arXiv:2512.18868v1 [math.AG] 21 Dec 2025

关于维数 2 中的广义 Bass–Quillen 猜想

A. Stavrova

Abstract. 设 A 是一个维数为 ≤ 2的正则环。设 G 是定义在 A 上的约化群，且其导出群是一个分裂的（即 Chevalley–Demazure）半单群。我们证明，对于任意$n \geq 1$，每个 Zariski 局部平凡的主 G-丛（定义在 $A[x_1, \ldots, x_n]$ 上）都来自 A。这一结果将巴斯–奎伦猜想中维数 2 的情形推广到了分裂约化群；该猜想涉及有限生成射影模，其正特征情形已由 M. P. Murthy 解决。

1. Introduction

以下猜想最初由 H. Bass 作为一个问题提出 [Ba，问题 IX], ，后来 D. Quillen 在 [Q]中重述后，该猜想便以巴斯–奎伦猜想之名广为人知；详细的历史回顾可参见例如 [La] 。

猜想 1.1。（巴斯–奎伦猜想）设 A 是一个有限 Krull 维数的正则环。那么，对于任意 $n \geq 1$， $A[x_1, \ldots, x_n]$ 上的每个有限生成射影模都来自 A。

这个猜想可以看作以下更一般陈述在 $G = GL_m$、 $m \geq 1$ 情形下的特例。设 A 是一个正则环，且 G 是定义在 A 上的严格各向同性约化群，那么，对于任意 $n \geq 1$， $A[x_1, \ldots, x_n]$ 上的每个 Zariski 局部平凡主 G-丛都来自 A。这里，按照 [SGA3] 的意义，约化群（概形） G 被称为严格各向同性的，如果 G 包含一个抛物子群，该抛物子群与 G 的每个半单正规子群都适当地相交，参见例如 [St22] （同一性质有时也称为“完全各向同性”）。这一巴斯–奎伦猜想的推广版本对于任意维数的等特征（即包含一个域的）正则环 A ，以及定义在 A [上的每个严格各向同性约化群 G ，已由 5] St22，推论 5. 得到证明（另见 [C3] ，其中给出了不同的证明）。此外，对于所有关于离散赋值环 D 归纳光滑的环 A，以及定义在 D [上的所有严格各向同性约化群 G，该结论也已得到证明，见 8]GuLi，定理 1.。另见 [La、C2、SuK、K、CTO、AHW、RR、R89]，了解更早的结果以及对相关假设的讨论。

我们证明了对于所有约化群 G ，若其导出群 G^{der} （按 [SGA3] 的定义）是分裂的，即 Chevalley–Demazure 半单群，则广义 Bass–Quillen 猜想的维数 ≤ 2 情形成立。这类群 G 自动是严格各向异性的，因为它们的所有半单正规子群都是分裂的，且包含一个 Borel 子群。

定理 1.2. 设 A 是维数为 ≤ 2的正则环。设 G 是定义在 A上的约化群，且 G^{der} 是一个分裂的（即 *Chevalley–Demazure*）半单群。那么映射

$$H^1_{Zar}(A[x_1, \ldots, x_n], G) \xrightarrow{x_1=\ldots=x_n=0} H^1_{Zar}(A, G)$$

日期：2025年12月23日。

对任意 $n \geq 1$ 都是双射。也就是说，每个定义在 $A[x_1, \ldots, x_n]$ 上的 *Zariski* 局部平凡主 G-丛都来自 A。

若 $G = GL_n$，则定理 1.2 归功于 M. P. Murthy [Mur66]（在 $n = 1$ 的情形），以及 A. Suslin [Su, 定理 5] 和 D. Quillen [Q]（一般情形）。Raman Parimala 在 $A[x_1, \ldots, x_n]$ 上建立了各向同性二次空间的类似结论，其中 $2 \in A^\times$ [Par]。

2. Preliminaries

对于任意交换环 R，我们将 $R(x)$ 记为多项式环 $R[x]$ 关于所有首一多项式组成的集合的局部化。

设 G 是定义在 R 上的仿射局部有限表示群概形。我们将 Spec(R) 上以 G 为系数、分别相对于 Zariski、 ´etale 和 fppf 拓扑的第一非阿贝尔上同调记为 $H^1_{Zar}(R, G)$、$H^1_{\acute{e}t}(R, G)$ 和 $H^1_{fppf}(R, G)$。等价地，这些是 Spec(R) 上主 G-丛（或 G-挠子）的同构类集合，且这些丛在相应拓扑下局部平凡。我们用 $\xi = 1$ 表示主 G-丛 ξ 是平凡的。为简便起见，我们也记

$$H^1_{\acute{e}t}(R[x_1, \ldots, x_n], G)_0 = \ker\left(H^1_{\acute{e}t}(R[x_1, \ldots, x_n], G) \xrightarrow{x_1=\ldots=x_n=0} H^1_{\acute{e}t}(R, G)\right),$$

