arXiv:2512.18872v1 [math.CO] 21 Dec 2025

Gr¨unbaum–Rigby 构形作为一种特殊的 K´arteszi 构形

G´abor G´evay[1], Gy¨orgy Kiss[2,3], 和 Toma˘z Pisanski[3,4,5]

[1]塞格德大学，匈牙利塞格德[2]匈牙利布达佩斯厄特沃什·罗兰大学¨FAMNIT，斯洛文尼亚科佩尔普里莫斯卡大学¨IAM，斯洛文尼亚科佩尔普里莫斯卡大学´卢布尔雅那数学、物理与力学研究所

2025年12月23日

摘要

1990年，布兰科·Gr¨unbaum 和约翰·里格比提出了一种 4-构形，如今称为*Gr¨unbaum–Rigby* 构形；记作 GR(21_4)。独立地且更早一些，费伦茨·K´arteszi 于 1986 年发表了一篇论文，其中证明了一个实几何定理，该定理导出了一系列 4-构形 K(n; ℓ, m)。在更早的 1964 年论文中，他给出了一幅图，其内容与 Gr¨unbaum 和 Rigby 所给出的图基本相同。本文探讨*K´arteszi* 构形的一些性质，并特别证明 GR(21_4) 与 K(7;2, 3) 同构。我们提出一个定理，给出参数 n, ℓ, m 的充要条件，使相应的构形 K(n; ℓ, m) 能够实现为具有 n 重旋转对称性且没有额外关联的几何多环构形。

关键词：几何构形、天体构形、Gr¨unbaum–Rigby 构形、K´arteszi 构形、正则正n边形。

数学主题分类：51A20, 51A45, 51E30, 05B30, 01A60。

1 引言

Ferenc K´arteszi（1907–1989）被许多人视为匈牙利有限几何学派之父。2008年，为纪念Ferenc K´arteszi诞辰一百周年，G´abor Korchm´aros和Tam´as Sz˝onyi编辑了一期离散数学贡献特刊 [12] ，其中刊载了K´arteszi的简短传记 [13]。1972年，K´arteszi出版了一部有限几何著作，其中一

章专门讨论构形 [10], ，最初以匈牙利语出版，后来被译成英语（1976年）、意大利语（1978年）和俄语（1980年）。

在本文中，我们希望强调 K´arteszi 对点线构形理论所作的一项重要却不幸被忽视的贡献。

第一本关于构形的著作由 F. Levi [14] 于 1929 年以德文写成。后来，1932 年，Hilbert 和 Cohn-Vossen [8] 专门用整整一章讨论射影构形。下一项重要进展是 Coxeter [5]的论文，其中引入了*Levi*图 和*Menger*图 的概念（关于这些图，另见 [15]）。

Branko Gr¨unbaum [6] 的著作代表了点线构形理论发展的又一个里程碑。该书对当时该领域的研究进行了综合与重新组织，而这建立在作者关于构形的研究工作之上。在某些情况下，该书偏离了既有术语。例如，用平衡构形替代了术语对称构形 。书中引入了组合构形、拓扑构形和几何构形之间的区别。新引入的术语 k-构形 也表示这样的构形：一条直线上有 k 个点，并且每个点上有k 条直线通过。

一章专门研究 3-构形，另一章则专门研究 4-构形。

3-构形的存在性问题很久以前就已解决。然而，Gr¨unbaum 在与 Rigby 合著的论文中提出了一个存在性问题 [7]，他们证明了一种几何点—直线（21_4）构形的存在；Felix Klein 早先研究过它的组合版本。由于这篇论文，这种构形被称为 *Gr¨unbaum–Rigby* 构形；我们将其记作 GR(21_4)（其示意图见图 1）。

后来，他与一些同事和学生撰写了一系列论文，大多发表于$Geombinatorics$，探讨至少存在一个（n_4）构形时 n 的取值问题。

2003 年，Boben 和 Pisanski [4]独立地通过一种关于多环构形的一般理论研究了同一问题。若一个组合构形具有半正则自同构，即阶为 m 的自同构，且每个由点或直线组成的轨道阶数都相同，均为 m，则称其为多环构形。若一个几何构形的底层组合构形是多环构形，且相应的半正则自同构可实现为 m 重旋转，则称该几何构形为多环构形。在 Gr¨unbaum 的著作 [6]中，一类特殊的多环构形被称为 d-星状配置 [6, 定义 3.5.1]。他的学生 Leah Berman 将其称为 d-天体构形。人们使用了两种记法：Boben 和 Pisanski 将它们表示为

