默认道义推理逻辑

MARIO PIAZZA 和 ANDREA SABATINI

arXiv:2512.18824v1 [cs.LO] 21 Dec 2025

摘要

在许多现实情境中，主体必须在动态环境中行动，同时在信息不完备的情况下进行推理，并依据一套不稳定、依赖语境且常常相互冲突的规范语料库采取行动。我们提出一种以默认逻辑为基础、通用且非模态的道义推理证明论框架。其核心特征是受控序列这一概念——即附有若干公式集（控制集）的序列，这些控制集规定前件中的公式应当或不应当蕴涵什么。将这些控制集与代表默认规则和规范的不同逻辑外规则结合后，它们便记录了支配这些规则适用的条件与约束，从而能够对推导出的序列进行局部可靠性检验。我们证明，受控序列演算满足收缩规则的可容许性及非解析切割，并确立了它们相对于默认理论和规范系统中的宽容后承的强完备性。最后，我们深入阐明受控序列演算如何为解决道义冲突、以及通过恰当的逻辑外规则刻画动态道义概念，提供灵活而富有表现力的基础。

1. 引言

规范——无论表现为父母的建议、军事命令、交通法规、宗教诫命、工作场所政策，还是自我约束的行为准则——都会带来一个逻辑难题。一方面，遵守或违反规范是非此即彼的事情，用经典命题逻辑的语义来刻画再自然不过。另一方面，规范往往具有不稳定性，并依赖于语境：新规范的引入可能凌驾于先前的规范之上，或使其无效，因此规范的行为完全属于非单调逻辑的范畴。以柏拉图《理想国》第一卷中的例子来说，“借了东西就应当归还”这一规范，在特殊情况下可能会被推翻——例如，借出武器的人后来发疯了。规范并非单调的：它默认适用，但相关语境发生变化时便可能被推翻，正如“狗会叫”这一概括会被更具体的事实“巴仙吉犬不会叫”所推翻。最后，规范之间会以复杂的方式相互作用，有时甚至会产生冲突；然而，规范是命令而非陈述句，因此在传统逻辑意义上并不具有真值。

众所周知，从逻辑的角度来看，最传统的规范推理方法来自道义逻辑这一类逻辑。它们通过引入特定算子扩展经典模态逻辑，从而能够在希尔伯特式系统、相继式演算或其变体中形式化地表示规范、

义务和许可 [46, 15, 27, 9]。然而，标准道义逻辑存在若干有据可查的局限，包括难以处理道义悖论（如善良的撒玛利亚人悖论 [36] 或违反义务后的义务 [8, 11, 44]），以及在适应语境敏感、基于特定性的规范结构或动态规范结构方面灵活性有限。相比之下，大约25年前，有人提出了另一种方案，即所谓的输入／输出逻辑（I/O 逻辑） [23, 24, 25]。这类系统提供了一种非模态的替代方案，将条件义务视为推理规则，并明确区分输入条件（I）和输出（O）；输出表示在这些条件下哪些行为是义务、禁止或许可的。该框架着重于在特定情境下应当做什么，而不将义务视为模态真理。然而，尽管输入／输出逻辑适应性更强，也更适合为条件规范和可撤销规范建模，但在发展稳健、全面的证明系统方面仍处于相对早期的阶段[1]。

本研究提出的新颖视角与这两种范式都存在显著差异：它具有模块化特性，计算效率更高，并能对推理步骤进行细粒度控制。这些特点使规范推理更加透明、可扩展且适应性更强，尤其适用于复杂或多层次的情境。我们的目标是从在动态环境中行动的理性主体或人工主体的立场出发，为规范构建一个通用的非模态证明论框架。该环境足够稳定，能够支持预期的义务和禁止，同时又保持开放性和适应性，以接纳新的、可能相互冲突的规范。为展现这种灵活性，我们将考察广泛的具体道义情境。

此外，本文提出的框架阐明了规范推理与默认推理之间的相互作用。后者是一种非单调推理，能够在信息不完备且缺乏明确矛盾证据的上下文中推导出合理的结论。这类结论具有可撤销性：当新信息对其提出质疑时，可以将其撤回 [39, 26, 2]。默认推理可以通过在经典逻辑中加入一组逻辑外公理 来形式化——这些公理表示理想推理者信念中的命题内容；此外还需加入一组默认规则，用于编码导向可撤销但一致结论的推理路径。采用轻信的方法时，理想推理者会尽可能接受数量最多且彼此一致的信念。在规范推理中，这种轻信并非仅仅可以接受，而是必不可少：怀疑立场会过早排除可行的义务，从而不当地抑制规范推理。将规范推理与默认推理联系起来的想法并不新鲜，John Horty 尤其曾提出过这一建议 [16, 19]。然而，我们的方法借助证明论平台得以实现，超越了纯粹的纲领性层面。

从技术上讲，这种实现基于受控经典证明系统的概念：该系统建立在经典序列之上，并增添了一层逻辑外

[1]关于近期一项基于超序列框架的提案，参见 [33]。2

信息，其传播由推导的具体结构决定。在早期工作中，受控经典序列 $\Gamma \vdash_{\mathbf{S}} \Delta$ 被引入，用以在经典框架 [29]内刻画非单调和次协调行为。控制集$\mathbf{S}$ 编码了逻辑外信息，可以有选择地阻止从 Γ [5, 10,6, 29, 35]推导出 Δ 。与此相反，本文中的受控序列是专门用于表示经典基础上的默认规则和规范的句法工具。我们采用特定的逻辑外规则，将默认规则以及（无条件或有条件的）义务和许可形式化：演算中的每个序列都标注一个控制对 $\langle \mathbf{T}, \mathbf{S} \rangle$（记作： $\Gamma \ \mathbf{s}_{\mathbf{T}} \ \Delta$），其中$\mathbf{T}$ 和$\mathbf{S}$ 是公式集，用以规定：若要应用逻辑外规则，前件中的公式应当蕴涵或不应蕴涵什么。为初步说明本文提出的方法，我们先来看一个非正式示例。

例1.1. 令超逻辑规则

$$\frac{\Gamma \ \Big|\!\!\frac{\mathbf{T_1}}{\mathbf{S_1}} \ p \qquad \Gamma \ \Big|\!\!\frac{\mathbf{T_2}}{\mathbf{S_2}} \ q}{\Gamma \ \Big|\!\!\frac{\mathbf{T}}{\mathbf{S}} \ r}$$

表示如下规范性陈述：“如果一个人祈祷且是男性，那么他应当佩戴经匣”——其中 $\mathbf{T} = \mathbf{T_1} \cup \mathbf{T_2} \cup \{\{p, q\}\}$。令 s 表示（事实性）陈述“现在是夜晚”。现在，考虑以下超逻辑规则：

$$\frac{\Gamma \ \Big|\!\!\frac{\mathbf{T_1}}{\mathbf{S_1}} \ p \qquad \Gamma \ \Big|\!\!\frac{\mathbf{T_2}}{\mathbf{S_2}} \ q}{\Gamma \ \Big|\!\!\frac{\mathbf{T}}{\mathbf{S}'} \ r}$$

其中 $\mathbf{S}' = \mathbf{S} \cup \{\{s\}\}$。这类超逻辑规则表达了如下规范性主张：“如果一个人祈祷，那么只要他是男性且不是夜晚，就应当佩戴经匣。”这一表述概括了祈祷时佩戴经匣的规则，同时考虑了性别和时间约束。

本文结构如下。第 2 节介绍规范系统和默认逻辑的相关概念与结果，后文将使用这些内容。具体而言，我们为义务和许可系统引入了一个<|style id='1'>道义扩展 概念，它类似于默认规则的 Łukasiewicz 扩展概念。第 3 节基于受控序列，为默认规则、义务和许可引入一个统一的证明论平台。受控序列演算具有收缩规则的可容许性和非解析切，而不含非解析切的证明则表现出一种弱化形式的解析性。我们确立了受控序列演算相对于基于 Łukasiewicz 扩展的宽容后承（针对默认规则）以及道义扩展的宽容后承（针对义务和许可）是强完备的。因此，我们表明，受控序列演算能够形式化底层宽容后承关系的累积传递性和谨慎单调性的弱版本。第 4 节汇集了一些道义情境，并通过受控演算的<|style id='3'>视角 对其进行考察。最后，第 5 节概述未来研究的方向。

公理

$$\frac{}{\Gamma, p \vdash p, \Delta}\, ax \qquad \frac{}{\Gamma, p, \neg p \vdash \Delta}\, ax \qquad \frac{}{\Gamma \vdash p, \neg p, \Delta}\, ax \qquad \frac{}{\Gamma, \neg p \vdash \neg p, \Delta}\, ax$$

$$\frac{}{\Theta \dashv \Lambda}\, \overline{ax}$$

逻辑规则

$$\frac{\Gamma, A, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \wedge B \vdash \Delta}\, L\wedge \qquad \frac{\Gamma, A, B \dashv \Delta}{\Gamma, A \wedge B \dashv \Delta}\, L'\wedge$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A \qquad \Gamma \vdash \Delta, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \wedge B}\, R\wedge \qquad \frac{\Gamma \dashv \Delta, A_i}{\Gamma \dashv \Delta, A_1 \wedge A_2}\, R'_i\wedge$$

$$\frac{A, \Gamma \vdash \Delta \qquad B, \Gamma \vdash \Delta}{A \vee B, \Gamma \vdash \Delta}\, L\vee \qquad \frac{A_i, \Gamma \dashv \Delta}{A_1 \vee A_2, \Gamma \dashv \Delta}\, L'_i\vee$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \vee B}\, R\vee \qquad \frac{\Gamma \dashv \Delta, A, B}{\Gamma \dashv \Delta, A \vee B}\, R'_i\vee$$

$$\frac{\Gamma, \neg A \vdash \Delta \qquad \Gamma, \neg B \vdash \Delta}{\Gamma, \neg(A \wedge B) \vdash \Delta}\, L\neg\wedge \qquad \frac{\Gamma, \neg A_i \dashv \Delta}{\Gamma, \neg(A_1 \wedge A_2) \dashv \Delta}\, L'_i\neg\wedge$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, \neg A, \neg B}{\Gamma \vdash \Delta, \neg(A \wedge B)}\, R\neg\wedge \qquad \frac{\Gamma \dashv \Delta, \neg A, \neg B}{\Gamma \dashv \Delta, \neg(A \wedge B)}\, R'\neg\wedge$$

$$\frac{\neg A, \neg B, \Gamma \vdash \Delta}{\neg(A \vee B), \Gamma \vdash \Delta}\, L\neg\vee \qquad \frac{\neg A, \neg B, \Gamma \dashv \Delta}{\neg(A \vee B), \Gamma \dashv \Delta}\, L'\neg\vee$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, \neg A \qquad \Gamma \vdash \Delta, \neg B}{\Gamma \vdash \Delta, \neg(A \vee B)}\, R\neg\vee \qquad \frac{\Gamma \dashv \Delta, \neg A_i}{\Gamma \dashv \Delta, \neg(A_1 \vee A_2)}\, R'_i\neg\vee$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma, \neg\neg A \vdash \Delta}\, L\neg\neg \qquad \frac{\Gamma, A \dashv \Delta}{\Gamma, \neg\neg A \dashv \Delta}\, L'\neg\neg$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A}{\Gamma \vdash \Delta, \neg\neg A}\, R\neg\neg \qquad \frac{\Gamma \dashv \Delta, A}{\Gamma \dashv \Delta, \neg\neg A}\, R'\neg\neg$$

图1. G4pn 和 G4^{pn} 序$\overline{列演}$算

2. 预备概念与结果

2.1. G4^{pn} $\overline{演算}$。 我们使用一种命题语言，其中包含一个可数的原子集合 p、q、r、.....、一元联结词 $\neg$，以及用于合取和析取的二元联结词 $\wedge$、$\vee$。大写拉丁字母 A、B、C、.... 表示公式，而大写希腊字母 Γ、Δ、Π、Σ、..... 表示公式的有限多重集。我们使用 Θ、Λ、.....

对于文字的有限多重集，也就是原子 p、q、r、.....及其否定 $\neg p$、$\neg q$、$\neg r$、.....。对于语境 $\Theta = \{p_1, \ldots, p_k, \neg q_1, \ldots, \neg q_m\}$ 和 $\Gamma = \{A_1, \ldots, A_n\}$，我们规定：

$$\Theta^{\perp} = \{\neg p_1, \ldots, \neg p_k, q_1, \ldots, q_m\} \quad \bigwedge \Gamma = A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_n \quad \bigvee \Gamma = A_1 \vee A_2 \vee \cdots \vee A_n$$

对于 $\Theta = A$，我们用 $A^{\perp}$ 表示 $\Theta^{\perp}$。对于 $\Gamma = \emptyset$，我们约定 $\Gamma^{\perp} = \Gamma$、$\bigwedge \Gamma = \top$ 和 $\bigvee \Gamma = \bot$，其中 $\top$ 和 $\bot$ 分别表示任意一个重言式和矛盾式。公式 A 的逻辑复杂度 $\mathsf{C}(A)$ 定义如下：若 A 是文字，则 $\mathsf{C}(A) = 1$；若 A 具有 $B \otimes C$的形式，则 $\mathsf{C}(A) = \mathsf{C}(B) + \mathsf{C}(C) + 1$；若 A 具有 $\neg(B \otimes C)$ 的形式，其中 $\otimes \in \{\wedge, \vee\}$，则 $\mathsf{C}(A) = \mathsf{C}(\neg B) + \mathsf{C}(\neg C) + 1$。将此定义扩展到多重集 $\Gamma = A_1$、.....、A_n，规定 $\mathsf{C}(\Gamma) = \mathsf{C}(A_1) + \ldots + \mathsf{C}(A_n)$。

我们考虑 Gentzen 风格的序列 $\Gamma \vdash \Delta$ 以及 反序列式 $\Gamma \dashv \Delta$，其中 $\Gamma \dashv \Delta$当且仅当 $\Gamma \vdash \Delta$ 无效时才有效 [13, 14]。在经典逻辑中，当且仅当存在某个布尔赋值，使得 Γ 中的每个公式都为真，且 Δ 中的每个公式都为假时，反序列式才有效。

经典命题逻辑的系统 G4^{pn} 是对系统 G4 的一种修改。后者引自 [30], ，将逻辑上下文视为公式的多重集，并通过在 Kleene 原始 G4 系统 [20, 第 289–290 页，第 306] 页的基础上添加互补公理 $\dfrac{}{\Theta \dashv \Lambda}\, ax$（其中 $\Theta \cap \Lambda = \varnothing$），再配以独立的反序列规则而得到。系统 G4^{pn} 保留了 G4 中关于 $\neg$ 的规则，并将其应用于更广泛的一类 ax实例；此外还纳入了关于 $\neg\wedge$、$\neg\vee$和 $\neg\neg$的规则——因此上标 pn 表示“原始否定”。为了统一指称序列（$\Gamma \vdash \Delta$）和反序列式（$\Gamma \dashv \Delta$），无论二者的区别是否重要，也不将它们与推导它们的任何特定演绎-反驳系统绑定，我们使用术语“$*$-序列”，并将其一般形式记作 $\Gamma \ ^{*} \ \Delta$。通过令 $\mathsf{C}(\Gamma \ ^{*} \ \Delta) = \mathsf{C}(\Gamma) + \mathsf{C}(\Delta)$，度量 C 可扩展到任意 $*$-序列 $\Gamma \ ^{*} \ \Delta$。

$\vdash$ $\vdash$

$\vdash$

G4^{pn} 推导 π 可以以一个序列 $\Gamma \vdash \Delta$ 或一个反序列式 $\Gamma \dashv \Delta$结束。前一种情况下，我们称 π 是 $\Gamma \vdash \Delta$的证明；后一种情况下，π 是$\Gamma \vdash \Delta$的反驳。任何 $*$-序列 $\Gamma \ ^{*} \ \Delta$ 都可以通过自底向上应用图1中的规则 $L\wedge, R\wedge, L\vee, R\vee, L\neg\wedge, R\neg\wedge, L\neg\vee, R\neg\vee, L\neg\neg, R\neg\neg$，并以 * 代替 $\vdash$，将其分解为一组原子 $*$-序列，直到所得树的每个叶节点都是原子 $*$-序列——也就是说，只包含文字的序列。

现在我们强调G4^{pn} 证明系统的两个关键特征：

命题2.1。G4^{pn} 证明（反驳）$\Gamma \vdash \Delta$，当且仅当公式 $\neg \bigwedge \Gamma \vee \bigvee \Delta$ 是经典有效的（无效的）。

命题2.2。 极大G4^{pn}-分解会产生唯一的一组原子 $*$-序列。

证明。 我们按照 [4, 30]中关于G4同一性质的证明进行论证。 □

命题2.2使我们能够直接指称与任意给定的 $*$-序列 $\Gamma \ ^{*} \ \Delta$相关联的唯一原子 $*$-序列集合，因为这一分解独立于生成它的具体推导。对于任意一组原子 $*$-序列 $\mathcal{C}$，我们称 $\mathcal{C}$ 为

在否定下封闭，当且仅当 Θ_1，$\Lambda_2^{\perp} \vdash^{*} \Theta_2^{\perp}$，$\Lambda_1$ 属于 $\mathcal{C}$，如果 Θ_1，$\Theta_2 \vdash^{*} \Lambda_2$，$\Lambda_1$ 属于 $\mathcal{C}$。我们用 $\mathrm{top}(\Gamma \vdash^{*} \Delta)$ 表示与 $\Gamma \vdash^{*} \Delta$ 相关联的原子 $*$-序列在否定下的闭包。我们用 $\mathrm{top}^{\mathrm{cp}}(\Gamma \vdash^{*} \Delta)$ 表示 $\mathrm{top}(\Gamma \vdash^{*} \Delta)$ 中满足 $\Theta \cap \Lambda = \varnothing$，且 Θ 和 Λ 都不同时包含一个原子及其否定的那些原子 $*$-序列 $\Theta \vdash^{*} \Lambda$ 所构成的子集；下标 cp 代表“互补”。最后，$\mathrm{top}^{\mathrm{r}}(\Gamma \vdash^{*} \Delta)$ 表示 $\mathrm{top}^{\mathrm{cp}}(\Gamma \vdash^{*} \Delta)$ 中形如 $\vdash^{*} \Lambda$ 的互补 $*$-序列，其中下标 r 代表“右侧”。

例 2.1. 这是 $\neg(p \wedge q) \vee r \vdash^{*} s \vee \neg t$ 的分解树：

$$L\neg\wedge \dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg(p \wedge q) \vee r \vdash^{*} s \vee \neg t}{\neg(p \wedge q) \vee r \vdash^{*} s, \neg t}\, R\vee}{\neg(p \wedge q) \vdash^{*} s, \neg t \qquad r \vdash^{*} s, \neg t}\, L\vee}{\neg p \vdash^{*} s, \neg t \qquad \neg q \vdash^{*} s, \neg t}$$

因此，我们有 $\mathrm{top}(\neg(p \wedge q) \vee r \vdash^{*} s \vee \neg t) = \{\neg p \vdash^{*} s, \neg t;\ \neg q \vdash^{*} s, \neg t;\ r \vdash^{*} s, \neg t;\ \vdash^{*} \neg p, \neg s \vdash^{*} \neg t;\ \vdash^{*} \neg p, t \vdash^{*} s;\ \vdash^{*} p, t, \neg s \vdash^{*};\ \vdash^{*} s, t, p;\ \vdash^{*} \neg s \vdash^{*} \neg t, p;\ t \vdash^{*} s, p;\ t, \neg s \vdash^{*} p;\ \neg q, \vdash^{*} \neg s \vdash^{*} \neg t;\ \vdash^{*} q, \neg s, t \vdash^{*};\ \neg q, t \vdash^{*} s;\ \vdash^{*} s, t, q;\ \vdash^{*} \neg s \vdash^{*} \neg t, q;\ \neg s, t \vdash^{*} q;\ t \vdash^{*} s, q;\ r, \neg s \vdash^{*} \neg t;\ r, t \vdash^{*} s;\ r, \neg s, t \vdash^{*};\ \neg s \vdash^{*} \neg t, \neg r;\ t \vdash^{*} s, \neg r;\ \vdash^{*} \neg s, t \vdash^{*} \neg r\}$，$\mathrm{top}^{\mathrm{cp}}(\neg(p \wedge q) \vee r \vdash^{*} s \vee \neg t) \models \mathrm{top}(\neg(p \wedge q) \vee r \vdash^{*} s \vee \neg t)$ 和 $\mathrm{top}^{\mathrm{r}}(\neg(p \wedge q) \vee r \vdash^{*} s \vee \neg t) \models \{\vdash^{*} p, s, \neg t;\ \vdash^{*} s, \neg t, q;\ \vdash^{*} \neg r, s, \neg t\}$。

对于任意一组 $\mathcal{C}$ 原子 $*$-序列，我们称其在收缩下闭合，当且仅当

- if $A, A, \Theta \vdash^{*} \Lambda$ or $A, \Theta \vdash^{*} \Lambda, A^{\perp}$ is in $\mathcal{C}$, then $A, \Theta \vdash^{*} \Lambda$ is in $\mathcal{C}$;
- if $\Theta \vdash^{*} \Lambda, A, A$ or $A^{\perp}, \Theta \vdash^{*} \Lambda, A$ is in $\mathcal{C}$, then $\Theta \vdash^{*} \Lambda, A$ is in $\mathcal{C}$.

此外，当 $\mathcal{C}$ 满足以下条件之一时，我们称其在切断下闭合：$\vdash \Phi$，$\Theta \vdash^{*} \Lambda$，$\Psi$ 属于 $\mathcal{C}$

- $\Theta \vdash^{*} \Lambda, A$ and $A, \Phi \vdash^{*} \Psi$;
- $\Theta \vdash^{*} \Lambda, A$ and $\Phi \vdash^{*} \Psi, A^{\perp}$;
- $A^{\perp}, \Theta \vdash^{*} \Lambda$ and $A, \Phi \vdash^{*} \Psi$[2].

我们用 $\mathrm{top}^{\#}(\Gamma \vdash^{*} \Delta)$ 表示这样一组原子 $*$-序列：从 $\mathrm{top}(\Gamma \vdash^{*} \Delta)$ 出发，最大限度地应用以下步骤即可得到该集合（参见 [34,第 9] 页）：

(*i*) 以 $\mathcal{C}_0 = \mathrm{top}(\Gamma \vdash^{*} \Delta)$ 为起点；(*ii*) 对 $\mathcal{C}_n$ 在收缩下取闭包；(*iii*) 如果 $\Theta \vdash^{*} \Lambda$，$A$ 和 $A, \Phi \vdash^{*} \Psi$，或 $A^{\perp}, \Theta \vdash^{*} \Lambda$ 和 $A, \Phi \vdash^{*} \Psi$，或 $A, \Theta \vdash^{*} \Lambda$ 和 $A^{\perp}, \Phi \vdash^{*} \Psi$ 属于 $\mathcal{C}_n$，而 $\Phi, \Theta \vdash^{*} \Lambda, \Psi$ 不属于 $\mathcal{C}_n$，则取 $\mathcal{C}_{n+1} = \mathcal{C}_n \cup \{\Phi, \Theta \vdash^{*} \Lambda, \Psi\}$。

[2] 在切断下闭合的定义中使用 $\vdash^{*}$ 时，我们并不是要暗示，在任何特定的演绎-反驳系统中，切断下的闭合性都会保持可反驳性；事实上，显然并非如此。相反，我们旨在给出一种切断下闭合的表述，使其抽象掉任何特定演绎-反驳框架所作的承诺。

我们用 $\mathrm{top}^{\#}_{\mathsf{cp}}(\Gamma \mid\!\sim^{*} \Delta)$ 表示 $\mathrm{top}^{\#}(\Gamma \mid\!\sim^{*} \Delta)$ 中互补 $*$-序列的集合。最后，我们用 $\mathrm{top}^{\#}_{\mathsf{r}}(\Gamma \mid\!\sim^{*} \Delta)$ 表示包含所有互补 $*$序列中 $\mathrm{top}^{\#}(\Gamma \mid\!\sim^{*} \Delta)$的左侧为空。

例 2.2。考虑 $*$-序列 $\mathrm{top}(\mid\!\sim^{*}(\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee r))$。我们有 $\mathrm{top}(\mid\!\sim^{*}(\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee r)) = \{\mid\!\sim^{*} \neg p, q;\ \neg q \mid\!\sim^{*} \neg p;\ p \mid\!\sim^{*} q;\ p, \neg q \mid\!\sim^{*};\ \mid\!\sim^{*} \neg q, r;\ q \mid\!\sim^{*} r;\ \mid\!\sim^{*} r \mid\!\sim^{*} \neg q, r;\ \mid\!\sim^{*} q, \neg r \mid\!\sim^{*} r;\ \mid\!\sim^{*} \neg r \mid\!\sim^{*} \neg q, r;\ \mid\!\sim^{*} r, q \mid\!\sim^{*} r;\ \mid\!\sim^{*} \neg r, \neg r \mid\!\sim^{*} \neg q;\ \mid\!\sim^{*} \neg r, q, \neg r \mid\!\sim^{*}\}$ and $\mathrm{top}_{\mathsf{cp}}(\mid\!\sim^{*}(\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee r)) = \mathrm{top}(\mid\!\sim^{*}(\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee r))$。

因此，$\mathrm{top}^{\#}_{\mathsf{cp}}(\mid\!\sim^{*}(\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee r)) = \mathrm{top}_{\mathsf{cp}}(\mid\!\sim^{*}(\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee r)) \cup \{q, \neg r \mid\!\sim^{*};\ q \mid\!\sim^{*} r;\ \neg r \mid\!\sim^{*} q;\ \mid\!\sim^{*} \neg q,\ r;\ \mid\!\sim^{*} q \mid\!\sim^{*} r;\ \mid\!\sim^{*} \neg q,\ r \mid\!\sim^{*} \neg p,\ r,\ r;\ \mid\!\sim^{*} r \mid\!\sim^{*} \neg p,\ r;\ \neg r,\ \neg r \mid\!\sim^{*} \neg p;\ \mid\!\sim^{*} \neg p,\ r;\ \neg r \mid\!\sim^{*} \neg p;\ \mid\!\sim^{*} \neg p,\ r;\ \mid\!\sim^{*} \neg r \mid\!\sim^{*} \neg p;\ p \mid\!\sim^{*} r,\ r;\ \mid\!\sim^{*} \neg r,\ p \mid\!\sim^{*} r;\ \mid\!\sim^{*} \neg r,\ \neg r,\ p \mid\!\sim^{*};\ p \mid\!\sim^{*} r;\ \mid\!\sim^{*} r,\ p \mid\!\sim^{*};\ p \mid\!\sim^{*} r;\ \mid\!\sim^{*} p,\ \neg r \mid\!\sim^{*}\}$。

