arXiv:2512.18862v1 [math.HO] 21 Dec 2025

克劳迪奥·蒙特威尔第音乐中对位与转调的代数对称分析

Octavio A. Agustín-Aquino[1][0000−0002−0556−6236] 和 Brandon J. Curiel-López[1]

墨西哥米斯特克理工大学，墨西哥 octavioalberto@mixteco.utm.mx, culb990302@gs.utm.mx

摘要。 本文探讨克劳迪奥·蒙特威尔第音乐中的若干结构创新，这些创新标志着从文艺复兴时期的第一实践 向巴洛克时期第二实践的关键转变。为使这一分析形式化，我们采用 Mazzola的基于对称性的框架来分析对位，并运用量子/对偶模型研究调性转调。研究结果表明，这些数学结构为蒙特威尔第的作曲选择提供了严谨的验证，揭示出其和声与对位处理背后的内在逻辑，而这些处理曾受到 Giovanni Artusi 等同时代人的严厉批评。通过量化作曲简约性和转调等概念，我们旨在为数学音乐学这一跨学科领域提供精确的分析视角，弥合历史阐释与形式理论之间的鸿沟。

关键词： 蒙特威尔第 · 对位 · 转调 · 对称 · PLR/TI对偶性

1 引言：蒙特威尔第与音乐理论的数学转向

克劳迪奥·蒙特威尔第（1567—1643）的创作处于西方音乐史的交汇点，标志着音乐从文艺复兴时期向巴洛克时期的过渡。这一时代的特征，是第一实践与新兴的第二实践之间激烈的风格论争：前者是由严格的对位规则所规范的既定复调风格，后者则是一种将文本表达置于某些形式惯例之上的新风格。本文将展示，Mazzola关于对位与和声转调的理论体系以及 PLR/TI对偶性，能够解释蒙特威尔第对位与和声语言的某些特征。

2 音乐学背景：巴洛克时期黎明之际的蒙特威尔第

要充分领会蒙特威尔第创新的意义，以及用于描述这些创新的数学模型，必须了解当时的历史

与理论背景，即16世纪末至17世纪初的情况。这一时期以丰富的复调音乐传统为特征，同时，既有的作曲规则与对更强表现力的需求之间的矛盾日益加剧。

蒙特威尔第是其时代主要体裁的大师：弥撒曲和经文歌等宗教作品、世俗牧歌，以及当时正在兴起的歌剧体裁。这种多才多艺意义重大：他的那些饱受争议的技法并非单纯的实验，而是一位充分掌握传统实践的作曲家经过深思熟虑的选择。正是对第一实践 的驾驭，使他偏离这一传统的做法更具分量。我们的分析也体现了这种广度：我们考察他在牧歌、经文歌和弥撒曲创作中的对位，而转调分析则聚焦于《奥菲欧》（*1607*年） [8], ；在这部作品中，戏剧叙事的要求促使他的和声语言最大程度地偏离传统，也招致了最尖锐的批评。

2.1 第一实践 与第二实践 之争

蒙特威尔第所处时代的根本冲突，是第一实践 （first practice）与第二实践 （second practice）之间的风格分裂。

1. 第一实践，又称古风格，是文艺复兴复调音乐的既定风格。蒙特威尔第的兄弟 Giulio Cesare 为其辩护，并将其定义为一种“并非把和声视为受支配者，而是视为主宰者；并非仆人，而是言辞女主人的实践”。这种风格将严格的对位与和声规则置于首位。2. 第二实践 则是蒙特威尔第开创的一种新颖而富于表现力的风格。其指导原则凝练在他本人的格言中：“让词语成为和声的女主人，而不是和声的奴隶。”这种方式允许对位与不协和的处理更加自由，从而更好地传达文本的情感内涵。

这种新风格的一位批评者是理论家 Giovanni Artusi，他谴责了蒙特威尔第的和声创新。阿图西特别提到了牧歌《哦，米尔蒂洛》；他在作品出版前听过它，并将其视为创作失败的例证。他认为，调性从 B降音转为 B还原音又回到原调，是一种“反常”且“幼稚的错误”。这场论争构成了蒙特威尔第整个职业生涯所面临的核心张力：他在寻求更强表现力的同时，系统地拓展公认的音乐逻辑边界。

3 Mazzola的对位模型

传统对位理论由 Johann Joseph Fux 在其 1725年 著作《通往帕纳索斯山的阶梯》中系统阐述 [3], ，依靠一套规定协和音程之间进行方式的规范性规则。本节介绍 Guerino Mazzola [5, 2] 基于对称变换建立的模型，该模型在以代数对称性为基础的形式系统中重新诠释了这些规则。该模型使

我们能够更精确、定量地分析对位运动，为考察蒙特威尔第技法的内在逻辑提供了有力工具。

十二平均律音阶的十二个音由模 12 整数环表示， $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$。音程是两个音之间的距离，因此也是 $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ 的一个元素。这里需要指出，尽管十二平均律通常被视为相较于17世纪初较晚出现的发展，但近期学术研究表明，在蒙特威尔第所处的时代，十二平均律已在器乐中得到倡导并付诸实践[10]。无论如何，尽管蒙特威尔第时代的调律系统各不相同，仍可以在十二平均律（或至少是良好律制）的框架内解读他的音乐。

十二种可能的音程被划分为一组协和音程，

$$K = \{0, 3, 4, 7, 8, 9\}$$

分别对应同度、小三度／大三度、纯五度、小六度／大六度；另一组则是与之互补的不协和音程，

$$D = \{1, 2, 5, 6, 10, 11\}.$$

$\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ 的这一划分是一个强二分，这意味着存在一个唯一的仿射变换，称为极性，它将协和音程集合映射到不协和音程集合，反之亦然。对于标准的协和音程集合 K，这一唯一的极性是函数

$$\begin{aligned} p : \mathbb{Z}/12\mathbb{Z} &\to \mathbb{Z}/12\mathbb{Z} \\ x &\mapsto 5x + 2. \end{aligned}$$

这一代数性质确立了协和与不协和之间一种基本的对称关系。

该模型将这些概念扩展到二声部对位中的音程运动分析。因此，二声部对位可用 $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ 上的对偶数来建模，记作 $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}[\epsilon]$。对偶数 $x + \epsilon.y \in \mathbb{Z}/12\mathbb{Z}[\epsilon]$ 表示一个对位音程，其中 y 是高声部（高声部 </style ）相对于固定声部（固定旋律</style）音高 x 的音程。

因此，所有协和音程的集合为

$$K[\epsilon] = \{x + \epsilon.k : x \in \mathbb{Z}/12\mathbb{Z}, k \in K\}.$$

现在，我们将 对称变换 引入为空间 $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}[\epsilon]$ 上的仿射变换，即，

$$\begin{aligned} g : \mathbb{Z}/12\mathbb{Z}[\epsilon] &\to \mathbb{Z}/12\mathbb{Z}[\epsilon], \\ (x + \epsilon.y) &\mapsto (u_1 + \epsilon.v_1)(x + \epsilon.y) + (u_2 + \epsilon.v_2) \end{aligned}$$