$$C_4(m; (p_1, p_2, \ldots p_d), (q_1, q_2, \ldots, q_d), t)$$

构形，而 Gr¨unbaum 和 Berman 将其称为

$$m\#(p_1, q_1; p_2, q_2; \ldots; p_d, q_d)$$

。由于几何 d-天体构形只有在参数

$$t = ((p_1 + p_2 + \ldots + p_d) - (q_1 + q_2 + \ldots + q_d))/2$$

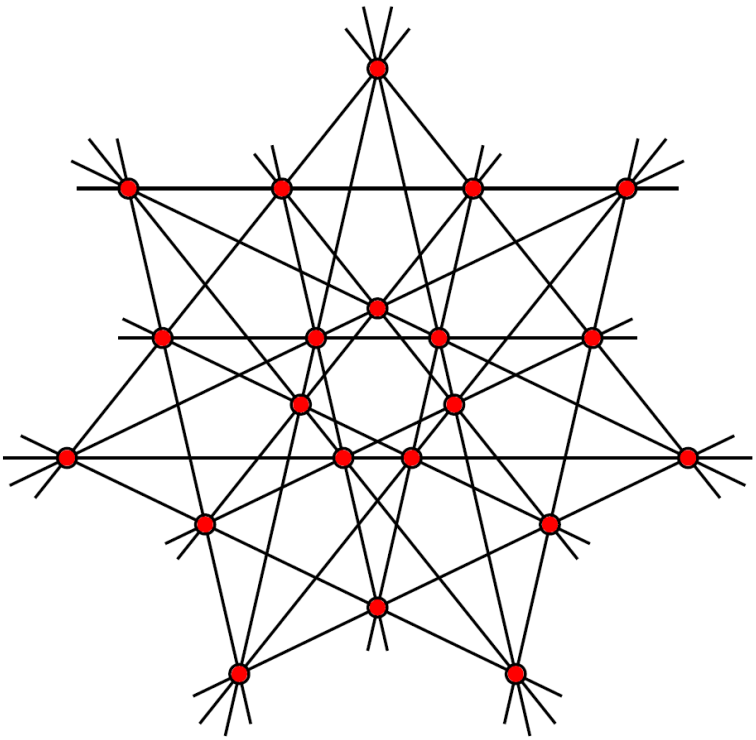


图 1：Gr¨unbaum–Rigby 构形 GR(21_4)。

为整数时才存在，因此可以省略参数 t，后者的记法也就沿用至今。设

$$m\#(p_1, q_1; p_2, q_2; \ldots; p_d, q_d)$$

是一个 d-天体 4-构形，并令

$$P = (p_1, p_2, \ldots, p_d)$$

and

$$Q = (q_1, q_2, \ldots, q_d)$$

为由配置参数定义的多重集。产生真正几何天体构形（没有额外关联）的参数集合称为有效参数集。

几年前，Berman 和 Berardinelli [1] 给出了四条公理，用于确定天体 4-构形的有效参数。它们的名称十分直观：偶数条件 (A1)、阶条件 (A2)、余弦条件 (A3) 和子串条件 (A4)。这些公理在 [4] 中已由 Boben 和 Pisanski 以不那么系统的方式提出。若我们关注连通构形，则还必须添加另一条公理 gcd(P, Q, m) $= 1$，可称为连通性条件 (A5)。

Gr¨unbaum 将多重集 P 和 Q 相等的构形定义为平凡的天体构形。对于平凡天体构形，公理 (A1)

和 (A3) 总是成立。要使参数对于平凡三重天配置有效，必要条件是 $P = Q = \{a, b, c\}$ 必须是一个集合（而不是多重集），并且构形必须描述为 m#(a, b; c, a; b, c)，以满足公理 (A2)。此外，对 P 进行六种排列中的任意一种，都会得到相同的构形。因此，我们可以选择 $a < b < c$。当 d取较大值时，同一个多重集 P 可能用于不同的构形。事实证明，需要对参数施加一些条件，以确保该结构确实是组合四配置。然而，在对其进行几何实现时，可能会出现一些错误的关联。

就在不久前，第二作者向我们指出了论文 [11]，该文以意大利语撰写，其中的 K´arteszi 定理蕴含了 Gr¨unbaum–Rigby 构形的存在性。该论文中的一条参考文献 [9] 很难获得。它于 1964 年发表于墨西拿的一本鲜为人知的期刊上。多亏 G´abor Korchm´aros，我们才拿到了这篇论文的副本。令我们惊讶的是，论文不仅描述了一个 ($21_4, 21_4$) 构形，按我们的记号即 GR(21_4) 构形，还给出了熟悉的 Gr¨unbaum–Rigby 构形图（见上文图 1）。

这里需要注意的是，必须谨慎，因为 Gr¨unbaum–Rigby 构形已被证明并非唯一的 (21_4) 实例；在论文 [3] 中还构造了另一个不等价的 (21_4) 构形。

K´arteszi 定理（见下一节）是构造三参数 4-构形族的基础，我们将其记为 K(n; ℓ, m)。我们建议将其称为 *K´arteszi* 构形。该族是平凡的三重天体 4-构形的一个子族；具体而言，K(n; ℓ, m) = n#(1, ℓ; m, 1; ℓ, n)。任何 K´arteszi 构形都是连通的。任何满足 $1 < a < b$ 的 K´arteszi 构形都能实现为几何构形且没有额外关联，当且仅当下述命题成立。