2.2. 默认理论。 默认规则默认规则是一种领域特定推理规则，其形式为

$$\frac{B : C_1, \ldots, C_n}{D} \tag{1}$$

其中，B是先决条件，非矛盾公式 $C_1, \ldots, C_n$ 是辩护，而非重言式公式 D 是默认规则的结论。其解释是：如果证明了 B，那么只要公式 $\neg C_1, \ldots, \neg C_n$ 尚未被证明，D就可证明。若某条默认规则的先决条件已被证明，我们就说该规则已触发。

若 $n = 1$，则当且仅当$\mathsf{G4^{pn}}$ 能证明序列 $C_1 \vdash D$ 和 $D \vdash C_1$ 时，形式为(1)的默认规则是正常的；当且仅当$\mathsf{G4^{pn}}$ 能证明 $C_1 \vdash D$时，该规则是半正常的。为方便起见，在讨论正规默认规则时，我们只关注满足$C_1 = D$的规则。

默认理论是一个二元组 $\langle \mathcal{W}, \mathcal{D} \rangle$，其中 $\mathcal{W}$ 是有限且一致的逻辑外公理集，$\mathcal{D}$ 是有限的非空默认规则集。当且仅当 $\mathcal{D}$ 中的所有默认规则都是正常的，默认理论 $\langle \mathcal{W}, \mathcal{D} \rangle$ 才称为正常。我们将使用 $req(\mathcal{D}')$ $just(\mathcal{D}')$和$concl(\mathcal{D}')$分别表示任一 $\mathcal{D}' \subseteq \mathcal{D}$中默认规则的先决条件集、辩护集和结论集。

一个修正扩展（也称为*Łukaszewicz* 扩展）是一个公式集，它可由 $\mathcal{W}$ 通过经典逻辑以及对 $\mathcal{D}$ 中默认规则的最大限度应用推导得出；这些规则的 一致性条件相对于同时定义的支持集均成立（无论是在规则触发之前还是之后）（[2, ，第 75-76], [21] 页）。具体而言，当且仅当 $\mathcal{E}$ 和 $\mathcal{F}$ 按如下方式准归纳定义时，我们称 $\langle \mathcal{E}, \mathcal{F} \rangle$ 是 $\langle \mathcal{W}, \mathcal{D} \rangle$ 的修正扩展：

$$\mathcal{E}^0 = \mathcal{W} \qquad \mathcal{F}^0 = \varnothing$$

$$\mathcal{E}^{k+1} = Cn(\mathcal{E}^k) \cup \{concl(\mathcal{D}') \mid \mathcal{D}' \subseteq \mathcal{D}, req(\mathcal{D}') \subseteq \mathcal{E}^k, A \in (\mathcal{F} \cup just(\mathcal{D}')) \Rightarrow \neg A \notin Cn(\mathcal{E} \cup concl(\mathcal{D}'))\}$$

$$\mathcal{F}^{k+1} = \mathcal{F}^k \cup \{just(\mathcal{D}') \mid \mathcal{D}' \subseteq \mathcal{D}, req(\mathcal{D}') \subseteq \mathcal{E}^k, A \in (\mathcal{F} \cup just(\mathcal{D}')) \Rightarrow \neg A \notin Cn(\mathcal{E} \cup concl(\mathcal{D}'))\}$$

$$\mathcal{E} = \bigcup_{i=0}^{\omega} \mathcal{E}^i \qquad \mathcal{F} = \bigcup_{i=0}^{\omega} \mathcal{F}^i$$

例 2.3. 令 $\langle \mathcal{W}, \mathcal{D} \rangle$ 定义如下：

$$\mathcal{W} = \varnothing$$

$$\mathcal{D} = \left\{ \frac{\top : \neg q \wedge p}{p} \ , \ \frac{\top : \neg r \wedge q}{q} \ , \ \frac{\top : \neg p \wedge r}{r} \right\}$$

$\langle \mathcal{W}, \mathcal{D} \rangle$ 有多个修正扩展，即 $\langle \mathcal{E}_1, \mathcal{F}_1 \rangle = \langle Cn(\{p\}) \ \{\neg q \wedge p\}\rangle$,$\langle \mathcal{E}_2, \mathcal{F}_2 \rangle = \langle Cn(\{q\})$、$\{\neg r \wedge q\}\rangle$ 以及 $\langle \mathcal{E}_3, \mathcal{F}_3 \rangle = \langle Cn(\{r\}) \ \{\neg p \wedge r\}\rangle$。

若 $\langle \mathcal{W}, \ \mathcal{D} \rangle$ 是一个默认理论，那么当且仅当 A 属于 $\langle \mathcal{W}, \ \mathcal{D} \rangle$的至少一个修正扩展时， A 是 $\mathcal{W}$ 的修改的轻信式后承（简称m-宽容后承）。直观而言，宽容型主体会尽可能接受数量最多且彼此一致的信念。

很容易看出，修正宽容后果关系虽然具有超经典性，却是非单调的：加入任意前提后，它所支持的结论可能不再成立 [22]。然而，它满足半单调性这一关键性质：加入新的默认规则，不会使 $\mathcal{W}$ 的任何修改的轻信式后承失效：

引理 2.1。 设 $\langle \mathcal{W}, \mathcal{D} \rangle$ 是一个默认理论，且 $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{D}'$。对于 $\langle \mathcal{W}, \mathcal{D} \rangle$ 的任意修正扩展$\langle \mathcal{E}, \mathcal{F} \rangle$，都存在 $\langle \mathcal{W}, \mathcal{D}' \rangle$ 的至少一个修正扩展 $\langle \mathcal{E}', \mathcal{F}' \rangle$，使得 $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{E}'$ 且 $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}'$。

证明。 证明请参见 [21, 第 12-13]页。 □

2.3. 作为逻辑外规则的义务与许可。 我们将受约束条件义务（许可）视为一种形式如下的领域特定推理规则

$$\frac{B : C_1, \ldots, C_n}{D} \tag{2}$$

其中， B是条件，非矛盾公式 C_1、.....、 C_n是约束，而非重言公式 D 是受约束条件义务（或许可）的结论。其解释是：如果 B 是／应当是（是／被允许是）事实，那么只要C_1、.....、 C_n不应当（或不被允许）是事实， D 就应当是（或被允许是）事实。如果先决条件的预期解释是事实性的，即“如果 B 是事实，那么 D 就应当（或被允许）是事实”，我们就称条件义务（或许可）具有事实条件 。另一方面，如果先决条件的预期解释是道义性的、非事实性的，即“如果 B应当（或被允许）是事实，那么 D 就应当（或被允许）是事实”，我们就称条件义务（或许可）具有道义条件 。如果 $n = 1$, 那么当 $C_1 = D$[3]时，我们称形式为（2）的受约束条件义务（或许可）是正常的。如果 B 在逻辑上等价于 $\top$，则形式为 2 的规则是受约束无条件义务。只要某项义务（或许可）的条件得到证明，我们就称其被触发。

[3]需要强调的是， [24] 将所有条件义务都置于一组固定的约束之下，而我们则通过允许每个条件义务（以及每个许可）关联其自身特定的约束集合，拓展了这一视角。此外，我们在统一框架内处理默认规则与条件规范，从而能够针对支配义务与许可的事实条件进行默认推理。

义务系统 是一个二元组 $\langle \mathcal{W}^{\mathsf{o}},\ \mathcal{O}\rangle$，其中 $\mathcal{W}^{\mathsf{o}}$ 是一个有限且一致的逻辑外公理集合——表达不受约束的无条件义务； $\mathcal{O}=\mathcal{O}^{\mathsf{f}}\cup\mathcal{O}^{\mathsf{d}}$则满足： $\mathcal{O}^{\mathsf{f}}$ 是一个有限且非空的、具有事实条件的受约束（无）条件义务集合， $\mathcal{O}^{\mathsf{d}}$ 是一个有限的、具有道义条件的受约束（无）条件义务集合。类似地，许可系统 是一个二元组 $\langle \mathcal{W}^{\mathsf{p}},\ \mathcal{P}\rangle$，其中 $\mathcal{W}^{\mathsf{p}}$ 是一个有限且一致的逻辑外公理集合——表达不受约束的无条件许可； $\mathcal{P}=\mathcal{P}^{\mathsf{f}}\cup\mathcal{P}^{\mathsf{d}}$则满足： $\mathcal{P}^{\mathsf{f}}$ 是一个有限且非空的、具有事实条件的受约束（无）条件许可集合， $\mathcal{P}^{\mathsf{d}}$ 是一个有限的、具有道义条件的受约束（无）条件许可集合。

规范系统 $\mathcal{N}$ 是一个二元组 $\langle\langle \mathcal{W}^{\mathsf{o}},\ \mathcal{O}\rangle,\ \langle \mathcal{W}^{\mathsf{p}},\ \mathcal{P}\rangle\rangle$，其中 (i) $\langle \mathcal{W}^{\mathsf{o}},\ \mathcal{O}\rangle$ 是义务系统，(ii) $\langle \mathcal{W}^{\mathsf{p}},\ \mathcal{P}\rangle$ 是许可系统，且 (iii) $\mathcal{W}^{\mathsf{o}}\subseteq\mathcal{W}^{\mathsf{p}}$ 和 $\mathcal{O}^{\star}\subseteq\mathcal{P}^{\star}$ 满足 $\star\in\{\mathsf{f},\ \mathsf{d}\}$。当且仅当规范系统 $\langle\langle \mathcal{W}^{\mathsf{o}},\ \mathcal{O}\rangle,\ \langle \mathcal{W}^{\mathsf{p}},\ \mathcal{P}\rangle\rangle$ 中的所有许可均为正常时，称其为正常规范系统。我们将分别用 $cond(\mathcal{Q}')$、 $constr(\mathcal{Q}')$ 和 $concl(\mathcal{Q}')$ 表示任意 $\mathcal{Q}'\subseteq\mathcal{O}$ （分别为 $\mathcal{Q}'\subseteq\mathcal{P}$）中义务（许可）的条件集、约束集和结论集。

设 $\langle \mathcal{W},\ \mathcal{D}\rangle$ 是一个默认理论， $\mathcal{N}$ 是一个规范系统。给定 $\langle \mathcal{W},\ \mathcal{D}\rangle$ 的一个修正扩展 $\langle \mathcal{E},\ \mathcal{F}\rangle$ ，义务（许可）扩展是一个公式集，它可由 $\mathcal{E}$， $\mathcal{W}^{\mathsf{o}}$ 和 $\mathcal{W}^{\mathsf{p}}$ 通过经典逻辑以及最大限度地应用 $\mathcal{N}$ 中满足一致性条件的义务（分别为许可）而导出；其是否满足一致性条件，要相对于一个同时定义的支持集，在这些义务（许可）触发之前和之后分别进行判断。具体而言，当且仅当 $\mathcal{S}_{\mathcal{E}}$ 和 $\mathcal{T}_{\mathcal{E}}$ 按照以下方式准归纳定义时，我们称 $\langle \mathcal{S}_{\mathcal{E}},\ \mathcal{T}_{\mathcal{E}}\rangle$ 为 $\langle\langle \mathcal{W},\ \mathcal{D}\rangle,\ \mathcal{N}\rangle$ 的义务扩展：

$$\mathcal{S}_{\mathcal{E}}^{0}=\mathcal{W}^{\mathsf{o}}\qquad \mathcal{T}_{\mathcal{E}}^{0}=\varnothing$$

$$\mathcal{S}_{\mathcal{E}}^{k+1}=Cn(\mathcal{S}_{\mathcal{E}}^{k})\cup\left\{concl(\mathcal{O}_x^{\mathsf{f}}),concl(\mathcal{O}_x^{\mathsf{d}})\ \middle|\ \begin{array}{l}\mathcal{O}_x^{\mathsf{f}}\subseteq\mathcal{O}^{\mathsf{f}},\mathcal{O}_x^{\mathsf{d}}\subseteq\mathcal{O}^{\mathsf{d}},\\ req(\mathcal{O}_x^{\mathsf{f}})\subseteq\mathcal{E},req(\mathcal{O}_x^{\mathsf{d}})\subseteq\mathcal{S}_{\mathcal{E}}^{k},\\ A\in(\mathcal{T}_{\mathcal{E}}\cup just(\mathcal{O}_x^{\mathsf{f}}))\Rightarrow\neg A\notin Cn(\mathcal{S}_{\mathcal{E}}\cup concl(\mathcal{O}_x^{\mathsf{f}})\cup concl(\mathcal{O}_x^{\mathsf{d}}))\end{array}\right\}$$

$$\mathcal{T}_{\mathcal{E}}^{k+1}=\mathcal{T}_{\mathcal{E}}^{k}\cup\left\{just(\mathcal{O}_x^{\mathsf{f}}),just(\mathcal{O}_x^{\mathsf{d}})\ \middle|\ \begin{array}{l}\mathcal{O}_x^{\mathsf{f}}\subseteq\mathcal{O}^{\mathsf{f}},\mathcal{O}_x^{\mathsf{d}}\subseteq\mathcal{O}^{\mathsf{d}},\\ req(\mathcal{O}_x^{\mathsf{f}})\subseteq\mathcal{E},req(\mathcal{O}_x^{\mathsf{d}})\subseteq\mathcal{S}_{\mathcal{E}}^{k},\\ A\in(\mathcal{T}_{\mathcal{E}}\cup just(\mathcal{O}_x^{\mathsf{f}}))\Rightarrow\neg A\notin Cn(\mathcal{S}_{\mathcal{E}}\cup concl(\mathcal{O}_x^{\mathsf{f}})\cup concl(\mathcal{O}_x^{\mathsf{d}}))\end{array}\right\}$$

$$\mathcal{S}_{\mathcal{E}}=\bigcup_{i=0}^{\omega}\mathcal{S}_{\mathcal{E}}^{i}\qquad \mathcal{T}_{\mathcal{E}}=\bigcup_{i=0}^{\omega}\mathcal{T}_{\mathcal{E}}^{i}$$

许可扩展 $\langle \mathcal{S}_{\mathcal{E}},\mathcal{T}_{\mathcal{E}}\rangle$ of $\langle\langle \mathcal{W},\mathcal{D}\rangle,\mathcal{N}\rangle$ 定义为$\langle\langle \mathcal{W},\mathcal{D}\rangle,\mathcal{N}\rangle$ 的义务扩展，唯一的区别是将 $\mathcal{W}^{\mathsf{o}}$ 替换为 $\mathcal{W}^{\mathsf{p}}$，将 $\mathcal{O}_x^{\star}$ 替换为 $\mathcal{P}_x^{\star}$，其中$\star\in\{\mathsf{f},\mathsf{d}\}$。如果 $\langle \mathcal{S}_{\mathcal{E}},\mathcal{T}_{\mathcal{E}}\rangle$ 是 $\langle\langle \mathcal{W},\mathcal{D}\rangle,\mathcal{N}\rangle$ 的义务扩展或许可扩展，则称 $\langle \mathcal{S}_{\mathcal{E}},\mathcal{T}_{\mathcal{E}}\rangle$ 是 $\langle\langle \mathcal{W},\mathcal{D}\rangle,\mathcal{N}\rangle$ 的道义扩展。

如果 $\langle\langle \mathcal{W},\ \mathcal{D}\rangle,\ \mathcal{N}\rangle$ 是与规范系统相关联的默认理论，那么当且仅当 A 属于 $\langle\langle \mathcal{W},\ \mathcal{D}\rangle,\ \mathcal{N}\rangle$的至少一个道义扩展时， A 是 $\mathcal{W}\cup\mathcal{W}^{\mathsf{o}}\cup\mathcal{W}^{\mathsf{p}}$的道义可置信后果 （简称 d-可置信后果）。直观地说，

宽容型主体承担尽可能多的彼此一致的义务和许可。

引理 2.2。 设 $\langle \mathcal{E}, \mathcal{F}\rangle$ 是默认理论 $\langle \mathcal{W}, \mathcal{D}\rangle$，$\mathcal{N}$ 是规范系统 $\langle\langle \mathcal{W}^{\mathrm{o}}, \mathcal{O}\rangle, \langle \mathcal{W}^{\mathrm{p}}, \mathcal{P}\rangle\rangle$ 的一个修正扩展，并且 $\mathcal{N}'$ 是通过扩展 $\mathcal{O}$ 或 $\mathcal{P}$ 从 $\mathcal{N}$ 得到的。对于 $\langle\langle \mathcal{W}, \mathcal{D}\rangle, \mathcal{N}\rangle$ 的任意道义扩展 $\langle \mathcal{S}_1^{\mathcal{E}}, \mathcal{T}_1^{\mathcal{E}}\rangle$，都至少存在一个 $\langle\langle \mathcal{W}, \mathcal{D}\rangle, \mathcal{N}'\rangle$ 的道义扩展 $\langle \mathcal{S}_2^{\mathcal{E}}, \mathcal{T}_2^{\mathcal{E}}\rangle$，使得 $\mathcal{S}_1^{\mathcal{E}} \subseteq \mathcal{S}_2^{\mathcal{E}}$ 且 $\mathcal{T}_1^{\mathcal{E}} \subseteq \mathcal{T}_2^{\mathcal{E}}$。

证明。 我们的论证与引理 2.1 的证明相同。 □

3. 冲突信息的受控序列演算

为了设计用于道义默认推理的受控序列演算，我们引入控制对这一概念。

3.1. 控制对。 在本小节中，我们用大写希腊字母 Γ、Δ、Θ、.....表示公式的多重集以及集合（为避免歧义，必要时会明确区分二者）。黑体大写字母**S**、$\mathbf{S}_1$、.....表示由公式有限集构成的有限集。

控制对是由两个集合 ⟨**T**、**S**⟩组成的有序对，其中**T** 收集条件集，**S** 收集约束集。条件和约束本身都是公式，并且可以带有特定的上标 f、o、p、.....，分别表示它们作为事实、义务、许可的作用。我们用控制对装饰序列符号 $\vdash$ 。直观地说，这种装饰表示序列 $\Gamma \vdash \Delta$ 的推导必须满足**T** 中每个元素所包含的所有条件，并遵守**S**中每个元素所包含的所有约束。特别是，我们要求 Γ （可由额外公式加强；见定义 3.4）与**T** 中的条件集以及**S**中的约束集相容，具体而言如下。

定义 3.1. 给定一个多重集 Γ 和一个控制对 ⟨**T**，**S**⟩, Γ，若且唯若对于每个属于 $\bigcup$**T** 的公式 $\overline{\overline{A}}$ 以及每个属于 $\bigcup$**S**的公式 B，G4^{pn} 都证明 $\Gamma \vdash A$ 并反驳 $\Gamma \vdash B$，则称其与 ⟨**T**,**S**⟩ 相容（记作 $\Gamma \,||\, \langle \mathbf{T}, \mathbf{S}\rangle$）。

引理 3.1. 设 **S** $\subseteq$ **S**′、**T** $\subseteq$ **T**′ 以及序列 $\Gamma \vdash \bigwedge \Delta$ 在 G4^{pn}中可证。关于相容性，以下陈述成立：

(1) $\Gamma \,||\, \langle \mathbf{T}', \mathbf{S}'\rangle$ 蕴含 $\Gamma \,||\, \langle \mathbf{T}, \mathbf{S}\rangle$;
(2) $\Delta \,||\, \langle \mathbf{T}\ \varnothing\rangle$ 蕴含 $\Gamma \,||\, \langle \mathbf{T}\ \varnothing\rangle$;
(3) $\Gamma \,||\, \langle \varnothing, \mathbf{S}\rangle$ 蕴含 $\Delta \,||\, \langle \varnothing, \mathbf{S}\rangle$。

证明。 直接由定义 3.1 得出。 □

设 ⟨$\mathcal{W}$，$\mathcal{D}$⟩ 为任意默认理论，$\mathcal{N}$ 为与⟨$\mathcal{W}$，$\mathcal{D}$⟩相关联的任意规范系统。我们利用控制对，为 m-宽容后承以及 d-宽容后承定义受控序列演算，前者针对 $\mathcal{W}$，后者针对 $\mathcal{W} \cup \mathcal{W}^{\mathrm{o}} \cup \mathcal{W}^{\mathrm{p}}$。

为区分可推导公式的作用，我们在序列中使用带标签的推出符号：

$\vdash_{\mathsf{F}}$ 表示跟踪 m-宽容后承的序列，$\vdash_{\mathsf{o}}$ 表示跟踪对应于义务的 d-宽容后承的序列，以及 $\vdash_{\mathsf{P}}$ 表示跟踪对应于许可的 d-宽容后承的序列。

当对 $\{\vdash_{\mathsf{F}}, \vdash_{\mathsf{o}}, \vdash_{\mathsf{P}}\}$ 的子集进行概括时，我们使用带标签的推出符号 $\vdash_{\times}$。

3.2. 默认规则的控制对。 我们现在可以给出用于m-宽容后承的受控序列演算。

定义 3.2。 设 $\langle \mathcal{W}, \mathcal{D} \rangle$ 是任意默认逻辑。用于 $\langle \mathcal{W}, \mathcal{D} \rangle$ 的受控序列演算 $\mathsf{G4}^{\delta}$ 可通过采用图*2*中的规则来定义，前提是满足下文的条件(i) –(vii) 。

(i) 对于 ax 的每个实例，以下条件之一成立：对于某个文字 A，$\Theta = \Lambda = \{A\}$；或者对于某个原子 A，$\Lambda = \{A, \neg A\}$ 属于 $\mathsf{top}^{\#}_{\mathsf{cp}}(\,^{*} W)$，其中 W 是 $\mathcal{W}$ 中各公式的合取。

(ii) 对于二元结构规则和逻辑规则的每个实例，$\mathbf{T} = \mathbf{T_1} \cup \mathbf{T_2}$ 以及 $\mathbf{S} = \mathbf{S_1} \cup \mathbf{S_2}$。

(iii) 对于 cut_{asa} 的每个实例，A 都是 $\Gamma \cup \mathcal{W}$ 中某个公式里出现的原子。(iv) 对于 σ 的每个实例，$\mathbf{S} \subseteq \mathbf{S}'$。

(v) 对于 $\mathcal{D}$ 中形如 $B\colon C_1, \ldots C_k$ 的任意默认规则，若 $\mathsf{top}_{\mathsf{r}}(\,^{*} B) = \{\,^{*}\Theta_1, \ldots, \,^{*}\Theta_m\}$ 与 $m > 0$ 及 $\,^{*}\Phi \overset{D}{\vdash}$ 一起属于 $\mathsf{top}^{\#}_{\mathsf{r}}(^{*} D)$，则存在一条形如以下形式的超逻辑规则：

$$\frac{\{\Gamma \vdash_{\mathsf{F}} \frac{\mathbf{T_i}}{\mathbf{S_i}}\ \Theta_i\}_{1 \le i \le m}}{\Gamma \vdash_{\mathsf{F}} \frac{\mathbf{T}}{\mathbf{S}}\ \Phi}\ \delta$$

其中 $\mathbf{T} = \bigcup_{i=1}^{m} \mathbf{T_i} \cup \{\{(\bigwedge_{i=1}^{m}(\bigvee \Theta_i))^{\mathsf{f}}\}\}$ 且 $\mathbf{S} = \bigcup_{i=1}^{m} \mathbf{S_i} \cup \{\{\neg C_1^{\mathsf{f}}, \ldots, \neg C_k^{\mathsf{f}}\}\}$。

若 $\mathsf{top}_{\mathsf{r}}(\,^{*} B) = \varnothing$ 且 $\,^{*}\Phi$ 属于 $\mathsf{top}^{\#}_{\mathsf{r}}(\,^{*} D)$，则存在一条形如以下形式的超逻辑规则：

$$\frac{}{\Gamma \vdash_{\mathsf{F}} \frac{\mathbf{T}}{\mathbf{S}}\ \Phi}\ \delta$$

其中$\mathbf{T}$ 为 $\{\{\top^{\mathsf{f}}\}\}$，而$\mathbf{S}$ 为 $\{\{\neg C_1^{\mathsf{f}}, \ldots, \neg C_k^{\mathsf{f}}\}\}$。

(vi) 对于任意超逻辑规则

$$\frac{\{\Gamma \vdash_{\mathsf{F}} \frac{\mathbf{T_i}}{\mathbf{S_i}}\ \Theta_i\}_{1 \le i \le m}}{\Gamma \vdash_{\mathsf{F}} \frac{\mathbf{T}}{\mathbf{S}}\ \Phi}\ \delta$$

对于 $m \ge 0$，如果 $\,^{*}\Phi'$ 发生在 顶层$^{\#}_{\mathsf{r}}(\,^{*}(\bigvee \Phi) \wedge W)$ 且不属于 顶层$^{\#}_{\mathsf{r}}(\,^{*} W)$，那么就存在一条形式如下的逻辑外规则：

公理和结构规则

$$\frac{}{\Theta \vdash^{\frac{\varnothing}{\varnothing}} \Lambda}\, ax$$

$$\frac{\Gamma \vdash^{\frac{\mathbf{T}}{\mathbf{S}}} \Delta}{A, \Gamma \vdash^{\frac{\mathbf{T}}{\mathbf{S}}} \Delta}\, LW \qquad \frac{\Gamma \vdash^{\frac{\mathbf{T}}{\mathbf{S}}} \Delta}{\Gamma \vdash^{\frac{\mathbf{T}}{\mathbf{S}}} \Delta, A}\, RW$$

$$\frac{\Gamma \vdash^{\frac{\mathbf{T_1}}{\mathbf{S_1}}} \Delta, A \qquad \Gamma \vdash^{\frac{\mathbf{T_2}}{\mathbf{S_2}}} \Delta, \neg A}{\Gamma \vdash^{\frac{\mathbf{T}}{\mathbf{S}}} \Delta}\, cut_{asa} \qquad \frac{\Gamma \vdash^{\frac{\mathbf{T}}{\mathbf{S}}} \Delta}{\Gamma \vdash^{\frac{\mathbf{T}}{\mathbf{S}'}} \Delta}\, \sigma$$