其中 $u_1 + \epsilon.v_1 \in \mathbb{Z}/12\mathbb{Z}[\epsilon]^\times$ 和 $u_2 + \epsilon.v_2 \in \mathbb{Z}/12\mathbb{Z}[\epsilon]$。特别是，存在一种对称变换，它是二分（$K[\epsilon]/D[\epsilon]$）的诱导极性，即

$$e^{\epsilon.2} \circ 5.$$

因此，我们可以将协和音程 $\xi \in K[\epsilon]$的对位对称 定义为满足以下三个条件的 g：

1. $\xi \in K[\epsilon] \cap g(D[\epsilon])$，2. p是（$gK[\epsilon]/gD[\epsilon]$）的极性，3. g 在满足前两个条件的对称变换中，使 $gK[\epsilon] \cap K[\epsilon]$ 的基数最大化。

该模型体现了一种音乐理念：在特定的创作时刻，并非所有协和进行都同样理想；对称变换会优先选择某个进行子集，从而将作曲家此刻的意图或风格形式化。

可容许后继是一个协和音程 η，根据特定的对位对称g，它是从给定协和音程 ξ出发所允许的下一步。

需要注意的是，对称变换 g 始终可以从对称变换子群 H 中选取，其形式为

$$e^{\epsilon.\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}} \circ \mathbb{Z}/12\mathbb{Z}[\epsilon]^{\times}.$$

因此，我们将该群作为自然的框架，用来衡量有多少对称变换参与了可容许的进行。此外，希希特算法会给出具体的对称变换，以及每种协和音所允许的后继数量。小对位定理指出，任何协和音至少有 42 个允许的后继 [2]。

4 调性转调的数学模型

转调，即从一个调（或调性）转到另一个调，是构建大型音乐结构与叙事的基础。它是西方音乐中和声发展的驱动力。本节介绍两种互为补充的数学模型，用以形式化调性转调的原理，并以让-菲利普·拉莫和阿诺德·勋伯格等理论家最初探讨的基础概念为依据 [13]。

4.1 Mazzola 的转调量子模型

由 Guerino Mazzola 提出的量子模型，将调性之间转换的过程形式化为一种离散且可量化的事件。

一种调性被定义为由构建在音阶各音级上的七个三和弦（三音和弦）覆盖音级空间 $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$。例如，C大调调性由以下七个和弦组成

$$\{C, dm, em, F, G, am, B^{\circ}\}.$$

对于一般调性，我们将用罗马数字表示其音级，即：

$$\{I, II, III, IV, V, VI, VII\}.$$

A 终止式集合是一组能够唯一确定某一调性的和弦。如果一组和弦只出现在一种调性中，并且没有更小的子集具备这一性质，那么它就是一个终止式。

大调音阶有五个这样的极小集合，即:

$$k_1 = \{II, V\}, k_2 = \{II, III\}, k_3 = \{III, IV\}, k_4 = \{IV, V\}, k_5 = \{VII\}.$$

A调调制器 是一种对称变换 m，它将起始调性 S 映射到目标调性 T（即， $m(S) = T$）。

A调调制量子 M 是执行转调所需的最小音符集合。它是满足以下三个条件的最小集合:

1. 它在调制器 m 作用下保持不变（即， $m(M) = M$）。2. 它包含目标调性中终止式 k 的所有音符。3. 它与目标调性 T 的交集 $m \cap T$ 是刚性的（没有非平凡的对称变换）。

起始调性和目标调性共有、且属于该量子 M 的和弦，就是能够实现平滑过渡的枢纽和弦 。

示例*1*。 对于从 C 到 D 、采用 $k_4 = \{IV_D, V_D\}$终止式的转调，我们有调制器 $m = e^6 \cdot -1$。调制量子为

$$M = \{1, 2, 4, 5, 7, 9, 11\} = II_C \cup III_C \cup V_C \cup VII_C \cup \underbrace{II_D \cup VII_D \cup IV_D \cup V_D}_{\text{Pivots}}.$$

事实上，由于 $C = \{0, 2, 4, 5, 7, 9, 11\}$ 和 $D = \{2, 4, 6, 7, 9, 11, 1\}$，我们有 $M \cap D = \{1, 2, 4, 7, 9, 11\}$；我们知道它是刚性的，因为它恰好构成一个强二分。

示例*2*。 主音为 G的大调音阶是

$$G = \{7, 9, 11, 0, 2, 4, 6\}.$$

对于从 C 到 G 、采用 $k_5 = \{VII_G\}$终止式的转调，我们有调制器 $m = e^{11} \cdot -1$。调制量子为

$$M = \{0, 2, 5, 6, 9, 11\} = II_C \cup IV_C \cup VII_C \cup \underbrace{III_G \cup V_G \cup VII_G}_{\text{Pivots}}.$$

我们有 $M \cap G = \{0, 2, 6, 9, 11\}$，很容易验证它是刚性的。从 M 出发且同时属于 G的音级就是枢纽:

$$III_G = \{11, 2, 6\}, \quad V_G = \{2, 6, 9\}, \quad VII_G = \{6, 9, 0\}.$$

由于 $e^{11} \cdot -1(\{0, 2, 6, 9, 11\}) = \{11, 9, 5, 2, 0\}$，我们必须给 M 加上 5，以确保 m 是它的对称，因为 $e^{11} \cdot -1(5) = -5 + 11 = 6$。这证明了 M 是最小的。

例*3.* 以 $E\flat$ 为主音的大调音阶是

$$E\flat = \{3, 5, 7, 8, 10, 0, 2\}.$$

对于从 C 到 $E\flat$ 、终止式为 $k_1 = \{II_{E\flat}, V_{E\flat}\}$ 的转调，我们得到调制器 $m = e^7 \cdot 11$。调制量子为

$$M = \{0, 2, 5, 7, 8, 9, 10, 11\} = II_C \cup V_C \cup VII_C \cup \underbrace{II_{E\flat} \cup III_{E\flat} \cup V_{E\flat} \cup VII_{E\flat}}_{\text{Pivots}}$$

交集为

$$M \cap E\flat = \{0, 2, 5, 7, 8, 10\},$$

由于它是强二分，因此具有刚性。从 M 中也属于 $E\flat$ 的音级是这些枢纽：

$$II_{E\flat}, \quad III_{E\flat}, \quad V_{E\flat}, \quad VII_{E\flat}.$$

请注意，由于等音识别，我们可以将 $E\flat$视为等同于 $D\sharp$ 。

让我们用表格总结前三个示例中的信息。

转调	m	**终止式**	$M \cap T$	**枢纽**
$C \to D$	$e^6 \cdot -1$	$k_4 = \{IV_D, V_D\}$	$\{1, 2, 4, 7, 9, 11\}$	II_D, IV_D, V_D, VII_D
$C \to G$	$e^{11} \cdot -1$	$k_5 = \{VII_G\}$	$\{0, 2, 6, 9, 11\}$	III_G, V_G, VII_G
$C \to E\flat$	$e^7 \cdot 11$	$k_1 = \{II_{E\flat}, V_{E\flat}\}$	$\{0, 2, 5, 7, 8, 10\}$	$II_{E\flat}, III_{E\flat}, V_{E\flat}, VII_{E\flat}$

