arXiv:2512.18896v1 [math.LO] 21 Dec 2025

泛范畴

HANS SCHOUTENS

摘要。任意理论 T 在任意一阶语言 L 中的模型范畴都具有一个令人惊讶的性质：任何与它初等等价的小范畴都已经嵌入其中。证明通过超幂给出了一个抽象论证，这不禁令人想知道，哪些依赖于 T 和 L 的具体范畴公理促成了这一嵌入结果。

我们还提出了一种一阶逻辑，在这种逻辑下，等价范畴总是初等等价的。

1. 引言

本文的关键概念是普适性：如果任意基数较小且与某个 L-结构初等等价的结构都嵌入其中，我们就称一个 L-结构为泛。不可数范畴结构是泛结构的例子，但除此之外，似乎没有显而易见的例子。例如，实数域并不具有普适性，因为存在可数的非阿基米德实闭域；这些域因此与实数初等等价，却永远无法嵌入实数域中。

不过，在本文中，我们将遇到大量例子——实际上，每个一阶理论 T都有一个例子，即 T的模型范畴，将其视为范畴语言中的一阶结构。由于范畴区分对象和态射，因此， L_{cat} 双排序语言最适合用于范畴的模型论研究。除此之外，还需要一个用于态射复合的（部分）二元运算、一个将对象映射到其恒等态射的一元函数，以及两个将态射映射到其定义域和值域的一元函数。这种语言中的公理显而易见，由此得到的 L_{cat}-理论$\mathbf{CAT}$ 将称为范畴理论。要了解这一切是多么自然：任何 L_{cat}-结构显然都是一个范畴，任何子结构都是一个子范畴，而范畴之间的 L_{cat}-同态正是函子。此外，这种语言的表达能力很强：任何有限极限或余极限的存在性现在都可以用一阶语言表达。但最重要的观察是普适性（见定理6.6）：

主定理。 对于某个一阶语言中的某个理论 T，形如 $\mathbb{M}\text{od}_{\mathfrak{U}}(T)$ 的任意范畴都是泛的。

这里我们用 $\mathbb{M}\text{od}_{\mathfrak{U}}(T)$ 表示 T 中属于一个预先固定的格罗滕迪克宇宙 $\mathfrak{U}$（更多详情见 §4 ）的模型所构成的子范畴。我们需要作出这样的假设，以确保该范畴是小的（即不是一个类），因此是 CAT 的一个模型。$\mathbf{CAT}$。

在这一导论部分，我先简述一个特定情形下的证明，即阿贝尔群范畴 $\mathbb{M}\text{od}_{\mathfrak{U}}(T_{\text{Ab}})$，其中 T_{Ab} 是语言 $L = (+, -, 0)$ 中交换群的理论。这个论证正是人们希望用来证明主

日期：2025年12月23日。

定理的方法：明确给出公理。遗憾的是，到目前为止，这基本上是我唯一成功做到这一点的情形。一般情形将通过超幂来证明：事实证明，任意模型范畴 $\mathbb{M}\mathrm{od}_{\mathfrak{U}}(T)$ (相对于属于全集 $\mathfrak{U}$的超滤子)中的任意超幂 $\mathbb{M}\mathrm{od}_{\mathfrak{U}}(T)$ 已经是原有$\mathbb{M}\mathrm{od}_{\mathfrak{U}}(T)$的子范畴。结合利用超幂刻画初等性（命题 3.1，它是著名的 Keisler-Shelah 判据的推论，但也很容易直接证明），便可得到主定理。不过，我还是通过阿贝尔群范畴来说明我认为更好的证明。

1.1. **阿贝尔群**。 令$\mathbb{C}$为格罗滕迪克宇宙 $\mathfrak{U}$中的任意范畴。假设它有一个零对象 0，也就是说，对于任意对象 G，都存在唯一的态射$0 \to G$ 和 $G \to 0$；它们的复合 $G \to 0 \to G$仍记作 0。我们还假设 $\mathbb{C}$ 有（有限）积 $G_1 \times G_2$，其投影映射为 π_1 和 π_2。因此，存在唯一的态射 $\Delta_G\colon G \to G \times G$和 $\tau_G\colon G \times G \to G \times G$，分别称为对角映射 和扭转映射，使得 $\pi_k \circ \Delta_G = 1_G$ 和 $p_k \circ \tau_G \circ \Delta_G = p_l$，其中 $\{k, l\} = \{1, 2\}$。[1] 若态射 $\mu\colon G \times G \to G$ 满足以下四个条件，则称其为群箭头

(1)（结合律） $\mu \circ (1_G \times \mu) = \mu \circ (\mu \times 1_G)$; (2)（单位元） $\mu \circ (0 \times 1_G) = p_2$; (3)（逆元）存在一个态射 $\lambda\colon G \to G$，使得 $\mu \circ (\mathrm{Id} \times \lambda) \circ \Delta_G = 0$; (4)（交换律） $\mu \circ \tau_G = \mu$;

这些公理中默认包含了积之间的各种同构，例如 $(G \times G) \times G \cong G \times (G \times G)$，我们将其简单记作 $G \times G \times G$，等等。如果 G 是一个实际的（可加）阿贝尔群，那么我们可以取 $\mu(a, b) := a + b$ 以及 $\lambda(a) := -a$。注意，交换律是 μ 和 λ 成为实际群同态所必需的。

为了定义 L_{cat}-理论 $\mathbf{AB}$，现在除了要求存在有限积和零对象之外，还要加入两条公理： (Ab1) 任意对象 G 都存在唯一的群箭头μ_G；以及 (Ab2)，若 $f\colon G \to H$ 是任意箭头，且 μ_G 和 μ_H 分别是 G和 H上的唯一群箭头，那么

(5) (Linearity) $\mu_H \circ (f \times f) = f \circ \mu_G$.