逻辑规则

$$\frac{\Gamma, A, B \vdash^{\frac{\mathbf{T}}{\mathbf{S}}} \Delta}{\Gamma, A \wedge B \vdash^{\frac{\mathbf{T}}{\mathbf{S}}} \Delta}\, L\wedge \qquad \frac{\Gamma \vdash^{\frac{\mathbf{T_1}}{\mathbf{S_1}}} \Delta, A \qquad \Gamma \vdash^{\frac{\mathbf{T_2}}{\mathbf{S_2}}} \Delta, B}{\Gamma \vdash^{\frac{\mathbf{T}}{\mathbf{S}}} \Delta, A \wedge B}\, R\wedge$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash^{\frac{\mathbf{T_1}}{\mathbf{S_1}}} \Delta \qquad \Gamma, B \vdash^{\frac{\mathbf{T_2}}{\mathbf{S_2}}} \Delta}{\Gamma, A \vee B \vdash^{\frac{\mathbf{T}}{\mathbf{S}}} \Delta}\, L\vee \qquad \frac{\Gamma \vdash^{\frac{\mathbf{T}}{\mathbf{S}}} \Delta, A, B}{\Gamma \vdash^{\frac{\mathbf{T}}{\mathbf{S}}} \Delta, A \vee B}\, R\vee$$

$$\frac{\Gamma, \neg A \vdash^{\frac{\mathbf{T_1}}{\mathbf{S_1}}} \Delta \qquad \Gamma, \neg B \vdash^{\frac{\mathbf{T_2}}{\mathbf{S_2}}} \Delta}{\Gamma, \neg(A \wedge B) \vdash^{\frac{\mathbf{T}}{\mathbf{S}}} \Delta}\, L\neg\wedge \qquad \frac{\Gamma \vdash^{\frac{\mathbf{T}}{\mathbf{S}}} \Delta, \neg A, \neg B}{\Gamma \vdash^{\frac{\mathbf{T}}{\mathbf{S}}} \Delta, \neg(A \wedge B)}\, R\neg\wedge$$

$$\frac{\Gamma, \neg A, \neg B \vdash^{\frac{\mathbf{T}}{\mathbf{S}}} \Delta}{\Gamma, \neg(A \vee B) \vdash^{\frac{\mathbf{T}}{\mathbf{S}}} \Delta}\, L\neg\vee \qquad \frac{\Gamma \vdash^{\frac{\mathbf{T_1}}{\mathbf{S_1}}} \Delta, \neg A \qquad \Gamma \vdash^{\frac{\mathbf{T_2}}{\mathbf{S_2}}} \Delta, \neg B}{\Gamma \vdash^{\frac{\mathbf{T}}{\mathbf{S}}} \Delta, \neg(A \vee B)}\, R\neg\vee$$

$$\frac{A, \Gamma \vdash^{\frac{\mathbf{T}}{\mathbf{S}}} \Delta}{\neg\neg A, \Gamma \vdash^{\frac{\mathbf{T}}{\mathbf{S}}} \Delta}\, L\neg\neg \qquad \frac{\Gamma \vdash^{\frac{\mathbf{T}}{\mathbf{S}}} \Delta, A}{\Gamma \vdash^{\frac{\mathbf{T}}{\mathbf{S}}} \Delta, \neg\neg A}\, R\neg\neg$$

逻辑外规则

$$\frac{\{\Gamma \vdash^{\frac{\mathbf{T_i}}{\mathbf{S_i}}} \Theta_i\}_{0\le i\le m}}{\Gamma \vdash^{\frac{\mathbf{T}}{\mathbf{S}}} \Phi}\, \delta$$

图2。用于默认理论的受控序列演算 $\langle \mathcal{W},\ \mathcal{D} \rangle$

$$\frac{\{\Gamma \vdash^{\frac{\mathbf{T_i}}{\mathbf{S_i}}} \Theta_i\}_{1\le i\le m}}{\Gamma \vdash^{\frac{\mathbf{T}}{\mathbf{S}}} \Phi'}\, \delta$$

(vii) 对于任意一对逻辑外规则

$$\frac{\{\Gamma \mid^{\mathbf{T}'_i}_{\mathbf{S}'_i} \Theta_i\}_{1\le i\le m}}{\Gamma \mid^{\mathbf{T_1}}_{\mathbf{S_1}} \Phi}\,\delta \qquad \frac{\{\Gamma \mid^{\mathbf{T}'_i}_{\mathbf{S}'_i} \Theta_i\}_{m+1\le i\le n}}{\Gamma \mid^{\mathbf{T_2}}_{\mathbf{S_2}} \Phi'}\,\delta$$

满足 $m+n\geq 0$，若 $^*\Psi$ 出现在 $\mathsf{top}^{\#}_{\mathsf{r}}(\mid\!\!\sim(\bigvee\Phi)\wedge(\bigvee\Phi'))$ 中但不属于 $\mathsf{top}^{\#}_{\mathsf{r}}(\,^*(\bigvee\Phi))$，$\mid\!\!\sim$ 则 $\mathsf{top}^{\#}_{\mathsf{r}}(\,^*(\bigvee\Phi'))$ 或 $\mathsf{top}^{\#}_{\mathsf{r}}(\,^*W)$，那么存在一条形式如下的逻辑外规则：

$$\frac{\{\Gamma \mid^{\mathbf{T}'_i}_{\mathbf{S}'_i} \Theta_i\}_{1\le i\le n}}{\Gamma \mid^{\mathbf{T}}_{\mathbf{S}} \Psi}\,\delta$$

与 $\mathbf{S}=\mathbf{S_1}\cup\mathbf{S_2}$ 以及 $\mathbf{T}=\mathbf{T_1}\cup\mathbf{T_2}$。

条件（i）确保 G4$^{\delta}$ 演算纳入来自$\mathcal{W}$的逻辑外公理，而条件（v）则保证存在与 $\mathcal{D}$ 中的默认规则相对应的逻辑外规则。反过来，闭包条件（vi）和（vii）是必要的，以确保逻辑外规则的结论在收缩和切断下封闭（参见引理 3.3 和 3.8，以及定理3.1、3.4、3.5和3.6）。

很容易找到这样的情形：存在一个受控序列的 G4$^{\delta}$-推导 $\Gamma \mid^{\mathbf{T}}_{\mathbf{S}} \Delta$，尽管 $\bigvee\Delta$ 不属于 $\mid\!\!\sim\!\!\langle\mathcal{W}\cup\Gamma,\ \mathcal{D}\rangle$ 的任何修正扩展。

例3.1。设 $\langle\mathcal{W},\mathcal{D}\rangle$ 定义如下：$\mathcal{W}=\varnothing$ 且 $\mathcal{D}=\left\{\dfrac{\top:\ p}{p}\right\}$。考虑以下 G4$^{\delta}$-推导：

$$\frac{}{\neg p \mid^{\mathbf{T}}_{\mathbf{S}} p}\,\delta$$

其中有 $\mathbf{T}=\{\{\top^{\mathsf{f}}\}\}$ 和 $\mathbf{S}=\{\{\neg p^{\mathsf{f}}\}\}$。容易验证，$p$ 不属于 $\langle\mathcal{W}\cup\{\neg p\},\mathcal{D}\rangle$ 的任何修正扩展。

因此，我们需要提出一个判据，从 G4$^{\delta}$-推导中筛选出能够导出 $\mathcal{W}\cup\Gamma$ 的m-宽容后承的推导。为此，我们对术语和概念体系作一些补充。

对于 G4$^{\delta}$ 中的任意逻辑外规则 δ，我们将标签 $\delta_{\mathcal{D}'}$ 定义如下：

(*a*) 如果 δ 按照定义 3.2 中的第 (iii) 点生成，那么 $\mathcal{D}'=\left\{\dfrac{B:\ C_1,\ldots\ C_k}{D}\right\}$；

(*b*) 如果 δ 是由逻辑外规则 δ' 和 δ'' 生成的，且它们分别具有标签 $\delta_{\mathcal{D}_1}$ 和 $\delta_{\mathcal{D}_2}$，并按照定义 3.2 中的第 (iv) 点和第 (v) 点生成，那么 $\mathcal{D}'=\mathcal{D}_1\cup\mathcal{D}_2$。

对于每个 G4$^{\delta}$-推导 π，我们称默认规则 $B:\ C_1,\ \ldots\ C_k$，属于 $def(\pi)$，当且仅当存在（至少）一个标记为 $\delta_{\mathcal{D}'}$ 的逻辑外规则，该规则$\dfrac{}{D}$应用于π，并且 $B:\ C_1,\ \ldots\ C_k$，属于 $\mathcal{D}'$。此外，我们用 $def'(\pi)$ 表示$def(\pi_1)\cup\cdots\cup def(\pi_m)$，其中 $\pi_1,\ \overset{D}{\ldots},\pi_m$是产生 π中最末层逻辑外规则应用的前提的直接子推导。

我们用 D_π 表示 $concl(def(\pi))$中各公式的合取，并用 E_π表示 $concl(def'(\pi))$中各公式的合取。

定义3.3。 设 π 是 G4$^{\delta}$-推导，推导对象为 $\Gamma \vdash \mathbf{ST} \mid \Delta$。序列 $\Gamma \vdash \mathbf{ST} \mid \Delta$ 是 is

(i) 条件下可靠当且仅当$([W, E_\rho] \cup \Gamma) \,||\, \langle \mathbf{V}\ \varnothing \rangle$ 对于 π 的任意子推导ρ，若以$\Pi \vdash \mathbf{UV}\ \Sigma$ 为结论；(ii) 约束下可靠当且仅当$([W, D_\pi] \cup \Gamma) \,||\, \langle \varnothing,\ \mathbf{S} \rangle$；$(iii)$ 可靠当且仅当它在条件下可靠且在约束下可靠。

定义 3.4。 设 π 是$\Gamma \vdash \mathbf{ST}\ \Delta$的G4$^{\delta}$-推导。那么，$\pi$ 是 $\Gamma \vdash \mathbf{ST}\ \Delta$ 的证明，当且仅当 π 中出现的任意序列$\Pi \vdash \mathbf{S'T'}\ \Sigma$ 都是可靠的；否则，它是一个旁证明。

例 3.2。 设 $\mathcal{W} = \varnothing$ 和 $\mathcal{D} = \left\{ \dfrac{p}{r} : \dfrac{q}{\ }\ ;\ \dfrac{q}{\ } : \dfrac{s}{t} \right\}$。以下是G4$^{\delta}$ 演算中关于 $\langle \mathcal{W}、\ \mathcal{D} \rangle$ 的推导 π，它是一个旁证明：

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{p \vdash^{\varnothing}_{\varnothing} p}\,ax}{p \vdash^{\mathbf{T_1}}_{\mathbf{S_1}} r}\,\delta_{\mathcal{D}_1} \qquad \dfrac{\dfrac{}{q \vdash^{\varnothing}_{\varnothing} q}\,ax}{q \vdash^{\mathbf{T_2}}_{\mathbf{S_2}} t}\,\delta_{\mathcal{D}_2}}{p \vdash^{\mathbf{T_1}}_{\mathbf{S_1}} r, t}\,RW \qquad \dfrac{q \vdash^{\mathbf{T_2}}_{\mathbf{S_2}} t}{q \vdash^{\mathbf{T_2}}_{\mathbf{S_2}} r, t}\,RW}{p \vee q \vdash^{\mathbf{T}}_{\mathbf{S}} r, t}\,L\vee$$

带有 $\mathbf{T_1} = \{\{p^{\mathsf{f}}\}\}$、$\mathbf{S_1} = \{\{\neg q^{\mathsf{f}}\}\}$、$\mathbf{T_2} = \{\{q^{\mathsf{f}}\}\}$和 $\mathbf{S_2} = \{\{\neg s^{\mathsf{f}}\}\}$。另一方面，$\pi$ 的直接子推导是证明。

例 3.3. 设 $\mathcal{W} = \varnothing$ 和 $\mathcal{D}$ 定义为 $\left\{ \dfrac{p}{r} : \dfrac{q}{\ }\ ;\ \dfrac{q}{\neg r} : \dfrac{s}{\ } \right\}$。以下是 G4$^{\delta}$ 演算中关于 $\langle \mathcal{W}、\ \mathcal{D} \rangle$ 的推导π，它是一个旁证明：

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{p \vdash^{\varnothing}_{\varnothing} p}\,ax}{p, q \vdash^{\varnothing}_{\varnothing} p}\,LW \qquad \dfrac{\dfrac{}{q \vdash^{\varnothing}_{\varnothing} q}\,ax}{p, q \vdash^{\varnothing}_{\varnothing} q}\,LW}{p, q \vdash^{\mathbf{T_1}}_{\mathbf{S_1}} r}\,\delta_{\mathcal{D}_1} \qquad \dfrac{p, q \vdash^{\varnothing}_{\varnothing} q}{p, q \vdash^{\mathbf{T_2}}_{\mathbf{S_2}} \neg r}\,\delta_{\mathcal{D}_2}}{p, q \vdash^{\mathbf{T}}_{\mathbf{S}} r \wedge \neg r}\,R\wedge$$

带有 $\mathbf{T_1} = \{\{p^{\mathsf{f}}\}\}$、$\mathbf{S_1} = \{\{\neg q^{\mathsf{f}}\}\}$、$\mathbf{T_2} = \{\{q^{\mathsf{f}}\}\}$和 $\mathbf{S_2} = \{\{\neg s^{\mathsf{f}}\}\}$。另一方面，$\pi$ 的直接子推导是证明。

在转向 G4$^{\delta}$ 演算的结构分析之前，我们先记录几点关于定义 3.2 中条件的补充说明。

(A**)** 对于任何超逻辑规则，其应用中的主公式只能出现在序列的右侧。因此，将 $\mathsf{top}_{\mathsf{r}}^{\#}$替换为 $\mathsf{top}_{\mathsf{cp}}^{\#}$ 会导致默认规则的形式化不可靠。例如，考虑默认规则

$$\frac{\top : \neg p}{\neg p}.$$

相应的超逻辑规则将是

$$\frac{}{\Gamma, p \vdash^{\mathbf{T}}_{\mathbf{S}}}$$

其中 $\mathbf{T} = \{\{\top^{\mathsf{f}}\}\}$ 和 $\mathbf{S} = \{\{\neg\neg p^{\mathsf{f}}\}\}$。对于任意语境 Γ，这条规则都会得出一个不可靠的结论：采用它会使 $\Gamma \vdash_{\mathbf{ST}} \neg p$ 的每个推导都以一个旁证明作为直接子推导。只有因为我们在用于经典逻辑的演算 G4^{pn} 中工作，才能合法地使用 $\mathsf{top}^{\#}_{\mathsf{r}}$；在该演算中，否定是原始概念，且没有规则会将公式从序列的一侧移到另一侧。

(B) 我们将 半解析切 一词用于以下切应用：（a）两个切断公式都出现在右侧；（b）切断公式是结论左侧公式或逻辑外公理的子公式。条件（iii）保证 G4$^{\delta}$ 演算将原子半解析切作为基本规则。这是强充分性所必需的（参见定理 3.8），因为没有 cut_{asa} 的 G4$^{\delta}$演算并不在此类切应用下封闭。例如，考虑用于 $\langle \mathcal{W},\ \mathcal{D}\rangle$ 的 G4$^{\delta}$ 演算，其中

$$\mathcal{W} = \varnothing$$

$$\mathcal{D} = \left\{ \frac{\top : p}{p}\,,\ \frac{p \vee q : \neg p}{\neg p} \right\}$$

现在，取 G4$^{\delta}$-证明 π:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{p \mid^{\varnothing}_{\varnothing} p}\,ax}{p \mid^{\varnothing}_{\varnothing} p, q}\,RW \qquad \dfrac{\dfrac{}{q \mid^{\varnothing}_{\varnothing} q}\,ax}{q \mid^{\varnothing}_{\varnothing} p, q}\,RW}{p \vee q \mid^{\varnothing}_{\varnothing} p, q}\,L\vee \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{p \mid^{\varnothing}_{\varnothing} p}\,ax}{p \mid^{\varnothing}_{\varnothing} p, q}\,RW \qquad \dfrac{\dfrac{}{q \mid^{\varnothing}_{\varnothing} q}\,ax}{q \mid^{\varnothing}_{\varnothing} p, q}\,RW}{p \vee q \mid^{\varnothing}_{\varnothing} p, q}\,L\vee}{p \vee q \mid^{\{p\vee q\}}_{\{\neg\neg p\}} q}\,cut_{asa} \qquad \dfrac{p \vee q \mid^{\varnothing}_{\varnothing} p, q}{p \vee q \mid^{\{p\vee q\}}_{\{\neg\neg p\}} \neg p}\,\delta_{\mathcal{D}''}$$

很容易验证，定义 3.2 中的闭包条件（vi）—（vii）不足以吸收这一切应用。

(C) 当切断公式是结论左侧公式的子公式时，我们称半解析切解析。如果将定义 3.2 的条件（i）中的 $\mathsf{top}^{\#}_{\mathsf{cp}}$ 替换为 $\mathsf{top}^{\#}_{\mathsf{r}}$，则可以证明 cut_{asa} 的每个非解析实例都能够被消除。由定理 3.3、3.4 和 3.5 可知，G4$^{\delta}$演算是非解析无切完备的。为了消除解析切，可以考虑对逻辑外规则集合施加以下闭包条件。对于任意规则

$$\frac{\{\Gamma \mid^{\mathbf{T_i}}_{\mathbf{S_i}} \Theta_i\}_{1\le i\le m}}{\Gamma \mid^{\mathbf{T}}_{\mathbf{S}} \Phi}$$

如果公式 $^{*}\Phi'$ 出现在 $\mathsf{top}^{\#}_{\mathsf{r}}(\,^{*}(\bigvee\Phi) \wedge \bigwedge\Gamma)$ 中，却既未出现在 $\mathsf{top}^{\#}_{\mathsf{r}}(\,^{*}\bigvee\Phi)$ 中，也未出现在 $\mathsf{top}^{\#}_{\mathsf{r}}(\,^{*}\bigwedge\Gamma)$ 中，那么还需要有如下规则

$$\frac{\{\Gamma \mid^{\mathbf{T_i}}_{\mathbf{S_i}} \Theta_i\}_{1\le i\le m}}{\Gamma \mid^{\mathbf{T}}_{\mathbf{S}} \Phi'}$$

然而，这一闭包条件会生成无穷多 条逻辑外规则，这是我们认为极不可取的情况。

3.3. 结构性质。在本小节中，我们对用于默认理论的 G4$^{\delta}$ 演算进行结构分析，以确立其相对于m-宽容后承的强充分性。为此，我们引入一些术语。

当某规则应用的前提存在证明即可保证其结论存在证明时，称该规则应用是安全的。若某规则满足以下条件，则称其可容许

(i) 该规则的所有实例都是安全的；(ii) 与结论相关联的条件集合包含于与前提相关联的条件集合之并；并且 (iii) 前提的约束集合与结论的约束集合相同。

此外 ，当某规则的每个逆向版本都可容许时，称该规则可逆 e.

引理 3.2。规则 $R\wedge$、 $R\vee$、 $R\neg\wedge$、 $R\neg\vee$ 和 $R\neg\neg$ 在G4$^{\delta}$中是可逆的。

证明。 我们对前提的 G4$^{\delta}$-证明 π 的高度进行归纳。我们重点考察规则 $R\wedge$，因为其他规则的情形类似。此外，设 $B \wedge C$ 是 $R\wedge$的逆规则前提中的活动公式。

若 $h(\pi) = 1$，则该断言显然成立。否则，我们按 π的最后一条规则分情况讨论。若最后一条规则是 $R\wedge$ ，其主公式为 $B \wedge C$，则取后者各前提的 G4$^{\delta}$-证明，并可在其后接上若干 σ 步。注意，高度可能会增加，但 σ步保持正确性，因此所得结果仍是证明。若最后一条规则是 RW ，其主公式为 $B \wedge C$，则将该弱化替换为一个可得 B 或C 的弱化，从而得到所需结论。若 $B \wedge C$ 不是最后一条规则的主公式，则对各前提应用归纳假设，得到逆规则结论的 G4$^{\delta}$-推导。在 π 中最后一个序列上方应用上述假设可保持可靠性，因此所得的每个 G4$^{\delta}$-推导仍是证明，正如所需。□

引理 3.3. 右收缩规则

$$\frac{\Gamma \mid^{\mathbf{T}}_{\mathbf{S}} \Delta, A, A}{\Gamma \mid^{\mathbf{T}'}_{\mathbf{S}} \Delta, A}\, RC$$

在G4$^{\delta}$中是可容许的。

证明。 我们首先对前提的 G4$^{\delta}$-证明 π 的高度进行主归纳，再对 A的逻辑复杂度进行次级归纳。若 $h(\pi) = 1$，则定义 3.2 的条件（i）和（v）可得出结论，因为对于每个公式 B，$\mathsf{top}^{\#}_{\mathsf{cp}}(^{*}\ B)$ 在收缩下封闭。否则，我们分析π的最后一条规则。若 A 是原子的，且两个出现都为主出现，则应用定义 3.2 的条件（v）—（vii）。若 A 的两个原子出现中恰有一个是主出现，则后者必定由 RW引入，取该 RW 实例的前提即可。若两个出现都不是主出现，则对各前提应用归纳假设，将 RC 向上置换；即使存在 ，这仍然可行

，这是因为其采用共享语境的表述。由于序列的左侧保持不变，可靠性得以保留。若 A 是非原子的，则唯一非平凡的情形是 A 的一个出现是最后一条规则中的主出现。为处理这些情形，我们使用引理 3.2：由于右规则的可逆性不保持高度，因此需要次级归纳假设才能得出结论。□

引理 3.4. 规则 $L\wedge$、$L\neg\vee$ 和 $L\neg\neg$ 在 G4$^{\delta}$ 中是可逆的。

证明。 我们对前提的 G4$^{\delta}$-证明 π 的高度进行归纳。论证方式与引理 3.2 的证明相同。□

引理 3.5. 在空约束集下，G4$^{\delta}$ 的逻辑规则是保高度可逆的。

证明。 我们对前提的 G4$^{\delta}$-证明 π 的高度进行归纳。论证方式与引理 3.2 的证明相同：由于我们处理的是空约束集和空条件集，逆规则结论的 G4$^{\delta}$-证明的高度不会超过前提的 G4$^{\delta}$-证明的高度。□

引理 3.6. 左收缩规则

$$LC\ \frac{A, A, \Gamma \vdash^{\mathbf{T}}_{\mathbf{S}} \Delta}{A, \Gamma \vdash^{\mathbf{T}}_{\mathbf{S}} \Delta}$$

在空约束集下是 G4$^{\delta}$ 中可容许的。

证明。 我们对前提的 G4$^{\delta}$-证明 π 的高度进行归纳。按照惯例，当被收缩公式的两个出现之一是 π 中最后一条规则的主公式，且后者是逻辑规则时，我们会利用引理 3.5。请注意，由于在约束集为空时可逆性保持高度不变，我们无需对 A的逻辑复杂度进行次级归纳。□

定理 3.1。 切断规则

$$\frac{\Gamma \vdash^{\varnothing}_{\varnothing} A, \Delta \qquad A, \Pi \vdash^{\varnothing}_{\varnothing} \Sigma}{\Pi, \Gamma \vdash^{\varnothing}_{\varnothing} \Delta, \Sigma}\ Cut$$

在G4$^{\delta}$中是可容许的。

证明。 我们按照 [34] 和 [31]中的论证进行。 □

命题 3.1。 左否定规则和右否定规则

$$L\neg\ \frac{\Gamma \vdash^{\varnothing}_{\varnothing} \Delta, A}{\neg A, \Gamma \vdash^{\varnothing}_{\varnothing} \Delta} \qquad \frac{A, \Gamma \vdash^{\varnothing}_{\varnothing} \Delta}{\Gamma \vdash^{\varnothing}_{\varnothing} \Delta, \neg A}\ R\neg$$

在G4$^{\delta}$中是可容许且可逆的。

证明。 由定理 3.1 可直接得出。 □

定理3.2。 G4$^{\delta}$ 证明 $\Gamma \vdash^{\varnothing}_{\varnothing} \Delta$ 当且仅当 $\bigvee \Delta$ 属于 $Cn(\mathcal{W} \cup \Gamma)$。

证明。我们按照 [34] 和 [31]的思路进行论证。 □

例 3.4. 令 $\langle \mathcal{W}、\ \mathcal{D}\rangle$ 定义如下：

$$\mathcal{W} = \varnothing$$

$$\mathcal{D} = \left\{ \frac{\top : p}{p}, \frac{p \vee q : \neg p}{\neg p} \right\}$$

考虑G4$^{\delta}$-推导 π:

$$\dfrac{\dfrac{\delta_{\mathcal{D}'}\ \dfrac{}{p \left|\overset{\top}{\underset{\{\neg p\}}{}}\right. p, q}}{LW\ \dfrac{}{p \vee q \left|\overset{\top}{\underset{\{\neg p\}}{}}\right. p, q}} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{p \left|\overset{\varnothing}{\underset{\varnothing}{}}\right. p}\, ax}{p \left|\overset{\varnothing}{\underset{\varnothing}{}}\right. p, q}\, RW \qquad \dfrac{\dfrac{}{q \left|\overset{\varnothing}{\underset{\varnothing}{}}\right. q}\, ax}{q \left|\overset{\varnothing}{\underset{\varnothing}{}}\right. p, q}\, RW}{p \vee q \left|\overset{\varnothing}{\underset{\varnothing}{}}\right. p, q}\, L\vee \qquad \dfrac{}{p \vee q \left|\overset{\{p \vee q\}}{\underset{\{\neg\neg p\}}{}}\right. \neg p}\, \delta_{\mathcal{D}''}}{p \vee q \left|\overset{\{\top,\ p \vee q\}}{\underset{\{\neg p, \neg\neg p\}}{}}\right. q}\, cut_{asa}$$

根据定义 *3.4*， π 是一个G4$^{\delta}$-旁证明：其结论相对于条件是可靠的，但相对于约束是不可靠的。因此，在 π 中的 cut_{asa} 应用是不安全的。另一方面，考虑以下G4$^{\delta}$-推导 ρ:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{p \left|\overset{\varnothing}{\underset{\varnothing}{}}\right. p}\, ax}{RW\ \dfrac{}{p \left|\overset{\varnothing}{\underset{\varnothing}{}}\right. p, q}} \qquad \dfrac{\dfrac{}{q \left|\overset{\varnothing}{\underset{\varnothing}{}}\right. q}\, ax}{RW\ \dfrac{}{q \left|\overset{\varnothing}{\underset{\varnothing}{}}\right. p, q}}}{L\vee\ \dfrac{}{p \vee q \left|\overset{\varnothing}{\underset{\varnothing}{}}\right. p, q}} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{p \left|\overset{\varnothing}{\underset{\varnothing}{}}\right. p}\, ax}{p \left|\overset{\varnothing}{\underset{\varnothing}{}}\right. p, q}\, RW \qquad \dfrac{\dfrac{}{q \left|\overset{\varnothing}{\underset{\varnothing}{}}\right. q}\, ax}{q \left|\overset{\varnothing}{\underset{\varnothing}{}}\right. p, q}\, RW}{p \vee q \left|\overset{\varnothing}{\underset{\varnothing}{}}\right. p, q}\, L\vee \qquad \dfrac{}{p \vee q \left|\overset{\{p \vee q\}}{\underset{\{\neg\neg p\}}{}}\right. \neg p}\, \delta_{\mathcal{D}''}}{p \vee q \left|\overset{\{p \vee q\}}{\underset{\{\neg\neg p\}}{}}\right. q}\, cut_{asa}$$