对 fppf 拓扑和 Zariski 拓扑也类似。

以下引理是 [St19, 引理 4.1]的一个稍强版本。

引理2.1。设 R 为正则半局部整环，K 为 R的分式域。设 G、G' 为约化 R-群，且 T 为乘法型 R-群，使得存在一个短正合序列

$$(a) \quad 1 \to G' \to G \to T \to 1 \quad or \quad (b) \quad 1 \to T \to G' \to G \to 1$$

R-群概形。固定任意 $n \geq 1$，并将 $\mathbf{x}$ 记为变量字符串 $x_1, \ldots, x_n$。自然映射 $H^1_{\acute{e}t}(R[\mathbf{x}], G') \to H^1_{\acute{e}t}(R[\mathbf{x}], G)$ 诱导出一个同构。

$$(1) \qquad \ker\left(H^1_{\acute{e}t}(R[\mathbf{x}], G')_0 \to H^1_{\acute{e}t}(K[\mathbf{x}], G')\right) \xrightarrow{\cong} \ker\left(H^1_{\acute{e}t}(R[\mathbf{x}], G)_0 \to H^1_{\acute{e}t}(K[\mathbf{x}], G)\right).$$

证明。由于 G 和 G' 是光滑的，我们可以将其 ´étale 上同调替换为 fppf 上同调，参见例如 [Mi，第 120] 页。

首先考虑 (a) 的情形。令 S 为 R、$R[\mathbf{x}]$、K、$K[\mathbf{x}]$, 中的任意一个，则我们有一个带基点集合的正合列

$$T(S) \xrightarrow{\delta} H^1_{\mathrm{fppf}}(S, G') \to H^1_{\mathrm{fppf}}(S, G) \to H^1_{\mathrm{fppf}}(S, T).$$

由于 R 是正则的，T 是等平凡的 [SGA3，第 X 篇，定理 5，16], 因此适用 [CTS]的结果。具体而言，根据 [CTS，引理 2，4] 我们有 $H^1_{\mathrm{fppf}}(S, T) \cong H^1_{\mathrm{fppf}}(S[x], T)$；根据 [CTS，定理 4，1] 映射 $H^1_{\mathrm{fppf}}(R, T) \to H^1_{\mathrm{fppf}}(K, T)$ 是单射。因此，$H^1_{\mathrm{fppf}}(R[\mathbf{x}], T) \to H^1_{\mathrm{fppf}}(K[\mathbf{x}], T)$ 也是单射。因此，任意 $\xi \in \ker\left(H^1_{\mathrm{fppf}}(R[\mathbf{x}], G) \to H^1_{\mathrm{fppf}}(K[\mathbf{x}], G)\right)$ 都可提升为一个元素 $\eta \in H^1_{\mathrm{fppf}}(R[\mathbf{x}], G')$。设 $\bar{\eta} \in H^1_{\mathrm{fppf}}(K[\mathbf{x}], G')$ 是 η 的像。于是存在$\theta \in T(K[\mathbf{x}])$，使得 $\bar{\eta}$ 是 θ 的像。由于 T 是一个乘法型群，我们有$T(K[\mathbf{x}]) = T(K)$。因此，$\bar{\eta}$是从 K扩张得到的。

假设此外，$\xi \in \ker\left(H^1_{\mathrm{fppf}}(R[\mathbf{x}], G)_0 \to H^1_{\mathrm{fppf}}(K[\mathbf{x}], G)\right)$。那么 $\eta|_{\mathbf{x}=(0,\ldots,0)} \in H^1_{fppf}(R, G')$ 有一个原像 $\sigma \in T(R)$。显然，σ 在 $T(K)$ 中的像通过 δ 映射到 $\bar{\eta}|_{\mathbf{x}=(0,\ldots,0)} \in H^1_{fppf}(K, G')$。

