj} = m\left[1 + \frac{\zeta^2}{(\gamma + n - j - 1/2)^2}\right]^{-1/2}, \tag{A6}$$

其中 $n = 1, 2, \ldots$ 是主量子数。

对于非点状原子核的情况，解 (A5) 仅在原子核外部的区域内有效，此处 $r \neq$0，因此 $W_{\lambda,\gamma}(2\beta r)$ 是可接受的，并且自动满足无穷远处的有限性条件。另一方面，由于能量 ϵ 受到原子核有限尺寸的修正，不再满足索末菲条件 (A6)。因此，$M_{\lambda,\gamma}(2\beta r)$ 在 $r = \infty$ 处变得不规则，因而必须从式 (A5) 中排除，得到

$$f_{\rm out} = W_{\lambda,\gamma}(2\beta r)/r\,. \tag{A7}$$

通过在核边界 $r = R$处匹配两个解 (A4) 和 (A7) 的对数导数，可以求出索末菲能量 (A6) 的核尺寸修正。由于我们假设 $mR, \zeta \ll 1$，参数 kR 始终很小[4]，因此可以求出“内部”波函数的对数导数，如下

$$\left.\frac{f'_{\rm in}}{f_{\rm in}}\right|_{r=R} = \frac{\xi_j(R)}{R}\,, \tag{A8}$$

其中

$$\begin{aligned}\xi_j(R) &\equiv \frac{kR\left[j_{j-1}(kR) - j_{j+1}(kR)\right]}{2j_j(kR)} - \frac{1}{2} \\ &\approx j - \frac{(kR)^2}{2j+3}\,.\end{aligned} \tag{A9}$$

另一方面，在原子核外，由于 $2\beta R = 2\sqrt{m^2 - \epsilon^2 R} < 2mR \ll 1$，对于 $r \approx R$，我们可以利用惠特克函数的以下展开式

$$\begin{aligned}W_{\lambda,\gamma}(x) \approx{}& \frac{\Gamma(-2\gamma)x^{\gamma+\frac{1}{2}}}{\Gamma(-\gamma+1/2-\lambda)}\left(1 - \frac{\lambda x}{2\gamma+1}\right) \\ &+ \frac{\Gamma(2\gamma)x^{-\gamma+\frac{1}{2}}}{\Gamma(\gamma+1/2-\lambda)}\left(1 + \frac{\lambda x}{2\gamma-1}\right),\end{aligned} \tag{A10}$$

并写作

$$\begin{aligned}f_{\rm out} \approx{}& r^{\gamma-\frac{1}{2}}\left(1 - \frac{2\zeta\epsilon r}{2\gamma+1}\right) \\ &+ \frac{\Gamma(2\gamma)\Gamma(-\gamma+1/2-\lambda)}{\Gamma(-2\gamma)\Gamma(\gamma+1/2-\lambda)}\frac{r^{-\gamma-\frac{1}{2}}}{(2\beta)^{2\gamma}}\left(1 + \frac{2\zeta\epsilon r}{2\gamma-1}\right),\end{aligned} \tag{A11}$$

矢量粒子在库仑场中的波函数也呈现出这一特征。具体而言，在这方面，标量场与矢量场的 $j = 0$ 分量之间没有定性差异。

[4]顺便指出，供后文使用，在相对论极限下$\zeta/R \gg m$, $kR \approx \zeta$ 而在非相对论极限下 $\zeta/R \ll m$,$kR \approx \sqrt{2\zeta mR}$ 。

其中我们提取了公因子$\Gamma(-2\gamma)(2\beta)^{\gamma}/\Gamma(-\gamma+1/2-\lambda)$。

乍一看，设置 $r=R$ 并取极限 $R\to 0$ 后，方程 (A11) 中的第二项似乎是奇异的。然而，我们指出，当 $R\to 0$ 时，能量 ϵ 采用索末菲形式 (A6)，这等价于 $\gamma+1/2-\lambda=-n+j+1=0,\ -1,\ \ldots\ldots$因此函数 $\Gamma(\gamma+1/2-\lambda)=\Gamma(-n+j+1)$ 变为无穷大。伽马函数的这一奇异性必然会抵消 $R^{-\gamma-1/2}$ 的奇异性，从而使波函数 f 保持有限。事实上，当 $R\to 0$ 时，解 $W_{\lambda,\ \gamma}(\rho)$ 变为$M_{\lambda,\ \gamma}(\rho)$。

为了说明波函数 $f_{\rm out}$ 的这种行为，我们将伽马函数在其极点附近展开，得到

$$\begin{aligned}\Gamma(\gamma+1/2-\lambda)&\approx\Gamma\left(\gamma+1/2-\lambda(\epsilon_{nj})-\frac{d\lambda}{d\epsilon}\Delta\epsilon\right)\\&=\Gamma\left(-n+j+1-\frac{\zeta m^2\Delta\epsilon}{(m^2-\epsilon_{nj}^2)^{\frac{3}{2}}}\right)\\&\approx\frac{(-1)^{n-j}}{(n-j-1)!}\frac{(m^2-\epsilon_{nj}^2)^{\frac{3}{2}}}{\zeta m^2\Delta\epsilon}\,,\end{aligned}\tag{A12}$$