根据定义 *3.4*， ρ 是一个G4$^{\delta}$-证明。与 π中的 cut_{asa} 应用不同， ρ中的 cut_{asa} 应用是安全的。

定理 3.3. 设 A 是出现在 Γ、Π、$\mathcal{W}$中的某个公式里的原子。安全原子半解析切规则

$$\frac{\Gamma \left|_{\mathsf{F}}\overset{\mathbf{T_1}}{\underset{\mathbf{S_1}}{}}\right. \Delta, A \qquad \Pi \left|_{\mathsf{F}}\overset{\mathbf{T_2}}{\underset{\mathbf{S_2}}{}}\right. \Sigma, \neg A}{\Pi, \Gamma \left|_{\mathsf{F}}\overset{\mathbf{T}}{\underset{\mathbf{S}}{}}\right. \Delta, \Sigma}\, cut_a$$

在G4$^{\delta}$中是可容许的。

证明。 对于任意此类切断应用，考虑以下 G4$^{\delta}$-推导:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma \left|_{\mathsf{F}}\overset{\mathbf{T_1}}{\underset{\mathbf{S_1}}{}}\right. \Delta, A}{LW\ \dfrac{}{\Pi, \Gamma \left|_{\mathsf{F}}\overset{\mathbf{T_1}}{\underset{\mathbf{S_1}}{}}\right. \Delta, A}}}{RW\ \dfrac{}{\Pi, \Gamma \left|_{\mathsf{F}}\overset{\mathbf{T_1}}{\underset{\mathbf{S_1}}{}}\right. \Delta, \Sigma, A}} \qquad \dfrac{\dfrac{\Pi \left|_{\mathsf{F}}\overset{\mathbf{T_2}}{\underset{\mathbf{S_2}}{}}\right. \Sigma, \neg A}{\Pi, \Gamma \left|_{\mathsf{F}}\overset{\mathbf{T_2}}{\underset{\mathbf{S_2}}{}}\right. \Sigma, \neg A}\, LW}{\Pi, \Gamma \left|_{\mathsf{F}}\overset{\mathbf{T_2}}{\underset{\mathbf{S_2}}{}}\right. \Delta, \Sigma, \neg A}\, RW}{\Pi, \Gamma \left|_{\mathsf{F}}\overset{\mathbf{T}}{\underset{\mathbf{S}}{}}\right. \Delta, \Sigma}\, cut_{asa}$$

根据假设，所有 LW 应用都是安全的；因此，这样的 G4$^{\delta}$-推导就是一个证明。 □

定义 3.5. 令 π 为一个G4$^{\delta}$-推导，$\Gamma \vdash \Delta$，并令 A 为 Γ (或 Δ) 中的一个公式出现。A 在 π中的前驱树，记作 $\mathcal{T}_{\pi}(A)$，是按照以下过程生成的一棵标记树。

(*i*) $\mathcal{T}_{\pi}(A)$ 的根由 Γ (或 Δ) 中 A 的出现标记。(*ii*) 设 ν 是 $\mathcal{T}_{\pi}(A)$ 中的一个节点，其标签为序列 $\Pi\ S/T'\ \Sigma$ 的前件 Π（分别为后件 Σ）中 A 的某次出现；该序列出现在 π 中。设 $\star$ 为以 $\Pi\ S/T'\ \Sigma$ 为结论的 G4$^{\delta}$ 子推导 π 中的最后一条规则。(*ii.i*) 若 A 的出现是 $\star$ 中的主出现，则 ν 没有直接子节点。(*ii.ii*) 若 A 的出现不是 $\star$ 中的主出现，则 ν 至多有两个直接子节点，其标签分别是 $\star$ 的前提中与 A 的出现相对应的前件（分别为后件）中出现的 A 的实例。

定理 3.4。设 A 是一个原子，且它不出现在 Γ、Π、$\mathcal{W}$ 中的任何公式里。安全原子非半解析切规则

$$\frac{\Gamma \vdash_{\mathsf{F}}^{\mathbf{T_1}}_{\mathbf{S_1}} \Delta, A \qquad \Pi \vdash_{\mathsf{F}}^{\mathbf{T_2}}_{\mathbf{S_2}} \Sigma, \neg A}{\Pi, \Gamma \vdash_{\mathsf{F}}^{\mathbf{T}}_{\mathbf{S}} \Delta, \Sigma}\ cut_a$$

在G4$^{\delta}$中是可容许的。

证明。我们着眼于最顶层的安全原子非半解析切规则应用，并对左、右前提的 G4$^{\delta}$-证明 π_1, π_2 的高度之和进行归纳。在基例中，$h(\pi_1) = h(\pi_2) = 1$：由于 A 不出现在 $\mathcal{W}$ 中的任何公式里，因此 π_1, π_2 中的最后一条规则不可能是 ax 的逻辑外实例。此外，如果 π_1 或 π_2 中的最后一条规则是 ax 的逻辑实例，我们就利用适当的 LW 和 cut_{asa} 应用得出结论。因此，唯一非平凡的情形是 π_1 和 π_2 中的最后一条规则均为逻辑外规则：我们利用定义 3.2 的条件（vii）得出结论。为证明归纳步骤，我们按 π_1 中的最后一条规则分类讨论。

如果 A 是 π_1 中最后一条规则的主公式，唯一非平凡的情形是该最后一条规则为逻辑外规则。为完成证明，我们接着根据 π_2 中的最后一条规则区分子情形。

(a) 如果 $\neg A$ 是 π_2 中最后一条规则的主公式，那么后者要么是 RW，要么是超逻辑规则 δ。在第一种情况下，我们应用 LW、RW 和 σ，得到一个 G4$^{\delta}$ 推导，其结论为 $\Pi, \Gamma \vdash_{\mathsf{F}}^{\mathbf{ST^2}} \Delta, \Sigma$：很容易验证，该推导是一个 G4$^{\delta}$ 证明。在第二种情况下，我们利用定义 3.2 的条件 (vii) 得出结论：同样，按构造应用 δ 是安全的。
(b) 如果 $\neg A$ 不是 π_2 中最后一条规则的主公式，且后者既不是 $L\vee$ 也不是 $L\neg\wedge$，我们只需对其前提应用归纳假设，将切断应用向上置换：请注意，约束下的可靠性始终得以保持。如果 π_2 中的最后一条规则是 $L\vee$ 或 $L\neg\wedge$，则切断的同样向上置换可能会失败，因为约束下的可靠性可能无法保持。

例如，考虑以下配置——其中 B^f 属于 $\bigcup \mathbf{S_1}, \Pi = \Pi'$， $B \vee C$、$\mathbf{T_2} = \mathbf{V_1} \cup \mathbf{V_2}$ 和 $\mathbf{S_2} = \mathbf{U_1} \cup \mathbf{U_2}$:

$$\dfrac{\Gamma \vdash^{\mathbf{T_1}}_{\mathbf{S_1}} \Delta, A \qquad \dfrac{\vdots \quad \vdots}{B \vee C, \Pi' \vdash^{\mathbf{T_2}}_{\mathbf{S_2}} \Sigma, \neg A}\, L\vee}{B \vee C, \Pi, \Gamma \vdash^{\mathbf{T}}_{\mathbf{S}} \Delta, \Sigma}\, cut_a$$

为了得出结论，我们考虑 $\mathcal{T}_{\pi_2}(\neg A)$。如果 $\mathcal{T}_{\pi_2}(\neg A)$ 中任一叶节点的标签是通过一次 RW 应用引入的，我们就将此类 RW 应用全部删除，从而得到一个 G4$^{\delta}$-证明 π_2' of $\Pi \vdash^{\mathbf{T_2}}_{\mathbf{S_2}} \Sigma$: 我们应用 LW、 RW 和 σ 来得出结论。否则， π_2中必定存在一条超逻辑规则。用矛盾式法，假设情况并非如此：由 A 不出现在 $\mathcal{W}$ 中这一事实，我们可以推断 $\mathcal{T}_{\pi_2}(\neg A)$中至少存在一个叶节点，其标签是由 ax的一次逻辑实例引入的 $\neg A$ 的出现。这意味着 $\neg A$ 出现在 Π 中——这与假设矛盾。

如果 π_2中至少应用了一条超逻辑规则，我们首先对π_2 进行全局改写，然后按照最顶层超逻辑规则应用下方出现的逻辑规则数量进行次级归纳。从这些最顶层的应用开始， $\Pi, \Gamma \vdash^{\mathbf{T}}_{\mathbf{S}} \Delta, \Sigma$ 的可靠性保证 G4^{pn}证明 $W, \Pi \vdash B$，其中 B 是相应默认规则的任一前提。因此 $B \in Cn(\mathcal{W} \cup \Pi)$。根据定理3.2，对于 $\mathrm{top}_r(^{*} B)$中的每个 $^{*} \Theta_i$， G4$^{\delta}$ 都证明 $\Pi \vdash^{\varnothing}_{\varnothing} \Theta_i$。现在我们可以对前提 $\Pi \vdash^{\varnothing}_{\varnothing} \Theta_i$应用超逻辑规则； $\Pi, \Gamma \vdash^{\mathbf{T}}_{\mathbf{S}} \Delta, \Sigma$ 的可靠性确保该应用是安全的。接下来，我们重新应用 π_2中位于这条超逻辑规则下方的所有右规则。 cut_{asa}的实例得以保留，所有由此产生的序列仍然可靠。我们对 π_2中的每一条后续超逻辑规则重复这一过程。由此得到的 G4$^{\delta}$-证明 π_2' 推导出$\Pi \vdash^{\mathbf{T}'_2}_{\mathbf{S}_2} \Sigma, \neg A$ ，且最高超逻辑规则下方的逻辑规则数量严格减少。此时，次级归纳假设适用，论证即告完成。

如果 A 不是 π_1的最后一条规则中的主要公式，且该规则既不是 $L\vee$ 也不是 $L\neg\wedge$，我们就应用归纳假设（至多两次）以得到所需结论。如果 π_1 中的最后一条规则是，例如， $L\vee$，我们就聚焦于 $\mathcal{T}_{\pi_1}(A)$。如果 $\mathcal{T}_{\pi_1}(A)$的每个叶节点都标记为由 RW引入的 A 的一个出现，我们只需删除这些 RW 应用，即可得到一个G4$^{\delta}$证明，其结论为 $\Gamma \vdash^{\mathbf{T}_1}_{\mathbf{S}_1} \Delta$，然后应用 LW、 RW和 σ得出结论。否则，我们像 π_2 的情形（b）那样通过矛盾式推理，证明至少存在一条应用于 π_1中的超逻辑规则。随后，我们对 π_1 进行全局改写（同样如情形（b）所示），以减少最顶层超逻辑应用以下出现的逻辑规则数量，并对该数量进行次级归纳，从而完成证明。□

引理 3.7. 令 $i = 1,2$。规则

$$E\vee\ \frac{A_i, A_1\vee A_2, \Gamma \ {}_{\mathsf{F}}\left|\frac{\mathbf{T}}{\mathbf{S}}\right.\ \Delta}{A_i, A_i, \Gamma \ {}_{\mathsf{F}}\left|\frac{\mathbf{T'}}{\mathbf{S}}\right.\ \Delta} \qquad \frac{\neg A_i, \neg(A_1\wedge A_2), \Gamma \ {}_{\mathsf{F}}\left|\frac{\mathbf{T}}{\mathbf{S}}\right.\ \Delta}{\neg A_i, \neg A_i, \Gamma \ {}_{\mathsf{F}}\left|\frac{\mathbf{T'}}{\mathbf{S}}\right.\ \Delta} E\neg\wedge$$

在G4$^{\delta}$中是可容许的。

证明。 我们只讨论 $E\vee$，因为关于 $E\neg\wedge$的论证完全类似。我们对前提的 G4$^{\delta}$-证明 π 的高度进行归纳。假设 $\mathbf{S}$,$\mathbf{T}$ $\neq\varnothing$：若 $\mathbf{S}$ $=\mathbf{T}$ $=\varnothing$，则应用引理 3.5 得出结论。

若 $h(\pi)=1$，最后一条规则是一条零元逻辑外规则：只需将 $A_1\vee A_2$ 替换为A_i 即可得出结论。若 $h(\pi)>1$，则按 π中的最后一条规则分情况讨论。若后者是 $L\vee$，且 $A_1\vee A_2$ 是其中的主公式，则对 π进行如下变换：

$$L\vee\ \frac{\begin{array}{cc}\vdots & \vdots\\ A_i, A_i, \Gamma \ {}_{\mathsf{F}}\left|\frac{\mathbf{T_1}}{\mathbf{S_1}}\right.\ \Delta & A_i, A_{3-i}, \Gamma \ {}_{\mathsf{F}}\left|\frac{\mathbf{T_2}}{\mathbf{S_2}}\right.\ \Delta\end{array}}{A_i, A_1\vee A_2, \Gamma \ {}_{\mathsf{F}}\left|\frac{\mathbf{T}}{\mathbf{S}}\right.\ \Delta} \quad\rightsquigarrow\quad \frac{\begin{array}{c}\vdots\\ A_i, A_i, \Gamma \ {}_{\mathsf{F}}\left|\frac{\mathbf{T_1}}{\mathbf{S_1}}\right.\ \Delta\end{array}}{A_i, A_i, \Gamma \ {}_{\mathsf{F}}\left|\frac{\mathbf{T_1}}{\mathbf{S}}\right.\ \Delta}\sigma$$

若 π 中的最后一条规则是 LW，且 $A_1\vee A_2$ 是其中的主公式，则进行如下变换：

$$LW\ \frac{\begin{array}{c}\vdots\\ A_i, \Gamma \ {}_{\mathsf{F}}\left|\frac{\mathbf{T}}{\mathbf{S}}\right.\ \Delta\end{array}}{A_i, A_1\vee A_2, \Gamma \ {}_{\mathsf{F}}\left|\frac{\mathbf{T}}{\mathbf{S}}\right.\ \Delta} \quad\rightsquigarrow\quad \frac{\begin{array}{c}\vdots\\ A_i, \Gamma \ {}_{\mathsf{F}}\left|\frac{\mathbf{T}}{\mathbf{S}}\right.\ \Delta\end{array}}{A_i, A_i, \Gamma \ {}_{\mathsf{F}}\left|\frac{\mathbf{T}}{\mathbf{S}}\right.\ \Delta} LW$$

若 Γ 或 Δ 中的一个公式是 π中最后一条规则的主公式，则对后者的前提应用归纳假设，从而得出结论。

如果 π 中的最后一条规则是 cut_{asa}，则可能无法将归纳假设应用于前提：如果原子割公式是 A_{3-i} 的子公式，却未出现在 $\Gamma\cup[A_i]\cup\mathcal{W}$中的任何公式里，那么 cut_{asa}的适用侧条件便不再满足。在这种情况下，我们对 $E\vee$进行向上置换：接下来，将 cut_{asa} 的应用替换为 cut_a的一个实例。只需运用定理 3.4，即可得出结论。

如果 A_i 是 π中最后一条规则的主公式，我们就不能应用归纳假设得出结论；相反，我们采用另一种论证，其依据是前提A_i，$A_1\vee A_2$，$\Gamma\vdash_{\mathsf{F}}^{\mathbf{ST}}\Delta$ 在条件下可靠。定义 3.3保证，对于以$\Pi\vdash_{\mathsf{F}}^{\mathbf{UV}}\Sigma$ 为结论的 π 的任意子推导 ρ，都有 $([W, E_\rho]\cup[A_i]\cup[A_1\vee A_2]\cup\Gamma)\ ||\ \langle\mathbf{V}\ \varnothing\rangle$。从 π中逻辑外规则的最顶层应用开始，如果 Θ 是此类应用的任一前提的后件，我们便利用定理3.2推得 G4$^{\delta}$ 证明A_i，A_i，$\Gamma\vdash_{\mathsf{F}}^{\varnothing}{}_{\varnothing}\ \Theta$。因此，我们将相应的逻辑外规则应用于这些序列：由于 $([W, D_\pi]\cup[A_i]\cup[A_1\vee A_2]\cup\Gamma)\ ||\ \langle\varnothing,$ $\mathbf{S}\rangle$，引理 3.1 保证这类应用是安全的。接下来，我们应用 π 中位于这些逻辑外规则实例之下的所有规则，但左规则（逻辑规则和结构规则）除外。定理 3.4保证，任何因删除 A_{3-i} 而无法保留的 cut_{asa} 应用，都可以替换为一个

cut_a的实例。此外，$([W, D_\pi] \cup [A_i] \cup [A_1 \vee A_2] \cup \Gamma) \parallel \langle \varnothing,\ \mathbf{S} \rangle$这一事实结合引理 3.1，保证所有 σ 应用仍然安全。对π 进行这样的全局改写后，可得到一个 G4$^\delta$-证明，其结论为 $A_i,\ A_i,\ \Gamma \vdash_{\mathrm{F}}^{\mathrm{ST}} \Delta$。□

引理 3.8. 左收缩规则

$$LC\ \frac{A, A, \Gamma \left|\frac{\mathbf{T}}{\mathbf{S}}\right. \Delta}{A, \Gamma \left|\frac{\mathbf{T}}{\mathbf{S}}\right. \Delta}$$

在G4$^\delta$中是可容许的。

证明。 我们聚焦于左收缩，先对前提的 G4$^\delta$-证明 π 的高度进行主要归纳，再对 A的逻辑复杂度进行次级归纳。若$h(\pi) = 1$，我们利用定义 3.2 中的条件（i）和（v）得出结论。若$h(\pi) > 1$，我们根据 π中的最后一条规则分情况讨论。若 A 的任何一次出现都不是最后一条规则中的主项，我们只需将归纳假设应用于各前提。若 A 的一次出现是最后一条规则中的主项，我们则根据 A的主联结词分情况讨论。若A 是一个文字，则 A 是通过一次 LW 应用引入的；只需删除后者即可得出结论。若 A 的形式为 $B \wedge C$、 $\neg(B \vee C)$ 或$\neg\neg B$，我们利用引理 3.4 应用次级归纳假设，从而得出结论。另一方面，若 A 的形式为 $B \vee C$ 或 $\neg(B \wedge C)$，我们利用引理 3.7 两次应用次级归纳假设，完成证明。□

定理 3.5. 安全切规则

$$\frac{\Gamma \left|\frac{\mathbf{T_1}}{\mathbf{S_1}}\right. \Delta, A \qquad \Pi \left|\frac{\mathbf{T_2}}{\mathbf{S_2}}\right. \Sigma, \neg A}{\Gamma, \Pi \left|\frac{\mathbf{T}}{\mathbf{S}}\right. \Delta, \Sigma}\ cut$$

在G4$^\delta$中是可容许的。

证明。 我们按照 A的复杂度进行归纳。若 A是一个文字，则定理 3.3 和 3.4 保证结论成立。若 A 不是文字，我们根据 A的主联结词分类讨论。我们利用引理 3.2 降低切断公式的复杂度：为得到结论，我们应用引理 3.3 和 3.8。□

G4$^\delta$ 演算足以形式化修改的轻信式后承所满足的弱累积性。首先，考虑以下累积切断规则——标准切断规则的一个特例：

$$\frac{\Gamma \vdash_{\mathrm{F}} \left|\frac{\mathbf{T_1}}{\mathbf{S_1}}\right. A \qquad A, \Pi \vdash_{\mathrm{F}} \left|\frac{\mathbf{T_2}}{\mathbf{S_2}}\right. \Sigma}{\Pi, \Gamma \vdash_{\mathrm{F}} \left|\frac{\mathbf{T}}{\mathbf{S}}\right. \Sigma}\ cCut$$

定理 3.6. 安全累积切断在G4$^\delta$中是可容许的。

证明。 我们聚焦于最顶层的一次累积切断应用，并首先按照切断公式 A的逻辑复杂度进行归纳，随后按照左右前提的 G4$^\delta$-证明 π_1, π_2 的高度之和进行次级归纳。鉴于

定理 3.1，我们假设 $\mathbf{S} \neq \varnothing$ 或 $\mathbf{T} \neq \varnothing$。如果 A 是一个文字，我们就根据 π_1中的最后一条规则分情况讨论。这里，我们聚焦于最有意义的几种情况。

(a) 若 π_1 中的最后一条规则是 ax，则根据假设， π_2 中的最后一条规则不是 ax。若 π_2 中的最后一条规则是逻辑外规则，则对各个前提应用 m次次级归纳假设，得到如下结论：若 $m = 0$，则将以 δ应用得出 $A, \Pi \vdash \mathbf{S}_2\mathbf{T}^2\ \Sigma$ 的规则应用，替换为一个得出 $\Pi, \Gamma \vdash \mathbf{S}_2\mathbf{T}^2\ \Sigma$的规则应用，再（可能）接续$\sigma$应用，得到 $\Pi, \Gamma \vdash \mathbf{ST}^2\ \Sigma$。不难看出，由此得到的 G4$^{\delta}$-推导中的所有规则应用都是安全的。若 π_2 中的最后一条规则是 LW，且 A是其中的主要公式，则我们将弱化应用替换为 LW 个应用，以添加 Γ 中的公式（若有），再加上 σ 个应用，以添加 S 中未出现在 $\mathbf{S}_2$ 中的集合（若有）。若 π_2 中的最后一条规则是 cut_{asa}，则我们对其前提应用次级归纳假设：若不满足应用 cut_{asa} 的侧条件，则利用定理 3.4 得出结论。若π_2 中的最后一条规则是 $L\vee$ 或 $L\neg\wedge$，则应用次级归纳假设时可能无法保证约束下的可靠性。若 π_2中没有应用超逻辑规则，则从 π_2 中删除任何 σ 应用，并应用命题 3.1，推得存在一个 G4$^{\delta}$-证明，其结论为 $\Pi \vdash \overset{\varnothing}{\varnothing}\ \Sigma, \neg A$。我们应用 σ ，得到一个 G4$^{\delta}$-推导，其结论为 $\Pi \vdash \overset{\varnothing}{\mathbf{S}_2}\ \Sigma, \neg A$：不难立即验证，这些 σ应用都是安全的，因此该推导是一个证明。若 π_2中至少应用了一条超逻辑规则，则对 π_2 进行整体重写，得到一个 G4$^{\delta}$-证明，其结论为$\Pi, \Gamma \vdash \mathbf{S}_2\mathbf{T}^2\ \Sigma$（采用与定理 3.4 的证明中第（$b$）点相同的步骤）。

(b) 若 π_1 中最后一条规则是逻辑外规则，而 π_2 中最后一条规则是 ax，则应用引理 3.1 和定理 3.5 得出结论。其他所有可能的情形均按上文 (a) 中的方式处理。

(c) 若 π_1 中最后一条规则是 $L\vee$ 或 $L\neg\wedge$，我们可能无法对两个前提都应用次级归纳假设来得出结论。此时，我们对 π_2 进行整体改写，得到一个 G4$^{\delta}$-证明 $\Pi, \Gamma \vdash \mathbf{S}_2\mathbf{T}^2\ \Sigma$ （同样遵循定理 3.4 的证明中第 (b) 点所采用的步骤）。

若 A 不是文字，则根据 A 的主联结词分类讨论。若 A 是 $B \wedge C$、 $\neg(B \vee C)$ 或 $\neg\neg B$，则利用引理 3.2 和 3.4 至多两次应用主要归纳假设，然后利用引理 3.3 和 3.8 得出结论。若 A 是 $B \vee C$ 或 $\neg(B \wedge C)$，且 π_2 不包含逻辑外规则的应用，则移除所有 σ 的应用（如果有），然后应用引理 3.1 和定理 3.5，得到一个 G4$^{\delta}$-证明 $\Pi, \Gamma \vdash \mathbf{S}_1\mathbf{T}^1\ \Sigma$：我们采用安全的 σ 应用来证明 $\Pi, \Gamma \vdash \mathbf{ST}^1\ \Sigma$。另一方面，若 π_2 包含逻辑外规则的应用，则利用条件下的可靠性对 π_2 进行整体改写，得到一个 G4$^{\delta}$-证明 $\Pi, \Gamma \vdash \mathbf{ST}^2\ \Sigma$ （同样遵循定理 3.4 的证明中第 (b) 点所采用的步骤）。□

接下来，让我们考虑以下谨慎单调规则：

定理 3.7. 安全谨慎单调性规则

$$\frac{\Gamma \vdash^{\mathbf{T_1}}_{\mathbf{S_1}} \Delta_1 \qquad \Pi \vdash^{\mathbf{T_2}}_{\mathbf{S_2}} \Delta_2}{\Gamma, \bigvee \Delta_1, \Pi \vdash^{\mathbf{T}}_{\mathbf{S}} \Delta_2} cMon$$

在G4$^{\delta}$中是可容许的。

证明。 我们对左右前提的 G4$^{\delta}$-证明 π_1, π_2 的高度之和进行归纳。若 $h(\pi_1) = h(\pi_2) = 1$，唯一非平凡的情形是（例如） π_1 中的最后一条规则是超逻辑规则 δ。接着我们考察π_2的最后一条规则。若它是 ax，应用 LW和 σ即可得到 $\bigvee \Delta_1, \Gamma, \Pi \vdash^{\varnothing}_{\mathbf{S}} \Delta_2$ 的 G4$^{\delta}$-推导，不难看出这就是一个证明。若 π_2 中的最后一条规则是超逻辑 δ，我们便将其应用替换为另一个应用，使其结论的前件中含有 $\bigvee \Delta_1, \Gamma, \Pi$，然后应用$\sigma$；条件下的可靠性是显然的，而约束下的可靠性由引理 3.1 得出。

若 $h(\pi_1) + h(\pi_2) > 2$，我们便根据 π_2的最后一条规则分情况讨论。若 Π 中的公式是主公式，则可直接对前提应用归纳假设；若最后一条规则是 cut_{asa}，同样的推理也适用。反之，若 Δ_2 中的公式是主公式，且最后一条规则是逻辑外 δ，则我们对 δ 的前提应用 LW 和 σ，然后再次应用 δ。根据引理 3.1，约束下的可靠性得以保持，因此得到的 G4$^{\delta}$-推导是一个证明。□