群 $T(R[\mathbf{x}])$ 通过右平移作用于 $H^1_{\mathrm{fppf}}(R[\mathbf{x}], G')$，其轨道恰好是映射 $H^1_{\mathrm{fppf}}(R[\mathbf{x}], G') \to H^1_{\mathrm{fppf}}(R[\mathbf{x}], G)$ 的纤维，参见 [Se02, §5.5]。由于 R 是整环，我们有 $T(R[\mathbf{x}]) = T(R)$。于是 $\eta \cdot \sigma^{-1} \in H^1_{\mathrm{fppf}}(R[\mathbf{x}], G')_0$，并且由于 $\bar{\eta}$ 是从 K 扩张得到的，$\eta \cdot \sigma^{-1}$ 在 $H^1_{\mathrm{fppf}}(K[\mathbf{x}], G')$ 中的像是平凡的。因此

$$\eta \cdot \sigma^{-1} \in \ker\big(H^1_{\mathrm{fppf}}(R[\mathbf{x}], G')_0 \to H^1_{\mathrm{fppf}}(K[\mathbf{x}], G')\big).$$

由于 $\eta \cdot \sigma^{-1}$ 在 $H^1_{\mathrm{fppf}}(R[\mathbf{x}], G)$ 中的像与 ξ 重合，映射 (1) 的满射性得证。(1) 的单射性直接来自这样一个事实：其纤维是$T(R[x]) = T(R)$ 作用下的轨道。

考虑 (b) 的情形。对于上述每个 S，我们都有一个正合列

$$H^1_{\mathrm{fppf}}(S, T) \to H^1_{\mathrm{fppf}}(S, G') \to H^1_{\mathrm{fppf}}(S, G) \to H^2_{\mathrm{fppf}}(S, T).$$

根据 [CTS 定理 4.3]，映射 $H^2_{\mathrm{fppf}}(R[\mathbf{x}], T) \to H^2_{\mathrm{fppf}}(K(\mathbf{x}), T)$ 是单射，因此映射$H^2_{\mathrm{fppf}}(R[\mathbf{x}], T) \to H^2_{\mathrm{fppf}}(K[\mathbf{x}], T)$ 也是单射。证明的其余部分与前一种情形相同，唯一的区别是此处使用交换群$H^1_{\mathrm{fppf}}(R[\mathbf{x}], T) \cong H^1_{\mathrm{fppf}}(R, T)$ 在 $H^1_{\mathrm{fppf}}(R[\mathbf{x}], G')$ 上的作用；该作用定义良好，因为 T 在 G' 中是中心的，见 [Se02，第 5.7] 节。□

推论 2.2. 设 R 是正则半局部整环，K 是 R的分式域。设 G是定义在 R上的约化群。设 G^{sc} 是按照 [SGA3]的定义，G 的导出群的单连通覆盖。固定任意 $n \geq 1$，并用$\mathbf{x}$ 表示变量串 x_1, ……, x_n。自然同态 $G^{sc} \to G$ 诱导出一个同构

$$\ker\left(H^1_{\acute{e}t}(R[\mathbf{x}], G^{sc})_0 \to H^1_{\acute{e}t}(K[\mathbf{x}], G^{sc})\right) \xrightarrow{\simeq} \ker\left(H^1_{\acute{e}t}(R[\mathbf{x}], G)_0 \to H^1_{\acute{e}t}(K[\mathbf{x}], G)\right). \tag{2}$$

证明. 设 der(G) 是按照 [SGA3]的定义的 G 的导出群。存在两个 R-群的短正合序列 $1 \to$ der$(G) \to G \to$ corad$(G) \to 1$ 以及 $1 \to C \to G^{sc} \to$ der$(G) \to 1$，其中 corad(G) 和 C 是乘法型 R-群 [SGA3, Exp. XXII]。这两个短正合序列满足引理2.1的条件。□

我们的主要结果的证明关键地依赖于以下定理。

定理 2.3。 [H67,Ni84, Gu] 设 D 是一个 *Dedekind* 域，K 是其分式域。设 G是定义在 D上的单连通拟分裂约化群。那么

$$H^1_{Zar}(D, G) = \ker(H^1_{\acute{e}t}(D, G) \to H^1_{\acute{e}t}(K, G)) = 1.$$

证明。由离散赋值环上的 Serre–Grothendieck 猜想 [Ni84, Gu]，有 ker$(H^1_{\acute{e}t}(D, G) \to H^1_{\acute{e}t}(K, G)) \subseteq H^1_{Zar}(D, G)$。根据 [H67, Satz 3.3]，对于拟分裂单连通群，有 $H^1_{Zar}(D, G) = 1$ (更一般的陈述见 [PSt3] 。) □

