arXiv:2512.18798v1 [math.AG] 21 Dec 2025

无理铅笔，以及通过基本群的有限群完备化刻画与乘积等源的簇

作者：Fabrizio Catanese，附录由 Pavel Zalesskii 撰写

Abstract. 我们对两条定理给出了一个极简证明，其内容已在标题中概述；其中 Π_g 是亏格为 g 的紧致复曲线的基本群：

(1) 关于无理铅笔的定理 2.1 的有限群版本：对于紧致 K¨ahler 流形，无理铅笔（即映到亏格为 $g \geq 2$ 的曲线上的纤维化）对应于有限群完备化 $\widehat{\pi_1}(X) \to \Pi_g$ 的一个满射$\widehat{\ }$，且该满射满足极大性；

(2) 关于与乘积等源的簇的刻画定理 1.4 的有限群版本，尤其给出了紧致 K¨ahler 流形 X 同构于亏格至少为$\widehat{\ }$ 2 的曲线乘积的判据：当且仅当 $\widehat{\pi_1}(X) \cong \prod_1^n \Pi_{g_i}$，并且满足某种体积或上同调条件。

定理 1.4 得出的结果比[3]的主定理A更强。

1. Introduction

定义 1.1. 设 X 是一个光滑射影簇。若 X 满足以下条件，则称其为**与高阶乘积等源的簇**，或称 VIP，参见 [2], :

$$W \cong (C_1 \times C_2 \times \dots C_n)/G,$$

其中， C_i是亏格为 $g(C_i)$ =的光滑曲线： $g_i \geq 2$ ，而 G 是一个在乘积簇($C_1 \times C_2 \times \dots C_n$)上自由作用的有限群。

在 [2] 中，以下结论已在定理 7.1、7.5 和 7.7 中证明：

定理 1.2. 设 X 是一个维数为 n 的紧致 *K¨ahler* 流形，满足

(i) $\pi_1(X) \cong \Gamma$ 存在一个指数为 d 的子群 Γ'，使得

$$\Gamma' \cong \Pi_{g_1} \times \dots \Pi_{g_n},$$

Date：2025年12月23日。AMS分类号：14F45；14G32；14M99；32J27；32Q15；32Q55；55R05。关键词：与乘积等源的簇、无理铅笔。

其中 Π_g 是一个亏格为 g的紧致复曲线的基本群，且所有 $g_j \geq 2$,

(ii) $H^{2n}(X,\mathbb{Z})$ 在 $H^{2n}(X',\mathbb{Z})$ 中的 $H^{2n}(\Gamma',\mathbb{Z})$ 之像内的指数为 d，其中 $X' \to X$ 是与 Γ' 相关联的非分歧覆盖（即 $H^{2n}(\Gamma',\mathbb{Z}) = H^{2n}(X',\mathbb{Z})$）。

那么， X 是一个 *VIP* W 的爆破；若 K_X 丰沛，则 X 与乘积同源（$X \cong W$）。

或者，若 *(i)*、*(iibis)* 和 *(iii)* 成立，则 X 是一个 *VIP*，其中 *(ii bis)* 表示 $H^{2n}(\Gamma',\mathbb{Z})$ 在 $H^{2n}(X',\mathbb{Z})$ 中的像非零，*(iii)* $K_X^n = \frac{1}{d}2^n n! \prod_j (g_j - 1)$。或者，若 K_X 丰沛且 *(i)*、*(ii')* 成立，则 X 是一个 *VIP*，其中 *(ii')* $H^{2n}(X,\mathbb{Z}) \cong H^{2n}(\Gamma,\mathbb{Z})$。

注 1.3. 若 X 是非球面的，即 X是一个 $K(\Gamma,1)$空间，则条件 (ii)、(ii') 得到验证。

证明的关键在于处理 $\Gamma' = \Gamma$的情形，并证明此时 X 与曲线乘积双全纯。

这篇短文旨在简要证明以下结果。该结果在 [3]中以定理 A 的形式得到证明，所用假设为 (I) 以及以下条件：$\pi_1(X)$ 是剩余有限的，且 X 是非球面的。

定理 1.4. 在定理 *1.2* 中，若将条件 *(I)* 中的条件 *(i)* 替换为条件 *(i-alg)*，则可得到相同的结论。

$$\widehat{\Gamma'} \cong \widehat{\Pi}_{g_1} \times \ldots \widehat{\Pi}_{g_n},$$