现在，我们开始证明 G4$^{\delta}$ 演算的强充分性——这是本节的主要结果。

定理 3.8. 设 $\langle \mathcal{W}, \mathcal{D} \rangle$ 是一个默认理论。那么存在一个G4$^{\delta}$-证明 π，证明 $\Gamma \vdash^{\mathbf{T}}_{\mathbf{S}} \Delta$，其中**S** 和**T**取某些值，当且仅当 $\bigvee \Delta$ 属于 $\langle \mathcal{W} \cup \Gamma, \mathcal{D} \rangle$的某个修正扩展。

证明。($\Rightarrow$) 我们对 π 的高度进行归纳，以确立存在一个 $\langle \mathcal{W} \cup \Gamma, def(\pi) \rangle$ 的修正扩展 $\langle \mathcal{E}, \mathcal{F} \rangle$，使得 $\bigvee \Delta$ 属于 $\mathcal{E}$：根据引理 2.1，这足以得出结论。

若 $h(\pi) = 1$，唯一的非平凡情形是最后一条规则为超逻辑规则$\delta_{\mathcal{D}'}$。根据定义 3.2 中的条件 $(v) - (vii)$， $\bigvee \Delta$ 属于 $Cn(D)$，其中 D 是 $\mathcal{D}'$中的唯一默认规则的结论。由 Γ ST Δ 在约束下可靠这一事实，我们可以推断 $\bigvee \Delta$ 属于 $\langle \mathcal{W} \cup \Gamma, \mathcal{D}' \rangle$的一个修正扩展 $\langle \mathcal{E}, \mathcal{F} \rangle$。若$h(\pi) > 1$，我们按最后一条规则 π进行分类讨论。若后者是 RW、 σ 或一元逻辑规则，则我们对前提应用归纳假设以得出结论：对于左逻辑规则，我们利用这样一个事实：只要 $\mathcal{W}'$与 $\mathcal{W}''$经典等价， $\langle \mathcal{W}', def(\pi) \rangle$ 的任一修正扩展就是 $\langle \mathcal{W}'', def(\pi) \rangle$ 的修正扩展，反之亦然。若 π 中的最后一条规则是 LW，公式 A 是该规则中的主公式，并且 $\Gamma = \Gamma' \cup [A]$，我们应用归纳假设，推断存在 $\langle \mathcal{W} \cup \Gamma', def(\pi) \rangle$的一个修正扩展 $\langle \mathcal{E}, \mathcal{F} \rangle$：由 A, Γ' ST Δ 在约束下可靠这一事实，我们得到结论。若 π 中的最后一条规则是超逻辑规则 $\delta_{\mathcal{D}'}$，且 $\delta_{\mathcal{D}'}$ 是根据定义 3.2 中的点 (v) 生成的，则 π 具有如下形式：

$$\frac{\begin{array}{cc}\vdots_{\pi_1} & \vdots_{\pi_m}\\ \Gamma \vdash^{\mathbf{T_1}}_{\mathbf{S_1}} \Theta_1 & \cdots \quad \Gamma \vdash^{\mathbf{T_m}}_{\mathbf{S_m}} \Theta_m\end{array}}{\Gamma \vdash^{\mathbf{T}}_{\mathbf{S}} \Phi}\ \delta_{\mathcal{D}'}$$

其中 $m > 1$。根据定义3.1和定义3.3，$\Gamma \vdash \mathbf{ST}\,\Phi$ 在条件下可靠这一事实意味着 G4^{pn} 证明了 $W, D'_\pi, \overline{\Gamma} \vdash \bigwedge_{i=1}^{m}(\bigvee \Theta_i)$：按定义，这意味着 G4^{pn}证明了 $W, \bigwedge concl(def(\pi_1) \cup \cdots \cup def(\pi_m))\ \Gamma \vdash \bigwedge_{i=1}^{m}(\bigvee \Theta_i)$。另一方面，$\Gamma \vdash \mathbf{ST}\,\Phi$在约束下可靠：定义3.1、定义3.3和引理 3.1保证存在 $\langle \mathcal{W} \cup \Gamma, def(\pi_1) \cup \cdots \cup def(\pi_m)\rangle$ 的一个修正扩展 $\langle \mathcal{E}', \mathcal{F}'\rangle$，使得 $\mathcal{E}' = Cn(\mathcal{W} \cup concl(def(\pi_1) \cup \cdots \cup def(\pi_m)))$。因此，我们有 $\bigwedge_{i=1}^{m}(\bigvee \Theta_i)$ 属于 $\mathcal{E}'$：于是，$\mathcal{D}'$ 中的默认规则在 $\mathcal{E}'$中被触发。$\Gamma \vdash \mathbf{ST}\,\Phi$ 在约束下可靠这一性质保证存在 $\langle \mathcal{W} \cup \Gamma, def(\pi)\rangle$ 的一个修正扩展 $\langle \mathcal{E}'', \mathcal{F}''\rangle$，使默认规则的结论属于 $\mathcal{E}''$：根据定义 3.2 的条件 (v)，以及 $\mathcal{E}''$ 对肯定前件式的封闭性，我们推断 $\bigvee \Phi$ 属于 $\mathcal{E}''$。当 $\delta_{\mathcal{D}'}$ 是根据点 (vi)–(vii) 生成时，论证类似。若 π 中的最后一条规则是二元右逻辑规则或 cut_{asa}，我们应用两次归纳假设，并利用$\Gamma \vdash \mathbf{ST}\,\Delta$ 的可靠性得出结论。若最后一条规则是 $L\vee$ 或 $L\neg\wedge$，则 π具有如下形式：

$$\frac{\begin{array}{cc}\vdots & \vdots\\ B, \Gamma \vdash^{\mathbf{T_1}}_{\mathbf{S_1}} \Delta & C, \Gamma \vdash^{\mathbf{T_2}}_{\mathbf{S_2}} \Delta\end{array}}{B \vee C, \Gamma \vdash^{\mathbf{T}}_{\mathbf{S}} \Delta}\ L\vee$$

如果在 π中没有应用逻辑外规则，定理3.2保证 $\bigvee \Delta$ 属于 $Cn(\mathcal{W} \cup \Gamma)$，因此也属于 $\langle \mathcal{W} \cup \Gamma, \mathcal{D}\rangle$的任意修正扩展。如果在 π中至少出现一条逻辑外规则，我们就对 π 进行全局改写，以便将 $L\vee$ 置于任何逻辑外规则应用之前，从而得到一个 G4$^{\delta}$-推导 ρ。然后，我们对 ρ 中逻辑外规则的实例数量进行归纳，以得出结论。

($\Leftarrow$) 若 $\langle \mathcal{E}, \mathcal{F}\rangle$ 是 $\langle \mathcal{W}, \mathcal{D}\rangle$ 和 $A \in \mathcal{E}$的修正扩展，则存在一个 k 使得 $A \in \mathcal{E}^k$。我们对 k 进行（超限）归纳，证明至少存在一个 G4$^{\delta}$-证明 π，证明 $\Gamma\ \mathbf{ST}\ A$，其中 S、T 满足 $D_\pi \in \mathcal{E}$。若 $k = j+1$，且 A 可由 $\mathcal{E}^j$ 中的公式通过肯定前件式推出，则由定理 3.5 可得结论。关键情况是，$k = j+1$, A 并非 $\mathcal{E}^j$ 中公式的经典后承，并且存在形如 B：$C_1, \ldots C_k$的默认规则，使得 $B \in \mathcal{E}^j$。若 $A \in \mathcal{E}$，且 $\mathcal{D}'$表示由 $\mathcal{E}^j$中的公式触发的、可适用默认规则的极大集合，则 $C_h \in (\mathcal{F} \cup just(\mathcal{D}'))$，因此对任意 $1 \le h \le k$，都有 $\neg C_h \notin Cn(\mathcal{E} \cup concl(\mathcal{D}'))$。根据归纳假设，至少存在一个 G4$^{\delta}$-证明 ρ，证明 $\Gamma\ \mathbf{UV}\ B$，其中某些 U、V 满足 $D_\rho \in \mathcal{E}$。定理 3.5 和引理 3.3 保证存在一个 G4$^{\delta}$-证明 ρ_i，证明 $\Gamma \vdash \mathbf{UV}^{i}\ \Theta_i$；对任意出现在 $\mathrm{top_r}(^*B) = \{^*\Theta_i\}_{1 \le i \le m}$中的 $^*\Theta_i$，均有 $D_{\rho_i} \in \mathcal{E}$。因此，对 $\mathrm{top_r}(^*A)$ 中的任意 $^*\Phi$，考虑以下 G4$^{\delta}$-推导 π'：

$$\frac{\begin{array}{c}\vdots_{\rho_i}\\ \Gamma \ {}_{\mathsf{F}}\big|^{\mathbf{V_i'}}_{\mathbf{U}}\ \Theta_i\end{array}}{\Gamma \ {}_{\mathsf{F}}\big|^{\mathbf{V}'}_{\mathbf{U}'}\ \Phi}\ \delta_{\mathcal{D}'}$$

其中 $\mathbf{U}' = \mathbf{U} \cup \{\{\neg C_1^f, \ldots, \neg C_k^f\}\}$。若 $\neg C_h \notin Cn(\mathcal{E} \cup concl(\mathcal{D}'))$，则 $\neg C_h \notin Cn(\mathcal{W} \cup \{D_{\rho_i}\}_{1 \leq i \leq m} \cup \{A\})$：这意味着 π' 是一个 G4$^{\delta}$-证明，正如所需。□

3.4. 规范系统的控制对。 在本小节中，我们通过引入适用于 O-标记序列和 P-标记序列的规则，扩展用于 m-宽容后承的 G4$^{\delta}$演算。由此得到分别用于 m-和 d-宽容后承的强完备 G4$^{\delta}$ 演算。在下一节中，这些演算将作为分析涉及冲突信息的悖论情境或两难情境的基础（例如基于典型性的义务、违反义务后的义务、由特异性驱动的推理以及带例外的义务），并用于处理动态情境中的道义概念（包括动态积极许可和动态义务）。

在用于 d-宽容后承的 G4$^{\delta}$ 演算中，事实脱离通过特定的逻辑外规则形式化，这些规则的前提带有 F 标签，结论带有 $\times$ 标签，并且包含 $\times \in$ {O，P}。为保留 F-标记前提左侧的事实假设，我们在每个受控 $\times$-标记序列的结构中加入一个额外的语境，即存储库。形式上，道义受控序列 是一个受控序列

$$\Gamma \ {}_{\times}\big|^{\mathbf{T}}_{\mathbf{S}}\ \Delta$$

附带语境 Π，如下：

$$\Pi \mid \Gamma \ {}_{\times}\big|^{\mathbf{T}}_{\mathbf{S}}\ \Delta$$

G4$^{\delta}$ 的规则会像传递控制对那样沿推导传递存储库（参见图3中的规则）。

存储库最初是在 [29] 中引入的，用于追踪被规则从序列左侧移至右侧的公式，以确保切消去。在 [35]，中，作者通过基于极性的可靠性定义，表明可以省去存储库。在此处介绍的 G4$^{\delta}$ 演算中，没有规则允许将公式从序列左侧移至右侧：因此，无需像 [29]，中那样使用存储库存放负公式，也无需采用类似 [35] 中的基于极性的可靠性定义。相反，我们使用存储库来表示与道义假设并列的事实假设，即带有 $\times$ 标签的序列左侧的公式。

形如（例如）$\Pi \mid \Gamma \circ_{\mathbf{ST}} \Delta$ 的序列的可证性，对应于陈述“在 $\langle \mathcal{W} \cup \Pi,\ \mathcal{D} \rangle$的至少一个修正扩展中，$\bigvee \Delta$ 根据规范系统 $\langle \langle \mathcal{W}^{\mathrm{o}} \cup \Gamma,\ \mathcal{O} \rangle,\ \langle \mathcal{W}^{\mathrm{p}},\ \mathcal{P} \rangle \rangle$是义务”[4]为真的情况。值得注意的是，对序列符号而非其分隔的公式进行标记，体现了这样一种观点：一个公式的

[4]我们可以将 $\langle \mathcal{W} \cup \Pi$的修正扩展 $\mathcal{D} \rangle$ 视为一个不完整可能世界，并将 $\langle \langle \mathcal{W}^{\mathrm{o}} \cup \Gamma$、$\mathcal{O} \rangle$、$\langle \mathcal{W}^{\mathrm{p}}$视为一个不完整规范系统——即存在这样一个规范系统26

内容保持不变，无论它出现在事实性陈述还是规范性陈述中。同一个公式可以在不同的游戏中扮演不同的角色——事实的“游戏”、义务的“游戏”、许可的“游戏”——正如同一张牌在牌组中会因所玩的游戏不同而发挥不同的作用[5]。

定义 3.6。设 $\langle \mathcal{W}, \mathcal{D}\rangle$、$\langle \mathcal{W}^{\mathsf{o}}, \mathcal{O}\rangle$ 分别为默认理论、义务系统和许可系统。对于 4^{δ}、$\langle \mathcal{W}, \mathcal{D}\rangle$、$\langle \mathcal{W}^{\mathsf{o}}, \mathcal{O}\rangle$ 以及 $\langle \mathcal{W}^{\mathsf{p}}, \mathcal{P}\rangle$，受控序列演算$\mathsf{G4}^{\delta}$ 是$\langle \mathcal{W}, \mathcal{D}\rangle$、$\langle \mathcal{W}^{\mathsf{o}}, \mathcal{O}\rangle$ 和 $\langle \mathcal{W}^{\mathsf{p}}, \mathcal{P}\rangle$ 的$\mathsf{G4}^{\delta}$演算的扩展，并包含图*3*中的规则，前提是满足以下条件。

（i_{op}）对于 $ax^{\times}$ 的每个实例，以下条件之一成立：对于某个文字 A，有 $\Theta = \Lambda = \{A\}$；或者对于某个原子 A，有 $\Lambda = \{A, \neg A\}$；$\Theta \ ^{*}\ \Lambda$ 属于$\mathsf{top}^{\#}_{\mathsf{cp}}$（$^{*}\ W^{\times}$），其中 $W^{\times}$ 是 $\mathcal{W}^{\times}$ 中各公式的合取。

(ii_{op}) 对于每条结构规则和逻辑规则，序列符号的左下标以及规则名称的右上标 $\times$ 均为 o 或 p。

(iii_{op}) 对于任意受约束条件义务 $B\colon C_1, \dots C_k$，在 $\mathcal{O}^{\mathsf{f}}$ 中，若 $\mathsf{top}_{\mathsf{r}}(\ ^{*}\ B) = \{\ ^{*}\ \Theta_1, \dots, \ ^{*}\ \Theta_m\}$ 与 $m > 0$ 及 $\ ^{*}\ \Phi$ 一同属于 $\mathsf{top}^{\#}_{\mathsf{r}}(\ ^{*}\ D)$，则存在一条超逻辑规则：

$$\frac{\{\Gamma \ {}_{\mathsf{F}}\vdash^{\mathbf{T_i}}_{\mathbf{S_i}} \Theta_i\}_{1\le i\le m}}{\Gamma \mid \ {}_{\mathsf{o}}\vdash^{\mathbf{T}}_{\mathbf{S}} \Phi}\ \delta$$

其中 $\mathbf{T} = \bigcup_{i=1}^{m} \mathbf{T_i} \cup \{\{B^{\mathsf{f}}\}\}$，$\mathbf{S} = \bigcup_{i=1}^{m} \mathbf{S_i} \cup \{\{\neg C_1^{\mathsf{o}}, \dots, \neg C_k^{\mathsf{o}}\}\}$。反之，若 $\mathsf{top}_{\mathsf{r}}(\vdash^{*} B) = \varnothing$，则存在一条超逻辑规则：

$$\frac{}{\Pi \mid \ {}_{\mathsf{o}}\vdash^{\mathbf{T}}_{\mathbf{S}} \Phi}\ \delta$$

其中 $\mathbf{T} = \{\{\top^{\mathsf{f}}\}\}$ 且 $\mathbf{S} = \bigcup_{i=1}^{m} \mathbf{S_i} \cup \{\{\neg C_1^{\mathsf{o}}, \dots, \neg C_k^{\mathsf{o}}\}\}$。

$\mathcal{P}^{\mathsf{f}}$ 中的任何受约束条件许可也适用同一条件：将 o 替换为 p，并将 $\mathbf{S} = \bigcup_{i=1}^{m} \mathbf{S_i} \cup \{\{\neg C_1^{\mathsf{p}}, \dots, \neg C_k^{\mathsf{p}}, \neg C_1^{\mathsf{o}}, \dots, \neg C_k^{\mathsf{o}}\}\}$。

(iv_{op}) 对于 $\mathcal{O}^{\mathsf{d}}$ 中任意受约束条件义务 $B\colon C_1, \dots C_k$，若 $\mathsf{top}(\ ^{*}\ B) = \{\ ^{*}\ \Theta_1, \dots, \ ^{*}\ \Theta_m\}$ 与 $m > 0$ 及 $\ ^{*}\ \Phi$ 一同属于 $\mathsf{top}^{\#}_{\mathsf{r}}(\ ^{*}\ D)$，则存在一条逻辑外规则：

$$\frac{\{\Pi_i \mid \Gamma \ {}_{\mathsf{o}}\vdash^{\mathbf{T_i}}_{\mathbf{S_i}} \Theta_i\}_{1\le i\le m}}{\Pi \mid \Gamma \mid \ {}_{\mathsf{o}}\vdash^{\mathbf{T}}_{\mathbf{S}} \Phi}\ \delta$$

其中 $\mathbf{T} = \bigcup_{i=1}^{m} \mathbf{T_i} \cup \{\{B^{\mathsf{o}}, B^{\mathsf{p}}\}\}$、$\mathbf{S} = \bigcup_{i=1}^{m} \mathbf{S_i} \cup \{\{\neg C_1^{\mathsf{o}}, \dots, \neg C_k^{\mathsf{o}}\}\}$ 以及 $\Pi = \Pi_1$、.....、Π_m。反之，如果 $\mathsf{top}_{\mathsf{r}}(\ ^{*}\ B) = \varnothing$，则存在一条超逻辑规则：

$$\frac{}{\Pi \mid \Gamma \ {}_{\mathsf{o}}\vdash^{\mathbf{T'}}_{\mathbf{S}} \Phi}\ \delta$$

（至少）一个既未被系统明确要求，也未被明确许可或明确禁止的公式。按照这种观点，$\Pi \mid \Gamma \ {}_{\mathsf{o}}\vdash_{\mathbf{ST}} \Delta$ 的可证性对应于吉巴德事实—规范世界的不完整版本中的真值 [12]。[5]控制对中出现的公式仅为方便记号而标记。

公理和结构规则

$$\frac{}{\Pi \mid \Theta \ {}_{\times}\left|\frac{\varnothing}{\varnothing}\right. \Lambda}\ ax^{\times}$$

$$\frac{\Pi \mid \Gamma \ {}_{\times}\left|\frac{\mathbf{T}}{\mathbf{S}}\right. \Delta}{\Pi \mid A, \Gamma \ {}_{\times}\left|\frac{\mathbf{T}}{\mathbf{S}}\right. \Delta}\ LW^{\times} \qquad \frac{\Pi \mid \Gamma \ {}_{\times}\left|\frac{\mathbf{T}}{\mathbf{S}}\right. \Delta}{\Pi \mid \Gamma \ {}_{\times}\left|\frac{\mathbf{T}}{\mathbf{S}}\right. \Delta, A}\ RW^{\times}$$

$$\frac{\Pi_1 \mid \Gamma \ {}_{\times}\left|\frac{\mathbf{T_1}}{\mathbf{S_1}}\right. \Delta, A \qquad \Pi_2 \mid \Gamma \ {}_{\times}\left|\frac{\mathbf{T_2}}{\mathbf{S_2}}\right. \Delta, \neg A}{\Pi_1, \Pi_2 \mid \Gamma \ {}_{\times}\left|\frac{\mathbf{T}}{\mathbf{S}}\right. \Delta}\ cut^{\times}_{asa} \qquad \frac{\Gamma \ {}_{\times}\left|\frac{\mathbf{T}}{\mathbf{S}}\right. \Delta}{\Gamma \ {}_{\times}\left|\frac{\mathbf{T}}{\mathbf{S'}}\right. \Delta}\ \sigma^{\times}$$

逻辑规则

$$\frac{\Pi \mid \Gamma, A, B \ {}_{\times}\left|\frac{\mathbf{T}}{\mathbf{S}}\right. \Delta}{\Pi \mid \Gamma, A \wedge B \ {}_{\times}\left|\frac{\mathbf{T}}{\mathbf{S}}\right. \Delta}\ L\wedge^{\times} \qquad \frac{\Pi_1 \mid \Gamma \ {}_{\times}\left|\frac{\mathbf{T_1}}{\mathbf{S_1}}\right. \Delta, A \qquad \Pi_2 \mid \Gamma \ {}_{\times}\left|\frac{\mathbf{T_2}}{\mathbf{S_2}}\right. \Delta, B}{\Pi_1, \Pi_2 \mid \Gamma \ {}_{\times}\left|\frac{\mathbf{T}}{\mathbf{S}}\right. \Delta, A \wedge B}\ R\wedge^{\times}$$

$$\frac{\Pi_1 \mid \Gamma, A \ {}_{\times}\left|\frac{\mathbf{T_1}}{\mathbf{S_1}}\right. \Delta \qquad \Pi_2 \mid \Gamma, B \ {}_{\times}\left|\frac{\mathbf{T_2}}{\mathbf{S_2}}\right. \Delta}{\Pi_1, \Pi_2 \mid \Gamma, A \vee B \ {}_{\times}\left|\frac{\mathbf{T}}{\mathbf{S}}\right. \Delta}\ L\vee^{\times} \qquad \frac{\Pi \mid \Gamma \ {}_{\times}\left|\frac{\mathbf{T}}{\mathbf{S}}\right. \Delta, A, B}{\Pi \mid \Gamma \ {}_{\times}\left|\frac{\mathbf{T}}{\mathbf{S}}\right. \Delta, A \vee B}\ R\vee^{\times}$$

$$\frac{\Pi_1 \mid \Gamma, \neg A \ {}_{\times}\left|\frac{\mathbf{T_1}}{\mathbf{S_1}}\right. \Delta \qquad \Pi_2 \mid \Gamma, \neg B \ {}_{\times}\left|\frac{\mathbf{T_2}}{\mathbf{S_2}}\right. \Delta}{\Pi_1, \Pi_2 \mid \Gamma, \neg(A \wedge B) \ {}_{\times}\left|\frac{\mathbf{T}}{\mathbf{S}}\right. \Delta}\ L\neg\wedge^{\times} \qquad \frac{\Pi \mid \Gamma \ {}_{\times}\left|\frac{\mathbf{T}}{\mathbf{S}}\right. \Delta, \neg A, \neg B}{\Pi \mid \Gamma \ {}_{\times}\left|\frac{\mathbf{T}}{\mathbf{S}}\right. \Delta, \neg(A \wedge B)}\ R\neg\wedge^{\times}$$

$$\frac{\Pi \mid \Gamma, \neg A, \neg B \ {}_{\times}\left|\frac{\mathbf{T}}{\mathbf{S}}\right. \Delta}{\Pi \mid \Gamma, \neg(A \vee B) \ {}_{\times}\left|\frac{\mathbf{T}}{\mathbf{S}}\right. \Delta}\ L\neg\vee^{\times} \qquad \frac{\Pi_1 \mid \Gamma \ {}_{\times}\left|\frac{\mathbf{T_1}}{\mathbf{S_1}}\right. \Delta, \neg A \qquad \Pi_2 \mid \Gamma \ {}_{\times}\left|\frac{\mathbf{T_2}}{\mathbf{S_2}}\right. \Delta, \neg B}{\Pi_1, \Pi_2 \mid \Gamma \ {}_{\times}\left|\frac{\mathbf{T}}{\mathbf{S}}\right. \Delta, \neg(A \vee B)}\ R\neg\vee^{\times}$$

$$\frac{\Pi \mid A, \Gamma \ {}_{\times}\left|\frac{\mathbf{T}}{\mathbf{S}}\right. \Delta}{\Pi \mid \neg\neg A, \Gamma \ {}_{\times}\left|\frac{\mathbf{T}}{\mathbf{S}}\right. \Delta}\ L\neg\neg^{\times} \qquad \frac{\Pi \mid \Gamma \ {}_{\times}\left|\frac{\mathbf{T}}{\mathbf{S}}\right. \Delta, A}{\Pi \mid \Gamma \ {}_{\times}\left|\frac{\mathbf{T}}{\mathbf{S}}\right. \Delta, \neg\neg A}\ R\neg\neg^{\times}$$

逻辑外规则

$$\frac{\{\Gamma \ {}_{\mathsf{F}}\left|\frac{\mathbf{T_i}}{\mathbf{S_i}}\right. \Theta_i\}_{0\le i\le m}}{\Gamma \mid \ {}_{\times}\left|\frac{\mathbf{T}}{\mathbf{S}}\right. \Phi}\ \delta \qquad \frac{\{\Pi_i \mid \Gamma \ {}_{\times}\left|\frac{\mathbf{T_i}}{\mathbf{S_i}}\right. \Theta_i\}_{0\le i\le m}}{\Pi \mid \Gamma \ {}_{\times}\left|\frac{\mathbf{T}}{\mathbf{S}}\right. \Phi}\ \delta$$

$$\frac{\{\Gamma \ {}_{\mathsf{F}}\left|\frac{\mathbf{T_i}}{\mathbf{S_i}}\right. \Theta_i\}_{0\le i\le m} \qquad \{\Pi_i \mid \Delta \ {}_{\times}\left|\frac{\mathbf{T_j}}{\mathbf{S_j}}\right. \Theta_i\}_{0\le j\le n}}{\Gamma, \Pi \mid \Delta \ {}_{\times}\left|\frac{\mathbf{T}}{\mathbf{S}}\right. \Phi}\ \delta$$

图3. 规范系统的受控序列规则 $\langle\langle \mathcal{W}^{\circ},\ \mathcal{O}\rangle,\ \langle \mathcal{W}^{\mathsf{P}},\ \mathcal{P}\qquad\qquad\rangle\rangle$

其中 $\mathbf{T}' = \{\{\top^{\circ}, \top^{\mathsf{p}}\}\}$ 和 $\mathbf{S} = \bigcup_{i=1}^{m} \mathbf{S_i} \cup \{\{\neg C_1^{\circ}, \ldots, \neg C_k^{\circ}\}\}$。

对于 $\mathcal{P}^{\mathsf{d}}$ 中的任何受约束条件许可，也适用相同条件：将 $\circ$ 替换为 p、$\mathbf{T} = \bigcup_{i=1}^{m} \mathbf{T_i} \cup \{\{B^{\mathsf{p}}\}\}$、$\mathbf{T}' = \{\{\top^{\mathsf{p}}\}\}$ 和 $\mathbf{S} = \bigcup_{i=1}^{m} \mathbf{S_i} \cup \{\{\neg C_1^{\mathsf{p}}, \ldots, \neg C_k^{\mathsf{p}}, \neg C_1^{\circ}, \ldots, \neg C_k^{\circ}\}\}$。