对于任意含幺交换环 R 以及任意固定的钉扎选择，或 ´epinglage，按照 [SGA3], 的含义，设 G 为一个 Chevalley–Demazure 群，我们将 $E(R)$ 记为 $G(R)$ 的初等子群。也就是说，$E(R)$ 是由初等根幂零元 $x_\alpha(r)$、$\alpha \in \Phi$、$r \in R$生成的 $G(R)$ 的子群，记号采用 [Ch, Ma], ，其中 Φ 是 G的根系。（这一概念向各向同性约化群的推广由 [PeS]引入。）

我们将需要以下关于初等子群的引理，该引理源自 M. R. Stein 和 E. B. Plotkin 的稳定性定理 [Ste, Pl]。

引理 2.4。 [St20, 引理 3。1] 设 R 是一个 ***Krull*** 维数为 ≤ 1的诺特环。如果$SL_2(R) = E_2(R)$，那么 $G(R) = E(R)$对于任意单连通 ***Chevalley–Demazure*** 群概形 G均成立。

3. The case of one variable

我们由以下关于 ´étale 局部平凡主 G-丛的结果，推导出定理 1.2 的 $n = 1$ 情形。

定理 3.1。 设 A 是一个分式域为 K 的二维正则局部环。设 G 是 A 上的约化群，且其导出群 G^{der} （按 [SGA3] 中的定义）是一个分裂的，即 ***Chevalley–Demazure*** 半单群。那么

$$\ker\left(H^1_{\acute{e}t}(A[x], G)_0 \to H^1_{\acute{e}t}(K[x], G)\right) = \ker\left(H^1_{\acute{e}t}(A[x], G)_0 \to H^1_{\acute{e}t}(K(x), G)\right) = 1.$$

证明。 核相等，因为

$$\ker\left(H^1_{\acute{e}t}(K[x], G) \to H^1_{\acute{e}t}(K(x), G)\right) = 1$$

根据 [CTO，命题 2.2]。由推论 2.2，只需对 G^{der}的单连通覆盖 G^{sc} 证明该断言。由于 G^{der} 是分裂的，因此 G^{sc} 也是分裂的。所以，从现在起，我们假设 $G = G^{sc}$ 是一个单连通分裂半单群。

映射 $H^1_{\acute{e}t}(A[x], G) \to H^1_{\acute{e}t}(A(x), G)$ 的核是平凡的 [St22，定理 4.1] （另见 [PStV，定理 1.3], [C1，命题 8.4], 以及 [PSt2] ，其中给出了这一结果的其他表述）。因此，只需证明对于每个

$$\xi \in \ker\left(H^1_{\acute{e}t}(A[x], G)_0 \to H^1_{\acute{e}t}(K[x], G)\right)$$

元素， ξ 在 $H^1_{\acute{e}t}(A(x), G)$ 中的像是平凡的。

设 s 是 A的正则参数。我们有如下交换图

$$\begin{array}{ccccc} A[x] & \longrightarrow & A(x) & & \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ A_s[x] & \longrightarrow & A(x)_s & \longrightarrow & A_s(x) \longrightarrow K(x). \end{array}$$

映射 $H^1_{\acute{e}t}(A_s[x], G) \to H^1_{\acute{e}t}(A_s(x), G)$ 的核是平凡的（同样依据 [St22，定理 4.1]）。由于A_s 是 Dedekind 域， $A_s(x)$ 也是 Dedekind 域 [La，第 IV 章，推论 1.3], ，因此根据定理 2.3， $H^1_{\acute{e}t}(A_s(x), G) \to H^1_{\acute{e}t}(K(x), G)$ 的核是平凡的。于是，$H^1_{\acute{e}t}(A_s[x], G) \to H^1_{\acute{e}t}(K(x), G)$ 的核是平凡的。因此， ξ在 $H^1_{\acute{e}t}(A(x)_s, G)$ 中的像是平凡的。

考虑笛卡尔方块

$$\begin{array}{ccc} A(x) & \longrightarrow & A(x)_s \\ \downarrow & & \downarrow \\ \widehat{A(x)} & \longrightarrow & \widehat{A(x)}_s, \end{array} \tag{3}$$

其中 $A(x)$ 表示 $A(x)$ 的 s-进完备化，而 $\widehat{A(x)}_s$ 是其在 s 处的局部化。这是一个用于 G-挠子的拼接方块 [BC，引理 2.2.11]。

