arXiv:2512.18869v1 [cs.RO] 21 Dec 2025

使用控制折线构造和变形 P-多面体

Georg Nawratil

离散数学与几何研究所与几何与计算设计中心，维也纳工业大学，电子邮箱：*nawratil@geometrie.tuwien.ac.at*

摘要。 在第19届机器人运动学进展国际研讨会上，作者介绍了一类新型的连续柔性离散曲面，并提到这些所谓的 P-多面体（或 P-网）可以通过三条控制折线直接调整其空间形状。在后续研究中，我们探讨了这一具有直观性的方法。借助交互式工具，该方法使这些柔性平面四边形曲面适用于可变形设计任务。根据控制折线构造 P-多面体，还可用于高效算法计算其等距变形。此外，我们还讨论了屈曲极限、分岔构型、可展/可折叠图案以及管状 P-多面体。

关键词： 刚性折叠性、平面四边形曲面、分岔、屈曲极限、P-hedra 管

1 引言

平面四边形曲面（PQ 曲面）是一种由四边形面板构成的板铰结构，这些面板按照方格网的组合方式，通过转动关节彼此连接。如果这种曲面仅通过改变二面角就能连续变形，则称其为连续可变形（或刚性可折叠或等距可变形）。众所周知，PQ 曲面的刚性折叠性并非外在几何的性质，而是内在几何的性质 [1],，后者由平面四边形的角点角决定。尽管如此，某些类别的刚性可折叠 PQ 曲面——即 V-多面体（及其相关曲面 [2]）和最初由 Sauer 与 Graf [3], 提出的 T-多面体——能够通过控制折线直接确定其空间形状。

在第2节中，我们证明这对 P-多面体同样成立，因此它们适用于借助 V-hedra 和 T-多面体等交互式工具进行可变形设计任务（参见 [2, 4, 5] 及其中的参考文献）。在第3节中，我们给出 P-多面体类内等距变形的算法，并分别讨论可能的分岔构型和屈曲极限（参见注释2和3）。此外，在第4节中，我们还将谈及可展/可平折图案、P-多面体管的构造以及未来的研究方向。

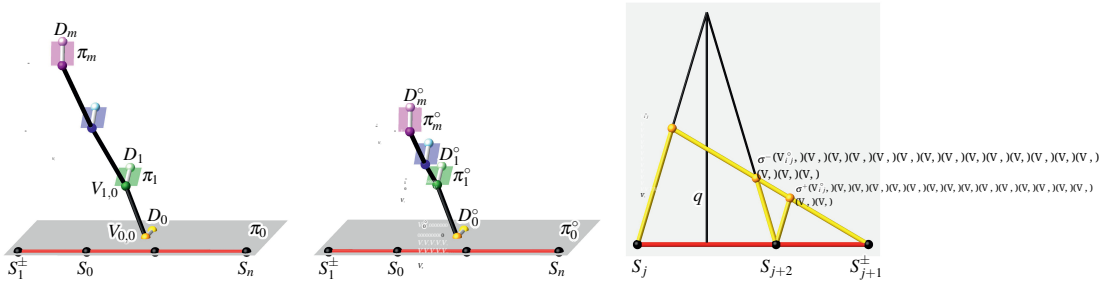

图 1（左）一般 P-面体的输入：轨迹折线 $V_{0,0}$,$V_{1,0}$,...,V_m,0、方向折线 D_0,D1,...,D_m 以及顶点折线 S_0,$S_1^{\pm}$,...,$S_{n-1}^{\pm}$,S_n。（中）相关轴向P-多面体的输入：轨迹折线 V_0°,0,V_1°,0,...,V_m°,0、方向折线 D_0°,D_1°,...,D_m° 以及顶点折线 S_0,$S_1^{\pm}$,...,$S_{n-1}^{\pm}$,S_n。（右）与 $S_{j+1}^{\pm}$符号相关的两种构造示意图。