4.2 转调的对偶模型

Mazzola 的转调模型存在一个问题：它无法解释小调与大调调性之间的转换。此处的群论PLR/TI模型描述了大调与小调调之间优雅的结构关系。该模型[1]作用于所有 24 个大调与小调三和弦组成的集合，记作 M。

TI 群是在 $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ 上的仿射变换群，由移调组成

$$T_n(x) = x + n,$$

这些变换可以将和弦上移或下移；另有倒影

$$I_n(x) = -x + n,$$

倒影可以使和弦绕某个轴翻转。

另一方面，PLR 群由三种基本音乐变换组成，用于关联大调和小调和弦：

[1] 有关该模型的阐述，参见 [1]。

1. P（平行变换）：将大三和弦转换为其平行小调中的和弦（例如， F 大调转换为 f 小调），反之亦然。2. L （导音转换）：将大三和弦转换为其导音上的小调和弦（例如， C 大调转换为 e 小调）。3. R （关系变换）：将大三和弦转换为其关系小调中的和弦（例如， C 大调转换为 a 小调），反之亦然。

一项关键结果是，代数组 TI 与音乐理论群 PLR 同构。此外，它们在 24 个三和弦集合上的作用 M 是对偶且正则的。这一数学性质揭示了几何音高空间运算（移调、反演）与功能性和声关系（平行、关系）之间深刻而不显而易见的结构等价；像蒙特威尔第这样的作曲家凭直觉便领会了这种联系。这意味着，任意一个和弦都可以变换为其他任意和弦（传递性），这种变换是唯一的（自由性），而且两个群的元素彼此可交换。

特别是，我们可以将终止式 $k_4 = \{IV, V\}$ 视为定义大调调性的终止式，其关系为 $T^7(I) = V$和 $T^5(I) = IV$，因此称其为 大调终止式。利用 T 与 R 可交换这一事实，我们可以还原 k_2 终止式，因为

$$R \circ T^7(I) = T^7 \circ R(I) = T^7(VI) = III, \tag{1}$$
$$R \circ T^5(I) = T^5 \circ R(I) = T^5(VI) = II. \tag{2}$$

因此， k_2 可视为<发小调 终止式，而转调则通过在大调终止式[2]之后呈现它来完成。当然，反向转调也以类似方式进行。

5 蒙特威尔第作品的应用与分析

本节构成了论文的分析核心，将前文概述的数学模型应用于蒙特威尔第宗教作品及其里程碑式歌剧《奥菲欧》中的音乐片段。这些分析将展示这些模型在形式化呈现蒙特威尔第作曲选择背后的结构逻辑方面的解释力。

5.1 通过对称变换进行对位分析

我们首先将基于对称的对位模型应用于蒙特威尔第音乐中体现常见和声模式的若干片段。

五度与三度进行分析 我们将考察蒙特威尔第作品中的一些常见转调，这些转调既适用于对位模型，也适用于富克斯的严格模型。我们分析的片段中有一些

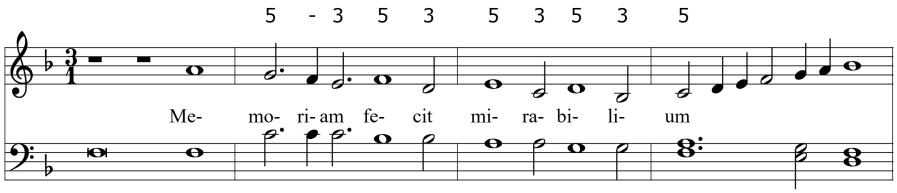


图1。*Confitebor primo (1640)*，第64至67小节

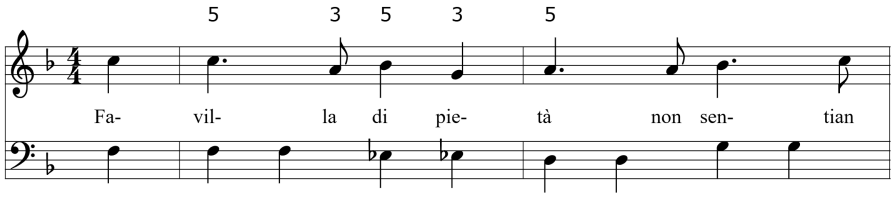


图2。*Ma tu, più che mai dura (1640)*，第6至8小节

出自 Kang 的一篇文章 [4]。这第一组对应于 Kang 所称的“$5-3$ 和声”，也就是五度与三度音程交替出现。

第一首是*Confitebor primo (1640)* [9], ，第64至67小节。由此得到以下对位音程序列

$$\xi_1 = 0 + \epsilon.7, \xi_2 = 0 + \epsilon.4, \xi_3 = 10 + \epsilon.7, \xi_4 = 10 + \epsilon.4,$$
$$\xi_5 = 9 + \epsilon.7, \xi_6 = 9 + \epsilon.3, \xi_7 = 7 + \epsilon.7, \xi_8 = 7 + \epsilon.4, \xi_9 = 5 + \epsilon.7.$$

与这一序列相关的对位对称集合为

Set of symmetries	Cardinality of the set
$\{g_1 = e^{\epsilon.0} \circ 7\}$	1
$\{g_2 = e^{\epsilon.6} \circ (7 + \epsilon.6)\}$	1
$\{g_3 = e^{\epsilon.0} \circ 7\}$	1
$\{g_4 = e^{\epsilon.6} \circ (1 + \epsilon.6)\}$	1
$\{g_5 = e^{\epsilon.0} \circ 7\}$	1
$\{g_6 = e^{\epsilon.8} \circ (5 + \epsilon.4)\}$	1
$\{g_7 = e^{\epsilon.0} \circ 7\}$	1
$\{g_8 = e^{\epsilon.6} \circ (7 + \epsilon.6)\}$	1

[2] 例如，里姆斯基-科萨科夫描述了一个与此非常相似的转调过程，从 C 大调转为 a 小调 [12, 第 44]页。

接下来是一段选自牧歌《*Ma tu, più che mai dura*》第五卷第 6–8 小节的片段 [7], , 由此得到以下对位音程

$$\xi_1 = 5 + \epsilon.7, \xi_2 = 5 + \epsilon.4, \xi_3 = 3 + \epsilon.7, \xi_4 = 3 + \epsilon.4, \xi_5 = 2 + \epsilon.7.$$