我们断言， ξ到 $\widehat{A\ x}(\ )$ 的限制是平凡的。事实上，由于 $\left(\widehat{A\ x}(\ )\ s\widehat{A\ x}(\ )\right)$ 是一个亨泽尔对，根据 [BC，定理 2.1，6] 我们有

$$H^1_{\acute{e}t}(\widehat{A(x)}, G) \cong H^1_{\acute{e}t}(\widehat{A(x)}/s, G). \tag{4}$$

此外，我们有 $A(x)/s \cong (A/s)(x)$ 是一个维数为 ≤ 1 的正则整环，且其分式域满足

$$\mathrm{Frac}\left((A/s)(x)\right) \cong \mathrm{Frac}(A/s)(x) \cong A_{(s)}(x)/s,$$

其中 $A_{(s)}$ 是 A 在素理想 (s) 处的局部化。由定理 2.3，

$$\ker\left(H^1_{\acute{e}t}((A/s)(x), G) \to H^1_{\acute{e}t}(A_{(s)}(x)/s, G)\right) = 1.$$

由于 $A_{(s)}(x)$ 本身是维数为 ≤ 1 的正则整环，再由定理 2.3 可得

$$\ker\left(H^1_{\acute{e}t}(A_{(s)}(x), G) \to H^1_{\acute{e}t}(K(x), G)\right) = 1.$$

由于 ξ 在 $K(x)$ 上是平凡的，因此 ξ 在 $A_{(s)}(x)$ 上是平凡的，进而在 $A_{(s)}(x)/s$ 上也是平凡的，从而在 $(A/s)(x)$ 上也是平凡的。由 (4) 可知，ξ 在 $A(x)$ 上的限制也平凡。

因此，$\xi|_{A(x)}$ 对应于一个 G-扭子，其在角点上的限制 $\widehat{A(x)}$ 和 $\widehat{A(x)}_s$ 的交换方块 (3) 是平凡的。由下文的引理 3.2 可得 $G(\widehat{A(x)}_s) = E(\widehat{A(x)}_s)$。由 [PSt1，引理 3.2] 可得

$$E(\widehat{A(x)}_s) \subseteq G(\widehat{A(x)}) \cdot E(A(x)_s).$$

因此，$G(\widehat{A(x)}_s) \subseteq G(\widehat{A(x)}) \cdot G(A(x)_s)$。于是，$\xi$ 在 $A(x$上是平凡的$)$. □

引理 3.2。设 A 是一个维数为 ≤ 2的正则局部环，且 $s \in A$ 是一个正则参数。设 $\widehat{A(x)}$ 是 A的 s-进完备化。那么，$A(x)$在 s 处的局部化 $D = A(x)_s$ 是一个维数为 ≤ 1的正则整环，并且对于任意单连通 *Chevalley–Demazure* 群概形 G，有 $G(D) = E(D)$。

证明。我们有

$$\widehat{A(x)}/s \cong A(x)/s \cong (A/s)(x).$$

若 $\dim A = 1$，则 $(A/s)(x)$ 是一个域，因此对任意 $n \geq 2$，$SL_n((A/s)(x)) = E_n((A/s)(x))$。若 $\dim A = 2$，则 A/s 是离散赋值环，而按照 [La，第 IV 章，§ 6] 的定义，$(A/s)(x)$ 是一个特殊主理想整环。因此，由 [La，第 IV 章，推论 6.3]，对任意 $n \geq 2$，$SL_n((A/s)(x)) = E_n((A/s)(x))$。

由于 $(\widehat{A(x)}, s, \widehat{A(x)})$ 是一个亨泽尔对，由 [GiSt，命题 7.7]，我们有

$$SL_n(\widehat{A(x)})/E_n(\widehat{A(x)}) \cong SL_n((A/s)(x))/E_n((A/s)(x)) = 1$$

对任意 $n \geq 2$。又由于 $(A/s)(x)$ 是一个主理想整环，由 [La，第 IV 章，引理 6.1]，我们有：对每个 $n \geq 2$，$SL_n(D) = E_n(D)$，其中 $D = A(x)_s$。

注意，$\dim(D) \leq 1$。事实上，$\dim(\widehat{A(x)}) \leq 2$，且 ≤ 2 中的所有极大理想都包含s。由此可知，D 中的所有极大理想的高度均为 ≤ 1。于是由引理 2.4 可得，对于任意单连通 Chevalley–Demazure 群概形 G，有$G(D) = E(D)$。□