2 由三条控制折线重构一般 P-多面体

下面我们将介绍如何根据图1左侧所示的三条折线重建一个一般 P-面体。

给定一条所谓的轨迹折线 $V_{0,0}$,$V_{1,0}$, . . . ,V_m,0。此外，我们还有一条由方向点 D_0,D1, . . . , D_m 构成的折线，并满足 $V_{i,0} \neq D_i$。这些点不能任意选取，而是向量 $\overrightarrow{V_{i,0}D_i}$ 必须与一个固定方向正交；该固定方向可假定为固定坐标系的 z方向，即 $\langle D_i - V_{i,0}, z\rangle = 0$，其中 $\langle .,. \rangle$ 表示标准标量积。由于向量 $\overrightarrow{V_{i,0}D_i}$ 的长度并不重要，因此可将它们假定为单位向量。

经过 $V_{i,0}$ 和 D_i 且平行于 z方向的平面称为轮廓平面 π_i。此外，我们假设任意两个连续的轮廓平面既不重合[1]，也不平行[2]。不失一般性（w.l.o.g.），我们可以假设 z 轴是 π_0 和 π_1的交线。此外，不失一般性，我们可以假设 π_0 等于 xz平面，且 $V_{0,0}$ 位于正x轴[3]上。除了轨迹折线和方向折线外，我们还可以在 z 轴上选取有限个[4] 点 S_0,S1, . . . , S_n；即 $S_i = (0, 0, z_i)^T$。为避免退化情形，我们假设任意三个连续顶点 S_i、S_{j+1} 和 S_{j+2}两两不同。此外，我们为点 S1, . . . , S_{n-1} 分别指定正号或负号[5]，由此得到序列 S_0,$S_1^{\pm}$, . . . , $S_{n-1}^{\pm}$, S_n。我们将这条折线称为顶点折线。本文本节末尾将解释这一命名的由来。

最后，我们假设轨迹折线不包含在*xy*平面内，因为否则该 P-面体也属于 T- 多面体这一类，而这一类已得到充分研究和理解（参见 [3, 4, 6, 7] ）。

[1] $\pi_i = \pi_{i+1}$ 且 $V_{i,0} \neq V_{i+1,0}$ 表示分岔构型（参见注3）。[2] $\pi_i \parallel \pi_{i+1}$ 表示需要进行一些特殊处理，因为此时我们得到一个平移曲面带（参见第4节）。[3] 我们假设$V_{0,0}$ 与原点不同，以避免退化情形。[4] 如 [8], S_i 也可以是无穷远点，但这里不考虑这一特殊情形。[5] $\pm$的指定可以任意进行，唯独注记1中提到的情形除外。

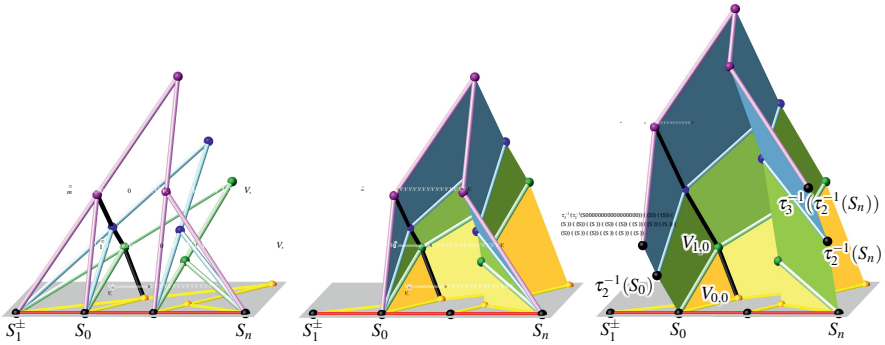

图 2 （左）以 π_i° 中的 σ^+ 和 σ^- 为起点、$V_i^\circ{}_{,}\ 0$ 为起始点，对两种可能的线性构造进行迭代复合。将所得点集解释为轴向P-多面体（中）以及相应的一般 P-面体（右）。