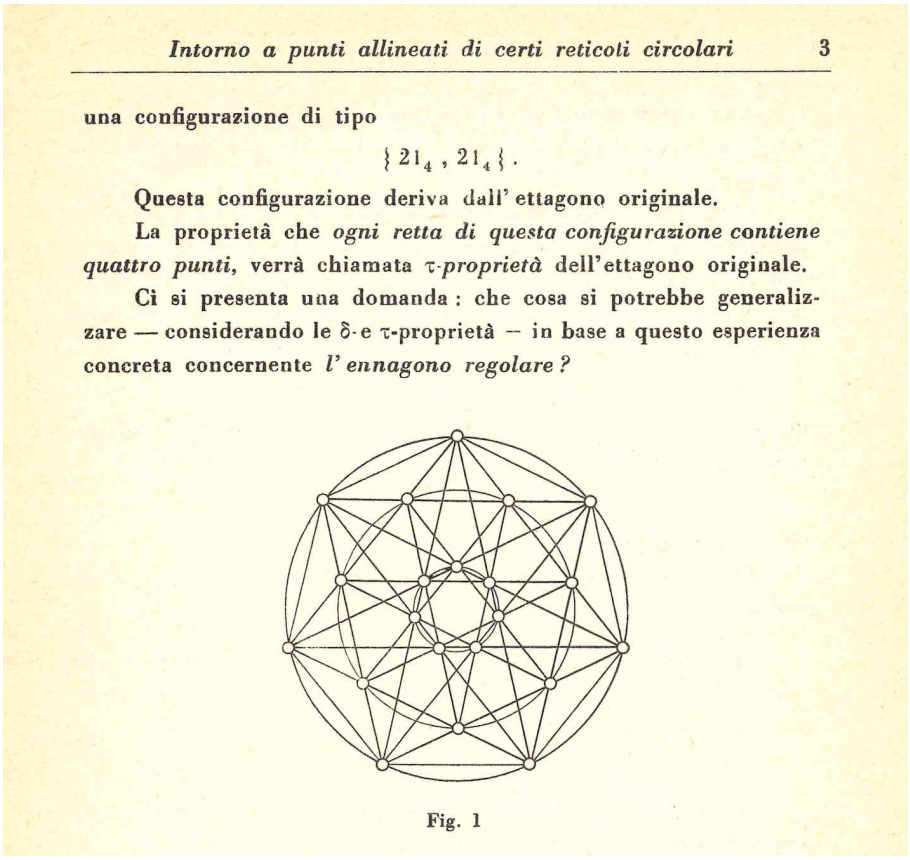
命题1。 *K´arteszi* 构形 $\mathrm{K}(n;\ \ell, m)$ 没有额外关联，当且仅当不存在整数 x，使得二重天四配置（= 星形构形） $n\#(\ell, m, x)$ 存在。

在这种情况下，三个构形 K(n; ℓ、m)、K(n; ℓ、x)、K(n; m、x) 都是可实现的。

Berman [2] 首先刻画了星形 4-配置的有效参数。她的结果以定理 3.6.1 的形式收录在 Gr¨unbaum 的书中。通过选取一个参数等于 1 的构形，可以得到我们的定理 6。然而，我们基于 K´arteszi 定理和 Poonen 和 Rubinstein 的一个结果，给出了该定理的独立证明。取自 [9] 的图 2 毫无疑问地表明，K´arteszi 于 1964/65 构造了构形 K(7; 2、3)。

如此长时间以来似乎不可能一直被忽视。遗憾的是，当时存在太多不利因素。

- 出现这一构形的论文是用意大利语撰写的。
- 该期刊未被$zbMATH$ 或$MathRev$收录。



Intorno a punti allineati di certi reticoli circolari 3

una configurazione di tipo

$$\{21_4, 21_4\}.$$

Questa configurazione deriva dall'ettagono originale.

La proprietà che *ogni retta di questa configurazione contiene quattro punti*, verrà chiamata τ-*proprietà* dell'ettagono originale.

Ci si presenta una domanda: che cosa si potrebbe generalizzare — considerando le δ-e τ-proprietà — in base a questo esperienza concreta concernente *l'ennagono regolare?*

Fig. 1

图 2：取自 K´arteszi 的论文中 $K(7; 2, 3)$ 的绘图。

• K´arteszi 在他的书中没有提及任何 4-构形。显然，他认为自己的结果或后来的定理都不够有趣。因此，即使这本书后来被译成英语，他的发现仍然鲜为人知。他的书中使用的术语“几何构形”，如今指的是“线性配置”。

• 这本书没有引用 Coxeter 在 1950 [5] 年发表的开创性论文。因此，他使用术语关联图，而不是*Levi*图。

• Gr¨unbaum 在他的书中没有提到 K´arteszi 的相关著作，尽管后者专门用整整一章讨论构形。

• 在第 212 页，Gr¨unbaum 提到了 K´arteszi 于 1986年 发表的论文，但没有将（21_4）的功劳归于他。

我们的目的是指出 K´arteszi 定理对天体构形理论的重要性。

2 从 K´arteszi 定理到 K´arteszi 配置

为求完整起见，我们给出 K´arteszi 定理的简短证明。我们指出，在该定理以及全文中，正 n边形指的是凸正 n边形。

定理 2 (K´arteszi, 1964 [9])。设 $\mathcal{A}_1 = A_0A_1 \dots A_{n-1}$ 是经典欧几里得平面上的正 n 边形。对于任意 $k \in \{1, 2, \dots, \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor\}$， $\mathcal{A}_1$、A_0A_k、 A_1A_{k+1}、.....、$A_{n-1}A_{k+1}$ 的第 k 条对角线构成另一个正 n 边形 $\mathcal{A}_k$，我们称其为 $\mathcal{A}_1$ 的第 k 个 n 边形。那么，对于任意 ℓ、 $m \in \{1, 2, \dots, \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor\}$， $\mathcal{A}_1$ 的第 ℓ 个 n 边形的第 m 条对角线与第 m 个 n 边形的第 ℓ 条对角线有一条公共直线。