其中我们使用了近似

$$\Gamma(-n+x)\approx\frac{(-1)^n}{n!x}\,.\tag{A13}$$

将方程 (A12) 代入方程 (A11)，并在各处设置 $\epsilon\approx\epsilon_{nj}$，可得

$$\begin{aligned}f_{\rm out}\approx\,&r^{\gamma-\frac{1}{2}}\left(1-\frac{2\zeta\epsilon_{nj}r}{2\gamma+1}\right)\\&+\frac{\Gamma(-2\gamma-n+j+1)}{\Gamma(-2\gamma)}\frac{(n-j-1)!\Gamma(2\gamma)}{(-1)^{n-j}}\\&\times\frac{\zeta m^2\Delta\epsilon}{\beta_{nj}^3}\frac{r^{-\gamma-\frac{1}{2}}}{(2\beta_{nj})^{2\gamma}}\left(1+\frac{2\zeta\epsilon_{nj}r}{2\gamma-1}\right),\end{aligned}\tag{A14}$$

其中 $\beta_{nj}\equiv\beta(\epsilon_{nj})=\sqrt{m^2-\epsilon_{nj}^2}$。由方程 (A14) 可清楚看出，为使 $f_{\rm out}$ 在 $R\to 0$ 时保持有限，$\Delta\epsilon$ 至少必须以与 $R^{2\gamma}$ 同样快的速度趋于零。利用方程 (A14)，可得

$$\left.\frac{f'_{\rm out}}{f_{\rm out}}\right|_{r=R}\approx\frac{\gamma-\frac{1}{2}-\zeta\epsilon_{nj}R-\frac{\Gamma(-2\gamma-n+j+1)}{\Gamma(-2\gamma)}\frac{(n-j-1)!\Gamma(2\gamma)}{(-1)^{n-j}}\frac{\zeta m^2\Delta\epsilon}{\beta_{nj}^3}\frac{R^{-2\gamma}}{(2\beta_{nj})^{2\gamma}}\left(\gamma+\frac{1}{2}+\zeta\epsilon_{nj}R\right)}{R\left[1-\frac{2\zeta\epsilon_{nj}R}{2\gamma+1}+\frac{\Gamma(-2\gamma-n+j+1)}{\Gamma(-2\gamma)}\frac{(n-j-1)!\Gamma(2\gamma)}{(-1)^{n-j}}\frac{\zeta m^2\Delta\epsilon}{\beta_{nj}^3}\frac{R^{-2\gamma}}{(2\beta_{nj})^{2\gamma}}\left(1+\frac{2\zeta\epsilon_{nj}R}{2\gamma-1}\right)\right]}\,.\tag{A15}$$

令“内部”解和“外部”解的对数导数相等，即式 (A8) 和 (A15)，即可求出能量修正 $\Delta\epsilon$：

$$\begin{aligned}\Delta\epsilon\approx\,&\frac{(-1)^{n-j}\Gamma(-2\gamma)(2\beta_{nj}R)^{2\gamma}}{(n-j-1)!\Gamma(2\gamma)\Gamma(-2\gamma-n+j+1)}\\&\times\left[\frac{\gamma-\xi_j-\frac{1}{2}}{\gamma+\xi_j+\frac{1}{2}}+\frac{(2\xi_j-2\gamma-1)\zeta\epsilon_{nj}R}{(2\gamma+1)(\gamma+\xi_j+\frac{1}{2})}\right]\frac{\beta_{nj}^3}{\zeta m^2}\,.\end{aligned}\tag{A16}$$

我们注意到，式 (A16) 中的首项按 $R^{2\gamma}$ 的尺度变化，这与“外部”波函数在 $r=R\to 0$ 处正则的要求一致。

然而，我们指出，能量修正的这一主导行为严格来说是相对论性的。事实上，可以验证，在非相对论极限 $\zeta\ll mR\ll 1$ 下，式 (A16) 中与 $R^{2\gamma}$ 成正比的项消失，剩余项化为

$$\Delta\epsilon\approx\frac{(n+l)!}{n^{2l+1}(n-l-1)!}\frac{(2\zeta mR)^{2l+2}}{(2l+3)!(2l+1)!}\frac{\zeta^2 m}{n^3}\,,\tag{A17}$$

其中 $l=1,2,\ldots$ 是矢量玻色子的轨道角动量（对于磁模式，$j=l$）。方程（A17）与通过对 Schr¨odinger 方程应用一阶微扰理论得到的非相对论结果（B3）一致