(v_{op}) 对于任意一对逻辑外规则

$$\frac{\{\Gamma \mid_{\mathsf{F}}^{\mathbf{T_i'}} \Theta_i\}_{1 \le i \le m}}{\Gamma \mid_{\circ}^{\mathbf{T_1}} \Phi}\,\delta \qquad \frac{\{\Gamma \mid_{\mathsf{F}}^{\mathbf{T_i'}} \Theta_i\}_{m+1 \le i \le n}}{\Gamma \mid_{\circ}^{\mathbf{T_2}} \Phi'}\,\delta$$

对于 $m + n \geq 0$，如果 $^{*}\,\Psi$ 出现在 $\mathsf{top}_{\mathsf{r}}^{\#}(\,^{*}(\bigvee \Phi) \wedge (\bigvee \Phi'))$ 中，但不属于 $\mathsf{top}_{\mathsf{r}}^{\#}(\,^{*}(\bigvee \Phi))$，$\mathsf{top}_{\mathsf{r}}^{\#}(\,^{*}(\bigvee \Phi'))$ 或 $\mathsf{top}_{\mathsf{r}}^{\#}(\,^{*}W^{\circ})$，那么存在一条形式如下的逻辑外规则：

$$\frac{\{\Gamma \mid_{\mathsf{F}}^{\mathbf{T_i'}} \Theta_i\}_{1 \le i \le n}}{\Gamma \mid_{\circ}^{\mathbf{T}} \Psi}\,\delta$$

其中 $\mathbf{S} = \mathbf{S_1} \cup \mathbf{S_2}$ 和 $\mathbf{T} = \mathbf{T_1} \cup \mathbf{T_2}$。

同一条件适用于任何一对形式相同的逻辑外规则，其中 p 取代 $\circ$，W^{p} 取代 W°。

(vi_{op}) 对于任意一对逻辑外规则

$$\frac{\{\Pi_i \mid \Gamma \mid_{\circ}^{\mathbf{T_i'}} \Theta_i\}_{1 \le i \le m}}{\Pi' \mid \Gamma \mid_{\circ}^{\mathbf{T_1}} \Phi}\,\delta \qquad \frac{\{\Pi_i \mid \Gamma \mid_{\circ}^{\mathbf{T_i'}} \Theta_i\}_{m+1 \le i \le n}}{\Pi'' \mid \Gamma \mid_{\circ}^{\mathbf{T_2}} \Phi'}\,\delta$$

分别含有 $m + n \geq 0$、$\Pi' = \Pi_1$、……、Π_m 和 $\Pi'' = \Pi_{m+1}$、……、Π_n，如果 $^{*}\,\Psi$ 出现在 $\mathsf{top}_{\mathsf{r}}^{\#}(\,^{*}(\rightarrow \bigvee \Phi) \wedge (\bigvee \Phi'))$ 中，但不属于 $\mathsf{top}_{\mathsf{r}}^{\#}(\,^{*}(\bigvee \Phi))$、$\mathsf{top}_{\mathsf{r}}^{\#}(\,^{*}(\bigvee \Phi'))$ 或 $\mathsf{top}_{\mathsf{r}}^{\#}(\,^{*}W^{\circ})$，那么就存在一条形式如下的逻辑外规则：

$$\frac{\{\Pi_i \mid \Gamma \mid_{\circ}^{\mathbf{T_i'}} \Theta_i\}_{1 \le i \le n}}{\Pi \mid \Gamma \mid_{\circ}^{\mathbf{T}} \Psi}\,\delta$$

其中 $\mathbf{S} = \mathbf{S_1} \cup \mathbf{S_2}, \mathbf{T} = \mathbf{T_1} \cup \mathbf{T_2}$ 以及 $\Pi = \Pi'$、Π''。

同一条件适用于任何一对形式相同的逻辑外规则，其中 p 取代 $\circ$，W^{p} 取代 W°。

(vii_{op}) 对于任意一对逻辑外规则

$$\frac{\{\Gamma \mid_{\mathsf{F}}^{\mathbf{T_i}} \Theta_i\}_{1 \le i \le m}}{\Gamma \mid_{\circ}^{\mathbf{T'}} \Phi}\,\delta \qquad \frac{\{\Delta_i \mid \Pi \mid_{\circ}^{\mathbf{T_i}} \Theta_i\}_{m+1 \le i \le n}}{\Delta \mid \Pi \mid_{\circ}^{\mathbf{T''}} \Phi'}\,\delta$$

对于 $m \geq 0$ 以及 $\Delta = \Delta_{m+1}, \ldots, \Delta_n$，如果 $^{*}\,\Phi''$ 出现在 $\mathsf{top}_{\mathsf{r}}^{\#}(\,^{*}(\bigvee \Phi) \wedge (\bigvee \Phi'))$ 中，且没有出现在 $\mathsf{top}_{\mathsf{r}}^{\#}(\,^{*} \bigvee \Phi)$ 中，$\mathsf{top}_{\mathsf{r}}^{\#}(\,^{*} \bigvee \Phi')$ 或 $\mathsf{top}_{\mathsf{r}}^{\#}(\,^{*} W^{\circ})$ 中，则存在一条形式如下的逻辑外规则

$$\frac{\{\Gamma \mid_{\mathsf{F}}^{\mathbf{T_i}} \Theta_i\}_{1 \le i \le m} \qquad \{\Delta_i \mid \Pi \mid_{\circ}^{\mathbf{T_i'}} \Theta_i\}_{m+1 \le i \le n}}{\Gamma, \Delta \mid \Pi \mid_{\circ}^{\mathbf{T}} \Phi''}$$

其中 $\mathbf{T} = \mathbf{T}' \cup \mathbf{T}''$ 和 $\mathbf{S} = \mathbf{S}' \cup \mathbf{S}''$。

对于任何一对形式相同的逻辑外规则，如果用 p 替换 o，并相应地用 W°替换 $W\mathsf{p}$，则同样的条件也适用。

$(viii_{op})$ 对于任意逻辑外规则

$$\frac{\{\Gamma \mid_{\mathsf{F}}^{\mathbf{T_i}}_{\mathbf{S_i}} \Theta_i\}_{1\leq i\leq m}}{\Gamma \mid_{\mathsf{o}}^{\mathbf{T}}_{\mathbf{S}} \Phi}\,\delta \qquad \frac{\{\Pi_i \mid \Gamma \mid_{\mathsf{o}}^{\mathbf{T_i}}_{\mathbf{S_i}} \Theta_i\}_{1\leq i\leq m}}{\Pi \mid \Gamma \mid_{\mathsf{o}}^{\mathbf{T}}_{\mathbf{S}} \Phi}\,\delta$$

其中有 $m \geq 0$ 和 $\Pi = \Pi_1, \ldots, \Pi_m$，如果 $^{*}\,\Phi'$ 出现在 $\mathsf{top}_{\mathsf{r}}^{\#}(\,^{*}(\bigvee \Phi) \wedge W)$ 中，而未出现在 $\mathsf{top}_{\mathsf{r}}^{\#}(\,^{*}\,W^{\circ})$中，那么就存在一条形式如下的逻辑外规则

$$\frac{\{\Gamma \mid_{\mathsf{F}}^{\mathbf{T_i}}_{\mathbf{S_i}} \Theta_i\}_{1\leq i\leq m}}{\Gamma \mid_{\mathsf{o}}^{\mathbf{T}}_{\mathbf{S}} \Phi'}\,\delta \qquad \frac{\{\Pi_i \mid \Gamma \mid_{\mathsf{o}}^{\mathbf{T_i}}_{\mathbf{S_i}} \Theta_i\}_{1\leq i\leq m}}{\Pi \mid \Gamma \mid_{\mathsf{o}}^{\mathbf{T}}_{\mathbf{S}} \Phi'}\,\delta$$

对于任何一对形式相同的逻辑外规则，如果用 p 替换 o，并相应地用 W°替换 $W\mathsf{p}$，则同样的条件也适用。

对于结论带有 O 标签（P 标签）的任意逻辑外规则 δ，若其属于 $\mathsf{G4}^{\delta}$，我们将标签 $\delta_{\mathcal{O}'}$ ($\delta_{\mathcal{P}'}$)定义如下：

(a_{op}) 如果 δ 是按照定义 3.6 中第 (iii_{op}) 点生成的，那么 $\mathcal{O}'$ （分别地，$\mathcal{P}'$）为 $\left\{ {}^{B}_{D} : C_1, \ldots C_k \right\}$；($b_{op}$) 如果 δ 是根据定义 3.6 中第 (iv_{op}) 点 $-$ 和第 ($viii_{op}$) 点生成的，且源自带有标签 $\delta_{\mathcal{O}_1}$ 和 $\delta_{\mathcal{O}_2}$ （$\delta_{\mathcal{P}_1}$ 和$\delta_{\mathcal{P}_2}$）的逻辑外规则 δ' 和 δ''，那么 $\mathcal{O}'$为 $\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2$（分别地，$\mathcal{P}'$ 为 $\mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2$）。

对于每个 $\mathsf{G4}^{\delta}$-推导 π，我们称受约束条件义务 $\underset{D}{B : C_1, \ldots C_k}$，属于 $obl(\pi)$，当且仅当在 π 中应用了一条标记为 $\delta_{\mathcal{O}'}$ 的（至少一条）逻辑外规则，且 $\underset{D}{B : C_1, \ldots C_k}$，属于 $\mathcal{O}'$。

此外，我们称规则 $\underset{D}{B : C_1, \ldots C_k}$，属于 $perm(\pi)$，当且仅当在 π 中有一条（至少一条）标记为 $\delta_{\mathcal{P}'}$ 的逻辑外规则，且 $\underset{D}{B : C_1, \ldots C_k}$，属于$\mathcal{P}'$，或者它属于 $obl(\pi)$。

每当 π_1、.....、π_m 是 π 中最底层逻辑外规则应用所产生的前提对应的直接子推导时，我们用 $obl'(\pi)$（$perm'(\pi)$）表示 $obl(\pi_1) \cup \cdots \cup obl(\pi_m)$（分别表示 $perm(\pi_1) \cup \cdots \cup perm(\pi_m)$）。我们将使用

– D°_{π} 表示 $concl(obl(\pi))$ 中各公式的合取，并用 E_{π} 表示 $concl(obl'(\pi))$ 中各公式的合取；– D^{p}_{π} 表示 $concl(perm(\pi))$ 中各公式的合取，并用 E_{π} 表示 $concl(perm'(\pi))$ 中各公式的合取。

定义 3.7。令 $\times \in \{\mathsf{O}、\mathsf{P}\}$、$\pi$ 为一个 $\mathsf{G4}^{\delta}$-推导，并令 $\Pi \mid \Gamma \circ \mathbf{ST}$ 以及 $\mathbf{T}^{\circ}$、$\mathbf{S}^{\circ}$（$\mathbf{T}^{\mathsf{p}}$、$\mathbf{S}^{\mathsf{p}}$；$\mathbf{T}^{\mathsf{f}}$、$\mathbf{S}^{\mathsf{f}}$）分别表示从 $\mathbf{T}$、$\mathbf{S}$ 中删除带有 f-和 p-标签的公式（分别为带有 f-

和 o-标签的公式；带有 o-和p-标签的公式）后得到的集合。序列 $\Pi \mid \Gamma \vdash_{\circ}^{\mathbf{ST}} \Delta$ 为

(i) 条件下可靠，当且仅当 *(i.i)* $([W\mathbf{o}\, E^{\circ}_{\rho}] \cup \Gamma)$ $\| \langle V^{\circ}, \varnothing \rangle$ 对于任何以 $\Pi' \mid \Gamma' \vdash_{\times} UV\, \Delta'$ 为结论的 ρ 子推导 π；*(i.ii)* $([W\mathbf{p}\, E^{\mathrm{p}}_{\rho}] \cup \Gamma)$ $\| \langle V^{\mathrm{p}}, \varnothing \rangle$ 对于任何以 $\Pi' \mid \Gamma' \vdash_{\times} UV\, \Delta'$ 为结论的 ρ 子推导 π；*(i.iii)* $([W\mathbf{f}\, E^{\mathrm{f}}_{\rho}] \cup \Pi)$ $\| \langle V^{\mathrm{f}}, \varnothing \rangle$ 对于任何以 $\Pi' \mid \Gamma' \vdash_{\times} UV\, \Delta'$ 为结论的 ρ 子推导 π；

(ii) 约束下可靠 当且仅当

$(ii.i)$ $([W^{\circ}, D^{\circ}_{\pi}] \cup \Gamma)$ $\| \langle \varnothing, \mathbf{S}^{\circ} \rangle$;
$(ii.ii)$ $([W^{\mathrm{p}}, D^{\mathrm{p}}_{\pi}] \cup \Gamma)$ $\| \langle \varnothing, \mathbf{S}^{\mathrm{p}} \rangle$; (
$ii.iii)$ $([W^{\mathrm{f}}\, D^{\mathrm{f}}_{\pi}] \cup \Pi)$ $\| \langle \varnothing, \mathbf{S}^{\mathrm{f}} \rangle$;

(iii) 可靠 当且仅当它在条件下可靠且在约束下可靠 $ts.$

定义 3.8. 令 $\times \in \{\mathsf{O},\mathsf{P}\}$, π 为一个G4$^{\delta}$-推导，其结论为 $\Pi \mid \Gamma \vdash_{\times}^{\mathbf{ST}} \Delta$ 和$\mathbf{T}^{\circ}$,$\mathbf{S}^{\circ}$($\mathbf{T}^{\mathrm{p}}$, $\mathbf{S}^{\mathrm{p}}$; $\mathbf{T}^{\mathrm{f}}$, $\mathbf{S}^{\mathrm{f}}$)是从$\mathbf{T}$、$\mathbf{S}$中删除带f标签和p标签的公式后得到的集合（分别是带f标签和o标签的公式；带o标签和p标签的公式）。
序列 $\Pi \mid \Gamma \vdash_{\mathrm{P}}^{\mathbf{ST}} \Delta$ 是

(i) 在条件下可靠，当且仅当 *(i.i)* $([W\mathbf{p}\, E^{\mathrm{p}}_{\rho}] \cup \Gamma)$ $\| \langle V^{\mathrm{p}}, \varnothing \rangle$ 对于任意以 $\Pi' \mid \Gamma' \vdash_{\times} UV\, \Delta'$ 为结论的子推导 ρ（来自 π）；*(i.ii)* $([W\mathbf{f}\, E^{\mathrm{f}}_{\rho}] \cup \Pi)$ $\| \langle V^{\mathrm{f}}, \varnothing \rangle$ 对于任意以 $\Pi' \mid \Gamma' \vdash_{\times} UV\, \Delta'$ 为结论的子推导 ρ（来自 π）；*(ii)* 在约束下可靠，当且仅当 *(* $[W^{\mathrm{p}}, D^{\mathrm{p}}_{\pi}] \cup \Gamma)$ $\| \langle \varnothing, S^{\mathrm{p}} \rangle$*; (ii.i)* $([W^{\mathrm{p}}, D^{\mathrm{p}}_{\pi}] \cup \Gamma)$ $\| \langle \varnothing, S^{\mathrm{p}} \rangle$*; (ii.ii)* $([W\mathbf{f}\ D^{\mathrm{f}}_{\pi}] \cup \Pi)$ $\| \langle \varnothing, S^{\mathrm{f}} \rangle$*;* *(iii)* 可靠，当且仅当它在条件下可靠且在约束下可靠。

定义 3.9。 设 $\times \in \{\mathsf{O}、\mathsf{P}\}$，且 π 是 $\Pi \mid \Gamma \vdash_{\times}^{\mathbf{ST}} \Delta$的一个G4$^{\delta}$-推导。那么，当且仅当 π 中的任意序列 $\Pi' \mid \Gamma' \vdash_{\times}^{\mathbf{S}'\mathbf{T}'} \Delta'$ 都是可靠的时， π 才是 $\Pi \mid \Gamma \vdash_{\times}^{\mathbf{ST}} \Delta$ 的一个证明；否则，它是一个旁证明。

引理 3.9。 设 $\times \in \{\mathsf{O}、\mathsf{P}\}$。安全外部弱化规则

$$\frac{\Pi \mid \Gamma \vdash_{\times}^{\frac{\mathbf{T}}{\mathbf{S}}} \Delta}{A, \Pi \mid \Gamma \vdash_{\times}^{\frac{\mathbf{T}}{\mathbf{S}}} \Delta}\, EW$$

在G4$^{\delta}$中是可容许的。

证明。 我们对证明 π of $\Pi \mid \Gamma \vdash_{\times} \mathbf{ST}\ \Delta$ 的高度进行归纳。若 $h(\pi) = 1$，则结论显然成立。否则，我们按所应用的最后一条规则分类讨论。若该规则是结构规则或逻辑规则，我们只需将归纳假设应用于其中一个前提即可得出结论。只要最后一条规则是超逻辑规则，且其前提是 $\times$标记的序列，同样的论证也成立。唯一非平凡的情形是：最后一条规则是超逻辑规则 δ，且其前提是 F 标记的序列。为得出结论，我们对每个前提应用 safe LW，然后应用 δ。□

令 $\star$ 在 f、o、p 中取值。对于任意由 $\star$ 标记公式构成的集合 Γ，我们用 $[\Gamma]^u$ 表示从 Γ 中删除标签后得到的公式集合。

引理 3.10. 安全道义蕴涵规则

$$\frac{\Pi \mid \Gamma \vdash_{\mathsf{O}}^{\mathbf{T}}_{\mathbf{S}} \Delta}{\Pi \mid \Gamma \vdash_{\mathsf{P}}^{\mathbf{T}'}_{\mathbf{S}'} \Delta}\ op$$

在 $G4^{\delta}$ 中是可容许的，其中 $[\bigcup(T^{\mathsf{O}} \cup T^{\mathsf{P}})]^u = [\bigcup((T')^{\mathsf{O}} \cup (T')^{\mathsf{P}})]^u$ 且 $[\bigcup(S^{\mathsf{O}} \cup S^{\mathsf{P}})]^u = [\bigcup((S')^{\mathsf{O}} \cup (S')^{\mathsf{P}})]^u$。

证明。 对前提的证明高度作常规归纳，并利用 $\mathcal{W}^{\mathsf{O}} \subseteq \mathcal{W}^{\mathsf{P}}$ 和 $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{P}$这一事实。□

引理 3.11. 设 $\times \in \{\mathsf{O}、\mathsf{P}\}$ 和 $\otimes \in \{\wedge, \vee, \neg\}$。$\mathsf{G4}^{\delta}$ 演算具有以下结构性质。

（i）规则 $R{\otimes}^{\times}$、 $R{\neg\otimes}^{\times}$、 $L{\wedge}$、 $L{\neg\vee}$ 和 $L{\neg\neg}$ 在$\mathsf{G4}^{\delta}$中是可逆的。（ii）规则 $E{\vee}^{\times}$ 和 $E{\neg\wedge}^{\times}$ 在$\mathsf{G4}^{\delta}$中是可容许的。（iii）带 $\times$标签的左收缩和右收缩规则在$\mathsf{G4}^{\delta}$中是可容许的。

证明。(i) 我们采用引理 3.2 和 3.4 的证明思路。(ii) 我们按引理 3.7 的证明进行。(iii) 我们采用引理 3.3 和 3.8 的证明思路。□

定理 3.9。安全切规则

$$\frac{\Pi_1 \mid \Gamma_1 \vdash_{\mathsf{F}}^{\mathbf{T_1}}_{\mathbf{S_1}} \Delta_1, A \qquad \Pi_2 \mid \Gamma_2 \vdash_{\mathsf{F}}^{\mathbf{T_2}}_{\mathbf{S_2}} \Delta_2, \neg A}{\Pi_1, \Pi_2 \mid \Gamma_2, \Gamma_1 \vdash_{\mathsf{F}}^{\mathbf{T}}_{\mathbf{S}} \Delta_1, \Delta_2}$$

在$\mathsf{G4}^{\delta}$中是可容许的。

证明。我们按定理 3.5 的证明进行，并运用引理 3.11。 □

定理 3.10。设 $\langle \mathcal{W}、\ \mathcal{D} \rangle$ 是一个默认理论，$\langle\langle \mathcal{W}^{\mathsf{O}}、\ \mathcal{O} \rangle、\ \langle \mathcal{W}^{\mathsf{P}}、\ \mathcal{P} \rangle\rangle$ 是一个规范系统。则以下陈述成立。

(i) $\mathsf{G4}^{\delta}$ 证明 $\Pi \mid \Gamma \vdash_{\mathsf{O}} \mathbf{ST}\ A$ 当且仅当 A 属于 d 对 $\langle\langle \mathcal{W} \cup \Pi, \mathcal{D} \rangle, \langle\langle \mathcal{W}^{\mathsf{O}} \cup \Gamma, \mathcal{O} \rangle, \langle \mathcal{W}^{\mathsf{P}}, \mathcal{P} \rangle\rangle\rangle$ 的至少一个扩展。(ii) $\mathsf{G4}^{\delta}$ 证明 $\Pi \mid \Gamma \vdash_{\mathsf{P}} \mathbf{ST}\ A$ 当且仅当 A 属于 d 对 $\langle\langle \mathcal{W} \cup \Pi, \mathcal{D} \rangle, \langle\langle \mathcal{W}^{\mathsf{O}}, \mathcal{O} \rangle, \langle \mathcal{W}^{\mathsf{P}} \cup \Gamma, \mathcal{P} \rangle\rangle\rangle$ 的至少一个扩展。

证明。对于每个陈述的证明，我们采用定理 3.8 的证明方法，并借助引理 2.2。□

4. 信念与规范冲突的应对：示例

本节将运用迄今介绍的证明论工具，考察广泛的道义情境。我们将展示，受控序列演算足够灵活，不仅能够刻画超越单纯义务与许可的道义概念，还能处理涉及相互冲突的规范要求的悖论式或两难情境。在某些情况下，我们会为 G4$^{\delta}$ 演算添加适当的逻辑外规则，其结论符合我们对相关问题情境的直觉判断。

为使论述重点突出，以下示例省略了对基础默认理论和规范系统的明确界定（这些细节留给读者）。在为任何 G4$^{\delta}$ 演算添加逻辑外推理规则时，我们规定同时引入其他逻辑外规则，以确保定义 3.6 中规定的闭包条件仍然成立。这一规定保证安全切规则的可容许性得以保留。为简便起见，我们还假设基础规范系统中的受约束义务和许可均为正常。

例 4.1（基于典型性的义务）。 设逻辑外规则

$$\delta_{\mathcal{D}_1}\frac{\Gamma \vdash^{\mathbf{T_1}}_{\mathbf{S_1}} p}{\Gamma \vdash^{\mathbf{T'_1}}_{\mathbf{S'_1}} q}\qquad \frac{\Gamma \vdash^{\mathbf{T_2}}_{\mathbf{S_2}} q}{\Gamma \mid \sim^{\mathbf{T'_2}}_{\mathbf{S'_2}} s}\,\delta_{\mathcal{O}_1}\qquad \frac{\Gamma \vdash^{\mathbf{T_3}}_{\mathbf{S_3}} r}{\Gamma \mid \sim^{\mathbf{T'_3}}_{\mathbf{S'_3}} t}\,\delta_{\mathcal{O}_2}$$

分别表示默认规则“如果 *Mary* 是成年人，那么她受雇，除非她是大学生”、条件义务“如果 *Mary* 受雇，她应填写年度所得税申报表”以及条件义务“如果 *Mary* 是大学生，她应支付学费”——其中

(i) $\mathbf{T'_1} = \mathbf{T_1} \cup \{\{p^{\mathsf{f}}\}\}$ *and* $\mathbf{S'_1} = \mathbf{S_1} \cup \{\{(\neg p \vee r)^{\mathsf{f}}\}\}$;
(ii) $\mathbf{T'_2} = \mathbf{T_2} \cup \{\{q^{\mathsf{f}}\}\}$ *and* $\mathbf{S'_2} = \mathbf{S_2} \cup \{\{\neg s^{\circ}\}\}$;
(iii) $\mathbf{T'_3} = \mathbf{T_3} \cup \{\{r^{\mathsf{f}}\}\}$ *and* $\mathbf{S'_3} = \mathbf{S_3} \cup \{\{\neg t^{\circ}\}\}$.