推论 3.3。设 A 是维数为 ≤ 2的正则环。设 G 是 $\mathbb{Z}$上的分裂（即 *Chevalley–Demazure*）约化群。那么 $H^1_{Zar}(A[x], G) = H^1_{Zar}(A, G)$。换言之，任意 *Zariski* 局部平凡的主 G-丛若定义在 $A[x]$上，均可由 A扩张得到。

证明。由 [Th，推论 3.2]，可知，群 G 是线性的，因为它定义在正则环 $\mathbb{Z}$上。接着根据广义奎伦局部-整体原理 [AHW，定理 3.2.5]（另见 [Mo]），要证明 $\xi \in H^1_{Zar}(A[x], G)$ 是从 A 扩张而来，只需证明对于每个

m 的极大理想 $A\ \xi|_{A_m[x]}$，它是平凡的。由定理 3.1 可知后者成立，因为 $(\xi|_{A_m[x]})|_{x=0}$ 是 A_m 上 Zariski 局部平凡的 G-扭子，故为平凡。□

4. The n-variable case变量情形

引理 4.1。设 A 是维数为 ≤ 2 的正则环，且 A 的每个极大局部化的分式域的特征均为 0。设 G 是定义在 $\mathbb{Z}$上的分裂（即 *Chevalley–Demazure*）单连通半单群。那么对于任意 $n \geq 1$

$$H^1_{\acute{e}t}(A[x_1, \ldots, x_n], G)_0 = 1.$$

证明。我们对 n使用归纳法。

由 [Th, Corollary 3.2], , 群 G 是线性的，因为它定义在正则环 $\mathbb{Z}$上。于是，由 [AHW, Theorem 3.2.5]，扭子 $\xi \in H^1_{\acute{e}t}(A[x_1, \ldots, x_n], G)$ 是从 A 扩张而来的，当且仅当对于任意极大理想 $m \subseteq A$， ξ在 $H^1_{\acute{e}t}(A_m[x_1, \ldots, x_n], G)$ 中的像是从 A_m扩张而来的。因此，要证明该结论，只需证明它对每个满足 $\dim(A) \leq 2$ 且分式域 K 的特征为 0 的正则局部环 A 成立。

假设 $n = 1$。由定理 3.1，映射

$$H^1_{\acute{e}t}(A[x_1], G)_0 \to H^1_{\acute{e}t}(K[x_1], G)$$

的核是平凡的。由于 K 具有特征 0，根据 [RR] 的主要结果，映射

$$H^1_{\acute{e}t}(K[x_1], G) \xrightarrow{x_1=0} H^1_{\acute{e}t}(K, G)$$

是双射。因此 $H^1_{\acute{e}t}(A[x_1], G)_0 = 1$。

假设 $n \geq 2$。环 $A(x_1)$ 是一个正则整环，且 $\dim(A(x_1)) \leq 2$ [La，第 IV 章，推论 1.3]。显然， $A(x_1)$ 的分式域 $K(x_1)$ 具有特征 0。于是由归纳假设

$$H^1_{\acute{e}t}(A(x_1)[x_2, \ldots, x_n], G)_0 = 1.$$

考虑交换图

$$\begin{array}{ccccc} H^1_{\acute{e}t}(A[x_1][x_2, \ldots, x_n], G) & \xrightarrow{x_2=\ldots=x_n=0} & H^1_{\acute{e}t}(A[x_1], G) & \xrightarrow{x_1=0} & H^1_{\acute{e}t}(A, G) \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ H^1_{\acute{e}t}(A(x_1)[x_2, \ldots, x_n], G) & \xrightarrow{x_2=\ldots=x_n=0} & H^1_{\acute{e}t}(A(x_1), G) & & \end{array}$$

这意味着，若 $\xi \in H^1_{\acute{e}t}(A[x_1, \ldots, x_n], G)_0$, , 则 ξ属于映射的核

$$H^1_{\acute{e}t}(A[x_1, \ldots, x_n], G) \to H^1_{\acute{e}t}(A(x_1)[x_2, \ldots, x_n], G).$$

设 $B = A[x_2, \ldots, x_n]$。因此存在首一多项式 $f(x_1) \in B[x_1]$ 使得

$$\xi \in \ker\left(H^1_{\acute{e}t}(B[x_1], G) \to H^1_{\acute{e}t}(B[x_1]_f, G)\right).$$