要证明 $\mathbb{M}\mathrm{od}_{\mathfrak{U}}(T_{\mathrm{Ab}})$ 满足这些公理，只需将群箭头视为定义结构上的群运算，除 (Ab1) 中的唯一性要求外，其余显然都成立。但这可由以下简单观察得出：

1.2. **引理**。 设 $(G, +, 0)$ 是一个阿贝尔群，并设 $\mu\colon G \times G \to G$ 在 G 上定义了一个幺半群运算，且单位元同为0。若 μ对诱导于 $G \times G$的加法是可加的，则 μ 就是群运算。

证明。 根据假设，对所有 $a, a', b, b' \in G$，有 $\mu(a + a', b + b') = \mu(a, a') + \mu(b, b')$。取 $a' = 0 = b$，于是 $\mu(a, b') = \mu(a, 0) + \mu(0, b')$；由于 0 也是 μ-运算的单位元，后一项便是 $a + b'$。□

范畴 $\mathbb{C} \models \mathbf{AB}$ 中的对象实际上还不是群，因为群箭头仅仅是形式上的。但任何一个（保持积和零对象的）到集合范畴的函子，都会将它们变成实际的群，并将态射变成群同态。要做到这一点，最好的方法是假设生成元 Z 的存在，并将 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(Z, -)$（忠实）函子作为实化（详情参见 §4）。如此一来，$\mathbb{C}$ 就成为一个子范畴

[1] 如果对象 G 恰好是一个集合，那么 $\Delta_G(a) = (a, a)$ 和 $\tau_G(a, b) = (b, a)$。

of $\mathbb{M}\mathrm{od}_{\mathfrak{U}}(T_{\mathrm{Ab}})$。因此，我们还将在 **AB** 中加入断言生成元存在的公理，于是我们证明了：

1.3. **推论**。 范畴 $\mathbb{M}\mathrm{od}_{\mathfrak{U}}(T_{Ab})$ 是泛的。 □

使用范畴论来分析模型论当然并不是什么新鲜事：Makkai 的工作促成了如今所谓的 FOCL（=一阶范畴逻辑；见 [6, 7]）；或者说，Lawvere 的视角——我也借用了他对语言 L_{cat}的使用方式——促成了 ETCC（=范畴的范畴的初等理论；见 [4, 5]）及其变体，这里仅举几例。本文仅以一种非常朴素的方式采用这些视角，将它们结合起来研究模型-范畴的理论的模型的一些性质。通常，这些工作关注的是完备理论，因此态射被取作初等嵌入；而我们将考察一阶语言中的模型范畴[2]，其中态射仅仅是同态。从一阶语言中的一阶理论转向其模型范畴的一阶理论时，当然会有一些东西在翻译中丢失，因为完备的（小）范畴理论只有连续统多个，而语言 L 和一阶 L-理论却远不止这些。这就提出了一个问题：翻译中究竟丢失了多少？这种损失又有多么本质？让我用一个简单的例子来说明这一点。考虑，比如说，环语言 L_{ring} 中的域的一阶理论 FLD，以及其小模型的相应范畴 $\mathbb{M}\mathrm{od}_{\mathfrak{U}}(FLD)$（记号见 §4）。令$K$ 为一个特别令人感兴趣的域（其基数可能很大），并取其在语言 $L_{\mathrm{ring}}(K)$中的初等图。这个后一个理论的模型范畴实际上是余切片范畴 $K \downarrow \mathbb{M}\mathrm{od}_{\mathfrak{U}}(FLD)$，因而在 $\mathbb{M}\mathrm{od}_{\mathfrak{U}}(FLD)$ 内是可定义的（带参数 K）。由于 K 的选择多于连续统个，存在彼此非初等等价的域 K_1 和 K_2，但它们的余切片范畴却初等等价。于是， K_1 和 K_2 在‘代数上’有何种关系？由于它们都可定义于 $\mathbb{M}\mathrm{od}_{\mathfrak{U}}(FLD)$ 中，答案或许就隐藏在那里？

在附录中，我们尝试回答一个常被提出的问题：初等等价与范畴等价在多大程度上相同。用通常的语言 L_{cat}（见下文 §2）来表达时，它们显然并不相同，因为如下语句：每当 $A \cong B$ 时$A = B$，该语句在范畴的骨架中成立，但在范畴本身中却不一定成立（尽管两个范畴总是等价的）。问题源于相等关系的使用。文献中已经提出了许多解决方案（例如，见 [1, 2] 或 [12, §3]），但它们似乎都运用了某种依赖类型论，而这并非模型论学家通常会考虑的常规逻辑。虽然不常使用，无等号一阶逻辑似乎更容易接受。但这样一来，函数符号就成了问题，因此我们需要引入一个三元谓词来替代表示复合的二元关系。还必须妥善处理范畴的“核”；相关细节见附录（§9），由此得到

定理。 存在一种一阶逻辑，其中等价范畴在初等意义上是 *y*
等价的。

我不知道逆命题是否也成立。尽管如此，这种一阶逻辑的表达能力足以表述存在（有限）极限和余极限等范畴性质。这也使我们能够表述主定理的一个“非邪恶”[3] 版本。

[2]普通群论学家绝不会考虑只使用初等嵌入来研究群范畴。[3]即不破坏等价原理。

2. 范畴的模型论

虽然许多范畴具有类多对象和／或态射，但严格来说，它们不能被视为一阶结构。我们将在第 4 节介绍处理这个问题的适当框架，即格罗滕迪克宇宙。目前，我们只假设范畴是小的（也就是说，对象和态射都只有集合多个）。设 L_{cat} 为一种双排序语言，其中 o-排序对应对象，m-排序对应态射；此外，它还带有一个定义在 m-排序上的二元函数 $\circ$、两个从 m-排序到 o-排序的一元函数 dom 和 rng，以及一个从 o-排序到 m-排序的一元函数 Id。任意范畴 $\mathbb{C}$ 中对这些符号的解释，依次为态射 $g\colon B \to C$和 $f\colon A \to B$的复合 $g \circ f$、态射$f\colon A \to B$的定义域 A 和值域 B，以及对象 A上的恒等态射 1_A。请注意，我们将 $\circ$ 视为偏函数，并不关心它在不可复合的态射上的取值。我们约定，取值于 o-排序的变量用大写字母表示，取值于 m-排序的变量用小写字母表示，这样就不必每次都特别说明。

2.1. 定义。 令 **CAT** 为由以下三条公理给出的理论

(1) $(\forall x, y)$，若 $\mathrm{rng}(x) = \mathrm{dom}(y)$，则 $\mathrm{dom}(x) = \mathrm{dom}(y \circ x)$ 且 $\mathrm{rng}(y) = \mathrm{rng}(y \circ x)$；(2) $(\forall x, y, z)$，若 $\mathrm{rng}(x) = \mathrm{dom}(y)$ 且 $\mathrm{rng}(y) = \mathrm{dom}(z)$，则 $(z \circ y) \circ x = z \circ (y \circ x)$；(3) $(\forall X, y)$，若 $\mathrm{dom}(y) = X$（分别地，$\mathrm{rng}(y) = X$），则 $y \circ \mathrm{Id}(X) = y$（分别地，$\mathrm{Id}(X) \circ y = y$）；