考虑以下推导：

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{ax\ \dfrac{}{p \vdash^{\varnothing}_{\varnothing} p}}{p \vdash^{\mathbf{V_1}}_{\mathbf{U_1}} q}\,\delta_{\mathcal{D}_1}}{p \mid \sim^{\mathbf{V'_1}}_{\mathbf{U'_1}} s}\,\delta_{\mathcal{O}_1}}{} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{ax\ \dfrac{}{p \vdash^{\varnothing}_{\varnothing} p}}{r, p \vdash^{\varnothing}_{\varnothing} p}\,LW}{r, p \vdash^{\mathbf{V_1}}_{\mathbf{U_1}} q}\,\delta_{\mathcal{D}_1}}{r, p \mid \sim^{\mathbf{V'_1}}_{\mathbf{U'_1}} s}\,\delta_{\mathcal{O}_1} \qquad \dfrac{\dfrac{ax\ \dfrac{}{r \vdash^{\varnothing}_{\varnothing} r}}{p, r \vdash^{\varnothing}_{\varnothing} r}\,LW}{p, r \mid \sim^{\mathbf{V_2}}_{\mathbf{U_2}} t}\,\delta_{\mathcal{O}_2}$$

其中 $\mathbf{V_1} = \{\{p^{\mathsf{p}}\}\}$、$\mathbf{U_1} = \{\{(\neg p \vee r)^{\mathsf{f}}\}\}$、$\mathbf{V'_1} = \mathbf{V_1} \cup \{\{q^{\mathsf{f}}\}\}$、$\mathbf{U'_1} = \mathbf{U_1} \cup \{\{\neg s^{\circ}\}\}$、$\mathbf{V_2} = \{\{r^{\mathsf{f}}\}\}$ 和 $\mathbf{U_2} = \{\{\neg t^{\circ}\}\}$。最左侧的推导是一个证明：如果 *Mary* 是成年人，她就默认规则下受雇——那么她就应该填写年度所得税申报表。最右侧的推导也是一个证明：如果 *Mary* 是大学生，她就应该缴纳学费。另一方面，中间的推导是一个旁证明：因此，

如果 *Mary* 是成年人并且是大学生，那么她没有义务填写年度所得税申报表。

例4.2 (实践三段论)。 令超逻辑规则和公理分别表示

$$\delta_{\mathcal{O}_1}\ \frac{}{\Pi \mid \Gamma \ {}_{\mathsf{O}}\left|\frac{\mathbf{T}}{\mathbf{S}}\right.\ \neg p} \qquad \frac{}{q\ {}_{\mathsf{F}}\left|\frac{\varnothing}{\varnothing}\right.\ \neg p}\ ax$$

无条件义务“人不应污染”和事实陈述“如果一个人骑自行车，就不会污染”——其中 $\mathbf{T} = \{\{\top^{\mathsf{f}}\}\}$ 且$\mathbf{S} = \{\{\neg\neg p^{\circ}\}\}$。在这种情形下，实践三段论可以推出骑自行车的义务这一结论。考虑以下实践三段论推理规则：

$$\frac{\begin{array}{cc}\vdots & \\ \Pi \mid \Gamma \ {}_{\mathsf{O}}\left|\frac{\mathbf{T_1}}{\mathbf{S_1}}\right.\ \Delta & \dfrac{}{A_1, \ldots, A_m\ {}_{\mathsf{F}}\left|\frac{\varnothing}{\varnothing}\right.\ \Delta}\ ax\end{array}}{\Pi \mid \Gamma \ {}_{\mathsf{O}}\left|\frac{\mathbf{T_1}}{\mathbf{S}}\right.\ A_i}\ prsyl$$

其中 $\mathbf{S} = \mathbf{S_1} \cup \{\{\neg A_i^{\circ}\}\}$, $1 \leq i \leq m$，并且侧条件为$\mathsf{G4^{pn}}$反驳 $\overline{\overline{A_1}}, \ldots, A_m \vdash \Delta$。如果我们用 $prsyl$ 扩展适用于该情形的$\mathsf{G4}^{\delta}$ 演算，就可以得到以下推导：

$$\delta_{\mathcal{O}_1}\ \frac{\dfrac{}{\varnothing \mid \ {}_{\mathsf{O}}\left|\frac{\mathbf{T}}{\mathbf{S}}\right.\ \neg p} \qquad \dfrac{}{q\ {}_{\mathsf{F}}\left|\frac{\varnothing}{\varnothing}\right.\ \neg p}\ ax}{\varnothing \mid \ {}_{\mathsf{O}}\left|\frac{\mathbf{T}}{\mathbf{S}'}\right.\ q}\ prsyl$$

其中 $\mathbf{S}' = \mathbf{S} \cup \{\{\neg q^{\circ}\}\}$。这样的推导就是一个证明。这对应于这样一个事实：如果存在不污染的义务，且骑自行车有助于避免污染，那么就存在骑自行车的义务。

例4.3 (奇泽姆悖论)。令逻辑外规则

$$\delta_{\mathcal{O}_1}\ \frac{}{\Pi \mid \Gamma \ {}_{\mathsf{O}}\left|\frac{\mathbf{T_1}}{\mathbf{S_1}}\right.\ p} \qquad \frac{\Gamma \ {}_{\mathsf{F}}\left|\frac{\mathbf{T_2}}{\mathbf{S_2}}\right.\ p}{\Gamma \mid \ {}_{\mathsf{O}}\left|\frac{\mathbf{T_2'}}{\mathbf{S_2'}}\right.\ q}\ \delta_{\mathcal{O}_2} \qquad \frac{\Gamma \ {}_{\mathsf{F}}\left|\frac{\mathbf{T_3}}{\mathbf{S_3}}\right.\ \neg p}{\Gamma \mid \ {}_{\mathsf{O}}\left|\frac{\mathbf{T_3'}}{\mathbf{S_3'}}\right.\ \neg q}\ \delta_{\mathcal{O}_3}$$

分别表示（无）条件义务：“经理应当审查预算”、“如果经理审查预算，那么她应当提交预算以供批准”以及“如果经理不审查预算，那么她不应提交预算以供批准”[8] ——其中

(i) $\mathbf{T_1} = \{\{\top^{\mathsf{f}}\}\}$ *and* $\mathbf{S_1} = \varnothing$;

(ii) $\mathbf{T_2'} = \mathbf{T_2} \cup \{\{p^{\mathsf{f}}\}\}$ *and* $\mathbf{S_2'} = \mathbf{S_2} \cup \{\{\neg q^{\circ}\}\}$;

(iii) $\mathbf{T_3'} = \mathbf{T_3} \cup \{\{\neg p^{\mathsf{f}}\}\}$ *and* $\mathbf{S_3'} = \mathbf{S_3} \cup \{\{\neg\neg q^{\circ}\}\}$.

存在一项无条件义务，其内容为 p，而后者等价于规则所表达的规范条件的否定，即 $\neg p$。这对应于这样一种情形：存在一项主要义务，而违反该义务会触发一项次级义务。直观上，尽管主要义务遭到违反，次级义务仍应成立。

为形式化这种违背义务型义务，我们要求逻辑外规则得出的带有O标签的结论与事实保持一致——也就是说，与 $\mathcal{W}$ 中的逻辑外公理、在F标签前提的推导中应用默认规则所得的结论，以及存储库中的事实假设保持一致。对于任何得出带有O标签结论的推导 π ，我们用 F_π 表示 $\mathcal{W}$、 $concl(def(\pi))$ 中的公式与存储库中的公式的合取。因此，我们根据以下条件重写$\delta_{\mathcal{O}_1}$、 $\delta_{\mathcal{O}_2}$ 和 $\delta_{\mathcal{O}_3}$ ：

(i') $\mathbf{T_1} = \{\{\top^{\mathsf{f}}\}\}$ *and* $\mathbf{S_1} = \{\{\neg F_\pi^{\circ}\}\}$;
(ii') $\mathbf{T_2'} = \mathbf{T_2} \cup \{\{p^{\mathsf{f}}\}\}$ *and* $\mathbf{S_2'} = \mathbf{S_2} \cup \{\{\neg q^{\circ}\}, \{\neg F_\pi^{\circ}\}\}$;
(iii') $\mathbf{T_3'} = \mathbf{T_3} \cup \{\{\neg p^{\mathsf{f}}\}\}$ *and* $\mathbf{S_3'} = \mathbf{S_3} \cup \{\{\neg\neg q^{\circ}\}, \{\neg F_\pi^{\circ}\}\}$

现在，考虑以下推导：

$$\dfrac{\delta_{\mathcal{O}_1}\dfrac{}{\varnothing \mid_{\mathsf{o}}^{\left|\frac{\mathbf{T_1}}{\mathbf{S_1}}\right.} p} \qquad \dfrac{\dfrac{}{\neg p \mid_{\mathsf{F}}^{\left|\frac{\mathbf{T_3}}{\mathbf{S_3}}\right.} \neg p}\, ax}{\neg p \mid_{\mathsf{o}}^{\left|\frac{\mathbf{T_3'}}{\mathbf{S_3'}}\right.} \neg q}\, \delta_{\mathcal{O}_3}}{\neg p \mid_{\mathsf{o}}^{\left|\frac{\mathbf{T}}{\mathbf{S}}\right.} p \wedge \neg q}\, R\wedge^{\mathsf{o}}$$

这样的推导是一个旁证明，而其直接子推导则是证明。因此，如果经理没有审查预算，她就不应提交预算——尽管即使没有任何事实假设，审查预算这一主要义务仍然成立。

例 4.4 （福雷斯特悖论）。令这些逻辑外规则

$$\dfrac{\delta_{\mathcal{O}_1}\dfrac{}{\Pi \mid \Gamma \mid_{\mathsf{o}}^{\left|\frac{\mathbf{T_1}}{\mathbf{S_1}}\right.} \neg p} \qquad \dfrac{\Gamma \mid_{\mathsf{F}}^{\left|\frac{\mathbf{T_2}}{\mathbf{S_2}}\right.} p}{\Gamma \mid_{\mathsf{o}}^{\left|\frac{\mathbf{T_2'}}{\mathbf{S_2'}}\right.} q}\, \delta_{\mathcal{O}_2}}{}$$

分别表示（无）条件义务“人不应杀人”和“如果某人杀了人，她就应该温和地杀死对方”[11] ——其中

(i) $\mathbf{T_1} = \{\{\top^{\mathsf{f}}\}\}$ *and* $\mathbf{S_1} = \{\{\neg\neg p^{o}\}, \{\neg F_\pi^{\circ}\}\}$;
(ii) $\mathbf{T_2'} = \mathbf{T_2} \cup \{\{p^{\mathsf{f}}\}\}$ *and* $\mathbf{S_2'} = \mathbf{S_2} \cup \{\{\neg q^{o}\}, \{\neg F_\pi^{\circ}\}\}$.

考虑以下推导：

$$\dfrac{\delta_{\mathcal{O}_1}\dfrac{}{\varnothing \mid_{\mathsf{o}}^{\left|\frac{\mathbf{T_1}}{\mathbf{S_1}}\right.} \neg p} \qquad \dfrac{\dfrac{}{p \mid_{\mathsf{F}}^{\left|\frac{\mathbf{T_2}}{\mathbf{S_2}}\right.} p}\, ax}{p \mid_{\mathsf{o}}^{\left|\frac{\mathbf{T_2'}}{\mathbf{S_2'}}\right.} q}\, \delta_{\mathcal{O}_2}}{p \mid_{\mathsf{o}}^{\left|\frac{\mathbf{T}}{\mathbf{S}}\right.} \neg p \wedge q}\, R\wedge^{\mathsf{o}}$$

其中 $\mathbf{T_2} = \mathbf{S_2} = \varnothing$、$\mathbf{T} = \mathbf{T_1'} \cup \mathbf{T_2'}$、$\mathbf{S} = \mathbf{S_1} \cup \mathbf{S_2'} \cup \{\{\neg p^{\circ}\}\}$。这样的推导是一个旁证明，而其直接子推导则是证明。这对应于这样一个事实：如果某人杀了人，她就应该温和地杀死对方——尽管在空的事实假设集下，存在一项不得杀人的无条件义务。

例 4.5 (特异性原则)。 设逻辑外规则

$$\dfrac{\delta_{\mathcal{O}_1}\dfrac{\Gamma \mid_{\mathsf{F}}^{\left|\frac{\mathbf{T_1}}{\mathbf{S_1}}\right.} p}{\Gamma \mid_{\mathsf{o}}^{\left|\frac{\mathbf{T_1'}}{\mathbf{S_1'}}\right.} \neg q} \qquad \dfrac{\Gamma \mid_{\mathsf{F}}^{\left|\frac{\mathbf{T_2}}{\mathbf{S_2}}\right.} p \qquad \Gamma \mid_{\mathsf{F}}^{\left|\frac{\mathbf{T_2'}}{\mathbf{S_2'}}\right.} r}{\Gamma \mid_{\mathsf{o}}^{\left|\frac{\mathbf{T_2''}}{\mathbf{S_2''}}\right.} q}\, \delta_{\mathcal{O}_2}}{}$$

分别表示条件义务“如果 *Fido* 是一只狗，你就不应杀死 *Fido*”和“如果 *Fido* 是一只狗，并且 *Fido* 正在攻击一个孩子，你就应当杀死 *Fido*”——其中

(i) $\mathbf{T_1'} = \mathbf{T_1} \cup \{\{p^{\mathsf{f}}\}\}$ *and* $\mathbf{S_1'} = \mathbf{S_1} \cup \{\{\neg\neg q^{\circ}\}\}$;

(ii) $\mathbf{T_2''} = \mathbf{T_2} \cup \mathbf{T_2'} \cup \{\{p^{\mathsf{f}}, r^{\mathsf{f}}\}\}$ *and* $\mathbf{S_2''} = \mathbf{S_2} \cup \mathbf{S_2'} \cup \{\{\neg q^{\circ}\}\}$.

如果 *Fido* 是一只狗，并且正在严重攻击一个孩子，那么就应当杀死它——这一义务优先于那项较不具体的义务：不能仅仅因为它是一只狗就杀死它 [43]。

为了形式化特异性原则适用的情形，我们对义务进行两两比较，并要求较具体义务的条件出现在较不具体义务中，作为事实约束。因此，我们在以下条件下重写 $\delta_{\mathcal{O}_1}$：

(i') $\mathbf{T_1'} = \mathbf{T_1} \cup \{\{p^{\mathsf{f}}\}\}$ *and* $\mathbf{S_1'} = \mathbf{S_1} \cup \{\{\neg\neg q^{\circ}\}, \{r \wedge p^{\mathsf{f}}\}\}$.

现在，考虑以下推导：

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{p \;{}_{\mathsf{F}}\left|\begin{smallmatrix}\varnothing\\ \varnothing\end{smallmatrix}\right.\; p}\,ax}{r, p \;{}_{\mathsf{F}}\left|\begin{smallmatrix}\varnothing\\ \varnothing\end{smallmatrix}\right.\; p}\,LW}{r, p \mid {}_{\mathsf{O}}\left|\begin{smallmatrix}\mathbf{V}\\ \mathbf{U}\end{smallmatrix}\right.\; \neg q}\,\delta_{\mathcal{O}_1}$$

其中 $\mathbf{V} = \{\{p^{\mathsf{f}}\}\}$ 且 $\mathbf{U} = \{\{\neg\neg q^{\circ}\}, \{r \wedge p^{\mathsf{f}}\}\}$。这样的推导构成一个旁证明。这符合我们的直觉判断：如果 *Fido* 是一只狗，并且对一个孩子构成极大危险，那么就应当杀死它，尽管仅在它是一只狗这一条件下，存在一项较弱的义务要求不得杀死它。

例4.6（扩展的福雷斯特悖论）。令逻辑外规则

$$\delta_{\mathcal{O}_1}\dfrac{}{\Pi \mid \Gamma \;{}_{\mathsf{O}}\left|\begin{smallmatrix}\mathbf{T_1}\\ \mathbf{S_1}\end{smallmatrix}\right.\; \neg p} \qquad \dfrac{\Gamma \;{}_{\mathsf{F}}\left|\begin{smallmatrix}\mathbf{T_2}\\ \mathbf{S_2}\end{smallmatrix}\right.\; p}{\Gamma \mid {}_{\mathsf{O}}\left|\begin{smallmatrix}\mathbf{T_2'}\\ \mathbf{S_2'}\end{smallmatrix}\right.\; p}\,\delta_{\mathcal{O}_2}' \qquad \dfrac{\Gamma \;{}_{\mathsf{F}}\left|\begin{smallmatrix}\mathbf{T_2}\\ \mathbf{S_2}\end{smallmatrix}\right.\; p}{\Gamma \mid {}_{\mathsf{O}}\left|\begin{smallmatrix}\mathbf{T_2'}\\ \mathbf{S_2'}\end{smallmatrix}\right.\; q}\,\delta_{\mathcal{O}_2}''$$

$$\dfrac{\Gamma \;{}_{\mathsf{F}}\left|\begin{smallmatrix}\mathbf{T_3}\\ \mathbf{S_3}\end{smallmatrix}\right.\; r}{\Gamma \mid {}_{\mathsf{O}}\left|\begin{smallmatrix}\mathbf{T_3'}\\ \mathbf{S_3'}\end{smallmatrix}\right.\; p}\,\delta_{\mathcal{O}_3}' \qquad \dfrac{\Gamma \;{}_{\mathsf{F}}\left|\begin{smallmatrix}\mathbf{T_3}\\ \mathbf{S_3}\end{smallmatrix}\right.\; r}{\Gamma \mid {}_{\mathsf{O}}\left|\begin{smallmatrix}\mathbf{T_3'}\\ \mathbf{S_3'}\end{smallmatrix}\right.\; q}\,\delta_{\mathcal{O}_3}''$$

分别表示（无）条件义务：“你的房子周围不应有围栏”、“如果你的房子周围有围栏，那么围栏应当是白色的”以及“如果你养了一只狗，那么你的房子周围应当有白色围栏” [44]——其中

(i) $\mathbf{T_1} = \{\{\top^{\mathsf{f}}\}\}$ *and* $\mathbf{S_1} = \{\{\neg\neg p^{\circ}\}, \{r^{\mathsf{f}}\}\}$;

(ii) $\mathbf{T_2'} = \mathbf{T_2} \cup \{\{p^{\mathsf{f}}\}\}$, $\mathbf{S_2'} = \mathbf{S_2} \cup \{\{\neg(p \wedge q)^{\circ}\}, \{\neg F_{\pi}^{\circ}\}\}$;

(iii) $\mathbf{T_3'} = \mathbf{T_3} \cup \{\{r^{\mathsf{f}}\}\}$, $\mathbf{S_3'} = \mathbf{S_3} \cup \{\{\neg(p \wedge q)^{\circ}\}, \{\neg F_{\pi}^{\circ}\}\}$.

请看以下推导：

$$\dfrac{\dfrac{}{r \mid {}_{\mathsf{O}}\left|\frac{\mathbf{T_1}}{\mathbf{S_1'}}\right.\ \neg p}\,\delta_{\mathcal{O}_1} \qquad \dfrac{\dfrac{}{\varnothing \mid {}_{\mathsf{O}}\left|\frac{\mathbf{T_1}}{\mathbf{S_1}}\right.\ \neg p} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{p \mid {}_{\mathsf{F}}\left|\frac{\varnothing}{\varnothing}\right.\ p}\,ax}{p \mid {}_{\mathsf{O}}\left|\frac{\mathbf{V_1}}{\mathbf{U_1}}\right.\ p}\,\delta'_{\mathcal{O}_2} \qquad \dfrac{\dfrac{}{p \mid {}_{\mathsf{F}}\left|\frac{\varnothing}{\varnothing}\right.\ p}\,ax}{p \mid {}_{\mathsf{O}}\left|\frac{\mathbf{V_1}}{\mathbf{U_1}}\right.\ q}\,\delta''_{\mathcal{O}_2}}{p \mid {}_{\mathsf{O}}\left|\frac{\mathbf{V_1}}{\mathbf{U_1}}\right.\ p \wedge q}}{p \mid {}_{\mathsf{O}}\left|\frac{\mathbf{V}}{\mathbf{U}}\right.\ \neg p \wedge (p \wedge q)}\,R\wedge^{\mathsf{O}}}$$

其中 $\mathbf{V_1} = \{\{p^{\mathsf{f}}\}\}$, $\mathbf{U_1} = \{\{\neg(p \wedge q)^{\circ}\}, \{\neg p^{\circ}\}\}$, $\mathbf{V} = \mathbf{T_1} \cup \mathbf{V_1}$ 和 $\mathbf{U} = \mathbf{S_1} \cup \mathbf{U_1}$。不难验证，这两个推导都是旁证明，而且最右侧推导中的两个子推导都是证明。这对应于这样一个事实：（a）如果你养有一只狗，那么必须设置围栏的义务会推翻在房屋周围设置围栏的无条件禁止；（b）当违反了在房屋周围设置围栏的无条件禁止时，就会触发一项次级义务，要求你设置白色围栏。

例4.7 (厄忒佛罗困境**)**。厄忒佛罗起诉自己的父亲谋杀，尽管传统信仰认为，起诉或羞辱父母是不敬神的。令逻辑外公理和规则

$$ax\,\frac{}{{}_{\mathsf{F}}\left|\frac{\varnothing}{\varnothing}\right.\ \neg p, q} \qquad \delta_{\mathcal{O}_1}\,\frac{}{\Pi \mid \Gamma\ {}_{\mathsf{O}}\left|\frac{\mathbf{T_1}}{\mathbf{S_1}}\right.\ p} \qquad \frac{}{\Pi \mid \Gamma\ {}_{\mathsf{O}}\left|\frac{\mathbf{T_2}}{\mathbf{S_2}}\right.\ \neg q}\,\delta_{\mathcal{O}_2}$$

分别表示事实陈述“如果某人起诉自己的父亲谋杀，就会羞辱他”以及无条件义务：“某人应该起诉自己的父亲谋杀”和“某人不应该羞辱自己的父亲”——其中 $\mathbf{T_1} = \mathbf{T_2} = \{\{\top^{\mathsf{f}}\}\}$,$\mathbf{S_1} = \{\{\neg p^{\circ}\}\}$ 和 $\mathbf{S_2} = \{\{\neg\neg q^{\circ}\}\}$。

要将这种两难情境形式化，我们要求逻辑外规则中带有 O 标签的结论，在事实性逻辑外公理的背景下彼此相容。因此，我们重写 $\delta_{\mathcal{O}_1}$ 和 $\delta_{\mathcal{O}_2}$，使得 $\mathbf{S_1} = \{\{\neg p^{\circ}\}, \{\neg F\circ_{\pi}\}\}$ 和 $\mathbf{S_2} = \{\{\neg\neg q^{\circ}\}, \{\neg F\circ_{\pi}\}\}$。现在，考虑以下推导：

$$\dfrac{\delta_{\mathcal{O}_1}\,\dfrac{}{\varnothing \mid {}_{\mathsf{O}}\left|\frac{\mathbf{T_1}}{\mathbf{S_1}}\right.\ p} \qquad \dfrac{}{\varnothing \mid {}_{\mathsf{O}}\left|\frac{\mathbf{T_2}}{\mathbf{S_2}}\right.\ \neg q}\,\delta_{\mathcal{O}_2}}{\varnothing \mid {}_{\mathsf{O}}\left|\frac{\mathbf{T}}{\mathbf{S}}\right.\ p \wedge \neg q}\,R\wedge^{\mathsf{O}}$$

其中 $\mathbf{T} = \mathbf{T_1} \cup \mathbf{T_2}$ 和 $\mathbf{S} = \mathbf{S_1} \cup \mathbf{S_2}$。这样的推导是一个旁证明。这对应于这样一个事实：厄忒佛罗不可能同时负有起诉父亲且不使父亲蒙羞的义务。

事实、（非）条件（受约束）义务和许可之间非平凡的相互作用，会产生一些值得注意的道义概念。在以下示例中，我们通过受控演算的视角来探讨这些非原始道义概念。在某些情况下，与 G4$^{\delta}$ 演算中的标准逻辑外规则所产生的情况不同，我们允许控制对在推导过程中缩小 规模。

例4.8（带例外的义务）。设超逻辑规则

$$\frac{\Gamma\ {}_{\mathsf{F}}\left|\frac{\mathbf{T}}{\mathbf{S}}\right.\ p}{\Gamma \mid {}_{\mathsf{O}}\left|\frac{\mathbf{T'}}{\mathbf{S'}}\right.\ \neg q}\,\delta_{\mathcal{O}'}$$

表示条件义务“如果有人吃餐食，就不应当用手指进食——前提是餐食不是芦笋”[17],，其中 $\mathbf{T}' = \mathbf{T} \cup \{\{p^{\mathsf{f}}\}\}$ 且 $\mathbf{S}' = \mathbf{S} \cup \{\{\neg\neg q^{\circ}\}, \{\neg r^{\mathsf{f}}\}\}$。考虑以下推导：

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{p \;{}_{\mathsf{F}}\left|\frac{\varnothing}{\varnothing}\right.\; p}\,ax}{r, p \;{}_{\mathsf{F}}\left|\frac{\varnothing}{\varnothing}\right.\; p}\,LW}{r, p \mid {}_{\mathsf{O}}\left|\frac{\mathbf{V}}{\mathbf{U}}\right.\; \neg q}\,\delta_{\mathcal{O}'}$$

结合 $\mathbf{V} = \{\{p^{\mathsf{f}}\}\}$ 和 $\mathbf{U} = \{\{\neg\neg q^{\circ}\}, \{\neg r^{\mathsf{f}}\}\}$。这样的推导是一个旁证明。这对应于这样一个事实：如果有人被端上芦笋，那么不许用手指进食的义务便不再适用。

示例 4.9 (违反与制裁**)**。 设超逻辑规则

$$\delta_{\mathcal{O}_1}\,\dfrac{}{\Pi \mid {}_{\mathsf{O}}\left|\frac{\mathbf{T_1}}{\mathbf{S_1}}\right.\; \neg p} \qquad \dfrac{\Pi \;{}_{\mathsf{F}}\left|\frac{\mathbf{T_2'}}{\mathbf{S_2'}}\right.\; p \qquad \Pi \mid \Gamma \;{}_{\mathsf{O}}\left|\frac{\mathbf{T_2''}}{\mathbf{S_2''}}\right.\; \neg p}{\Pi \mid \Gamma \;{}_{\mathsf{O}}\left|\frac{\mathbf{T_2}}{\mathbf{S_2}}\right.\; q}\,\delta_{\mathcal{O}_2}$$

分别表示“人不应违规停车”和“如果某人违规停车且她不应违规停车，那么她应当缴纳罚款”——其中

(i) $\mathbf{T_1} = \{\{\top^{\mathsf{f}}\}\}$ *and* $\mathbf{S_1} = \varnothing$;

(ii) $\mathbf{T_2} = \mathbf{T_2'} \cup \mathbf{T_2''} \cup \{\{p^{\mathsf{f}}\}, \{\neg p^{\circ}\}\}$ *and* $\mathbf{S_2} = \mathbf{S_2'} \cup \mathbf{S_2''} \cup \{\{\neg q^{\circ}\}\}$.