利用这三条输入折线，可以通过以下三个步骤构造相关的一般 P-面体：

1. 第一步中，我们按如下方式计算与一般 P-面体相关联的轴向P-多面体的输入（参见图 1-中心）：沿 $\overrightarrow{}$Vi−1,0,Vi,0 方向对所有点 Vi,0,. ..,Vm,0 以及点 $D_i, \ldots, D_m$ 进行平移 τ_i，使得$\tau_i(\pi_i)$包含 z 轴。对 i $= 2, \ldots,$ m 迭代此过程后，我们得到折线 V $\overset{\circ}{0}$,0 =V0,0,V $\overset{\circ}{1}$,0 =V1,0,V $\overset{\circ}{2}$,0, . . . ,V $\overset{\circ}{m}$,0 和 $D_0^\circ =$ $D_0, D_1^\circ = D_1, D_2^\circ, \ldots, D_m^\circ$，以及方向平面束 $\pi_0^\circ = \pi_0, \pi_1^\circ = \pi_1, \pi_2^\circ, \ldots, \pi_m^\circ$。由于我们只进行了平移，以下性质成立：

$$V_{i,0}^\circ V_{i+1,0}^\circ \parallel V_{i,0}V_{i+1,0}, \quad V_{i,0}^\circ D_i^\circ \parallel V_{i,0}D_i, \quad \pi_i^\circ \parallel \pi_i. \tag{1}$$

这是 Sauer 和 Graf [3, 6]在 [8]中提到的平行操作。

2. 在每个平面 π_i°中，我们分别对两种可能的线性构造 σ^+和 σ^-进行迭代复合，以确定点序列 $V^\circ{}_i,0, V^\circ{}_i1, \ldots, V^\circ{}_{i,n-1}$（参见图 2 左侧）。线性映射 $\sigma^\pm$ 根据 [8]定义如下（参见图1右侧）：

(+) 存在一个中心缩放 σ^+，它将 S_j映射到 S_{j+2}，其中心为 S_{j+1}^+。(−) 存在一个透视共线变换 σ^-，它将 S_j映射到 S_{j+2}，其中心为S_{j+1}^-，且以q作为 S_j和S_{j+2}的角平分线作为轴。

然后，$V^\circ{}_{i,j+1}$可由$V^\circ{}_{i,j}$按 $\sigma^\pm(V^\circ{}_{i,j})$ 的方式构造，其中$j = 0, \ldots, n-2$。

3. 到第二步结束时，我们已经得到了轴向P-多面体的所有点（参见图 2 中部），从中也可以看出，S_i 是圆锥的顶点。要重构一般 P-面体，我们必须将平移 τ_i^{-1}迭代应用于所有点 V °i,0,V °i 1, . . . ,V °i,n−1, . . . , V °m,0,V °m 1, . . . ,V °m,n−1，其中 i $= 2,$. .., m。为了生成边界，我们还将这一系列变换分别应用于点 S_0 和 S_n（参见图 2 右侧）。

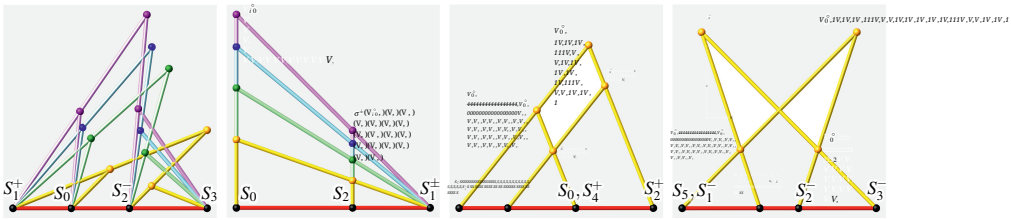

图3 （左）位于平面 π_i°中的点集，对于$i=0,\ldots m$，可解释为自由度为 1 的平面连杆机构 L_i。若将所有平面 π_i°旋转至 π_0°，其中$i=1,\ldots m$，则可得到图示的超约束平面连杆机构 <style id='23} $\mathscr{L}$，该机构在 [8] 中讨论。（中左）注2的分岔构型。连杆机构L_0 分别包围平行四边形（中右）和反平行四边形（右）的示意图。

3 P-多面体类中的等距变形

根据第2节中的重构，我们不失一般性地假设，一般 P-面体及其对应的轴向 P-多面体的所有边长均已知。由于一般 P-面体可通过第2节的步骤 3 从轴向 P-多面体得到，因此我们可以只考虑轴向P-多面体的等距变形参数化，相关说明见接下来的两个小节。