为更符合通常的记法，我们将对任意 L_{cat}-结构采用以下记号约定。若 f是一个态射，且 $A = \mathrm{dom}(f)$ 和 $B = \mathrm{rng}(f)$，则我们只需记作 $f\colon A \to B$。对象 A 上的恒等态射 $\mathrm{Id}(A)$ 简记为 1_A。以下事实说明了这种做法是合理的。

2.2. 引理。 如果 $\mathcal{C}$ 是 **CAT** 的一个模型，那么可以为它关联一个范畴 $\mathbb{C}$，使得作为 L_{cat}-结构，它们彼此同构。此外，如果 $\mathcal{D}$ 是 **CAT** 的另一个模型，其关联范畴为 $\mathbb{D}$，那么 $\mathcal{C}$ 与 $\mathcal{D}$ 之间的 L_{cat}-同态恰好诱导出 $\mathbb{C}$ 与 $\mathbb{D}$之间的函子。

证明。 考虑范畴 $\mathbb{C}$：取 $\mathcal{C}$ 中 o-排序的元素作为对象，取 m-排序的元素作为态射，态射的复合由 $\circ$给出，恒等态射由 Id 给出。**CAT** 的公理由此保证 $\mathbb{C}$ 是一个范畴；不难看出，作为一个 L_{cat}-结构，它与 $\mathcal{C}$同构。根据 L_{cat}-结构的定义，符号的解释意味着，同态$\varphi\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 将态射 $f\colon A \to B$映为态射 $\varphi(f)\colon \varphi(A) \to \varphi(B)$，并保持复合不变，这表明 φ诱导出一个函子 $\mathbb{C} \to \mathbb{D}$，反之亦然。 □

因此，今后我们将 $\mathcal{C}$ 与其对应的范畴 $\mathbb{C}$视为同一对象。按照惯例，我们也用 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(A, B)$ 表示所有 $f\colon A \to B$ 的集合，也就是说，表示 m-排序中所有满足 $\mathrm{dom}(y) = A$且 $\mathrm{rng}(y) = B$ 的元素 y。我们将 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(A, B)$ 称为一个同态集。注意，它是 $\mathbb{C}$ 中一个带参数 A和 B 的 L_{cat}-可定义子集。

2.3. 极限与余极限。 范畴论中的一个重要工具是极限的概念。就有限极限而言，很容易看出它们是可定义的。我们快速回顾一下它们的定义。给定一个函子 $J\colon \mathbb{d} \to \mathbb{C}$（这里的 $\mathbb{d}$ 是一个仅用于索引的范畴），一个 J-锥 是一个二元组 (C, ψ)，其中 C 是 $\mathbb{C}$中的一个对象，并且对于 $\mathbb{d}$中的每个对象 A，都有一个 $\mathbb{C}$-态射 $\psi_A\colon C \to J(A)$，使得对于 $\mathbb{d}$ 中的每个箭头 $f\colon A \to B$，都有

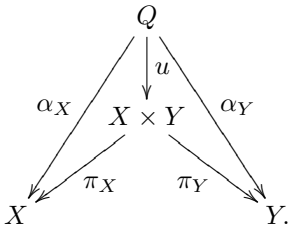
$J(f) \circ \psi_A = \psi_B$。如果一个 J-锥 (L, φ) 在所有 J-锥中是泛的，也就是说，对于任意其他的 J-锥 (C, ψ)，都存在唯一的态射 $u\colon C \to L$，使得对于 $\mathbb{d}$中的所有对象 A， $\varphi_A \circ u = \psi_A$，那么它就称为 J的一个极限 。

2.4. **例子**。 令$\mathbb{d}$ 为一个有两个对象且对象之间有两个态射的范畴（当然，不包括每个对象上的恒等态射）；符号表示为 $\bullet \rightrightarrows \bullet$。从$\mathbb{d}$ 到某个范畴的函子 J 由此产生该范畴中的两个“平行态射” $A \rightrightarrows B$，而一个锥（C、 φ、 ψ）则由两个态射 $\varphi\colon C \to A$和 $\psi\colon C \to B$组成，使得 φ 与任一态射 $A \to B$ 复合后都得到 ψ。这个泛锥称为这两个态射 $A \rightrightarrows B$的等化子 。如果 A 和 B 是集合，那么等化子 E 就是 A 中在两个态射作用下像相同的所有元素构成的子集 B 。

请注意，这个最后的例子可以推广到任意两个 L-同态，其中 L 是一阶语言。事实上，由于同态必须保持 L的常量和符号函数，因此作为集合， E 在这些符号下封闭，因而又是一个L-结构。

如果$\mathbb{d}$ 是有限的（即对象和态射的数量都有限），那么很容易用语言 L_{cat}中的一阶句子将其明确表述出来。下面以积为例说明（此处，$\mathbb{d}$ 是一个有两个对象的离散范畴，记作 $\bullet \quad \bullet$）。从这个范畴到 $\mathbb{C}$的函子，等价于选取两个对象 X 和 Y。它们的积 由一个对象（通常记作 $X \times Y$）和两个态射 $\pi_X\colon X \times Y \to X$ 及 $\pi_Y\colon X \times Y \to Y$构成，并满足：对于任意对象 Q 以及态射 $\alpha_X\colon Q \to X$ 和 $\alpha_Y\colon Q \to Y$，都存在唯一的态射 $u\colon Q \to X \times Y$，从而得到一个交换图（由“锥”构成）

(1)



显然，因此存在一个一阶句子 Prod，断言任意两个对象都有积。

还有一个对偶概念，余极限，这次它是一个泛余锥，也就是说，箭头 ψ_A 从 $J(A)$ 指向余锥。例如，余积由对偶图给出，也就是说，图（1）中的所有箭头都反向。

2.5.**推论**。 设 L 是一阶语言，$\mathbb{M}\text{od}(L)$ 是 L-模型构成的范畴。那么$\mathbb{M}\text{od}(L)$是完备的（即对所有极限封闭）。此外，$\mathbb{M}\text{od}(L)$存在余等化子和滤过余极限；当语言不包含常元符号且所有函数符号都是一元时，它还是余完备的。在这些（余）极限中，有限极限都是可定义的。