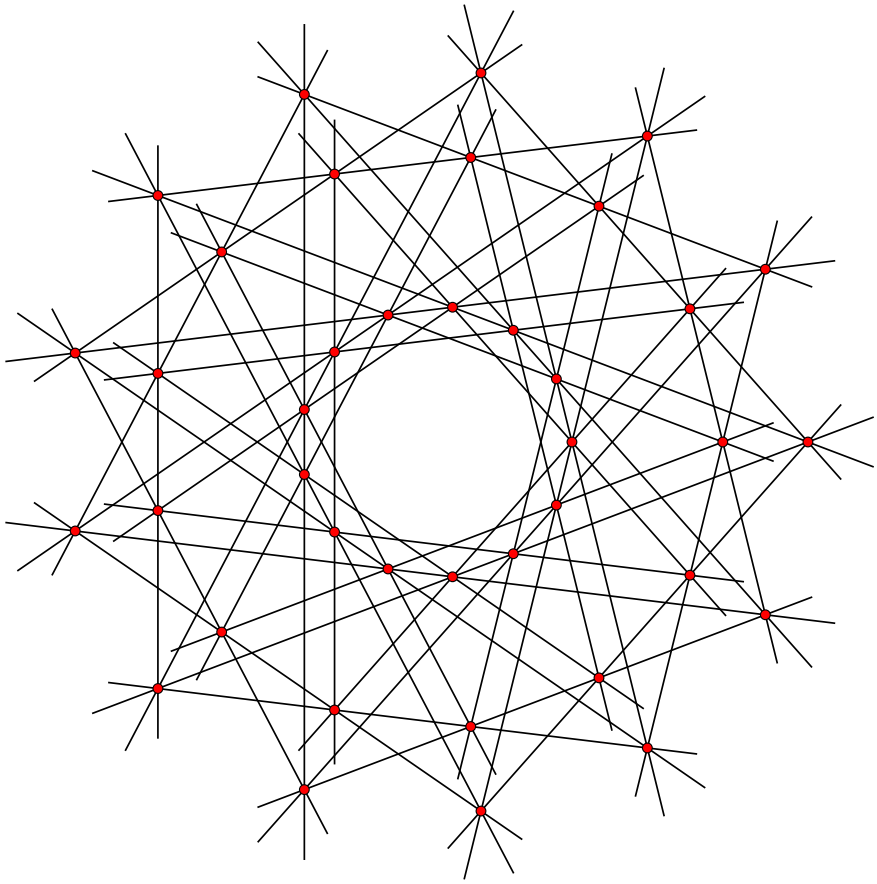


图 3：K´arteszi 定理的应用示例，用于 $n = 13$， $\ell = 3$ 并$m = 5$生成 K(13；3，5)。

首先，我们证明一个引理。

引理 3. 设 $\mathcal{R} = R_0R_1 \ldots R_{n-1}$ 是一个正 n 边形，其中心为 C，并设 $\mathcal{T} = T_0T_1 \ldots T_{n-1}$ 是 $\mathcal{R}$ 的第 k 个 n 边形，其中 $T_j = R_{j-1}R_{j-1+k} \cap R_jR_{j+k}$，且设 $\beta = \frac{2\pi}{n}$。令 φ_k 表示以 C 为中心、角度为 $\frac{k-1}{2}\beta$、比例为 $\cos\frac{k\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2}$ 的旋转相似变换 φ_k。则 $\varphi_k(R_j) = T_j$ 和 φ_k 将直线 R_jR_{j+1} 映射为直线 R_jR_{j+k}，其中 $j = 0$、1、.....、$n-1$。若 F 和 G 分别表示线段 R_0R_1 和 R_0R_k 的中点，则 $\varphi_k(F) = G$.

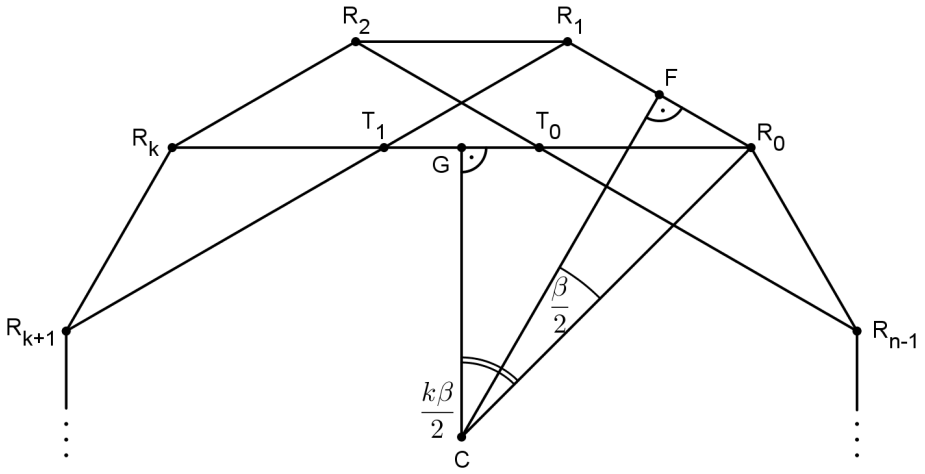


图 4：引理 3 的示意图。

证明。 由于 $\mathcal{R}$ 具有旋转对称性，只需证明$j = 0.$ 的相关陈述即可。直线 CG 是 $\mathcal{R}$ 的一条对称轴，因此它也是 $\mathcal{T}$的一条对称轴。所以 G 是线段 T_0T_1的中点。由于 $R_0CF\angle = \frac{1}{2}R_0CR_1\angle = \frac{\beta}{2}$和 $R_0CG\angle = \frac{1}{2}R_0CR_k\angle = \frac{k\beta}{2}$， 我们得到

$$R_0CT_0\angle = FCG\angle = \frac{k-1}{2}\beta.$$

三角形 R_0FC 和 R_0GC 是直角三角形，因此 $CF = R_0C\cos\frac{\beta}{2}$ 以及$CG = R_0C\cos\frac{k\beta}{2}$. 所以

$$T_0C\colon R_0C = GC\colon FC = \cos\frac{k\beta}{2}\colon \cos\frac{\beta}{2}.$$