对位对称集合为

Set of symmetries	Cardinality of the set
$\{g_1 = e^{\epsilon.0} \circ 7\}$	1
$\{g_2 = e^{\epsilon.6} \circ (7 + \epsilon.6)\}$	1
$\{g_3 = e^{\epsilon.0} \circ 7\}$	1
$\{g_4 = e^{\epsilon.6} \circ (1 + \epsilon.6)\}$	1

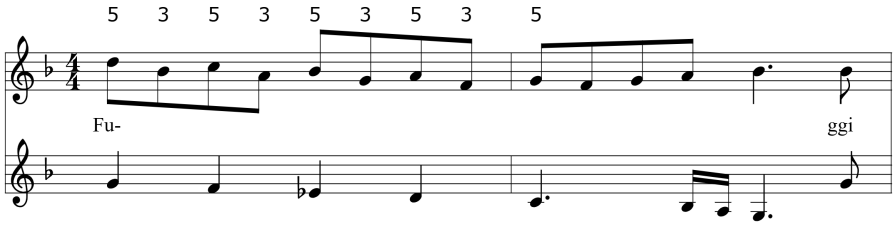


图 3. *Io mi son giovinetta*，第52至53小节

最后，我们从*Io mi son giovinetta*（牧歌第四卷）中选取了一段，即 [6], 第 52–53小节，得出以下对位音程

$$\xi_1 = 7 + \epsilon.7, \xi_2 = 7 + \epsilon.3, \xi_3 = 5 + \epsilon.7, \xi_4 = 5 + \epsilon.4,$$
$$\xi_5 = 3 + \epsilon.7, \xi_6 = 3 + \epsilon.4, \xi_7 = 2 + \epsilon.7, \xi_8 = 2 + \epsilon.3, \xi_9 = 0 + \epsilon.7.$$

对位对称集合为

Set of symmetries	Cardinality of the set
$\{g_1 = e^{\epsilon.0} \circ 7\}$	1
$\{g_2 = e^{\epsilon.8} \circ (5 + \epsilon.4)\}$	1
$\{g_3 = e^{\epsilon.0} \circ 7\}$	1
$\{g_4 = e^{\epsilon.6} \circ (7 + \epsilon.6)\}$	1
$\{g_5 = e^{\epsilon.0} \circ 7\}$	1
$\{g_6 = e^{\epsilon.6} \circ (1 + \epsilon.6)\}$	1
$\{g_7 = e^{\epsilon.0} \circ 7\}$	1
$\{g_8 = e^{\epsilon.8} \circ (5 + \epsilon.4)\}$	1

八度与六度分析 这对应于 Kang 所称的八度—六度和声，即八度与六度的交替。这种类型的第一个片段来自这部作品的

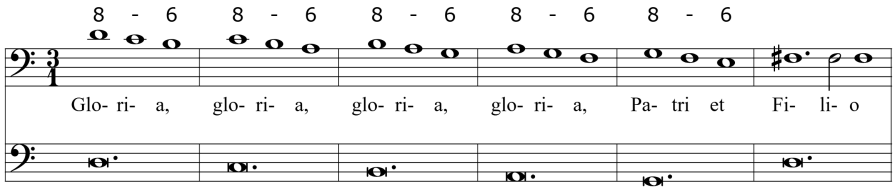


图 4. *Laudate Dominum (1640)*，第 98 至 103 小节

《***Laudate Dominum*（*1640*）》 [9], 第98–103小节，其中包含以下音程。

$$\xi_1 = 2 + \epsilon.0, \xi_2 = 2 + \epsilon.9, \xi_3 = 0 + \epsilon.0, \xi_4 = 0 + \epsilon.9, \xi_5 = 11 + \epsilon.0,$$
$$\xi_6 = 11 + \epsilon.8, \xi_7 = 9 + \epsilon.0, \xi_8 = 9 + \epsilon.8, \xi_9 = 7 + \epsilon.0, \xi_{10} = 7 + \epsilon.9$$

对位对称如下。

Set of symmetries	Cardinality of the set
$\{g_1 = e^{\epsilon.6} \circ (1 + \epsilon.6), g_2 = e^{\epsilon.6} \circ (7 + \epsilon.6)\}$	2
$\{g_3 = e^{\epsilon.8} \circ (5 + \epsilon.8), g_4 = e^{\epsilon.8} \circ (5 + \epsilon.4)\}$	2
$\{g_5 = e^{\epsilon.6} \circ (1 + \epsilon.6), g_6 = e^{\epsilon.6} \circ (7 + \epsilon.6)\}$	2
$\{g_7 = e^{\epsilon.8} \circ (5 + \epsilon.8), g_8 = e^{\epsilon.8} \circ (5 + \epsilon.4)\}$	2
$\{g_9 = e^{\epsilon.11} \circ (11 + \epsilon.8), g_{10} = e^{\epsilon.11} \circ (11 + \epsilon.4), g_{11} = e^{\epsilon.11} \circ 11\}$	3
$\{g_{12} = e^{\epsilon.3} \circ (7 + \epsilon.8), g_{13} = e^{\epsilon.3} \circ 7\}$	2
$\{g_{14} = e^{\epsilon.11} \circ (11 + \epsilon.8), g_{15} = e^{\epsilon.11} \circ (11 + \epsilon.4), g_{16} = e^{\epsilon.11} \circ 11\}$	3
$\{g_{17} = e^{\epsilon.3} \circ (7 + \epsilon.8), g_{18} = e^{\epsilon.3} \circ 7\}$	2
$\{g_{19} = e^{\epsilon.6} \circ (1 + \epsilon.6), g_{20} = e^{\epsilon.6} \circ (7 + \epsilon.6)\}$	2

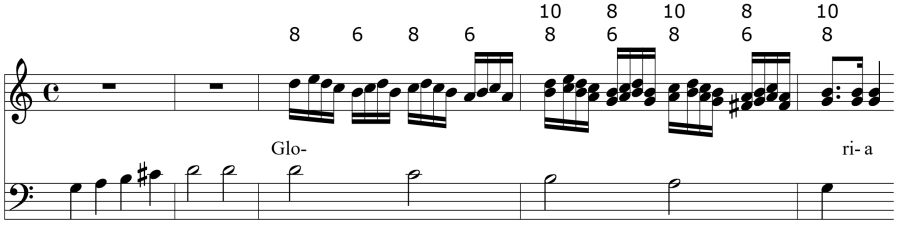


图 5. *Gloria a 7*，第 1 至 5 小节

下面是*Gloria a 7*（*1640*） [9],第1—5小节的一个片段。这个片段很有意思，因为对位似乎从第3小节开始，而8–6和10–8的连续进行则源于对不同声部组合的考察。对于8–6的连续进行，可得到以下对位音程：

$$\xi_1 = 2 + \epsilon.0, \xi_2 = 2 + \epsilon.9, \xi_3 = 0 + \epsilon.0, \xi_4 = 0 + \epsilon.9,$$
$$\xi_5 = 11 + \epsilon.0, \xi_6 = 11 + \epsilon.8, \xi_7 = 9 + \epsilon.0, \xi_8 = 9 + \epsilon.8, \xi_9 = 7 + \epsilon.0.$$