证明。 众所周知，若一个范畴有等化子和积，则它对所有极限封闭（例如参见 [8, §V.2, 定理 1]）。虽然任意积并非可定义的，但它们确实存在于 $\mathbb{M}\text{od}(L)$ 中。关于滤余极限（也称为 直极限），请参见 [3, 定理 2.4.6]。由于我找不到关于余等化子的合适参考资料，这里给出一个证明：给定两个L-同态 $f, f'\colon \mathcal{A} \rightrightarrows \mathcal{B}$，在底集 $B := D(\mathcal{B})$ 上定义一个关系：对于 $x, x' \in B$，若存在某个 $a \in A := D(\mathcal{A})$，使得 $x = f(a)$ 且 $x' = f'(a)$，则有 $x \sim x'$。

令 $E \subseteq B \times B$ 为 $\sim$的传递闭包，因此它是一个等价关系；再令 $C := B/E$ 为 E-等价类 $\beta := [b]$ 的集合，其中 $b \in B$。我们按如下方式将 C 构造成一个 L-结构 $\mathcal{C}$。对于常元符号 c，令 $\mathsf{c}^{\mathcal{C}}$ 为 $\mathsf{c}^{\mathcal{B}}$ 的等价类。对于 n 元函数符号 F，将 $\mathsf{F}^{\mathcal{C}}([b_1], \ldots, [b_n])$ 定义为 $\mathsf{F}^{\mathcal{B}}(b_1, \ldots, b_n)$ 的等价类；对于 n 元关系符号 R，规定 $(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ 属于 $\mathsf{R}^{\mathcal{C}}$，当且仅当存在 $b_i \in \beta_i$，使得 $(b_1, \ldots, b_n) \in \mathsf{R}^{\mathcal{B}}$。只有函数符号的情形需要验证其定义与 E-代表元的选取无关。设b_i' 与 b_i 是 E-等价的。利用传递闭包上的简单归纳，我们可以先假设 $b_i \sim b_i'$，例如 $b_i = f(a_i)$ 和 $b_i' = f'(a_i)$。分别将这些 n-元组记作 b、b' 和 a'。由于 f 和 f' 是同态，我们得到

$$\mathsf{F}^{\mathcal{B}}(b) = \mathsf{F}^{\mathcal{B}}(f(a)) = f(\mathsf{F}^{\mathcal{A}}(a)) \qquad \text{and} \qquad \mathsf{F}^{\mathcal{B}}(b') = \mathsf{F}^{\mathcal{B}}(f'(a)) = f'(\mathsf{F}^{\mathcal{A}}(a))$$

这表明 $\mathsf{F}^{\mathcal{B}}(b) \sim \mathsf{F}^{\mathcal{B}}(b')$。显然，典范映射 $B \to C$: $b \mapsto [b]$ 诱导出一个同态 p: $\mathcal{B} \to \mathcal{C}$，并且根据设计，$p \circ f = p \circ f'$。为验证余等化子的泛性质，设 $\mathcal{M}$ 是任意结构，且 q: $\mathcal{B} \to \mathcal{M}$ 是满足 $q \circ f = q \circ f'$ 的同态。按规则 $[b] \mapsto q(b)$ 定义映射 u: $C \to D(\mathcal{M})$。为证明该映射与代表元 b 的选取无关，设 b' 与 b 等价；同样，我们可以根据归纳假设 $b \sim b'$，即存在某个 $a \in A$，使得 $b = f(a)$ 和 $b' = f'(a)$。因此，$q(b) = q(f(a)) = q(f'(a)) = q(b')$，这表明 u 是良定义的。容易看出，它是一个 L-同态，且 $q = u \circ p$。满足上述分解条件的同态是唯一的，因为 p 是满射。

接下来假设 L 没有常元符号，且所有函数符号都是一元的。于是，对于 $x \in X$，我们定义一族 L-结构 $\mathcal{M}_x$ 的余积为这样一个结构：其底集 U 是所有 $D(\mathcal{M}_x)$ 的不交并，并通过平行方式赋予它一个 L-结构 $\mathcal{U}$。也就是说，对于一个 n元关系符号 R，元组 $(a_1, \ldots\ldots, a_n) \in C$属于 $\mathsf{R}^{\mathcal{U}}$，当且仅当存在一个 $x \in X$，使得所有 $a_i \in D(\mathcal{M}_x)$ 且 $(a_1, \ldots\ldots, a_n) \in \mathsf{R}^{\mathcal{M}_x}$。如果 F 是一元函数符号，那么令 $\mathsf{F}^{\mathcal{U}}$将元素 $a \in U$ 映射到 $\mathsf{F}^{\mathcal{M}_x}(a)$，其中 $x \in X$ 是满足 $a \in D(\mathcal{M}_x)$ 的唯一指标。请注意，元数不是一的符号会带来这样的问题：对于“混合”元组，究竟应应用哪个函数并不明确（这也包括常元符号），因此必须将它们排除在外。留给读者验证 $\mathcal{U}$ 满足余积的泛性质。在这种情况下，余完备性同样可由余积和余等化子的存在性推出。□

2.6. 注记。只要（余）极限存在，它实际上就是按照集合范畴中的方式计算的。更准确地说，底集函子 D 反映并保持（余）极限（若其存在）。特别地，$\mathbb{M}\mathrm{od}(L)$ 是正则（甚至是正合）范畴。

注意，余等化子的态射 p: $\mathcal{B} \to \mathcal{C}$ 通常并不是强同态，因此，对于具有强同态的 L-结构范畴，同样的结论并不成立（关于这个范畴，见下文 §5）。

3. 超积与初等性

回忆一下，集合 X 上的超滤子 $\mathcal{U}$ 是一个非空子集的集合，对有限交和上集封闭，并且对 X 的任意子集，该子集或其补集都属于$\mathcal{U}$。我们把 $\mathcal{U}$ 中的子集看作“大”的，其余子集便是“小”的。给定一列由 $x \in X$索引的集合 S_x，令 S_∞ 为它们的笛卡尔积。在 S_∞上，超滤子现在诱导出一个等价关系：我们称 S_∞ 中的两个元素 $(a_x)_x$ 和 $(b_x)_x$ 等价，如果它们几乎所有对应项都相同；也就是说，所有满足 $a_x = b_x$ 的$x \in X$ 所成的集合属于 $\mathcal{U}$（即是“大”的）。由此得到的商空间称为