因此， $\varphi_k(R_0) = T_0$ 且 $\varphi_k(F) = G$。直线 R_0R_1 映射为直线 R_0R_k，因为点 T_0 和 T_1 在直线 R_0R_k上。引理得证。 □

定理 2 的证明。 设 $\mathcal{A}_m$ 的顶点为 $B_j = A_{j-1}A_{j-1+m} \cap A_jA_{j+m}$，而 $\mathcal{A}_\ell$ 的顶点为 $D_j = A_{j-1}A_{j-1+\ell} \cap A_jA_{j+\ell}$. 。由于旋转对称性，只需证明直线 B_0B_ℓ 与直线 D_0D_m 重合。

取直线 A_0A_1，并应用两次引理 3。首先，对 n边形 $\mathcal{A}_1$ 及变换 φ_ℓ应用引理 3；然后，对 n边形 $\mathcal{A}_\ell$ 及变换 φ_m应用引理 3。

$$\varphi_m(\varphi_\ell(A_0A_1)) = \varphi_m(A_0A_\ell) = \varphi_m(D_0D_1) = D_0D_m.$$

其次，对于 n-边形 $\mathcal{A}_1$ 和变换 φ_m，再将其应用于 n-边形 $\mathcal{A}_m$和变换 φ_ℓ。

$$\varphi_\ell(\varphi_m(A_0A_1)) = \varphi_\ell(A_0A_m) = \varphi_m(B_0B_1) = B_0B_\ell.$$

由于旋转相似变换 φ_m 和 φ_ℓ 具有相同的中心，因此它们可交换。因此，$\varphi_\ell(\varphi_m(A_0A_1)) = \varphi_m(\varphi_\ell(A_0A_1))$，于是直线 B_0B_ℓ 和 D_0D_m 重合，从而证明了定理。□

K´arteszi 定理提供了一种构造几何点-直线构形的简单方法。使用定理 2 的记号，取由 $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_\ell$ 的顶点组成的 $3n$元素集合，以及由 ℓ-th 和 m-th 对角线组成的 $3n$ 元素集合，其中包括 $\mathcal{A}_1$ 的 ℓ-th 对角线与 $\mathcal{A}_m$的 m-th 对角线的公共直线。每个点至少与四条直线关联，同样，每条直线也至少与四个点关联。如果不再出现其他关联，那么我们就得到一个 $((3n)_4)$ 构形。我们将这些构形称为 *K´arteszi* 构形，并将其记为 $\mathrm{K}(n;\ \ell, m)$。

3 当$\mathrm{K}(n;\ \ell,\ m)$包含额外关联时

定理 2 对任意 $\ell,\ m \in \{1, 2, \ldots, \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor\}$ 都成立，但 $\mathcal{A}_\ell$ 或 $\mathcal{A}_m$ 的某些顶点可能与 $\mathcal{A}_1$ 的其他对角线关联。在这些情况下，结果并非一个 $((3n)_4)$ 构形，因为某些直线与超过 4 个点关联。

Poonen 和 Rubinstein [16] 列出了正 n边形的三条对角线相交时的所有情形。下面我们使用他们的记号简要概述其结果。

设 $A,\ B,\ C,\ D,\ E,\ F$ 是内接于单位圆的正 n 边形上按顺序排列的六个不同顶点，它们将圆周划分为长度分别为 $2\pi X$、$2\pi V$、$2\pi Y$、$2\pi W$、$2\pi Z$、$2\pi U$ 的弧。当且仅当满足以下条件时，三条对角线 $AD,\ BE,\ CF$ 相交于一点

$$\sin(\pi U)\sin(\pi V)\sin(\pi W) = \sin(\pi X)\sin(\pi Y)\sin(\pi Z). \tag{1}$$

他们证明了以下 [16, 定理 4]。

定理 4 (Poonen 和 Rubinstein，1998)。 在 $U+V+W+X+Y+Z=1$ 的情形下，三角丢番图方程(1) 的正有理数解，且每个解都是 $\frac{1}{n}$ 的倍数，可以分为三类。