其中 Γ 表示 Γ ($\Gamma' = \pi_1(X')$ 的有限群完备化（X'也可称为 X' 的代数基本群，并记作 $\pi_1^{alg}(X')$），

(II) 分别在条件 *(ii)*、*(ii bis)*、*(ii')* 中加入 Γ 是剩余有限的条件。

因此，只需在假设下证明定理 1.4：

$$\widehat{\pi_1(X)} \cong \Pi_{g_1} \times \ldots \widehat{\Pi}_{g_n}.$$

与 [2] 中一样，关键在于证明存在全纯映射$f_i : X \to C_i$，其中 C_i 是亏格为 g_i 的复曲线，并且这些映射诱导第 i 个同态 $(f_i)_*$: $\pi_1(X) \to \pi_1(C_i) \cong \Pi_{g_i}$。

这将在下一节的定理 2.1 中完成，其依据是关于无理铅笔的早期结果，这些结果包含于 [1], [4]。

随后，我们将在最后一节完成定理 1.4 的证明。

所用论证涉及基本群 Π_g及其有限群完备化的性质，尤其涉及它们之间满射的非分裂性质。

其中一项这样的结果归功于 Pavel Zalesskii，并在附录中得到了证明。

2. Irrational pencils Theorem via the algebraic fundamentalgroup

定理 2.1。 设 X 是一个维数为 n的紧致 *K¨ahler* 流形，并且

$$\psi : \pi_1^{alg}(X) := \widehat{\pi_1(X)} \to \widehat{\Pi}_g$$

是一个满射同态，其中 $g \geq 2$。

那么存在一个全纯映射 $f:\ X \to C$，其纤维连通，其中 C 是一个亏格为 $g_2 \geq g$的复曲线，使得 ψ 可分解为经由有限群完备化满射 $\pi_1(f)$的映射。并且，如果同态 ψ 相对于此类分解 $\pi_1(X) \to \Pi_{g_2} \to \Pi_g$是极大的，则 $\psi = \pi_1(f)$。

备注 2.2。 反向命题显然成立；这样的纤维化 f 给出一个满射 $\pi_1(f)$。

我们能给出的最简证明遵循 Beauville 在 [1]附录中的论证。为清楚起见，我们先讨论一些关于有限剩余完备化的简单结果。

2.1. 有限群完备化。 设 A 为一个群， A 为其有限群完备化，也就是说，作为一个集合，它是如下逆极限：

$$\widehat{A} = \varprojlim_{(H <_{fi} A)} (A/H), \tag{2.1}$$

其中 $H <_{fi}$ 表示 H 是有限指数子群。

由于每个有限指数子群 H 都包含一个有限指数正规子群 H'，因此

$$\widehat{A} = \varprojlim_{(H \lhd_{fi} A)} (A/H),$$

其中 $\lhd_{fi}$ 表示我们有一个有限指数正规子群。

因此 A是一个群。

给定一个有限群 B 并应用 Hom，我们得到一个直接极限

$$Hom(\widehat{A}, B) = \varinjlim_{(H \lhd_{fi} A)} Hom(A/H, B).$$

上述结论由有限群完备化的泛性质推出；以下结果也基本上由此得出。

引理 2.3。 设 A, B 为群，并假设存在一个满射 $\eta : A \twoheadrightarrow B$。

那么，对每个有限商群 $\phi : B \twoheadrightarrow G$，都存在一个满射 $\psi :\ A \twoheadrightarrow G$使得 $\psi = \phi \circ \eta$。

证明。 我们通过复合映射 $A \to A \to B \to G$定义 ψ，其中最后一个同态为 ϕ。

ψ 通过 $A \to A/K$分解， $K := ker(\psi)$，因此只需证明ψ 是满射。

$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$ $\sim A \to G$诱导出 ψ：$A \to G$，由于 η： $A \to B$ 和$\sim$ $\sim\phi : B \to G$ 均为满射，因此它也是满射。

现在，我们有一个同态 $A/H \to G$ iff $H < K$，并且根据 ψ 的满射性，我们可以找到一个有限指数正规子群，使得 $A/H \to G$ 是满射。

由于复合映射 $A/H \to A/K \to G$ 是满射，因此 $A/K \cong G$，结论得证。

□

$\widehat{\ }$**引理 2.4.** 沿用引理 *2.3* 的记号，若 $A \to G$ 是满射，则其核 $\widehat{\ }$ 同构于 K。