与该进行相关的对位对称变换为：

Set of symmetries	Cardinality of the set
$\{g_1 = e^{\epsilon.6} \circ (1 + \epsilon.6), g_2 = e^{\epsilon.6} \circ (7 + \epsilon.6)\}$	2
$\{g_3 = e^{\epsilon.8} \circ (5 + \epsilon.8), g_4 = e^{\epsilon.8} \circ (5 + \epsilon.4)\}$	2
$\{g_5 = e^{\epsilon.6} \circ (1 + \epsilon.6), g_6 = e^{\epsilon.6} \circ (7 + \epsilon.6)\}$	2
$\{g_7 = e^{\epsilon.8} \circ (5 + \epsilon.8), g_8 = e^{\epsilon.8} \circ (5 + \epsilon.4)\}$	2
$\{g_9 = e^{\epsilon.11} \circ (11 + \epsilon.8), g_{10} = e^{\epsilon.11} \circ (11 + \epsilon.4), g_{11} = e^{\epsilon.11} \circ 11\}$	3
$\{g_{12} = e^{\epsilon.3} \circ 7, g_{13} = e^{\epsilon.3} \circ (7 + \epsilon.8)\}$	2
$\{g_{14} = e^{\epsilon.11} \circ (11 + \epsilon.8), g_{15} = e^{\epsilon.11} \circ (11 + \epsilon.4), g_{16} = e^{\epsilon.11} \circ 11\}$	3
$\{g_{17} = e^{\epsilon.3} \circ 7, g_{18} = e^{\epsilon.3} \circ (7 + \epsilon.8)\}$	2

10–8进行的对位音程为：

$$\xi_1 = 11 + \epsilon.3, \xi_2 = 11 + \epsilon.0, \xi_3 = 9 + \epsilon.3, \xi_4 = 9 + \epsilon.0, \xi_5 = 7 + \epsilon.4.$$

与此进行相关的对位对称变换为：

Set of symmetries	Cardinality of the set
$\{g_1 = e^{\epsilon.8} \circ (5 + \epsilon.8), g_2 = e^{\epsilon.8} \circ (5 + \epsilon.4)\}$	2
$\{g_3 = e^{\epsilon.6} \circ (1 + \epsilon.6), g_4 = e^{\epsilon.6} \circ (7 + \epsilon.6),$ $g_5 = e^{\epsilon.11} \circ (11 + \epsilon.8), g_6 = e^{\epsilon.11} \circ (11 + \epsilon.4), g_7 = e^{\epsilon.11} \circ 11\}$	5
$\{g_8 = e^{\epsilon.8} \circ (5 + \epsilon.8), g_9 = e^{\epsilon.8} \circ (5 + \epsilon.4)\}$	2
$\{g_{10} = e^{\epsilon.11} \circ (11 + \epsilon.4), g_{11} = e^{\epsilon.11} \circ 11\}$	2

因此，Kang 在蒙特威尔第的宗教与世俗作品中指出了若干段落，其中连续出现的 5-3、8-6 或 8-10 音程模式兼具结构与表现功能。在分析 *Confitebor primo* 时，她指出，蒙特威尔第让高声部在下行旋律的音高之间跳进，从而形成连续的 5-3 音程，以避免中音声部与低音之间出现连续五度。同样，她注意到，在 *Ma tu, più che mai dura* 中， E♭ 和 *D* 上的 5-3 和声并置，突显了“怜悯”一词；而在 *Io mi son giovinetta* 中，快速连续的 5-3 音程则使*fuggi*一词产生牧歌式效果。Kang 将这些视为巧妙运用对位技巧的例子——有时服务于文本表达，有时则作为独立的作曲手法。

我们的群论分析揭示了这些观察背后更为系统的规律。Kang 指出的 5-3 连续进行，确实符合 Mazzola 对位模型和传统福克斯对位规则（尽管在第二类对位中，它们会构成“隐藏”的平行进行）。这些进行在结构上的独特之处在于其简约性：每次转换都由单一的对位对称所中介。

更值得注意的是，在全部三个 5-3 示例中，变换 $g_4 = e^{\epsilon \cdot 6} \circ (1 + \epsilon \cdot 6)$（这些段落中唯一能固定固定旋律的对称）恰好出现在情感表现力强烈的词语处。在 *Confitebor primo*中，这一变换标记了奇迹 （奇观）一词，这是一个具有重要神学意义的词，Kang 并未特别强调。在*Ma tu, più che mai dura*中，它再次强调了怜悯；而在 *Io mi son giovinetta* 中，它与 *fuggi* （逃离）上的半音阶 $E\flat$ 相吻合；从字面上说，这个音符“逃离”了调号。

这一模式表明，Kang 所观察到的对位技巧的多种运用（“有时用于文本表达，有时作为独立手法”），实际上可能体现了一种一致的作曲策略：蒙特威尔第系统地运用固定固定旋律的变换，标记具有情感或神学分量的词语。

Kang 还考察了*Laudate Dominum* 和*Gloria a 7*中的 8-6 进行；在这些进行中，通过下行至六度来避免连续八度。我们的分析表明，它们在结构上不同于 5-3 示例：每次过渡至少需要两种对称变换，因此简约性较低。在*Laudate Dominum*中，从完全协和音程到不完全协和音程的过渡涉及三种同时发生的对称变换：$\{e^{\epsilon \cdot 11} \circ (11 + \epsilon \cdot 8)\ e^{\epsilon \cdot 11} \circ (11 + \epsilon \cdot 4)\ e^{\epsilon \cdot 11} \circ 11\}$。

Gloria a 7 尤其具有启发性。除了 8-6 进行之外，它还在第四小节中包含 10-8 和声（可视为 8-3：从八度到三度）。其中一次过渡展现了五种同时发生的对称变换：$\{e^{\epsilon \cdot 6} \circ (1 + \epsilon \cdot 6)\ e^{\epsilon \cdot 6} \circ (7 + \epsilon \cdot 6)\ e^{\epsilon \cdot 11} \circ (11 + \epsilon \cdot 8)\ e^{\epsilon \cdot 11} \circ (11 + \epsilon \cdot 4)\ e^{\epsilon \cdot 11} \circ 11\}$。这些基数的跃变似乎与同音齐奏*tutti* 段落中新增声部的进入相对应，恰好出现在 Kang 所称“尤其有趣”的时刻。因此，数学结构反映了织体复杂性：声部越多，就需要越多同时发生的对称变换，从而形成简约性较低但织体更丰富的段落。