超积 （取自 S_x ），通常记作 $S_{\natural}$。如果 L 是一阶语言，并且所有S_x 都是 L-结构，那么 $S_{\natural}$ 就从笛卡尔积 S_∞继承了一个 L-结构。关键结果称为 Łoś 定理，它指出，一个 L-语句 σ 在 $S_{\natural}$ 中成立，当且仅当它在几乎所有 S_x 中成立（例如参见 [9,§4.2]）。

如果所有的 S_x 都是同一个集合 S，使得 $S_\infty = S^X$，那么我们称 $S_{\natural}$ 为S的超幂。由 Łoś 定理可知， $S_{\natural}$ 与 S初等等价。事实上，存在一个典范映射 $S \to S_{\natural}$，它将元素 $s \in S$ 映到常值映射 $x \mapsto s$ 的等价类，这称为对角嵌入，并且容易验证这确实给出了一个初等嵌入。根据 Keisler和Shelah 的一个著名定理，可以通过超幂构造来判定初等性：两个 L-结构初等等价，当且仅当它们有某些同构的超幂（可能相对于不同的超滤子）。然而，该定理的证明似乎依赖广义连续统假设；但就我们的目的而言，下面这个直接推论很容易直接证明。

在下文中，对于某个一阶语言 L，我们将用花体字母 $\mathcal{A}$，$\mathcal{M}$、.....表示 L-结构，并用 $D(\mathcal{A})$ $D(\mathcal{M})$ ..... 表示它们的底集。

3.1. **命题**。 两个一阶结构初等等价，当且仅当存在一个从其中一个到另一个的超幂中的初等嵌入。

证明。一边显然，因此假设 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 是底集分别为 $A := D(\mathcal{A})$ 和 $B := D(\mathcal{B})$ 的初等等价 L-结构。我们要证明存在一个包含 $\mathcal{B}$ 作为初等子模型的 $\mathcal{A}$ 的超幂。令 b 为枚举 B 所有元素的元组，并令 $\mathfrak{b}$ 为与其大小相同的一组新常元符号。令 $L(\mathfrak{b})$ 为通过添加这些新常元符号从 L 得到的语言。因此，通过将 $\mathfrak{b}$ 解释为 b，结构 $(\mathcal{B}, b)$ 是一个 $L(\mathfrak{b})$-结构。考虑该语言 $L(\mathfrak{b})$ 中的理论 $\mathrm{Th}^{L(\mathfrak{b})}(\mathcal{B}, b)$（亦即 $\mathcal{B}$的初等图），并令 X 为该理论所有非空有限子集构成的集合。任意 $\Sigma \in X$ 在逻辑上都等价于一个形如 $\varphi(\mathfrak{b})$ 的语句，使得 $(\mathcal{B}, b) \models \varphi(b)$。由于 $\mathcal{B}$ 于是是 $(\exists x)\varphi(x)$ 的模型，根据初等等价， $\mathcal{A}$ 也是。因此我们可以找到一个 $L(\mathfrak{b})$-扩张 $\mathcal{A}^*_\Sigma := (\mathcal{A}, c_\Sigma)$，它是 Σ的模型，其中 c_Σ 是 $\mathcal{A}^*_\Sigma$ 中对 $\mathfrak{b}$ 的解释所对应的元素元组。对每个$\Sigma \in X$，令 $\langle\Sigma\rangle$ 为所有满足 $\Sigma \subseteq \Psi$ 的 $\Psi \in X$ 构成的集合。由于所有 $\langle\Sigma\rangle$ （其中$\Sigma \in X$）构成的集合满足有限交性质，因此它包含于 X上的某个超滤子 $\mathcal{U}$ 中。令 $\mathcal{A}^*_{\natural}$ 为关于此超滤子的 $\mathcal{A}^*_\Sigma$ 的超积。因此， $\mathcal{A}^*_{\natural}$ 的 L-约化结构$\mathcal{A}_{\natural}$ 是关于同一超滤子的 $\mathcal{A}$ 的超幂。令 σ 为 $\mathrm{Th}^{L(\mathfrak{b})}(\mathcal{B}, b)$ 中的一个语句。对于每个包含 σ 的 $\Sigma \in X$，都有 $\mathcal{A}^*_\Sigma \models \sigma$；根据$\mathcal{U}$的构造，这对几乎所有 Σ 都成立，因此 $\mathcal{A}^*_{\natural}$ 满足 σ。于是 $\mathcal{A}_{\natural}$ 是 $\mathrm{Th}^{L(\mathfrak{b})}(\mathcal{B}, b)$ 某个模型的约化结构，因此根据初等图引理（例如参见 [9, 引理 8.2.1]），$\mathcal{B}$ 是 $\mathcal{A}_{\natural}$的初等子结构。事实上，映射 $\mathcal{B} \to \mathcal{A}_{\natural}$ 将 b 映射到 $\mathcal{A}^*_{\natural}$这一 $L(\mathfrak{b})$-结构中 $\mathfrak{b}$ 的解释；很容易看出，这是一个初等嵌入。□

3.2. 注记。 请注意 X，超滤子的底集的大小至多等于语言 $L(\mathfrak{b})$的幂集的大小。

4. 范畴的超幂

回顾一下，Grothendieck 宇宙[4] 是一个集合 $\mathfrak{U}$，具有以下性质：(1) $\mathfrak{U}$ 是传递的，这意味着如果 $y \in \mathfrak{U}$并且 $x \in y$，那么 $x \in \mathfrak{U}$；

[4]仅凭 ZFC 并不能推出宇宙的存在；这需要某种大基数公理，例如不可达基数的存在。

(2) 如果 y 属于 $\mathfrak{U}$，那么它的幂集 $\mathcal{P}(y)$ 也属于其中；(3) 如果对于所有 $i \in I$都有 $I \in \mathfrak{U}$ 和 $x_i \in \mathfrak{U}$，那么所有 x_i 的并集也属于 $\mathfrak{U}$；(4) $\omega \in \mathfrak{U}$。

固定一个宇宙 $\mathfrak{U}$，并始终如此。我们将 $\mathfrak{U}$视为集合范畴的一个子范畴。以下两个结果表明，一个格罗滕迪克宇宙足以开展“模型论”研究。

4.1. **引理**。 设 $\mathcal{M}$ 是一个 L-结构， $X \subseteq \mathfrak{U}$ 且 $s\colon X \to D(\mathcal{M})$ 是一个双射。那么存在唯一的 L-结构 $\mathcal{X} := s^*\mathcal{M}$，使得 $D(\mathcal{X}) = X$，且 s 诱导出一个 $\mathcal{X} \to \mathcal{M}$的 L-结构同构。