考虑以下推导：

$$\dfrac{\dfrac{\vdots}{\Pi \;{}_{\mathsf{F}}\left|\frac{\mathbf{T_2'}}{\mathbf{S_2'}}\right.\; p} \qquad \dfrac{}{\Pi \mid {}_{\mathsf{O}}\left|\frac{\mathbf{T_1}}{\mathbf{S_1}}\right.\; \neg p}\,\delta_{\mathcal{O}_1}}{\Pi \mid \Gamma \;{}_{\mathsf{O}}\left|\frac{\mathbf{T}}{\mathbf{S}}\right.\; q}\,\delta_{\mathcal{O}_2}$$

结合 $\mathbf{T} = \mathbf{T_2'} \cup \mathbf{T_1} \cup \{\{p^{\mathsf{f}}\}, \{\neg p^{\circ}\}\}$ 和 $\mathbf{S} = \mathbf{S_2'} \cup \mathbf{S_1} \cup \{\{\neg q^{\circ}\}\}$。这样的推导是一个证明。这对应于这样一个事实：如果不违规停车的义务是实际存在的，那么缴纳罚款的义务也是实际存在的。

示例 **例 4.10 (**受限自由选择许可**)**。 令外逻辑公理和规则

$$ax^{\mathsf{P}}\,\dfrac{}{\Pi \mid {}_{\mathsf{P}}\left|\frac{\varnothing}{\varnothing}\right.\; p, q, \neg r} \qquad \dfrac{}{\Pi \mid \Gamma \;{}_{\mathsf{O}}\left|\frac{\mathbf{T_1}}{\mathbf{S_1}}\right.\; r}\,\delta_{\mathcal{O}'}$$

分别表示无条件许可“允许一个人工作、休息或不付账单”和无条件义务“一个人应当付账单”——其中$\mathbf{T_1} = \{\{\top^{\mathsf{f}}\}\}$ 且$\mathbf{S_1} = \{\{\neg r^{\circ}\}\}$。

自由选择原则允许推断：只要 $A_1 \vee$，公式 A_i 就是被许可的 $\cdots \vee A_m$ 是允许的，对任何 $1 \leq i \leq m$ [46, p. 21] 都如此。即使我们只考虑未通过任何方式应用 RW 得到的析取，无限制地应用自由选择原则也会导致许可爆炸 [3]。在我们的情境中，自由选择原则确保存在一项不支付账单的许可，而支付账单的义务则蕴含支付账单的许可（因为 $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{P}$在底层规范系统中）。

对不受约束的许可应用不受限制的自由选择原则，可通过将带有 P 标签的逻辑外公理在该规则下闭包来表示

$$\frac{\Pi \mid {}_{\mathsf{P}}\left|\frac{\varnothing}{\varnothing}\right. A_1, \ldots, A_m}{\Pi \mid {}_{\mathsf{P}}\left|\frac{\varnothing}{\varnothing}\right. A_i}\, fcp$$

为阻止 不希望出现的许可，我们将标记为P的逻辑外公理按照以下规则进行闭包

$$\frac{\Pi \mid {}_{\mathsf{P}}\left|\frac{\varnothing}{\varnothing}\right. A_1, \ldots, A_m}{\Pi \mid {}_{\mathsf{P}}\left|\frac{\varnothing}{\mathbf{S}}\right. A_i}\, fcp$$

其中$\mathbf{S} = \{\{\neg O_u, \neg O_c\}\}$， O_u 是 $\mathcal{W}^{\mathsf{o}}$ 中所有公式的合取，而 O_c是 $concl(\mathcal{O})$中所有公式的合取。

例4.11 (作为例外的许可**)**。 设逻辑外规则

$$\frac{}{\Pi \mid \Gamma \ {}_{\mathsf{O}}\left|\frac{\mathbf{T}}{\mathbf{S}}\right. \neg p}\, \delta_{\mathcal{O}'}$$

表示无条件义务“人不应自杀”——其中$\mathbf{T} = \{\{\top^{\mathsf{f}}\}\}$且$\mathbf{S} = \{\{\neg\neg p^{\mathsf{o}}\}\}$。《托拉》将此类义务列为一条诫命（参见《创世记》*9:5*）。然而，一些拉比学者认为，当一个人受到改宗威胁时，自杀（或听任自己死去）是许可的（如《撒母耳记下》*1:5-10*中扫罗王的情况）。设逻辑外规则

$$\frac{}{\Pi \mid \Gamma \ {}_{\mathsf{O}}\left|\frac{\mathbf{T}}{\mathbf{S}'}\right. \neg p}\, \delta'_{\mathcal{O}'}$$

表示带例外的无条件义务“人不应自杀，除非受到改宗威胁”——其中$\mathbf{S}' = \mathbf{S} \cup \{\{q^{\mathsf{f}}\}\}$。要推导出自杀的积极许可，我们可以应用以下规则 pe

$$\frac{\dfrac{}{\varnothing \mid {}_{\mathsf{O}}\left|\frac{\mathbf{T}}{\mathbf{S}'}\right. \neg p}\, \delta'_{\mathcal{O}'}}{q \mid {}_{\mathsf{P}}\left|\frac{\mathbf{T}}{\mathbf{S}}\right. p}\, pe_{\mathcal{W}^{\mathsf{P}\star}}$$

与 $\mathcal{W}^{\mathsf{P}\star} = \left\{ \dfrac{\top}{\neg p} : \top \right\}$。

例4.12 (动态积极许可**)**。 动态积极许可这一概念在 [25]中引入：如果在 A 的语境中禁止B 会阻碍某种明确（静态）许可的行使，从而导致不一致性，那么在条件 A 下， B 就是动态许可的。令逻辑外规则

$$\delta_{\mathcal{P}_1}\frac{}{\Pi \mid \Gamma \ {}_{\mathsf{P}}\left|\frac{\mathbf{T_1}}{\mathbf{S_1}}\right. p} \qquad \frac{\Pi \mid \Gamma \ {}_{\mathsf{O}}\left|\frac{\mathbf{T_2}}{\mathbf{S_2}}\right. \neg q}{\Pi \mid \Gamma \ {}_{\mathsf{O}}\left|\frac{\mathbf{T'_2}}{\mathbf{S'_2}}\right. \neg p}\, \delta_{\mathcal{O}_1}$$

分别表示无条件许可“人们可以自由表达自己”和条件义务“如果人们不应印制描绘穆罕默德的漫画，那么人们就不应自由表达自己”——其中

(i) $\mathbf{T_1} = \{\{\top^{\mathsf{f}}\}\}$ 且 $\mathbf{S_1} = \{\{\neg p^{\mathsf{p}}\}\}$; (ii) $\mathbf{T'_2} = \mathbf{T_2} \cup \{\{\neg q^{\mathsf{o}}\}\}$ 且 $\mathbf{S'_2} = \mathbf{S_2} \cup \{\{\neg\neg p^{\mathsf{o}}\}\}$。39

假设向 G4$^{\delta}$ 中添加超逻辑规则

$$\dfrac{}{\Pi \mid \Gamma \;{}_{\mathsf{O}}\Big|\dfrac{\mathbf{V}}{\mathbf{U}}\; \neg q}\,\delta_{\mathcal{O}_2}$$

表示无条件义务“人不应刊印描绘穆罕默德的漫画”——其中 $\mathbf{V} = \{\{\top^{\mathsf{f}}\}\}$ 和 $\mathbf{U} = \{\{\neg\neg q^{\mathsf{o}}\}\}$。推导出刊印描绘穆罕默德的漫画这一动态许可，对应于以下对适当推理规则 dp 的应用：

$$\dfrac{\delta_{\mathcal{P}_1}\dfrac{}{\varnothing \mid {}_{\mathsf{P}}\Big|\dfrac{\mathbf{T_1}}{\mathbf{S_1}}\; p} \qquad \dfrac{\dfrac{}{\varnothing \mid {}_{\mathsf{O}}\Big|\dfrac{\mathbf{V}}{\mathbf{U}}\; \neg q}\,\delta_{\mathcal{O}_2}}{\varnothing \mid {}_{\mathsf{O}}\Big|\dfrac{\mathbf{V}'}{\mathbf{U}'}\; \neg p}\,\delta_{\mathcal{O}_1}}{\varnothing \mid {}_{\mathsf{P}}\Big|\dfrac{\mathbf{T}}{\mathbf{S}}\; q}\,dp_{\mathcal{W}^{\mathsf{P}\star}}$$

其中 $\mathbf{V}' = \mathbf{V} \cup \{\{\neg q^{\mathsf{o}}\}\}$，$\mathbf{U}' = \mathbf{U} \cup \{\{\neg\neg p^{\mathsf{o}}\}\}$，$\mathbf{T} = \mathbf{T_1} \cup \mathbf{V}$，$\mathbf{S} = \mathbf{S_1}$ 以及 $\mathcal{W}^{\mathsf{P}\star} = \left\{ \dfrac{\top}{q} : \dfrac{\top}{\neg\neg q} \right\}$。注意，$\mathbf{T}$ 并非 $\mathbf{T_1} \cup \mathbf{V}'$，$\mathbf{S}$ 也并非 $\mathbf{S_1} \cup \mathbf{U}'$。换言之，该 dp 应用会导致从 $\mathbf{T_1} \cup \overline{\mathbf{V}'}$ 和 $\mathbf{S_1} \cup \mathbf{U}'$ 中移除若干公式集合。

例4.13（塔木德式 *Qal wa-h. omer*）。令这些逻辑外规则

$$\dfrac{\delta_{\mathcal{O}_1}\dfrac{}{\Pi \mid {}_{\mathsf{O}}\Big|\dfrac{\mathbf{T_1}}{\mathbf{S_1}}\; \neg p} \qquad \dfrac{}{\Pi \mid {}_{\mathsf{P}}\Big|\dfrac{\mathbf{T_2}}{\mathbf{S_2}}\; q}\,\delta_{\mathcal{P}_1} \qquad \dfrac{\Pi \mid \Gamma \;{}_{\mathsf{P}}\Big|\dfrac{\mathbf{T_3}}{\mathbf{S_3}}\; q}{\Pi \mid \Gamma \;{}_{\mathsf{P}}\Big|\dfrac{\mathbf{T'_3}}{\mathbf{S'_3}}\; p}\,\delta_{\mathcal{P}_2}$$

分别表示无条件义务“人不应娶其女儿的女儿”、无条件许可“人可以娶自己的女儿”以及条件许可“如果人可以娶自己的女儿，那么人可以娶其女儿的女儿”——其中

(i) $\mathbf{T_1} = \{\{\top^{\mathsf{o}}\}\}$ 且 $\mathbf{S_1} = \{\{\neg\neg p^{\mathsf{o}}\}\}$；$(ii)$ $\mathbf{T_2} = \{\{\top^{\mathsf{p}}\}\}$ 且 $\mathbf{S_2} = \{\{\neg q^{\mathsf{p}}\}\}$；$(iii)$ $\mathbf{T'_3} = \mathbf{T_3} \cup \{\{q^{\mathsf{p}}\}\}$ 且 $\mathbf{S'_3} = \mathbf{S_3} \cup \{\{\neg p^{\mathsf{p}}\}\}$。

《塔木德》原则 Qal wa-h.omer 允许推导出无条件义务“人不应娶自己的女儿” [41, p. 223]。这对应于以下适当推理规则的应用 qw：

$$\dfrac{\delta_{\mathcal{O}_1}\dfrac{}{\varnothing \mid {}_{\mathsf{O}}\Big|\dfrac{\mathbf{T_1}}{\mathbf{S_1}}\; \neg p} \qquad \dfrac{\dfrac{}{\varnothing \mid {}_{\mathsf{P}}\Big|\dfrac{\mathbf{T_2}}{\mathbf{S_2}}\; q}\,\delta_{\mathcal{P}_1}}{\varnothing \mid {}_{\mathsf{P}}\Big|\dfrac{\mathbf{T'_2}}{\mathbf{S'_2}}\; p}\,\delta_{\mathcal{P}_2}}{\varnothing \mid {}_{\mathsf{O}}\Big|\dfrac{\mathbf{T}}{\mathbf{S}}\; \neg q}\,qw_{\mathcal{W}^{\mathsf{o}\star}}$$

其中 $\mathbf{T'_2} = \mathbf{T_2} \cup \{\{q^{\mathsf{p}}\}\}$，$\mathbf{S'_2} = \mathbf{S_2} \cup \{\{\neg p^{\mathsf{p}}\}\}$，$\mathbf{T} = \mathbf{T_1}, \mathbf{S} = \{\{\neg\neg q^{\mathsf{o}}\}\}$ 且 $\mathcal{W}^{\mathsf{o}\star} = \left\{ \dfrac{\top}{\neg q} : \dfrac{\top}{\overline{\neg q}} \right\}$。

控制对可以进一步细化，以处理涉及无约束弱化义务的棘手情形。对称控制对是如下形式的结构：

$$\langle \mathbf{T}, \langle \mathbf{S}, \mathbf{S}' \rangle \rangle$$

其中，$\mathbf{T}$ 收集条件集，$\mathbf{S}$收集出现在前件位置的公式的约束集，而$\mathbf{S}'$ 收集出现在后件位置的公式的约束集。现在，我们可以按如下方式将相容性和可靠性的概念调整到这种对称设置中。

定义 4.1. 设 $\langle \mathbf{T}\ \mathfrak{S}\rangle$ 为一个对称控制对，其中 $\mathfrak{S} = \langle \mathbf{S}、\mathbf{S}'\rangle$。

(i) Δ 与 $\langle T\ \mathfrak{S}\rangle$ 兼容，当且仅当 $G4^{\mathsf{pn}}$ 对每个 ~~A~~ $\in \bigcup S'$ 都予以驳斥。*(ii)* $\Pi \mid \Gamma\ O\ \mathfrak{S}T\ \Delta$ 是可靠的，当且仅当 $\Pi \mid \Gamma\ O\ ST\ \Delta$ 是可靠的，且 Δ 与 S'兼容。*(iii)* $G4^{\delta}$推导 $\Pi \mid \Gamma\ O\ \mathfrak{S}T\ \Delta$ 是一个证明，当且仅当结论是可靠的，并且移除 S' 及其沿 π的祖先后，π 是一个证明。

我们以对称控制对的以下应用结束本节 s.

例 4.14 (罗斯悖论)。 设外逻辑公理和规则

$$\delta_{\mathcal{O}_1}\ \frac{}{\Pi \mid \Gamma\ \mathsf{o}\left|\frac{\mathbf{T_1}}{\mathbf{S_1}}\ p\right.} \qquad \delta_{\mathcal{O}_1}\ \frac{}{\Pi \mid \Gamma\ \mathsf{o}\left|\frac{\mathbf{T_2}}{\mathbf{S_2}}\ \neg q\right.} \qquad \frac{}{r\ \mathsf{F}\left|\frac{\varnothing}{\varnothing}\ q\right.}\ ax$$

分别代表无条件义务“人应当寄出信件”、“人不应当销毁信件”和事实陈述“如果有人焚烧信件，她就会销毁信件”——其中 $\mathbf{T_1} = \mathbf{T_2} = \{\{\top^{\circ}\}\}$、$\mathbf{S_1} = \{\{\neg p^{\circ}\}\}$ 和 $\mathbf{S_2} = \{\{\neg\neg q^{\circ}\}\}$。

在经典逻辑中，可以从“某人寄出这封信”推导出“某人寄出这封信或烧掉这封信”。义务在经典后承下封闭，因而会产生无条件义务“某人应该寄出这封信或烧掉它”。这意味着，寄出这封信的义务会蕴含一项可以通过烧掉信来履行的义务——这种结果似乎并不可取 [40]。

为避免这种情形并排除不理想的右弱化实例，我们改写 $\delta_{\mathcal{O}_1}$，将$\mathbf{S_1}$ 替换为 $\mathfrak{S}_1 = \langle \mathbf{S_1},\ \{\{p \vee q^{\circ}\}\}\rangle$。因此，以下推导是一个旁证明：

$$\dfrac{\dfrac{}{\varnothing \mid \mathsf{o}\left|\frac{\mathbf{T_1}}{\mathfrak{S}_1}\ p\right.}\ \delta_{\mathcal{O}_1}}{\varnothing \mid \mathsf{o}\left|\frac{\mathbf{T_1}}{\mathfrak{S}_1}\ p, q\right.}\ LW^{\mathsf{o}}$$

例 4.15 (善良的撒玛利亚人悖论)。 设以下逻辑外规则 s

$$\delta'_{\mathcal{O}_1}\ \frac{}{\Pi \mid \Gamma\ \mathsf{o}\left|\frac{\mathbf{T_1}}{\mathfrak{S}_1}\ p\right.} \qquad \frac{}{\Pi \mid \Gamma\ \mathsf{o}\left|\frac{\mathbf{T_1}}{\mathfrak{S}_1}\ q\right.}\ \delta''_{\mathcal{O}_1}$$

表示无条件义务“撒玛利亚人应该帮助被史密斯抢劫的琼斯”，并设逻辑外规则

$$\frac{}{\Pi \mid \Gamma\ \mathsf{o}\left|\frac{\mathbf{T_2}}{\mathfrak{S}_2}\ \neg q\right.}\ \delta_{\mathcal{O}_2}$$

表示无条件义务“史密斯不应抢劫琼斯” [38] – 其中 $\mathbf{T_1} = \mathbf{T_2} = \{\{\top^{\mathsf{f}}\}\}$, $\mathfrak{S}_1 = \langle\{\{\neg(p \wedge q)^{\circ}\}\}, \{\{q^{\circ}\}\}\rangle$ 以及 $\mathfrak{S}_2 = \langle\{\{\neg\neg q^{\circ}\}\}, \{\{q^{\circ}\}\}\rangle$。考虑以下推导：

$$\dfrac{\dfrac{}{\varnothing \mid_{\mathsf{O}}\overset{|\mathbf{T_1}}{\mathfrak{S}_1}\ p}\,\delta'_{\mathfrak{O}_1} \qquad \dfrac{}{\varnothing \mid_{\mathsf{O}}\overset{|\mathbf{T_1}}{\mathfrak{S}_1}\ q}\,\delta''_{\mathfrak{O}_1}}{\varnothing \mid_{\mathsf{O}}\overset{|\mathbf{T_1}}{\mathfrak{S}_1}\ p \wedge q}$$

这样的推导是一个证明，而最左侧的直接子推导则是一个旁证明。这反映了这样一个事实：帮助受害者的义务并不意味着受害者的存在本身就是一项义务。

我们在本节最后指出，对称控制对可用于贯彻“无空洞义务”这一元伦理原则。根据这一原则，重言式永远不是义务，矛盾式永远不会被禁止 [45]。事实上，我们可以设计不含 O 标记的恒等公理的 G4$^{\delta}$ 演算，并规定每个带 O 标记的序列都将一个任意重言式构成的单元素集合作为公式处于后件位置时的约束之一。这样一来，这些 G4$^{\delta}$ 演算便能刻画道义推理，同时不允许不受约束的右弱化 [42, 28]。

5. 总结

本文提出了一个基于受控序列演算、适用于默认规则、义务和许可的统一证明论框架。我们定义了道义扩展，它与默认规则的 Łukasiewicz 扩展相对应，并推广了输入／输出逻辑中的输出族。我们证明，受控演算具有收缩和非解析切，呈现弱形式的解析性，并且相对于以 Łukasiewicz 扩展和道义扩展为基础的可置信后承具有强完备性。此外，它们还支持累积传递性和谨慎单调性的弱版本，从而为道义推理和非单调推理提供了统一而稳健的基础。

由此展现出若干研究方向。首先，可以利用控制集将次协调推理的特定实例嵌入经典基底逻辑 [29]。此外，该框架的自然扩展似乎能够在非经典基础上刻画默认道义推理，尤其是基于**FDE**的逻辑 [32]。

设计 G4$^{\delta}$ 演算将很有意义：其中的逻辑外规则可将任意辅助公式从前提的后件传递到结论的后件，从而以统一且模块化的方式处理析取式默认推理和道义推理 [33]。通过适当调整推出符号标记和可靠性的概念，也应当能够为受约束的输入／输出逻辑构造 G4$^{\delta}$ 演算。不同于为输入／输出逻辑开发的混合超序列演算 [33], ，这些 G4$^{\delta}$ 演算将具有强充分性。

此外，对于被理解为反向义务的禁止，某些语境需要更精细的处理，例如塔木德义务逻辑中的情形 [1]。因此，将明确禁止纳入规范系统的定义本身，并引入专用的带标签的推出符号$_{\text{PR}}$，以构建强完备的 G4$^{\delta}$ 演算，将特别值得探讨。随后，可以加入涉及 $_{\text{PR}}$ 的其他逻辑外规则，以刻画禁止与其他道义概念之间错综复杂的相互作用。

此外，探讨 G4$^{\delta}$ 演算能否用于处理优先级默认规则和规范推理 [7, 18, 37]，也很有价值。由于优先级 m-和d-扩展缺少半单调性这一关键性质，要定义一种可靠的 G4$^{\delta}$-证明，使其能够追踪优先级轻信后承，或许需要采用恰当的<款式 id='6'>假设可靠性 概念——即在假定某些公式不可证的情况下仍保持可靠。

参考文献

[1] Michael Abraham、Dov M. Gabbay 和 Uri Schild。塔木德义务逻辑中的义务与禁止。《Artificial Intelligence and Law》，19(117)，2011。[2] Grigoris Antoniou。《非单调推理》。MIT出版社，1997。[3]Nicholas Asher 和 Daniel Bonevac。自由选择许可是强许可。《Synthese》，145(3):303–323，2005。[4] Arnon Avron。Gentzen型系统、归结与语义表。《Journal of Automated Reasoning》，10(2):265–281，1993。[5]Giovanni Boniolo、Marcello D'Agostino、Mario Piazza 和 Gabriele Pulcini。非单调交互逻辑。《Journal of Applied Logic》，11(1):52–62，2013。[6] Giovanni Boniolo、Marcello D'Agostino、Mario Piazza 和 Gabriele Pulcini。将逻辑纳入分子生物学的工具箱。《European Journal for Philosophy of Science》，5(3):399–417，2015。[7] Gerhard Brewka。默认逻辑中的优先级推理。载于 B. Hayes-Roth 和 R. E. Korf 编，《第12届全国人工智能会议论文集》，第940–945页。AAAI Press，1995。[8] Roderick M. Chisholm。违反义务命令与道义逻辑。《Analysis》，24:33–36，1963。[9] Agata Ciabattoni 和 Matteo Tesi。Åqvist系统的序列与超序列之比较。载于 C. Benzmüller、M.J. Heule 和 R.A. Schmidt 编，《国际自动推理联合会议：IJCAR 2024论文集》，第176–195页。施普林格出版社，2024。[10] Marcello D'Agostino、Mario Piazza 和 Gabriele Pulcini。受控单调性的逻辑演算。《Journal of Applied Logic》，12(4):558–569，2014。[11] James W. Forrester。《温和的谋杀，或副词式的撒玛利亚人》。《Journal of Philosophy》，81:193–196，1984。[12] Allan Gibbard。《明智的选择，恰当的感受》。《Clarendon Press》，1990。[13] Valentin Goranko。模态逻辑中的反驳系统。《Studia Logica》，53(2):299–324，1994。[14] Valentin Goranko、Gabriele Pulcini 和 Tomasz Skura。反驳系统：概述及其在哲学逻辑中的一些应用。载于 F. Liu 和 H. Ono 编，《亚洲逻辑：Studia Logica丛书》，第173–197页。Springer Berlin Heidelberg，2020。[15] Risto Hilpinen 和 Paul McNamara。道义逻辑：历史回顾与导论。《道义逻辑与规范系统手册》，1:3–136，2013。[16] John F Horty。以非单调逻辑为基础的道义逻辑。《Annals of Mathematics and Artificial Intelligence》，9(1):69–91，1993。[17] John F. Horty。道义逻辑的非单调基础。载于 D. Nute 编，《可废止义务逻辑》，第17–44页。Kluwer，1997。[18] John F. Horty。带优先级的默认规则。《哲学逻辑杂志》，36(4):367–413，2007。[19] John F. Horty。《作为默认规则的理由》。牛津大学出版社，牛津，2012。[20] Stephen Kleene。《数理逻辑》。John Wiley and Sons，1967。[21] Witold Łukaszewicz。关于默认逻辑的思考：一种替代方法。《Computational Intelligence》，4(1):1–16，1988。

[22] David Makinson。非单调推理的一般模式。载于 D. M. Gabbay、C. J. Hogger 和 J. A. Robinson 编，《人工智能与逻辑编程中的逻辑手册》第3卷，第35–110页。牛津大学出版社，1994。[23] David Makinson 和 Leendert van der Torre。输入／输出逻辑。《哲学逻辑杂志》，29:383–408，2000。[24] David Makinson 和 Leendert van der Torre。输入/输出逻辑的约束。《哲学逻辑杂志》，30:155–185，2001。[25] David Makinson 和 Leendert van der Torre。输入/输出视角下的许可。《哲学逻辑杂志》，32:391–416，2003。[26] Wiktor W. Marek 和 Mirosław Truszczynski。《非单调逻辑：依赖语境的推理》。施普林格出版社，1993。[27] Eugenio Orlandelli。道义逻辑中的证明分析。载于 F. Cariani、D. Grossi、J. Meheus 和 X. Parent 编，《道义逻辑与规范系统：DEON 2014论文集》，第139–148页。施普林格出版社，2014。[28] Xavier Parent 和 Leendert van der Torre。“唱歌与跳舞！”——无需弱化的输入／输出逻辑。载于《道义逻辑与规范系统：DEON 2014论文集》，第149–165页，2014。[29] Mario Piazza 和 Gabriele Pulcini。通过语境敏感性统一逻辑。《逻辑与计算杂志》，27(1):21–40，2017。[30] Mario Piazza 和 Gabriele Pulcini。经典逻辑的分数语义。《符号逻辑评论》，13(4):810–828，2020。[31] Mario Piazza 和 Andrea Sabatini。命题默认逻辑的超序列演算。《ACM计算逻辑汇刊》，26:1–36，2025。[32] Mario Piazza 和 Andrea Sabatini。论反切规则：经典逻辑、基于FDE的逻辑与直觉主义逻辑。《The Australasian Journal of Logic》，即将出版。[33] Mario Piazza 和 Andrea Sabatini。通过超序列构建输入／输出逻辑与默认逻辑的统一框架。审稿中。[34] Mario Piazza 和 Matteo Tesi。包含外逻辑信息的解析性。《逻辑与计算杂志》，第1–31页，2024。[35] Mario Piazza 和 Matteo Tesi。逻辑框架中的例外与典型性。《逻辑、语言与信息杂志》，34:341–369，2025。[36] Arthur N. Prior。逃避主义：伦理学的逻辑基础。载于 A. I. Melden 编，《道德哲学论文集》，第135–146页。华盛顿大学出版社，1958。[37] Frederik Van De Putte 和 Christian Straßer。优先级规范推理的逻辑。《逻辑与计算杂志》，23(3):563–583，2013。[38] Lennart Åqvist。善良的撒玛利亚人、违反义务命令与认识义务。《Noûs》，1(4):361–379，1967。[39] Raymond Reiter。默认推理的逻辑。《人工智能》，13(1-2):81–132，1980。[40] Alf Ross。命令与逻辑。《Theoria》，7:53–71，1941。[41] Adin Steinsaltz。《塔木德精要》。基础图书出版社，1976。[42] Audun Stolpe。规范与规范系统动态。博士论文，卑尔根大学，2008。[43] Leendert van der Torre 和 Yao-Hua Tan。取消与遮蔽：可废止义务逻辑中的两种可废止性。载于 C. S. Mellish 编，《国际人工智能联合会议：IJCAI 1995论文集》，第1525–1532页。Morgan Kaufmann，1995。[44] Leendert van der Torre 和 Yao-Hua Tan。可废止义务逻辑中可废止性的多种面貌。载于 D. Nute 编，《可废止义务逻辑》，第79–121页。Kluwer，1997。[45] Georg H

. von Wright . 道义逻辑 . *Mind*, 60:1–15, 1951.

[46] Georg H.vonWright.《义务逻辑与行动一般理论论纲》。North-Holland Publishing Company，1968。

比萨高等师范学校，文学与哲学系电子邮箱地址，M. Piazza：
mario.piazza@sns.it

比萨高等师范学校，文学与哲学系电子邮箱地址，A. Sabatini：
andrea.sabatini@sns.it