总而言之，我们的分析既验证了 Kang 的观察，也对其进行了拓展。她指出的 5-3 和 8-6 模式确实具有重要的作曲意义，但其重要性不仅在于避免平行进行或营造局部效果，更在于它们体现了蒙特威尔第在近四十年的创作实践中一贯运用的系统性结构原则。

5.2《奥菲欧》中的转调分析

我们将重点考察歌剧《奥菲欧》不同片段中的转调，这些转调验证了转调量子模型以及大调与小调之间的转调。我们的分析片段选自文章《从调式到调性：蒙特威尔第对音乐发展的影响》 [11]。

我们首先考察咏叹调*In questo lietoe fortunato giorno*中的转调，其中转调量子与目标调性的音阶的交集也是一种强二分。这一点可见于图6和图7。

在这首咏叹调中，我们可以找到从 C 到 D的转调，这已在示例1中计算过。回想一下， D 的和弦为：

$$\begin{aligned} I_D &= \{2,6,9\}, \quad D, \\ II_D &= \{4,7,11\}, \quad e, \\ III_D &= \{6,9,1\}, \quad f\sharp, \\ IV_D &= \{7,11,2\}, \quad G, \\ V_D &= \{9,1,4\}, \quad A, \\ VI_D &= \{11,2,6\}, \quad b, \\ VII_D &= \{1,4,7\}, c\sharp^{\circ}. \end{aligned}$$

k_4 的终止式 C 为 $\{F,G\}$，它出现在图6的第4小节。第5小节出现了 D 的第一级。回想一下， D 的终止式为$k_4 = \{G,A\}$，而此次转调的枢纽为 e、G、 A 和 $c\sharp^{\circ}$。在这种情况下，请注意，终止式是枢纽的子集，其和弦出现在第6小节。

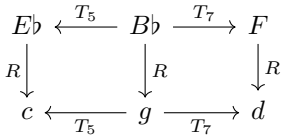
现在，蒙特威尔第从 D 转调到 A，这已在示例2中计算过，不过需要上移一个全音。回想一下， A 的和弦为：

$$\begin{aligned} I_A &= \{9,1,4\}, \quad A, \\ II_A &= \{11,2,6\}, \quad b, \\ III_A &= \{1,4,8\}, \quad c\sharp, \\ IV_A &= \{2,6,9\}, \quad D, \\ V_A &= \{4,8,11\}, \quad E, \\ VI_A &= \{6,9,1\}, \quad f\sharp, \\ VII_A &= \{8,11,2\}, g\sharp^{\circ}. \end{aligned}$$

枢纽为 $c\sharp$、 E 和 $g\sharp^{\circ}$。 A 的终止式 k_5 为 $\{g\sharp^{\circ}\}$，构成该终止式的唯一和弦出现在第12小节（见图7），利用了它同时也是一个枢纽这一点。 A 的第一级也出现在终止式所在的小节。

我们继续分析从 A 到 C的最后一次转调，该转调已在例3中计算得出，但必须上移三个半音。 C 的终止式k_1 为 $\{d,G\}$，其和弦出现在第16和第17小节，同时也是枢纽。 C 的第一个音级出现在第18小节。