证明。 我们如下定义 X 上的一个 L-结构。若 R 是一个 n元关系符号（包括 $n = 0$ 的情形，此时它仅表示一个常元符号），则 $\mathrm{R}^{\mathcal{X}}$ 是子集 $s^{-1}(\mathrm{R}^{\mathcal{M}})$；若 f 是一个 n元函数符号，则 $\mathrm{f}^{\mathcal{X}}$ 就是 $s^{-1} \circ \mathrm{f}^{\mathcal{M}} \circ s$。容易验证，这给出了所需的 L-结构。 □

4.2. **命题** (L¨owenheim-Skolem 定理 $\mathfrak{U}$)。 设 L 是 $\mathfrak{U}$中的一阶语言，设 $\mathcal{M}$是一个 L-结构，并设 $A \in \mathfrak{U}$是 $D(\mathcal{M})$的子集。那么存在一个初等嵌入 $\mathcal{N} \preceq \mathcal{M}$，使得 $A \subseteq D(\mathcal{N}) \in \mathfrak{U}$。

证明。设 κ 是 $\mathfrak{U}$的基数，因此它大于 L 和 A的基数。根据通常的L¨owenheim-Skolem定理（例如参见 [9, 定理 8.4.1]），存在一个基数为 $\lambda < \kappa$ 的初等子结构 $\mathcal{M}' \subseteq \mathcal{M}$，且 $A \subseteq D(\mathcal{M}')$。选取某个包含 A 且基数为 λ的集合 $X \in \mathfrak{U}$。根据引理 4.1，存在一个 L-结构 $\mathcal{N} \cong \mathcal{M}'$，使得 $D(\mathcal{N}) = X$。□

因此，我们将把这样构造的模型 $\mathcal{N}$ 视为小模型：

4.3.**定义**(小性)。 给定一阶语言 $L \in \mathfrak{U}$，如果一个 L-结构 $\mathcal{N}$ 的底集 $D(\mathcal{N})$ 是 $\mathfrak{U}$ 的一个元素，我们就称它为小的。

这尤其适用于范畴，因此按照我们的术语，如果一个范畴的对象集合和态射集合都是 $\mathfrak{U}$ 的成员，那么它就是小的。我们也会遇到非小范畴，但即便如此，我们仍假设对象集合和态射集合都是 $\mathfrak{U}$ 的子集（因此在经典意义上它们仍然是小的）。

4.4.**定义**。 若一个范畴 $\mathbb{C}$ 的所有同态集都属于 $\mathfrak{U}$，则称 $\mathbb{C}$ 为 $\mathfrak{U}$-范畴。[5] 此外，若 $\mathbb{C}$ 有一个生成元，则称 $\mathbb{C}$ 为 $\mathfrak{U}$-具体。如果一个范畴是某个 $\mathfrak{U}$-具体范畴的子范畴，则称它为 子$\mathfrak{U}$-具体范畴。

回顾一下，在范畴 $\mathbb{C}$ 中，对象 I 是该范畴的生成元，是指对于每一对不同的箭头 $f \neq g\colon A \rightrightarrows B$，都存在一个箭头 $a\colon I \to A$，使得 $f \circ a \neq g \circ a$。

4.5. **推论**。 任意（子）-$\mathfrak{U}$-具体范畴$\mathbb{C}$ 都嵌入于 $\mathfrak{U}$。

证明。 对于 I 生成元，函子 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(I, -)$ 根据定义是忠实的（在态射上是单射）；它在对象上也具有单射性，因为不同的同态集彼此不相交。[6] □

忠实的可表函子可以被视为某种遗忘函子，而这正是我们要做的。给定一个 $\mathfrak{U}$-具体范畴 $\mathbb{C}$，我们固定一个生成元 I，并定义

$$|A| := \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(I, A). \tag{2}$$

[5]这对应于局部小的经典概念。[6]这是范畴论中的通行约定。

注意，生成元并不唯一（事实上，如果 I 是生成元，那么任意积 $I \times A$ 也是），因此这个遗忘函子取决于 I 的选择，但我们并不总是明确说明这一点。给定一个箭头 $f\colon A \to B$，映射 $|f|\colon |A| \to |B|$ 由复合给出，也就是说，给定 $a \in |A|$，使得 $a\colon I \to A$，那么 a 在 $|f|$ 下的像就是态射 $f \circ a \in |B|$。

设 X 是 $\mathfrak{U}$ 中的一个集合，且 $\mathcal{U}$ 是 X 上的一个超滤子（因而也有 $\mathcal{U} \in \mathfrak{U}$）；因此，我们可以简单地说 $\mathcal{U}$ 是 $\mathfrak{U}$中的一个超滤子。注意，对于给定的范畴 $\mathbb{C}$，将其视为一个 L_{cat}-结构后，我们可以取其超幂 $\mathbb{C}_\natural$，并通过对角嵌入得到范畴嵌入 $\mathbb{C} \hookrightarrow \mathbb{C}_\natural$。注意，$\mathbb{C}_\natural$ 是积范畴 $\mathbb{C}^X$ 关于由 X上的超滤子 $\mathcal{U}$ 给出的等价关系的商。因此，超幂中的任意对象 B 都由一个映射 $x \mapsto B_x$给出，其中 $x \in X$，而 B_x是 $\mathbb{C}$中的一个对象；我们称映射 $x \mapsto B_x$ 表示 B。

4.6. **引理**。设 $\mathbb{C}$ 是一个带有生成元 I的 $\mathfrak{U}$-具体范畴。I 在对角嵌入下的像 $I_\natural$ 是 $\mathbb{C}_\natural$的一个生成元，因此后者特别地再次是 $\mathfrak{U}$-具体的，从而得到遗忘函子 $|-| := \mathrm{Hom}^{\mathbb{C}_\natural}(I_\natural, -)$。

此外，对于 $\mathbb{C}_\natural$中的每个对象 B，集合 $|B|$都是集合 $|B_x|$的超积，其中$x \mapsto B_x$ 是表示对象 B 的映射。

证明。第一个陈述由第二个陈述推出，因为 $|-|$在 $\mathbb{C}$上忠实，所以在 $\mathbb{C}_\natural$上仍然忠实。$|B| = \mathrm{Hom}^{\mathbb{C}_\natural}(I_\natural, B)$中的一个元素是映射$x \mapsto f_x$的等价类，其中每个 f_x 都是一个态射 $I \to B_x$，也就是说，是 $|B_x|$中的一个元素，因此映射 $x \mapsto |f_x|$给出 $|B_x|$的超积中的一个元素，反之亦然。现在很容易看出，这与所作的任何选择都无关。□