(i) 平凡情形，当 $U+V+W=1/2$ 且 X、Y、Z 是U、V、W.的一个排列时

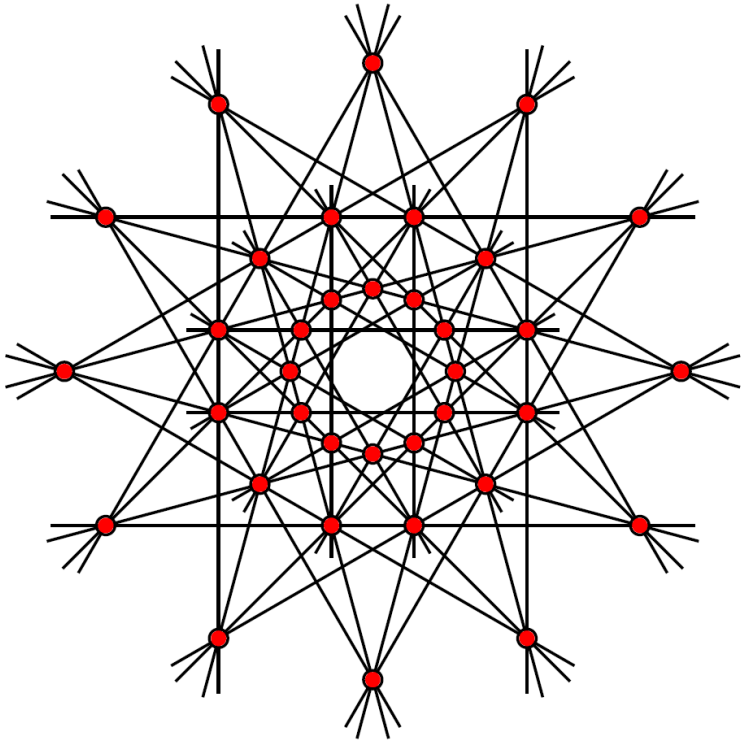


图 5：最小的组合型 K´arteszi 构形 K(12; 4，5)具有一个存在额外关联的几何表示。

(ii) 下表列出了四个无限族：

$\{U,V,W\}$	$\{X,Y,Z\}$	范围
$\{1/6,t,1/3-2t\}$	$\{1/3+t,t,1/6-t\}$	$0<t<1/6$
$\{1/6,1/2-3t,t\}$	$\{1/6-t,2t,1/6+t\}$	$0<t<1/6$
$\{1/6,1/6-2t,2t\}$	$\{1/6-2t,t,1/2+t,\}$	$0<t<1/12$
$\{1/3-4t,t,1/3+t\}$	$\{1/6-2t,3t,1/6+t\}$	$0<t<1/12$

(iii) 65 散例，其列表可见于 [16,表 4]。

利用这一结果，我们可以确定 K($n;\ell,\ m$) 存在额外关联的情形。首先，我们证明一个初等几何引理。

引理 5. 假设第 r 条对角线 d *of* $\mathcal{A}_1$ 与 $\mathcal{A}_k$ 中的一个顶点 B 关联。若 B 不同于 d 的中点，则 d 与 $\mathcal{A}_k$ 的另一个顶点关联，因此 d 与 $\mathcal{A}_k$ 的一条对角线有一条公共直线。

令 $B_i = A_iA_{i+k} \cap A_{i+1}A_{i+1+k}$ 表示 $\mathcal{A}_k$ 的顶点（下标按模 n 计算）。若对角线 A_0A_r 与 B_i、$r < \frac{n}{2}$、$\frac{r}{2} < i$ 和 $2i-r+k+1 < \frac{n}{2}$ 关联，则 $B_{r-i-k-1}$ 也与 A_0A_r 关联。$\mathcal{A}_1$ 的第 r 条对角线与 $\mathcal{A}_k$ 的第 $(2i-r+k+1)$ 条对角线有一条公共直线。

证明。令 t 为 d的垂直平分线。于是，t 是 $\mathcal{A}_1$的一条对称轴，因此它也是 $\mathcal{A}_k$的一条对称轴。因此，若 φ 表示关于 t的反射，则

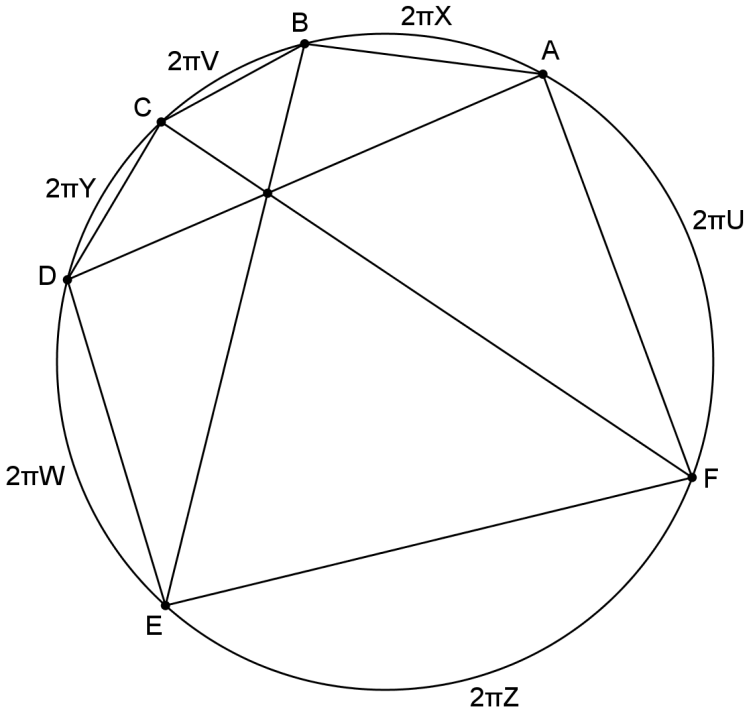


图6：Poonen–Rubinstein 定理中的三条相交对角线。

$\varphi(B) \neq B$ 是 $\mathcal{A}_k$ 的另一个顶点，且 d 与 $\mathcal{A}_k$的对角线 $B\varphi(B)$有一条公共直线。

如果 d is 是对角线 A_0A_r，则对于 $j = 0$ $\varphi(A_j) = A_{r-j}$， 1，……， $n-1$. S o

$$\varphi(B_i) = \varphi(A_iA_{i+k} \cap A_{i+1}A_{i+1+k}) = A_{r-i}A_{r-i-k} \cap A_{r-i-1}A_{r-i-k-1}.$$

由于 $i+1+k < n-(r-i-k-1)$，我们得到 $A_{r-i-1}A_{r-i-k-1} = B_{r-k-i-1}$。因此， d与 $B_{r-k-i-1}$相交，所以它与 $\mathcal{A}_k$的对角线 $B_iB_{r-k-i-1}$ 有一条公共直线。这条对角线是第（$2i-r+k+1$）条对角线，因为 $2i-r+k+1 < n/2$。根据旋转对称性，这意味着 $\mathcal{A}_1$ 的任意第 r条对角线都与适当的第（$2i-r+k+1$）条对角线 $\mathcal{A}_k$有一条公共直线。