最后，我们将分析《奥菲欧》第二幕中的两首小咏叹调；第一首正是 *Ecco pur*。这首小咏叹调中的一些重要和弦可以用以下交换图表示：



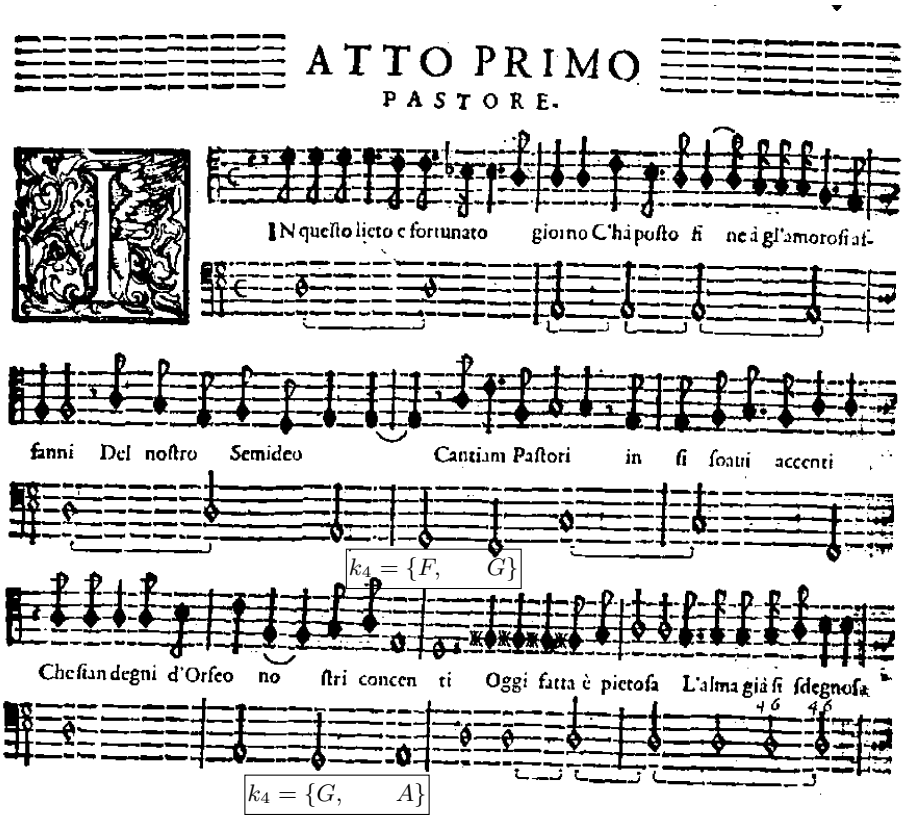


图6。 *In questo lieto e fortunato giorno*，《《奥菲欧》》第一幕的第一首咏叹调，第1至8小节

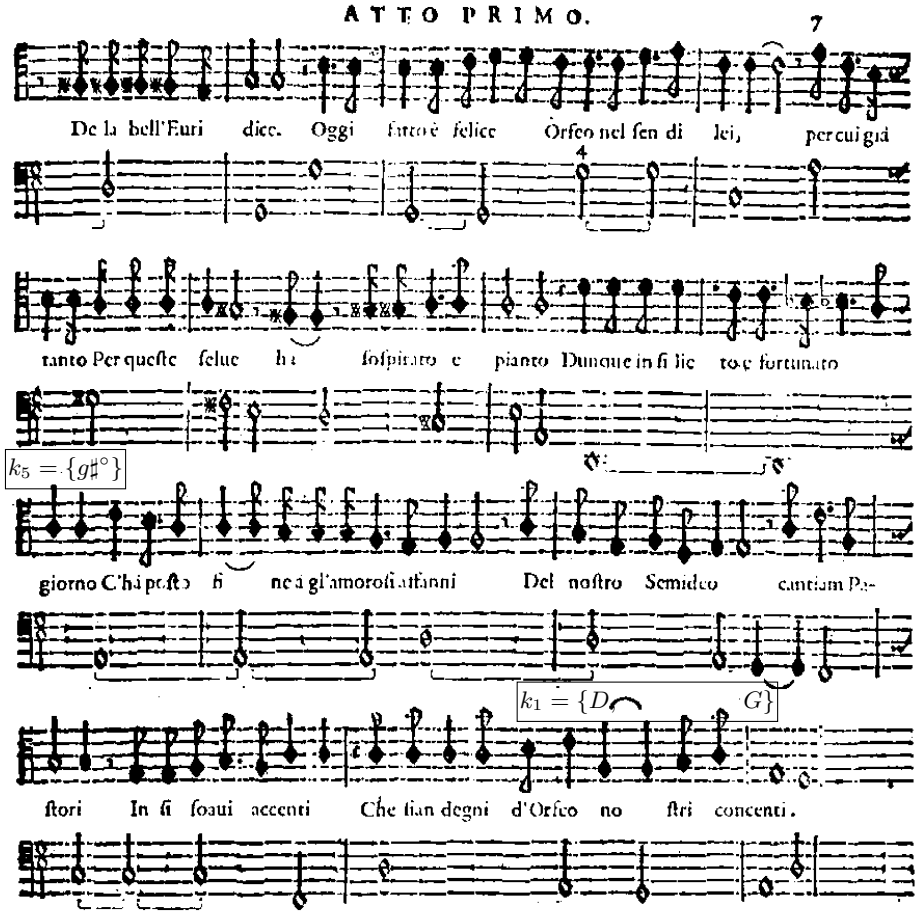


图7。 *In questo lieto e fortunato giorno*, 《奥菲欧》第一幕的首首咏叹调, 《奥菲欧》, 第9至20小节

因此， $B\flat$调性的终止式集合为 $k_4 = \{E\flat, F\}$，而 g 调性的终止式集合为 $k_2 = \{c, d\}$。

从图（8）可见，方框内的和弦为大调和弦，圆圈内的和弦为小调和弦。请注意，咏叹调片段的前半部分始于 $B\flat$，其终止式缓慢呈现，随后在 c 结束，并以极快的速度呈现其终止式。

我们将分析的第二首小咏叹调 见于第二幕，标题为$Mira,\ dehmira\ Orfeo$。这里有如下交换图：

$$\begin{array}{ccccc} F & \xleftarrow{T_5} & C & \xrightarrow{T_7} & G \\ {\scriptstyle R}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle R} & & \downarrow{\scriptstyle R} \\ d & \xleftarrow[T_5]{} & a & \xrightarrow[T_7]{} & e \end{array}$$

因此，终止式 $k_4 = \{F, G\}$ 转变为终止式 $k_2 = \{d, e\}$。 a 小调的终止式 k_2 和 C 大调的终止式 k_4 分别出现在图 9 的第 10 和第 11 小节。

Perritt 考察了蒙特威尔第在《奥菲欧》中如何驾驭从调式性到调性的转变，并着重指出调式与调性元素并存的段落。谈到第一幕的咏叹调$In\ questo\ lieto\ e\ fortunato\ giorno$ 时，她指出，这首作品以 D 上的多利亚调式开篇（其中 $B\flat$ 是降六级音，$C\natural$是降七级音[3]），但随着$F\sharp$ 和 $C\sharp$的引入，并在有力的和声进行支撑下，转至 D 大调。她观察到，尽管作品最初呈现为 C 大调（伊奥尼亚调式），但 D 大三和弦的延长以及低音中的 D，有助于确立调性而非调式框架，并称之为“在一个短小段落中，调式理论与调性的有趣结合”。

我们的量子转调模型对这首咏叹调的调性结构进行了更为详细的分析。Perritt 只关注从 C 到 D 的转调，但完整的咏叹调包含三次转调，$C \to D \to A \to C$，每一次都对应一个独特的戏剧情境：

– 呼唤牧羊人，见 C。– 美丽的欧律狄刻接受了俄耳甫斯的追求，见 D。这一转调并非随意为之。学者指出，蒙特威尔第在整部《奥菲欧》中，始终将 D 大调与欧律狄刻联系起来。在俄耳甫斯的独白《天上的玫瑰》中，他的 G-多利亚调性层级，每逢提及欧律狄刻，便始终转向 D 大调：初见她时（“pria ti vidi”）、为她叹息时（“per te sospirai”），以及最后在结尾处，他“以近乎舞台化的姿态，转向欧律狄刻最后呈现的 D 大调，期待她的回应” [14]。因此，我们这首咏叹调中转向 D 的转调，参与了贯穿整部歌剧的更宏大的调性戏剧策略。– 俄耳甫斯为爱欧律狄刻而在林中受苦，见 A。这与蒙特威尔第将 A 大调和“冥界领域”联系起来的做法相呼应