4.7. 注记。在这个证明中，我们从未用到范畴 $\mathbb{C}$在超幂中保持不变这一点，因此，更一般的结果是：若 $\mathbb{C}_x$ 是一个由 $x \in X$索引的 $\mathfrak{U}$-具体范畴族，其相应的生成元为 I_x，且 $\mathbb{C}_\natural$ 是它们的超积，那么由映射 $x \mapsto I_x$ 给出的 $\mathbb{C}_\natural$ 中的对象 $I_\natural$ 是 $\mathbb{C}_\natural$ 的一个生成元；并且对于 $\mathbb{C}_\natural$中的每个对象 B，集合 $|B| := \mathrm{Hom}^{\mathbb{C}_\natural}(I_\natural, B)$是集合 $|B_x|$的超积，其中 $x \mapsto B_x$ 是表示 B的映射。

4.8. 注记。证明表明，我们可以将假设弱化为 $\mathbb{C}$ 是子-$\mathfrak{U}$-具体的。

注意，$\mathfrak{U}$ 本身是 $\mathfrak{U}$-具体的，其生成元为单元素集合 $\{\emptyset\}$。由引理4.6可知，$\mathfrak{U}_\natural$ 实际上是 $\mathfrak{U}$ 的子范畴，因为超积也属于 $\mathfrak{U}$。我们将在下一节看到，这种“普适性”并非孤立现象。

4.9. **例**。如果范畴 $\mathbb{C}$ 有一个遗忘函子 $\mathbb{C} \to \mathfrak{U}$，且该函子有左伴随$U\colon \mathfrak{U} \to \mathbb{C}$，那么 $U(\{\emptyset\})$ 是 $\mathbb{C}$的一个生成元。

4.10. **例**。给定一个群（或更一般地，一个幺半群）G，我们可以将其关联到一个范畴 $\mathbb{G}$，该范畴只有一个对象 $\bullet$，其态射由群 G给出，而态射的复合由群运算定义。这个唯一的对象显然是一个生成元，而“底集”是 $|\bullet| = \mathrm{Hom}(\bullet, \bullet) = G$，这表明遗忘函子的概念并不只涉及对象。显然，此时 $\mathbb{G}_\natural$ 表示群（幺半群）$G_\natural$。

生成元族。给定范畴 $\mathbb{C}$的一个对象子集 Σ，对任意对象 A，定义集合（由 $\mathfrak{U}$中的余积/不交并给出）

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\Sigma, A) := \coprod_{I \in \Sigma} \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(I, A). \tag{3}$$

注意， Σ 是一个生成元族（这意味着，对于不同的 $f, g\colon\ A \rightrightarrows B$，至少存在一个 $I \in \Sigma$ 和一个态射 $a\colon\ I \to A$，使得 $f \circ a \neq g \circ a$），当且仅当函子 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\Sigma, -)$是忠实的。因此，我们也可以再次用此来定义一个遗忘函子 $|-| := \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\Sigma, -)$。因此，如果一个 $\mathfrak{U}$-范畴 $\mathbb{C}$ 弱 $\mathfrak{U}$-具体且存在生成元族，就称其为弱 $\mathfrak{U}$-具体范畴。

现在我们也可以证明引理的一个变体4.6，适用于弱 $\mathfrak{U}$-具体范畴 $\mathbb{C}$；证明留给读者。

4.11. **引理**。设弱 $\mathfrak{U}$-具体范畴 $\mathbb{C}$ 中有一族生成元 Σ，并令 $|-| := \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\Sigma, -)$。设 $\Sigma_\natural$ 为 $\mathbb{C}_\natural$ 中由映射 $x \mapsto I_x$ 给出的所有等价类，其中 $I_x \in \Sigma$。则 $\Sigma_\natural$ 是 $\mathbb{C}_\natural$ 的一族生成元；对于 $\mathbb{C}_\natural$ 中由映射 $x \mapsto B_x$ 给出的每个对象 B，集合 $|B| := \mathrm{Hom}^{\mathbb{C}_\natural}(\Sigma_\natural, B)$ 是集合 $|B_x|$ 的超积。 □

4.12. 注记。称集合 Σ 为局部唯一的，如果对每个对象 A，都存在唯一的 $I \in \Sigma$，使得 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(I, A)$ 非空。由此可知，$\Sigma_\natural$ 也局部唯一。

5. 一阶模型范畴

设 L 是一阶语言，T 是一个 L-理论。我们假设 L 属于 $\mathfrak{U}$（也就是说，它的常元、函数符号和关系符号构成的集合属于 $\mathfrak{U}$）。令 $\mathbb{M}\mathrm{od}_{\mathfrak{U}}(T)$ 表示 T 的小模型范畴（即所有满足底集 $D(\mathcal{N}) \in \mathfrak{U}$ 的 L-结构 $\mathcal{N} \models T$），态射为任意的 L-同态。若 T 是空理论，我们就简写为 $\mathbb{M}\mathrm{od}_{\mathfrak{U}}(L)$，即范畴 L-结构。

5.1. **命题**。设 L 是一阶语言。那么，$\mathbb{M}\mathrm{od}_{\mathfrak{U}}(L)$ 是 $\mathfrak{U}$-具体范畴，而单个变量 x 上的项代数 $\mathcal{T}$ 是一个生成元。此外，函子 D 和 $|-| = \mathrm{Hom}_{\mathbb{M}\mathrm{od}_{\mathfrak{U}}(L)}(\mathcal{T}, -)$ 自然同构。

证明。回忆一下，项代数 $\mathcal{T}$ 恰由变量 x 中的所有 L-项构成，其中语言的常元和函数符号按其自身解释，而谓词符号均定义为空集。若 $f, g\colon\ \mathcal{M} \rightrightarrows \mathcal{N}$ 是两个不同的 L-同态，则存在某个 $a \in D(\mathcal{M})$，使得 $f(a) \neq g(a)$。存在唯一的同态 $s_a\colon\ \mathcal{T} \to \mathcal{M}$，它将变量 x 映至 a（并将每个项 $t(x)$ 映至其求值结果 $t(a)$），由此可得 $f \circ s_a \neq g \circ s_a$。同理，$\mathrm{Hom}_{\mathbb{M}\mathrm{od}_{\mathfrak{U}}(L)}(\mathcal{T}, \mathcal{M})$ 与底集 $D(\mathcal{M})$ 自然同构，同构将同态 $s\colon\ \mathcal{T} \to \mathcal{M}$ 映至 $s(x) \in D(\mathcal{M})$。[7] □