□

定理 6. $\mathrm{K}(n;\ell,m)$ 是一个$((3n)_4)$ 构形，但以下情况除外：

- K(6k; $2k, 3k-1$)、K(6k; $3k-2, 3k-1$) 和 K(6k; $2k, 3k-2$) 当 $k \geq 2$.
- K($12k+6$; $3k+1, 4k+2$)、K($12k+6$; $3k+2, 4k+2$) 和 K($12k+6$; $3k+1, 3k+2$)当 $k \geq 1$.
- K(30; 4, 6)、K(30; 4, 7) 和 K(30; 6,7)；
- K(30; 6, 10)、K(30; 6, 11) 和 K(30; 10, 11)；
- K(30; 8，12)，K(30; 8，13) 和K(30; 12，13)；
- K(42; 6，12)，K(42; 6，13) 和K(42; 12，13)。

证明。 如果 K(n; ℓ, m) 中出现额外的关联，那么三个具有公共点的对角线中，有两条是长度相同且相邻的。再次采用图 1 的记号以及 Poonen 和 Rubinstein 的结果，这意味着集合 $\{X, Y, Z\}$ 和 $\{U, V, W\}$ 中的最小元素都必须是 $\frac{1}{n}$。不失一般性，我们可以假设 $X = W = \frac{1}{n}$。

考虑定理 4 的三种可能情况。在情形 (i) 中，要么 $Y = U$ 且$Z = V$，，要么 $Y = V$ 且 $Z = U$。在前一种情形下 AD，；在后一种情形下， CF 是圆的直径，因此平凡解不会出现在 K´arteszi 构形中。

情形 (ii)。在第一族中 $t = \frac{1}{n}$，否则 $\frac{1}{n} = 1/3 - 2t = 1/6 - t$将推出 $t = 1/6.$。因此，存在一个整数 k，使得 $1/6 = \frac{k}{n}$，所以

$$n = 6k, \quad \{U, V\} = \left\{\frac{k}{6k}, \frac{2k-2}{6k}\right\}, \quad \{Y, Z\} = \left\{\frac{k-1}{6k}, \frac{2k+1}{6k}\right\}.$$

在第二族中，$\{X, Y, Z\}$ 中的最小元素是 $1/6 - t.$。同样，$\frac{1}{n} = 1/3 - 2t = 1/6 - t$推出 $t = 1/6$，因此 $1/6 - t = t$，所以 $t = 1/12$，这就得到一个平凡解$\{1/12, 1/6, 1/4\}.$。在第三族中，$\{X, Y, Z\}$ 中的最小元素要么是 t，要么是$1/6 - 2t$，因此 $\{U, V, W\}$ 中的最小元素必定是 $1/6 - 2t.$。于是 $1/6 - 2t = \frac{1}{n}$，且存在一个整数 k，使得 $t = \frac{k}{n}.$。所以

$$n = 6(2k+1),\ \{U, V\} = \left\{\frac{2k+1}{6(2k+1)}, \frac{2k}{6(2k+1)}\right\},\ \{Y, Z\} = \left\{\frac{k}{6(2k+1)}, \frac{7k+3}{6(2k+1)}\right\}.$$

在第四个族中，$\{X, Y, Z\}$ 的最小元素是 $1/6 - 2t.$。若 $\frac{1}{n} = 1/6 - 2t = t$，则 $t = 1/18$，而且这个解也出现在第一个族中。另一种情况，$\frac{1}{n} = 1/6 - 2t = 1/3 - 4t$，则意味着 $7t = 1/12$，这与条件 $t < 1/12.$ 矛盾。

Case (iii)。在 65 个零散例子中，只有四个在两个集合中都包含 $\frac{1}{n}$。

现在考虑这两个无限族和 4 个散例。由于对称性，我们不妨假设

$$U + X + V = U + V + \frac{1}{n} = U + V + W < \frac{1}{2} \text{ and } V \le U.$$

那么，CF是正 n边形的一条 $r = n(U + V) + 1 < \frac{n}{2}$ r对角线，而 AD和 BE分别是 $\ell = n(V + Y) + 1$ ℓ对角线（若 $X + V + Y < \frac{1}{2}$）或$\ell = n(1 - (V + Y)) - 1$对角线（若$X + V + Y > \frac{1}{2}$）。由于$Y$有两种选择，因此 $\ell.$有两种可能。若 $Y_1 < Z_1$，则 $X + V + Y_1 < \frac{1}{2}$，所以 $\ell_1 = n(V + Y_1) + 1.$。另一种情况下，$Y_2 = Z_1 > Y_1 = Z_2$且 $X + V + Y_2 > \frac{1}{2}$。因此，$\ell_2 = n(1 - (V + Y_2)) - 1 = n(1 - (V + Z_1)) - 1 = n(U + Y_1) + 1.$。特殊对角线三元组（$r$、$\ell_1$、$\ell_2$）列于下表：