3.1 对连杆机构 L_0的运动进行参数化

我们假设$V_{0,0}^\circ$ 位于正x轴上，并且在变形过程中应保持这一性质。我们不使用$V_{0,0}^\circ$ 的x坐标作为运动参数t，而是根据以下准则使用S_0 或S_1 的z坐标：

$$\begin{array}{llll} \text{Case (a)} & t=z_0 & \text{for} & \|S_0-V_{0,0}^\circ\|<\|S_1-V_{0,0}^\circ\| \\ \text{Case (b)} & t=z_1 & \text{for} & \|S_0-V_{0,0}^\circ\|>\|S_1-V_{0,0}^\circ\| \end{array}$$

之所以作出这一选择，是因为在构型$S_0,V_{0,0}^\circ,S_1$的连续变形过程中，只有较短杆的端点可能改变其z坐标的符号。为避免不必要的情况区分[6]，我们假设该z坐标等于运动参数t。注意，t_* 表示变形的时刻，该时刻对应于初始给定的构型。

到目前为止，情形（a）和情形（b）都未涵盖 $\|V_{0,0}^\circ-V_{0,0}^\circ\|=SV_iSV_i$ 的可能性。在这种情况下，我们考虑满足 SV_iSV_i 的最小 i。若 $\|S_0-V_{i,0}^\circ\|<\|S_1-V_{i,0}^\circ\|$，则应用情形（a）；否则应用情形（b）。由于第2节第四段中提出的假设，对所有 $i=0,\ldots,m$，等式 $\|S_0-V_{i,0}^\circ\|=\|S_1-V_{i,0}^\circ\|$ 不可能成立。

[6] 出于同样的原因，我们不选择$V_{0,0}^\circ$ 的x坐标作为运动参数。

注记1. 如果 $\|S_0 - V^\circ_{i,0}\| = \|S_1 - V^\circ_{i,0}\|$ 对至少一个 $i \in \{0,\dots,m\}$ 成立，那么顶点折线可以只赋予加号[7]；也就是说，$S_0, S_1^+, \dots, S_{n-1}^+, S_n$，否则某些点 $V^\circ_{i,1}, \dots, V^\circ_{i,n-1}$ 会趋于无穷远。这一点可通过将图1右侧所示的映射 σ^- 应用于这个特殊情形而轻易看出。$\diamond$

明确运动参数 t 的选择后，我们按如下步骤进行：

a) 从 $S_0(t)$ 开始，然后将 $V^\circ_{0,0}(t) = (x^{0,0}(t), 0, 0)^T$ 参数化为
$x^{0,0}(t) := \sqrt{\|V^\circ_{0,0} - S_0\|^2 - t^2}$。由此可以计算 $S_1(t) = (0, 0, z_1(t))^T$
其中，$z_1(t) = \operatorname{sgn}(z_1)\sqrt{\|V^\circ_{0,0} - S_1\|^2 - x^{0,0}(t)^2}$.

b) 在这种情况下，我们从 $S_1(t)$ 开始，并将 $V^\circ_{0,0}(t) = (x^{0,0}(t), 0, 0)^T$ 参数化为
$x_{0,0}(t) := \sqrt{\|V^\circ_{0,0} - S_1\|^2 - t^2}$. From this we can compute $S_0(t) = (0, 0, z_0(t))^T$
by $z_0(t) = \operatorname{sgn}(z_0)\sqrt{\|V^\circ_{0,0} - S_0\|^2 - x_{0,0}(t)^2}$.

经过上述分类讨论，我们得到三个参数化的点 $S_0(t)$、$V^\circ_{0,0}(t)$、$S_1(t)$。本小节余下部分的表述方式适用于这两种情况。

接下来计算 $V^\circ_{0,1}(t) = (x^{0,1}(t), 0, z^{0,1}(t))^T$：

$$V^\circ_{0,1}(t) = S_1(t) + \operatorname{sgn}(k)\frac{\|V^\circ_{0,1} - S_1\|}{\|V^\circ_{0,0}(t) - S_1(t)\|}\left(V^\circ_{0,0}(t) - S_1(t)\right) \tag{2}$$

其中 $k := \langle V^\circ_{0,1} - S_1, V^\circ_{0,0} - S_1\rangle$。然后可以通过下式计算 $S_2(t)$：

$$S_2(t) = V^\circ_{0,1}(t) + \operatorname{sgn}(k)\frac{\|V^\circ_{0,1} - S_1\|\|V^\circ_{0,0} - S_0\|}{\|V^\circ_{0,0} - S_1\|\|S_0(t) - V_{0,0}(t)\|}M^\pm\left(S_0(t) - V^\circ_{0,0}(t)\right) \tag{3}$$