证明。假设 $H < K$：那么陪集 K/H 在$A/K = G$中映射到单位元。此外，若 $H \lhd A$，则 $A/H \twoheadrightarrow A/K = G$。

那么，核中的元素来自 K/H，其中 H 是 K的有限指数正规子群。

但是， K 的每个有限指数子群 H 都包含一个有限指数子群H'，该子群在 A中正规。
□

对于下一个引理，假设 M 是有限生成阿贝尔群$M \cong \mathbb{Z}^b \oplus T$，其中 T是有限阿贝尔群。

定义 2.5。设 p 是一个素数，令 $M_p := M/pM$，并注意，对于 $p >> 0$, $M_p =(\mathbb{Z}/p)^b$。

引理 2.6。设 $A^{ab} := A/[A, A]$ 为 A的阿贝尔化，并假设 A^{ab} 是有限生成的。

Then $\widehat{A} \to A_p^{ab}$ *is surjective.*

证明。根据我们的假设 $A_p^{ab} = A/K$，其中 K 是 A的一个有限指数子群。□

引理 2.7。对于 X 紧致 ***Kähler*** 流形，其不规则度 $q(X) := h^1(\mathcal{O}_X)$ 可作如下描述：

$$q := q(X) = max_{(p \text{ prime, } p>>0)}\{r | \pi_1(X) \twoheadrightarrow (\mathbb{Z}/p)^{2r}\},$$
$$q := q(X) = max_{(p \text{ prime, } p>>0)}\{r | \widehat{\pi}_1(X) \twoheadrightarrow (\mathbb{Z}/p)^{2r}\}.$$

证明。 $\pi_1(X) \twoheadrightarrow H_1(X, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^{2q} \oplus T$，其中 T是挠子群，且为有限生成群。

因此，对于 $p >> 0$, $Hom(T, \mathbb{Z}/p) = 0$。因此 $\pi_1(X) \twoheadrightarrow(\mathbb{Z}/p)^{2q}$,

且每个这样的满射都经由它分解。第二个断言由引理 2.3 得出。

□

2.2. **定理 2.1 的证明**。对于每个素数 p, $p >> 0$，我们有

$$\Pi_g \twoheadrightarrow \mathbb{Z}^{2g} \twoheadrightarrow (\mathbb{Z}/p)^{2g},$$

因此，根据引理 2.6， $\widehat{\Pi}_g \twoheadrightarrow (\mathbb{Z}/p)^{2g}$，并且根据引理 2.3，存在一个满射$\phi$: $\pi_1($ $X) \twoheadrightarrow(\mathbb{Z}/p)^{2g}$.

现在考虑 $\frac{p^{2g}-1}{p-1} = 1 + p + \dots p^{2g-1}$ 满同态的核 $\epsilon : (\mathbb{Z}/p)^{2g} \twoheadrightarrow \mathbb{Z}/p$。

如同 [1], 的附录中所述，只需证明我们通过这种方式在 $Pic^0(X)$ 中至少得到 p^{2g-1} 个挠阶为 p 的特殊元素。

"特殊元素"是指 $ker(\eta)$，$\eta := \epsilon \circ \phi$ 给出一个覆盖 X 的映射，其不规则度为 $q' > g(X)$。

根据引理 2.4， $ker\eta$ 是 $\widehat{\pi}_1(X) \twoheadrightarrow \mathbb{Z}/p$ 的核；同样，

$\widehat{}$ $\widehat{}$根据引理 2.4， $\Pi_g \twoheadrightarrow \mathbb{Z}/p$ 的核同构于 $\Pi_{p(g-1)+1}$。

$\widehat{\quad}$ $\widehat{}$注意，我们有一个映射 Ψ ，从 $ker\eta$ 到 $\Pi_{p(g-1)+1}$；由于根据$\widehat{}$假设，我们有一个满射 $\widehat{\pi}_1(X) \twoheadrightarrow \Pi_g$ ，因此 Ψ是满射。

由引理 2.7,

$$q' := q(X') = max_{(p \text{ prime, } p>>0)}\{r|\widehat{ker\eta} \twoheadrightarrow (\mathbb{Z}/p)^{2r}\} \geq$$

$$\geq max_{(p \text{ prime, } p>>0)}\{r|\widehat{\Pi}_{p(g-1)+1} \twoheadrightarrow (\mathbb{Z}/p)^{2r}\} = 2(p(g-1)+1)$$