n	W	V	U	r	X	$\{Y,Z\}$	ℓ_1	ℓ_2
$6k$	$\frac{1}{6k}$	$\frac{k}{6k}$	$\frac{2k-2}{6k}$	$3k-1$	$\frac{1}{6k}$	$\{\frac{k-1}{6k}, \frac{2k+1}{6k}\}$	$2k$	$3k-2$
$12k+6$	$\frac{1}{12k+6}$	$\frac{2k}{12k+6}$	$\frac{2k+1}{12k+6}$	$4k+2$	$\frac{1}{12k+6}$	$\{\frac{k}{12k+6}\ \frac{7k+3}{12k+6}\}$	$3k+1$	$3k+2$
30	$\frac{1}{30}$	$\frac{2}{30}$	$\frac{4}{30}$	7	$\frac{1}{30}$	$\{\frac{1}{30}, \frac{21}{30}\}$	4	6
30	$\frac{1}{30}$	$\frac{3}{30}$	$\frac{7}{30}$	11	$\frac{1}{30}$	$\{\frac{2}{30}, \frac{16}{30}\}$	6	10
30	$\frac{1}{30}$	$\frac{4}{30}$	$\frac{8}{30}$	13	$\frac{1}{30}$	$\{\frac{3}{30}, \frac{13}{30}\}$	8	12
42	$\frac{1}{42}$	$\frac{3}{42}$	$\frac{9}{42}$	13	$\frac{1}{42}$	$\{\frac{2}{42}, \frac{26}{42}\}$	6	12

如果一条 r对角线包含 $\mathcal{A}_{\ell_1}$的一个顶点，那么 r， ℓ_1 和 $i = nU$ 满足引理 5 的条件。根据该引理， r对角线与 $\mathcal{A}_{\ell_1}$的一条$(2i - r + \ell_1 + 1)$对角线有一条公共直线。由于

$$2i - r + \ell_1 + 1 = n(2U - (U + V + W) + (X + V + Y_1)) + 1 = n(U + Y_1) + 1 = \ell_2,$$

定理 2 推出，这条直线还包含 A_{ℓ_2} 的第 ℓ_1 条对角线。因此，$K(n; \ell_1, \ell_2)$ 的 $3n$ 个顶点中，有六个点共线。当 $k = 2$ 时，我们得到第一族中最小的例子；此时 $2k = 3k - 2$ ，因此只有一个构形：$K(12; 4, 5)$。如果 $\ell_1 \neq \ell_2$， ，则其他每个三元组（r， ℓ_1， ℓ_2）都对应三个 K 构形，因此在这些情况下，$K(n; \ell_1, \ell_2)$、$K(n; \ell_1, r)$ 和 $K(n; \ell_2, r)$ 都不是（$(3n)_4$）构形。这就证明了该定理。 □

4 结论

本文提供了证据，表明 Gr¨unbaum–Rigby 构形早在 1964 年就已由 Ferenc K´arteszi 构造出来。我们还指出，K´arteszi 的一个定理导出了一个特殊的三参数族，其中包含我们称为 K´<style id='7'}arteszi 构形 的平凡三重天体 4-构形。通过几何论证，我们独立地刻画了这些参数取值成立的条件。

研究 K´arteszi 定理在多大程度上可以加以调整，以涵盖更一般的天体构形，甚至其他多环4-构形，将会很有意义。

致谢

Toma˘z Pisanski 的部分经费由斯洛文尼亚研究机构资助（研究计划 P1-0294 和研究项目 J1-4351、J5-4596 及 BI-HR/23-24-012）。Gy¨orgy Kiss 的部分经费由斯洛文尼亚研究机构的研究计划 N1-0429 资助。

参考文献

[1] A. Berardinelli 和 L. W. Berman，《系统性天体4-构形》，《当代数学艺术》7（2014），361–377。3[2] L. W. Berman，《天体（n_4）构形的刻画》，Discrete Comput. Geom. 26（2001），603–612。4[3] L. W. Berman、G. G´evay 和 T. Pisanski，《关于一种新的（21_4）多环构形》，《电子组合学杂志》31（4）（2024），#P4.54。4[4] M. Boben 和 T. Pisanski，《多环构形》，《欧洲组合学杂志》24（4）（2003），431–457。2，3[5] H. S. M. Coxeter，《自对偶构形与正则图》，Bull. Amer. Math. Soc. 56（1950），413–455。2，5[6] B. Gr¨unbaum，《点线构形》，《数学研究生教材》第103卷，美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，2009。2[7] B. Gr¨unbaum 和 J. F. Rigby，《实构形（21_4）》，《伦敦数学学会杂志》41（1990），336–346。2[8] D. Hilbert 和 Cohn-Vossen，《直观几何学》，柏林，施普林格，1932。2[9] F. K´arteszi，《关于某些圆形格网中的共线点》，《墨西拿数学研讨会报告》9（1964/65），1–12。4，5，6[10] F. K´arteszi，《有限几何导论》，Akad´emiai Kiad´o，1972年（匈牙利语）。1976年由爱思唯尔／北荷兰出版社再版英语版，1978年由费尔特里内利出版社再版意大利语版，1980年由科学出版社再版俄语版。2[11] F. K´arteszi，《关于一个令人惊讶的类比》，Ann. Univ. Sci. Budapest E ¨otv ¨os Sect. Math. 29（1986），257–259（意大利语）。4[12] G. Korchm´aros 和 T. Sz˝onyi，《序言：纪念 Ferenc K´arteszi 诞辰一百周年专刊》。Contrib. Discrete Math. 3（1）（2008），1–2。1[13] G. Korchm´aros 和 T. Sz˝onyi，《Ferenc K´arteszi（1907–1989）：简短传记》，Contrib. Discrete Math. 3（1）（2008），3–5。1[14] F. W. Levi，《几何构形》，Hirzel出版社，莱比锡，1929。2[15] T. Pisanski 和 B. Servatius，《图论视角下的构形》，Birkh¨auser 高级教材，Birkh¨auser，纽约，2013。2[16] B. Poonen 和 M Rubinstein，《正多边形对角线产生的交点数》，《SIAM离散数学杂志》11（1）（1998），135–156。8，9