附录 B：微扰理论给出的能量修正

假设采用空心核壳模型（式 (A3)），薛定谔方程中对库仑势的微扰可写为

$$V=\left(\frac{\zeta}{R}-\frac{\zeta}{r}\right)\theta(R-r)\,,\tag{B1}$$

其中，θ 是赫维赛德阶跃函数。

由于微扰 (B1) 局限在原子核内部，在核半径 R 远小于玻尔半径 a_B的极限下，对应于主量子数n和角动量 l 的未微扰波函数可写为

$$\varphi\underset{r\ll a_B}{\approx}\sqrt{\left(\frac{2Z}{na_B}\right)^3\frac{(n+l)!}{2n(n-l-1)!}}\frac{1}{(2l+1)!}\left(\frac{2Zr}{na_B}\right)^l.\tag{B2}$$

利用公式 (B1) 和 (B2)，可得能量修正为

$$\begin{aligned}\Delta\epsilon = \langle\varphi|\, V\,|\varphi\rangle &\approx \left(\frac{2Z}{na_B}\right)^3 \frac{(n+l)!}{2n(n-l-1)!} \\ &\times \frac{1}{[(2l+1)!]^2}\int_0^R \left(\frac{2Zr}{na_B}\right)^{2l}\left(\frac{\zeta}{r}-\frac{\zeta}{R}\right) r^2 dr \quad \text{(B3)} \\ &= \frac{(n+l)!}{n^{2l+1}(n-l-1)!}\frac{(2\zeta mR)^{2l+2}}{(2l+3)!(2l+1)!}\frac{\zeta^2 m}{n^3}\,.\end{aligned}$$

[1] A. Proca，《Comptes Rendu》**202**，1490（1936）。[2] H. S. W. Massey 和 H. C. Corben，《Math. Proc. Camb. Philos. Soc.》**35**，463–473（1939）。[3] J. R. Oppenheimer、H. Snyder 和 R. Serber，《Phys. Rev.》**57**，75（1940）。[4] I. Tamm，《Phys. Rev.》**58**，952（1940）。[5] H. C. Corben 和 J. Schwinger，《Phys. Rev.》**58**，953（1940）。[6] A. Pomeranskii 和 I. Khriplovich，《J. Exp. Theor. Phys.》**86**，839（1998）。[7] A. Pomeransky 和 R. Sen'kov，《Phys. Lett. B》**468**，251（1999）。[8] A. A. Pomeranskii、R. A. Senkov 和 I. B. Khriplovich，《Usp. Fiz. Nauk》**43**，1055（2000）。[9] W. Fushchich、A. Nikitin 和 W. Susloparow，《Il Nuovo Cimento A (1965-1970)》**87**，415（1985）。[10] V. I. Fushchich 和 A. G. Nikitin，*Symmetries of equations of quantum mechanics*（纽约 Allerton Press，1994）。[11] V. V. Flambaum 和 M. Y. Kuchiev，《Phys. Rev. Lett.》**98**，181805（2007）。[12] V. V. Flambaum 和 M. Y. Kuchiev，《当可重整化性还不够：矢量玻色子的库仑问题》，arXiv 预印本 hep-ph/0609194；《Mod. Phys. Lett. A》**22**，2971（2007）。[13] M. Y. Kuchiev 和 V. V. Flambaum，《Phys. Rev. D》**73**，093009（2006）。[14] V. V. Flambaum、A. J. Geddes 和 A. V. Viatkina，《Phys. Rev. A》**97**，032510（2018），网址：https://link. aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.97.032510。[15] V. V. Flambaum 和 M. Y. Kuchiev，《强场中的矢量玻色子》，[hep-ph]arXiv:0804.4529（2008）。[16] Y. B. Zel'dovich 和 V. S. Popov，《Sov. Phys. Uspekhi》**14**，673（1972）。[17] J. a. G. Rosa 和 S. R. Dolan，《Phys. Rev. D》**85**，044043（2012），网址：https://link.aps.org/doi/10. 1103/PhysRevD.85.044043。[18] V. V. Flambaum、G. H. Gossel 和 G. F. Gribakin，《Phys. Rev. D》**85**，084027（2012），网址：https://link. aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.85.084027。[19] V. V. Flambaum、G. H. Gossel 和 G. F. Gribakin，《Phys. Rev. D》**86**，044042（2012），网址：https://link. aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.86.044042。[20] G. Spencer-Smith、G. H. Gossel、J. C. Berengut 和 V. V. Flambaum，《Gen Relativ Gravit》**45**，613（2013），网址：https://doi.org/10.1007/s10714-012-1490-9。[21] Y. V. Stadnik、G. H. Gossel、V. V. Flambaum 和 J. C. Berengut，《Eur. Phys. J. C》**73**，2605（2013），网址：https: // doi.org/10.1140/epjc/s10052-013-2605-5。