因此

$$q' \geq p(g-1)+1.$$

由于 $g \geq 2$，对于 $p >> 0$, $q' > q(X)$，定理 2.1 得证。

3. Proof of Theorem 1.4

如前所述，只需证明在假设如下的情形下定理 1.4 成立

$$\widehat{\pi_1(X)} \cong \widehat{\Pi}_{g_1} \times \dots \widehat{\Pi}_{g_n}. \tag{3.1}$$

$\widehat{\quad}$ $\widehat{}$由定理 2.1，对每个满射 $\psi_i : \pi_1(X) \twoheadrightarrow \Pi_{g_i}$ ，都对应一个无理铅笔，即一个全纯映射 $f_i : X \to C_i$ ，其连通纤维的亏格 C_i 等于 $g_i' \geq g_i$。此外， $\pi_1(f_i) : \pi_1(X) \twoheadrightarrow \Pi_{g_i'}$ $\widehat{\quad}$ $\widehat{}$是一个满射，它诱导出一个满射 $\psi_i' : \pi_1(X) \twoheadrightarrow \Pi_{g_i'}$ ，使得 ψ_i 可经由 ψ_i'分解。

步骤 I: $g_i' = g_i, \ \forall i.$

$\widehat{}$ $\widehat{}$假设 $g_i' > g_i$。那么，对 $\Pi_{g_1} \times \dots \Pi_{g_n}$

$\widehat{}$ $\widehat{}$ $\widehat{}$的第 i 个因子的投影可经由 $\Pi_{g_i'}$ 分解，因此我们将有同态 $\Pi_{g_i} \to \Pi_{g_i'}$，以及$\widehat{}$ $\widehat{}$满射 $\Pi_{g_i'} \twoheadrightarrow \Pi_{g_i}$ ，其复合为单位元（我们将这种情形称为**分裂满射**）。

步骤 I 的第一种证明： 根据下述引理 3.4，这种分裂满射对于 $g_i' > g_i$不可能存在。该引理由 Pavel Zalesskii 在附录中证明。

引理 3.4 对于 $g' > g$，不存在分裂满射

$\widehat{\Pi}_{g'} \twoheadrightarrow \widehat{\Pi}_g.$

步骤 I 的第二个证明： 我们将给出另一个更初等的证明。

回顾一下，Green 和 Lazarsfeld [4] 已经证明，上同调跳跃轨迹

$$\{L \in \mathrm{Pic}(X) | H^1(X, L) \neq 0\}$$

是 Pic(X) 中复子环面的平移像的有限并，且每个无理铅笔 $f_i : X \to C_i$ 都给出一个维数为 g_i' 、经过原点的子环面 B_i 。

根据我们的假设 (3.1)，Pic(X) 在原点处的切空间是若干维数为 g_i 的复子空间的直和 $\oplus_i V_i$ ，满足 $V_i \subset T_{B_i}$。

因此，要么所有环面 B_i 各不相同，且 $g_i' = g_i$；要么每个 B_j 都有切空间

$$T_{B_j} = \oplus_i \text{ s.t. } V_i \subset T_{B_j} V_i \tag{3.2}$$

在原点处。

相应地，我们得到一个满射

$$\widehat{\pi_1(X)} \cong \widehat{\Pi}_{g_1} \times \ldots \widehat{\Pi}_{g_n} \twoheadrightarrow \widehat{\Pi}_{g_j'},$$

从而对每个 B_j 都得到一个满射

$$\prod_{i \text{ s.t. } V_i \subset T_{B_j}} \widehat{\Pi}_{g_i} \twoheadrightarrow \widehat{\Pi}_{g_j'}, \tag{3.3}$$

使得每个子乘积都不映满。

事实上，正如我们之前所论证的，对 $\Pi_{g_1} \times \cdots \times \Pi_{g_n}$ 经由 $\Pi_{g_j'}$ 的第 i 个因子的投影分解，因此满射 (3.3) 是一个分裂满射。

这与以下引理的 (b) 部分矛盾，因此通过证明下述内容，步骤 I 得以确立

引理 3.1. *(a)* 亏格为 $g \geq 2$ 的紧致复曲线的基本群 Π_g 不能是非平凡半直积 $K \rtimes H$。

(b) 不存在分裂满射

$$\prod_1^k \widehat{\Pi}_{g_i} \twoheadrightarrow \widehat{\Pi}_{g'},$$

其中 $g' = g_1 + \cdots + g_k$。

证明。 (a)：由于 Π_g 不含有限阶元素，因此两个子群 H, K 都是无限的。

因此，与子群 K, H 对应的覆盖空间给出非紧致曲线。

因此， H， K 都是自由群，而 $K \rtimes H$的极小表示为

$$\langle \gamma_1, \ldots, \gamma_m, \delta_1, \ldots, \delta_n | \delta_i \gamma_j \delta_i^{-1} = M_{i,j}(\gamma), \forall 1 \leq j \leq m, 1 \leq i \leq n \rangle.$$