根据 [St22，定理 4.1] 后一个映射的核是平凡的。因此 ξ 是平凡的 1. □

引理 4.2。设 A 是一个维数为 ≤ 2 的半局部正则整环，且其分式域K 的特征为 0。设 G 是定义在 A 上的约化群，且其导出群 G^{der} 按照 [SGA3] 的意义是一个分裂的，即 *Chevalley–Demazure* 半单群。则

$$\ker\left(H^1_{\acute{e}t}(A[x_1, \ldots, x_n], G)_0 \to H^1_{\acute{e}t}(K[x_1, \ldots, x_n], G)\right) = 1.$$

证明。由引理 4.1 和推论 2.2 可得。□

定理 *1.2* 的证明。由 [Th，推论 3.2] 可知，群 G 是 A-线性的。接着由 [AHW，定理 3.2，$\xi \in H^1_{\acute{e}t}(A[x_1,\dots,x_n], G)$ 上的一个扭子 5] 是从 A 延拓而来的，当且仅当对于任意极大理想 $m \subseteq A$，ξ 在 $H^1_{\acute{e}t}(A_m[x_1,\dots,x_n], G)$ 中的像是从 A_m 延拓而来的。

因此，我们需要证明 $H^1_{Zar}(A[x_1,\dots,x_n],\ G)_0 = 1$。令 $B = A_m$ 为 A的一个极大局部化。则 B 是一个维数为 ≤ 2的正则局部环。若 B 包含一个域，则由 [St22，推论 5.5]可知，$B[x_1,\dots,x_n]$ 上的每个 Zariski 局部平凡主 G-丛都来自 B。否则， B 的分式域的特征为 0。于是由引理 4.2 可得

$$\ker\big(H^1_{\acute{e}t}(A[x_1,\dots,x_n],G)_0 \to H^1_{\acute{e}t}(K[x_1,\dots,x_n],G)\big) = 1.$$

再次由 [St22，推论 5.5], ，映射

$$H^1_{Zar}(K[x_1,\dots,x_n],G) \xrightarrow{x_1=\dots=x_n=0} H^1_{Zar}(K,G)$$

是双射，因此

$$H^1_{Zar}(B[\ x_1,\dots,x_n],G)_0 \subseteq \ker\big(H^1_{\acute{e}t}(A[x_1,\dots,x_n],G)_0 \to H^1_{\acute{e}t}(K[x_1,\dots,x_n],G)\big) = 1$$

如所需。 □

References

[AHW] A. Asok、M. Hoyois、M. Wendt，《$\mathbb{A}^1$-同伦理论中的仿射可表性结果 II：主丛与齐性空间》，《几何与拓扑》22 (2018)，1181–1225。[Ba] H. Bass，《“经典”代数 K-理论中的若干问题》，载于《代数 K-理论 II：“经典”代数 K- 理论及其与算术的联系》（会议论文集，巴特尔纪念研究所，西雅图，华盛顿州，1972）。《数学讲义》第342卷 (1973)，第3–73页。[BC] A. Bouthier、K. ˇCesnaviˇcius，《环群上的扭子与 Hitchin 纤维化》，Annales de l’Ecole normale sup´erieure 55 (2022)，791–864。[C1] K. ˇCesnaviˇcius，《准分裂非分歧情形下的 Grothendieck–Serre 猜想》，《数学论坛：Pi》 (2022)，10:e9，1–30。[C2] K. ˇCesnaviˇcius，《关于正则环上的扭子的问题》，《越南数学学报》47 (2022)，第1期，39–107。[C3] K. ˇCesnaviˇcius，《光滑除子的补集上的扭子》，《剑桥数学杂志》12 (2024)，903–936。[Ch] C. Chevalley，《论某些简单群》，《东北数学杂志》7 (1955)，14–66。[CTO] J.–L. Colliot–Th´el`ene、M. Ojanguren，《局部平凡的主齐性空间》，Publications Math`ematiques de l’IHES 75 (1992)，97–122。[CTS] J.-L. Colliot-Th´el`ene 和 J.-J. Sansuc，《迷向环面下的主齐性空间：应用》，《代数学杂志》106 (1987)，148–205。[SGA3] M. Demazure、A. Grothendieck，《群概形》，《数学讲义》第151–153卷，施普林格出版社，柏林-海德堡-纽约，1970。[GiSt] P. Gille、A. Stavrova，《约化群概形上的 R-等价》，即将发表于《代数与数论》。[H67] G. Harder，《戴德金环上的半单群概形》，《数学创刊》4 (1967)，165–191。[K] V. I. Kopeiko，《关于 Ojanguren 定理》，《苏联数学杂志》63 (1993)，683。[La] T. Y. Lam，《射影模上的 Serre 问题》，Springer Monographs in Mathematics，Springer，柏林、海德堡、纽约，2006。[Ma] H. Matsumoto，《关于分裂半单群的算术子群》，Ann. Sci. de l’´E.N.S. 4e s´érie，第2卷，第1期 (1969)，1–62。[Mi] J. S. Milne，《´etale 上同调》，《普林斯顿数学丛书》第33卷，普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州，1980。[Mo] L-F. Moser，《有理平凡扭子与 Serre-Grothendieck 猜想》，毕业论文，2018。[Mur66] M. Pavaman Murthy，《射影 $A[X]$-模》，《伦敦数学学会杂志》41 (1966)，453–456。