其中，选择 $M^+ = \operatorname{diag}(1,1,1)$ 和 $M^- = \operatorname{diag}(1,1,-1)$，分别取决于与 $S_1(t)$ 相关的符号 $\pm$；不失一般性地，可假定该符号与分配给 S_1 的符号相同（参见注2）。

注2. 只有在某个构型中，σ^+ 和 σ^- 对点 $V^\circ_{i,0}(t)$（其中 $i = 0,\dots,m$）的作用方式相同时，$S_1^\pm(t)$ 的符号 $\pm$ 才会在等距变形过程中发生改变。这种分岔只可能出现在图3中左侧所示的构型中，但此时该P-面体也属于T-多面体类（参见第2节第四段）。因此，非T-面体P-面体不可能具有由映射 σ^+ 和 σ^- 发生变化所导致的分岔构型。$\diamond$

通过递增指标迭代方程（2）和（3），可得到完整平面连杆机构 L_0 的参数化；即得到 $S_0(t)\dots, S_n(t)$ 和 $V^\circ_{0,0}(t)\dots, V^\circ_{0,n-1}(t)$。

[7] 注意，在这个特殊情况下，L_i 是一个剪刀式连杆机构。

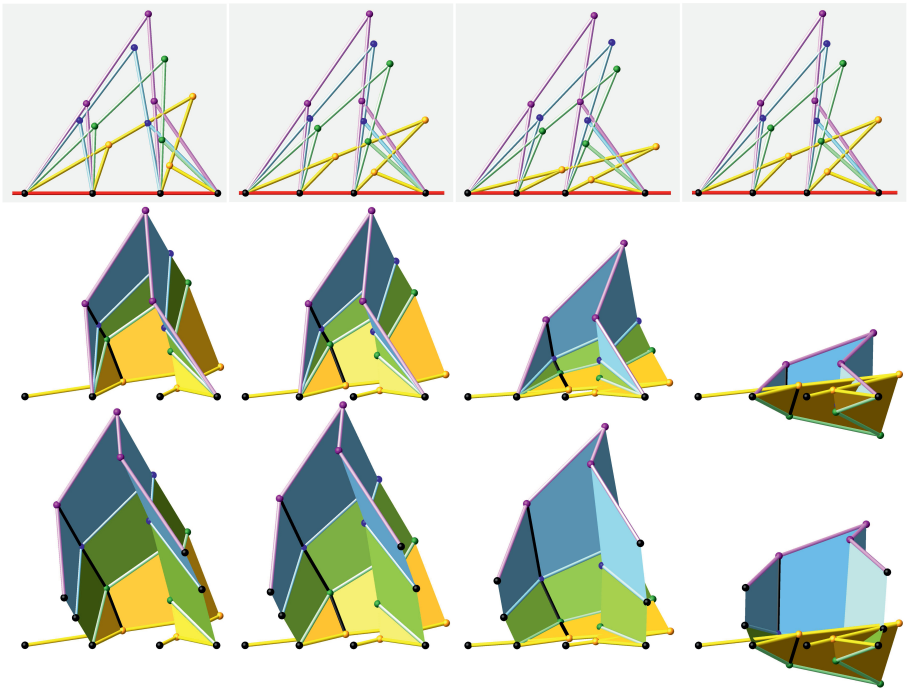

图4 平面连杆机构 $\mathscr{L}$ （上）、轴向P-面体（中）和一般 P-面体（下）的等距变形序列。相应的动画可从 https://www.geometrie.tuwien.ac.at/nawratil/publications.html 下载。第二列对应给定的构型（参数 t_*），已在图2和图3左侧展示。第三列展示了一个屈曲极限，第四列展示了参数 t_* 对应的另一个分支。因此，平面连杆机构 $\mathscr{L}$ 在第二列和第四列中具有相同的构型。请注意，第四列中的两个P-多面体都有自交。