它必须是 $2g = m + n$，因此我们只能有一个关系，故有 $n = m = 1$。

在这种情况下 $g = 2$，但由于此时 $\delta\gamma\delta^{-1} = \gamma^{\pm 1}$，我们得到 $\Pi_2 \cong \mathbb{Z}^2$，或 $(\Pi_2)^{ab} \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2$，矛盾。

(b) 的证明。

我们有一个分裂满射

$$\prod_1^k \widehat{\Pi}_{g_i} \twoheadrightarrow \widehat{\Pi}_{g'},$$

其中 $g' = g_1 + \cdots + g_k$，并令 $g := g_1$，我们可以将其写为

$$\widehat{\Pi}_g \times K'' \twoheadrightarrow \widehat{\Pi}_{g'},$$

K'' 是曲面群的有限群完备化的直和。

令 Π_g 为 $H_{g'}$ 为其像核 此外，令 H' 为 $\Pi_{g'} \to K''$ 的核。

H' 非零；否则 $\Pi_{g'} \to K'$ 就是一个嵌入，这与切空间的满射 (3.2) 矛盾。同理，K 也非平凡。

根据我们的假设，H'，K 是 $\Pi_{g'}$ 的交换子群。

下一个引理是复函数论中的一个古老工具，是我从 [8] 那里学到的。

引理 3.2. 若 H'、K 是非平凡的交换子群，则 $H' \cdot K$ 是一个交换子群。若 H'、K 是正规子群，则它也是正规子群。

证明. 给定两个双曲型的 M¨比乌斯变换，它们不等于单位元且阶数不为 2。设第一个等于 $z \mapsto \mu z$、$\mu \in \mathbb{R}^* \mu \neq 1$，第二个

$$\sigma : z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}.$$

那么，两个变换的交换性等价于

$$\mu(az + b)(c\mu z + d) \equiv (cz + d)(a\mu z + b),$$

一个二次多项式的等式，这相当于

$$ac = 0,\ bd = 0.$$

若 $b = c = 0$，则 $\sigma(z) = \lambda z$；若 $a = d = 0$，则 $\sigma(z) = \lambda z^{-1}$，并且当且仅当 $\mu\lambda = \lambda\mu^{-1}$时交换性成立，这意味着 $\mu = -1$，矛盾。

因此，这两个变换属于一个交换子群，该子群包含所有与其中一个变换交换的变换。

□

现在，$K \cap H'$ 只包含单位元，因此 $K \cdot H'$ 将是一个秩至少为 2 的交换正规子群。

这就产生了矛盾：因为 $\Pi_{g'}$不包含这样的正规交换子群 G，这是由于每个无限指数正规子群都是自由群。

而且，如果 G 是有限指数的，那么它将是一个亏格为≥ 2 的曲面群，因此不是阿贝尔群。

□

注 3.3. Serge Cantat 指出，引理 3.2 可追溯至 Fricke 和 Klein：只需证明这两个变换有两个共同的不动点，因此它们可以同时对角化。

每个变换都有一个吸引不动点和一个排斥不动点；由于它们彼此交换，这两对点相同。

他还概述了引理 3.1 a) 第二个陈述的另一种证明：K（在庞加莱圆盘的边界上）的极限集在 H 作用下保持不变，因此就是整个边界；所以 K 必须是 Π_g 的有限指数子群。

步骤 II 现在我们可以假设 $g_i' = g_i, \quad \forall i$。

将这些映射合在一起，我们得到 n

$$F := (f_1 \times \cdots \times f_n) : X \to C_1 \times \cdots \times C_n,$$

其中 $F_* := \pi_1(F)$ 是满射，因为 ψ 是满射。

现在，由于 Γ 是剩余有限的，它嵌入其完备化中，$\Pi_{g_1} \times \cdots \times \Pi_{g_n}$ 也如此。因此 F_* 也是单射，进而是一个同构。