[Gu] Ning Guo，《半局部戴德金环上的 Grothendieck–Serre 猜想》，Transformation Groups 27 (2022)，897–917。[GuLi] Ning Guo、Fei Liu，《赋值环上的扭子之巴斯–奎伦猜想》，IMRN 11 (2025)，1–17。[Ni84] Y. Nisnevich，《戴德金环上有理平凡的主齐性空间与约化群概形的算术》，C. R. Acad. Sc. Paris，Série I 299 (1984)，第1期，5–8。[PStV] I. Panin、A. Stavrova 和 N. Vavilov，《关于约化群概形上的主 G-丛之 Grothendieck-Serre 猜想：I》，Compos. Math. 151 (2015)，第3期，535–567。[PSt1] I. A. Panin 和 A. K. Stavrova，《关于半局部戴德金整环上主 G-丛的 Grothendieck-Serre 猜想》，Zap. Nauchn. Sem. S.-Petersburg. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (POMI) 443 (2016)，第Voprosy Teorii Predstavleniĭ Algebr i Grupp. 29辑，133–146。[PSt2] I. Panin 和 A. Stavrova，《关于相对射影直线的吉尔定理》，arXiv: 2305.16627v3。[PSt3] I. Panin、A. Stavrova，《关于 Harder 定理》，arXiv:2502.19223。[Par] Raman Parimala，《维数为2的正则环的多项式扩张上的二次空间》，Math. Ann. 261 (1982)，287–292。[PeS] V. A. Petrov、A.K. Stavrova，《各向同性约化群中的初等子群》，Algebra i Analiz 20 (2008)，160–188；译文见 St. Petersburg Math. J. 20 (2009)，625–644。[Pl] E. B. Plotkin，《某些例外切瓦莱群的 K_1-函子的满射稳定化》，Journal of Soviet Mathematics 64 (1993)，第1期，751–766。[Q] D. Quillen，《多项式环上的射影模》，《数学创刊》36 (1976)，167–171。[RR] M.S. Raghunathan、A. Ramanathan，《仿射直线上的主丛》，Proc. Indian Acad. Sci., Math. Sci. 93 (1984)，137–145。[R89] M. S. Raghunathan，《仿射空间上的主丛与射影直线上的丛》，Math. Ann. 285 (1989)，309–332。[Se02] J.-P. Serre，《伽罗瓦上同调》，英文版，Springer Monographs in Mathematics，施普林格出版社，柏林，2002，由 Patrick Ion 从法文译出并由作者修订。[St19] A. Stavrova，《离散霍奇代数上的各向同性约化群》，J. Homotopy Relat. Str. 14 (2019)，509–524。[St20] A. Stavrova，《戴德金整环上的多项式环的切瓦莱群》，J. Group Theory 23 (2020)，121–132。[St22] A. K. Stavrova，《等特征情形下非稳定 K_1-函子的 $\mathbb{A}^1$-不变性》，Indag. Math. 33 (2022)，322–333。[Ste] M. R. Stein，《以切瓦莱群为模型的 K_1、K_2 及相关函子的稳定性定理》，Japan. J. Math. (N.S.) 4 (1978)，第1期，77–108。[Su] A. Suslin，《多项式环上的射影模都是自由模》，Soviet Math. Dokl. 17 (1976)，1160–1164。[SuK] A.A. Suslin、V.I. Kopeiko，《多项式环上的二次模与正交群》，J. of Soviet Math. 20 (1982)，2665–2691。[Th] R. W. Thomason，《任意基概形上的等变消解、线性化与希尔伯特第十四问题》，Adv. in Math. 65 (1987)，第1期，16–34。

St. Petersburg Department of Steklov Mathematical Institute, nab. r. Fontanki 27, 191023St. Petersburg, Russia电子邮件地址: anastasia.stavrova@gmail.com