3.2 轨迹折线运动的参数化

我们从计算$V_1^\circ{}_{,}0(t) = (x^{1,0}(t), y^{1,0}(t), z^{1,0}(t))^T$开始。这三个坐标可由以下方程组计算：

$$\|V_{1,0}^\circ(t) - S_0(t)\|^2 - \|V_{1,0}^\circ - S_0\|^2 = 0, \quad \|V_{1,0}^\circ(t) - S_1(t)\|^2 - \|V_{1,0}^\circ - S_1\|^2 = 0, \\ \|V_{1,0}^\circ(t) - V_{0,0}(t)\|^2 - \|V_{1,0}^\circ - V_{0,0}\|^2 = 0, \tag{4}$$

有两个解，它们关于 π_0° 所在的平面对称。我们将包含 $V_1^\circ{}_{,}0$ 的分支记为 $V_1^\circ{}_{,}0(t)$；即 $V_1^\circ{}_{,}0(t_*) = V_1^\circ{}_{,}0$；另一个分支记为 $V_1^\circ{}_{,}0(t)$。

现在我们选择分支 $V_1^\circ{}_{,}0(t)$。利用这一参数化方法，我们可以通过求解与公式 (4) 类似的方程组来计算 $V_2^\circ{}_{,}0(t)$。我们可以重复这一过程，直到获得完整参数化的轨迹折线 $V_0^\circ{}_{,}0(t), V_1^\circ{}_{,}0(t) \ldots, V^\circ{}_{m,}0(t)$。

注*3*。 两个分支$V^\circ{}_{i,}0(t)$和$V_i^\circ{}_{,}0(t)$的常见构型由相关点的共面性（即轮廓平面 π_{i-1}° 和 π_i°

重合[8]）刻画；这对应于$\det(V^{\circ}_{i,0}(t) - S_0(t), V^{\circ}_{i,0}(t) - S_1(t), V^{\circ}_{i,0}(t) - V_{i-1,0}(t)) = 0$的零点。若计算所有$i = 1, \ldots, m$对应的实零点，并将其与$t_*$一并排序，可得到以下序列：$t_\alpha \le t_\beta \le \ldots \le t_\lambda < t_* < t_\mu \le \ldots \le t_\omega$。这也意味着P-面体的柔性区间为$t \in [t_\lambda, t_\mu]$，因为当越过$t_\lambda$ 和t_μ 的取值时，相应系统（4）的解会从实数变为复数。注意，根据脚注1中的假设，柔性区间的长度不能为零；也就是说，P-面体总能从给定构型出发产生实数屈曲。我们可以沿着这一等距变形继续进行，直至达到屈曲极限t_λ 和t_μ。由于这些构型也是分岔构型，我们可以切换到另一个分支并反向屈曲（参见图4）。◇

轴向P-多面体其余顶点的参数化可以通过以 $V^{\circ}_{i,0}(t)$ 为起点，迭代与式（2）类似的方程来完成。由此可得到点 $V^{\circ}_{i,1}(t), \ldots, V^{\circ}_{i,n-1}(t)$，其中 $i = 1, \ldots, m$。

为验证所给算法，我们在 Maple 中进行了测试实现，并用它生成了图4所示的示例。为了实现实时交互操作，计划将此算法[9] 实现为 Rhino/Grasshopper 插件。此类插件还可用于近似半离散P-多面体的等距变形：将给定的光滑输入轨迹离散化为由足够短线段组成的折线。

4 最后说明

• **可展图案**在折纸和制造中发挥着重要作用。可展（也可平折）图案可视为一种特殊的P-多面体，其中所有分岔可能性同时出现；也就是说，在某一构型中，所有 π_i 都塌缩到同一个平面上。显然，可以构造出该P-多面体处于这种展开（平折）构型时的形态，使得 $V_{i,j} = V^{\circ}_{i,j}$ 以及 $\pi_i = \pi^{\circ}_i$ 成立。但此时无法确定从所构造的构型出发是否存在实际的弯曲，因为关系 $t_\lambda = t_* = t^\mu$（按注3的表述）可能成立。