于是，由 (ii)、(ii bis) 或 (ii') 可得 F 是满射。

那么，结合 F 的满射性、等式 (iii) 以及 K_X 是丰沛这一事实，可知 F 是一个同构。

如果我们改为假设等式 $H^{2n}(\Gamma, \mathbb{Z}) = H^{2n}(X, \mathbb{Z})$，那么 F 是一次爆破；若 K_X 是丰沛的，则它是一个同构。

□

3.1. **Pavel Zalesskii 撰写的附录。**

引理 3.4. 对于 $g' > g$，不存在分裂满射 $\Pi_{g'} \twoheadrightarrow \Pi_g$。

证明。 有一个交换图

$$\begin{array}{ccc} \widehat{\Pi}_{g'} & \longrightarrow & \widehat{\Pi}_g \\ \downarrow{\scriptstyle \pi_{g'}} & & \downarrow{\scriptstyle \pi_g} \\ \widehat{\Pi}_{g'}^{(p)} & \longrightarrow & \widehat{\Pi}_g^{(p)} \end{array}$$

其中 $^{(p)}$ 表示 pro-p 完备化。

反设我们有这样一个分裂 $f : \Pi_g \longrightarrow \Pi_{g'}$。由于 $\widehat{\Pi}_g$ 是由 $2g$ 生成的，$\widehat{\Pi}_g^{(p)}$ 也由 f 生成（$\widehat{\Pi}_g$）。因此，$\pi_{g'}(f(\widehat{\Pi}_g))$ 是一个由 2g 个元素生成的 pro-p 群，且 $\pi_{g'} f$ 经由 π_g 分解。于是，下方的水平映射分裂。由于 $\widehat{\Pi}_{g'}^{(p)}$ 是由 $2g'$ 生成的，$\pi_{g'}(f(\widehat{\Pi}_g))$ 在 $\widehat{\Pi}_{g'}^{(p)}$ 中具有无限指数。但 pro-p 曲面群的每个无限指数子群都是自由 pro-p 群（Demushkin 群也有此性质，参见 [7, 第 44], 页的习题 5；而 pro-p 曲面群是其特例），所以 $\pi_{g'}(f(\Pi_g))$ 必须是自由 pro-p 群，这与 $\pi_{g'}(f(\widehat{\Pi}_g)) \cong \widehat{\Pi}_g^{(p)}$ 的上同调维数为 2 矛盾。证明至此完成。

□

致谢：*Fabrizio* 谨向 *Serge Cantat* 和 *Dan Segal* 致谢，感谢他们提出的宝贵意见。

References

[1] Fabrizio Catanese, *Moduli and classification of irregular Kähler manifolds (and algebraic varieties) with Albanese general type fibrations.* **104**, 1, 263 289《数学发明》第 – 期（1991），附录由 A. Beauville 撰写。[2] Fabrizio Catanese, *Fibred surfaces varieties isogenous to a product and related moduli spaces.* **122**, 1, 1 44 2000《美国数学杂志》第 – 期（ ）。[3] Sam Hughes、Claudio Llosa Isenrich、Pierre Py、Matthew Stover、Stefano Vidussi, *Profinite rigidity of Kähler groups: Riemann surfaces and subdirect products.* arXiv:2501.13761。[4] Mark Green、Robert Lazarsfeld, *Higher obstructions to deforming cohomology groups of line bundles.* 4, 1, 87 103 1991《美国数学会杂志》第 – 期（ ）。[5] W. Herfort 和 P. A. Zalesskii，几乎自由的 pro-p 群，《高等科学研究所出版物》**118**（2013）193–211。[6] L. Ribes、P.A. Zalesskii。《有限剩余群》。第二版，施普林格出版社，柏林、海德堡，2010。[7] Serre J-P.，关于有限剩余群的上同调维数，《拓扑学》**3**，（1965）413–420。[8] Cal Ludwig Siegel, *Topics in complex functions theory. Vol. II: Automorphic functions and Abelian integrals.* 25,《纯粹与应用数学跨学科专著》。第。纽约等：Wiley-Interscience，John Wiley and Sons, Inc. 的一个分部，ix，193页（1971）。

Fabrizio Catanese Mathematisches Institut der Universität Bayreuth NW , , II Universitätsstr. 30 95447 Bayreuth Germany. , , , *Email address*: Fabrizio.Catanese@uni-bayreuth.de

Department of Mathematics, University of Brasília, 70910-900, Brasília-DF, Brazil*Email address*: zalesskii@gmail.com