[3]尽管它实际上是 G 多利亚调式，但这并不会恰当地改变后续分析。

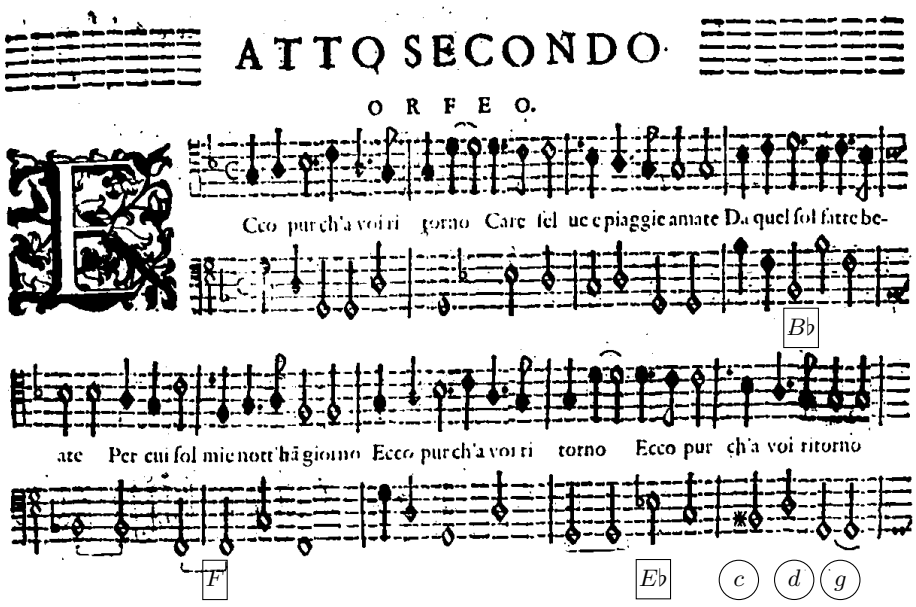


图8。Ecco pur，选自《奥菲欧》第二幕

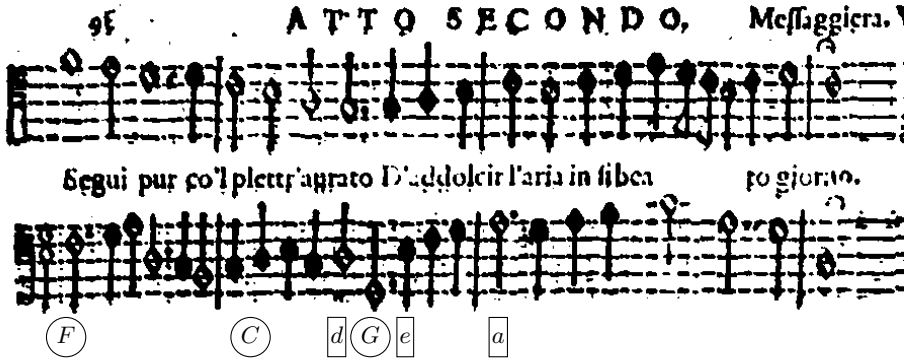


图9。Mira, deh mira Orfeo，选自《奥菲欧》第二幕，第9至12小节。

[14], 这预示着他即将踏上的旅程：为失去爱情而受苦，已将冥界的意象引入其中。

调的依次变化由此叙述了俄耳甫斯的情感历程，最终在欧律狄刻回应他的爱意时，他回到 C 大调——这份喜悦由恢复的开篇调性体现（当然，也象征着俄耳甫斯回到了出发地色雷斯）。

对于第二幕中的小咏叹调 ***Ecco pur*** ，Perritt指出，即使在转调过程中，主音上的终止式仍受到强烈强调。她指出，蒙特威尔第"遵循了正确的转调规则"，从 g 小调转至其关系大调 $B\flat$ ，再回到 g 小调。转调发生在第7小节，此处以$B\flat$ 大调中的阻碍终止式收尾（由V转向 vi 而非 I），其中 vi和弦同时也是 g 小调的主音和弦。她总结道："蒙特威尔第运用转调，在这部短小作品中展现了调性。"

我们的分析揭示了更深层的结构机制：大调与小调之间的转调，可由终止式 $\{IV, V\}$ 到 $\{ii, iii\}$在 R （关系变换）下的变换来解释；正如我们的交换图所示，这一终止式在该变换下保持不变。其戏剧功能尤其令人心酸：描写太阳归来的段落完全采用大调，而真正的归返 （返回）却苦涩交织——以一个小调和弦呈现。俄耳甫斯回到了让他快乐的地方，然而同一处也承载着欧律狄刻逝去的悲伤。

Perritt 对$Mira,\ deh\ mira\ Orfeo$ （也在第二幕中）的分析指出，随着乐曲情绪的变化，调性也随之变化：欢快的段落采用 C 大调或关系密切的调，而庄严的段落则转入小调（ C 大调的关系小调）。她强调，"和声进行得到解决时，调性体系依然稳固"；副属和弦（V/V）恰当地解决到 V，再到 I。她称这是"调性的一种有趣运用，使我们得以观察调式性与调性之间的过渡"。

这首小咏叹调 的转调与$Ecco\ pur$相似，在大调与小调调性之间交替。它由一位牧羊人演唱，预示着即将到来的悲剧：他在大调调性中的快乐，被带来欧律狄刻死讯的信使打断。转入小调，在灾难被明确说出之前便已宣告其降临。

总的来说，这些《奥菲欧》选段中的转调，讲述了俄耳甫斯为欧律狄刻所承受的戏剧。这体现了蒙特威尔第对阿图西批评的实际回应：音乐服务于文本和戏剧情节，调性关系则被系统地运用，以表达情感状态和叙事进程。Perritt在孤立的段落中指出了调性思维的存在，而我们的量子转调模型则展示了这些转调如何构成贯穿整场乃至整幕的连贯戏剧性调性结构。

6 结论与未来工作

本文证明，运用代数模型分析对位与转调，为剖析克劳迪奥·蒙特威尔第的结构天才提供了有力视角。通过将基于对称性的框架应用于他的对位，并用群论模型研究他的和声运用，我们表明，他备受赞誉的创新并非随意的“错误”，而是对音乐语言进行连贯、合乎逻辑且数学上优雅的拓展。这些形式化方法揭示了第二实践表现力背后的深层结构完整性，也印证了蒙特威尔第的艺术抉择足以经受其所处时代的批评。本文为进一步探究奠定了基础。未来研究可运用更先进的代数与群论工具，探寻蒙特威尔第及其同时代作曲家更广泛作品中潜藏的数学结构。这类研究有望持续揭示音乐审美成就与数学抽象之美之间深刻而往往令人惊喜的联系。

参考文献

1. Agustín-Aquino, O.A., du Plessis, J., Lluis-Puebla, E., Montiel, M.：《群论及其在音乐数学理论中的应用导论》，墨西哥数学学会电子出版物，丛书：Texts，第10卷。墨西哥数学学会，墨西哥（2009） 2. Aquino, O.A.A., Junod, J., Mazzola, G.：《计算对位世界》。施普林格（2015） 3. Fux, J., Mann, A., Edmunds, J.：《对位法研究：源自Johann Joseph Fux《通往帕纳索斯山的阶梯》》。W·W·诺顿公司（1965） 4. Kang, Y.：蒙特威尔第的《17世纪早期“和声进行”》。《音乐分析》**30**(2-3)，186–217（2011） 5. Mazzola, G.：《音乐的托普斯》。比克豪泽（2002） 6. Monteverdi, C.：《五声部牧歌第四卷》。Ricciardo Amadino，威尼斯（1603） 7. Monteverdi, C.：《五声部牧歌第五卷》。Ricciardo Amadino，威尼斯（1608） 8. Monteverdi, C.：《奥菲欧》，音乐寓言剧。Ricciardo Amadino，威尼斯（1609） 9. Monteverdi, C.：《道德与精神之林》。Bartolomeo Magni，威尼斯（1640） 10. Ozmo, Ž.：早期巴洛克音乐是否应采用平均律？文琴佐·伽利莱1584年《鲁特琴谱集》及其对历史演奏实践的更广泛影响。《早期音乐》44(1)，119–124（2016年02月） 11. Perritt, H.J.：从调式到调性：蒙特威尔第对音乐发展的影响。载于：《研究与学术研讨会》。塞达维尔大学（2017） 12. Rimsky-Korsakoff, N.：《实用和声论》。Alphonse Leduc，巴黎（1910） 13. Schönberg, A.：《和声学》。环球版社，维也纳，第3版（1922） 14. Steinheuer, J.：《奥菲欧》（1607年），第119–140页。剑桥音乐指南丛书，剑桥大学出版社（2007）