为了证明实数屈曲的存在，我们只需证明平面连杆机构 $\mathscr{L}$（参见图3）可以与一个无穷小运动（≠瞬时静止）相关联，使得对于所有 $V^{\circ}_{i,j}$ 和 $V^{\circ}_{i+1,j}$，其中 $i = 0, \ldots, m-1$ 且 $j = 0, \ldots, n-1$，两者间的距离不会瞬时增大，否则 PQ 网格就会撕裂。这种不扩张性可通过以下判据轻松检验：

$$\langle v(V^{\circ}_{i,j}), V^{\circ}_{i,j} - V^{\circ}_{i+1,j} \rangle + \langle v(V^{\circ}_{i+1,j}), V^{\circ}_{i+1,j} - V^{\circ}_{i,j} \rangle \le 0 \qquad (5)$$

其中，$v(.)$ 表示与平面连杆机构 $\mathscr{L}$ 相关联的点的速度。这些速度的确定是平面机构运动学中的标准步骤，甚至可以通过纯粹的图解法完成（例如 [9]）。

[8] 这也刻画了 T-多面体的屈曲极限/分岔构型（参见 [3, 4, 6]）。[9] 脚注4中提到的特殊情况必须单独编码。

注*4*。请注意，可展/可平折 P-多面体属于 Izmestiev [1] 分类中的圆锥等模 PQ 曲面。它们的半离散类比物属于 [10] 中讨论的网。◇

• **P-hedra 管** 是另一类有趣的对象，因为它们可被视为刚性可折叠超材料/表面的构件（参见 [5]）。构造连杆机构 $L0$，使得对于所有 $t \in [t_\lambda, t_\mu]$，$V_{0,0}^{\circ}(t) = V_{0,n-1}^{\circ}(t)$ 都成立，即可得到这类管。对于 $n = 5$，这只有在平行四边形或反平行四边形的情况下才可能成立；对于后者，其对称轴必须与轴向P-多面体的轴垂直（见图3）。平行四边形对应刚性可折叠棱柱管，而反平行四边形则对应由平面对称布里卡八面体组成的组合体。

类似于 [5]，我们也可以通过共边和/或面间对齐耦合来组合这些可弯曲管。删除后一种耦合中的公共面，便可构造出比上述两种更复杂的 P-hedra 管。

• **未来研究** 致力于研究：（i）P-hedra 管的拉链耦合（参见 [5]）；以及（ii）包含于一般 P-多面体类中的平移曲面的等距变形，这些曲面曾在脚注 2 中提及。

致谢 本研究全部或部分由奥地利科学基金（FWF） [资助，项目为 F77：SFB“高级计算设计”，子项目 7]。为实现开放获取，作者已对因本次投稿产生的任何作者接收稿版本申请知识共享署名公共版权许可。

参考文献

1. Izmestiev, I.：具有四边形底面的可变形 Kokotsakis 多面体分类。International Mathematics Research Notices **2017**（3）：715–808（2017） 2. Kilian, M., Nawratil, G., Raffaelli, M., Rasoulzadeha, A., Sharifmoghaddama, K.：离散 Voss 网的交互式设计及其刚性折叠模拟。Computer Aided Geometric Design **111**：102346（2024） 3. Sauer, R., Graf, H.：¨关于类比于开放面片折曲的曲面¨弯曲。Mathematische Annalen **105**：499–535（1931） 4. Sharifmoghaddam, K., Nawratil, G., Rasoulzadeh, A., Tervooren, J.：利用柔性梯形四边形曲面进行可变形设计。IASS 年度研讨会论文集，Surrey Symposium：可变形结构（IASS WG 15），第 1–13 页，IASS（2021） 5. Sharifmoghaddam, K., Maleczek, R., Nawratil, G.：T-多面体类型刚性可折叠管状结构的推广。Mechanics Research Communications **132**：104151（2023） 6. Sauer, R.：差分几何。Springer（1970） 7. Izmestiev, I., Rasoulzadeh, A., Tervooren, J.：离散与光滑 T 曲面的等距变形。Computational Geometry **122**：102104（2024） 8. Nawratil, G.：从轴向 C-多面体到一般 P-网。Advances in Robot Kinematics（J. Lenarcic, M. Husty 编），第 340 页，2024 9 第 347 页，– Springer，。Wunderlich, W.：平面运动学。Bibliographisches Institut AG, 曼海姆（1970） 10. Mundilova, K.：关于曲线折痕的刚性母线折叠：保持共轭网的半离散全局可展共轭网的等距变形。预印本（2025）

[10] 这两种情况也出现在 T-多面体中，此外还存在鸢形情况（参见 [5]）。