5.2. **推论**。给定 $\mathcal{U}$ 上的一个超滤子 $X \in \mathfrak{U}$，相对于 $\mathcal{U}$ 的超幂 $\mathbb{M}\mathrm{od}_{\mathfrak{U}}(L)^\natural$ 同构于 $\mathbb{M}\mathrm{od}_{\mathfrak{U}}(L)$ 的一个子范畴。将 $\mathbb{M}\mathrm{od}_{\mathfrak{U}}(L)$ 替换为 $\mathbb{M}\mathrm{od}_{\mathfrak{U}}(T)$ 时同样成立，其中 T 是任意一个 L-理论。

更确切地说，存在一个范畴嵌入 $i\colon\ \mathbb{M}\mathrm{od}_{\mathfrak{U}}(L)_\natural \hookrightarrow \mathbb{M}\mathrm{od}_{\mathfrak{U}}(L)$，使下图交换

(4)
$$\begin{array}{ccc} \mathbb{M}\mathrm{od}_{\mathfrak{U}}(L)_\natural & \xrightarrow{\ i\ } & \mathbb{M}\mathrm{od}_{\mathfrak{U}}(L) \\ & {\scriptstyle |-|}\searrow & \downarrow{\scriptstyle D} \\ & & \mathfrak{U} \end{array}$$

其中 $|M| :=\mathrm{Hom}_{\mathbb{M}\mathrm{od}_{\mathfrak{U}}(L)^\natural}(I, M)$。

[7] 事实上，一般的项代数构造是函子 $|-|$ 的左伴随。

证明。设 M 是 $\mathbb{M}\mathrm{od}_{\mathfrak{U}}(L)^{\natural}$ 中的一个对象，由一个序列 $x \mapsto \mathcal{M}_x$ 给出，其中 $x \in X$，且每个 $\mathcal{M}_x$ 都是 $\mathbb{M}\mathrm{od}_{\mathfrak{U}}(L)$ 中的一个对象，也就是说，是一个 L-结构。与命题 5.1 一样，设$\mathcal{T}$ 是由单变量项代数给出的 $\mathbb{M}\mathrm{od}_{\mathfrak{U}}(L)$ 的生成元，并设 I 是由常值序列 $x \mapsto \mathcal{T}$ 给出的 $\mathbb{M}\mathrm{od}_{\mathfrak{U}}(L)^{\natural}$ 中的对象。

由引理 4.6可知，集合 $|M|$ 等于集合的超积 $|\mathcal{M}_x|_{\mathfrak{U}}$。令 $\mathcal{M}_{\natural}$ 为以下对象的超积 $\mathcal{M}_x$。由命题 5.1，存在自然同构 $|\mathcal{M}_x| \cong D(\mathcal{M}_x)$，因此由 Łoś 定理可得一个自然同构

$$|M| \cong D(\mathcal{M}_{\natural}). \tag{5}$$

因此，由引理 4.1，我们可以通过将 $\mathcal{M}_{\natural}$的L结构拉回，在集合 $|M|$ 上定义一个 L结构，并将 $i(M)$记为这个 L结构。特别地， $i(M) \cong \mathcal{M}_{\natural}$。为了证明 i 是函子性的，设 N 是 $\mathbb{M}\mathrm{od}_{\mathfrak{U}}(L)^{\natural}$ 中的另一个对象，它来自一列 L结构 $x \mapsto \mathcal{N}_x$，并设 $i(N)$是定义在 $|N|$ 上的典范 L结构，其中 $|N|$同构于 $\mathcal{N}_x$的超积 $\mathcal{N}_{\natural}$。态射 $f\colon M \to N$ 属于 $\mathbb{M}\mathrm{od}_{\mathfrak{U}}(L)^{\natural}$，它来自一列态射 $f_x\colon \mathcal{M}_x \to \mathcal{N}_x$，这些态射属于 $\mathbb{M}\mathrm{od}_{\mathfrak{U}}(L)$，并在超积中给出一个 L结构的态射 $f_{\natural}\colon \mathcal{M}_{\natural} \to \mathcal{N}_{\natural}$。(5)的自然性现在给出一个态射$i(f)\colon i(M) \to i(N)$。由于 $|-|$是一个嵌入，因此由(4)可知 i 也是嵌入。

要证明任意理论的情形，我们不能直接照搬上述证明，因为$\mathcal{T}$可能不是 T的模型。不过，我们可以援引注记 4.8；也就是说，取 M 作为 $\mathbb{M}\mathrm{od}_{\mathfrak{U}}(T)^{\natural}$中的一个对象，此时 $\mathcal{M}_x$ 也都是 T的模型，因此它们的超积也是模型$\mathcal{M}_{\natural}$，由 Łoś 定理可知。由于 $i(M) \cong \mathcal{M}_{\natural}$，嵌入 i 便可经由 $\mathbb{M}\mathrm{od}_{\mathfrak{U}}(T)$分解，正如所需。□

5.3. 注记。注意，嵌入 $i\colon \mathbb{M}\mathrm{od}_{\mathfrak{U}}(L)_{\natural} \to \mathbb{M}\mathrm{od}_{\mathfrak{U}}(L)$ 并非满，因为前者中的态射来自超积。与对角嵌入 $\mathbb{M}\mathrm{od}_{\mathfrak{U}}(L) \hookrightarrow \mathbb{M}\mathrm{od}_{\mathfrak{U}}(L)^{\natural}$复合后，所得的自函子作用于 $\mathbb{M}\mathrm{od}_{\mathfrak{U}}(L)$，在自然同构意义下，将一个 L-结构 $\mathcal{M}$ 映为其超幂 $\mathcal{M}_{\natural}$，并将同态映为其超幂。一般而言，这并非初等映射，因此 i也不是。事实上，即使取 $L = \emptyset$，也就是集合范畴，这一点仍不成立：表达 ω 与 2^{ω} 之间存在双射的语句在下方显然为假，但在上方却为真，因为 $(2^{\omega})_{\natural} \cong \omega_{\natural}$。特别地，嵌入 i甚至可能无法反映同构。

强同态。范畴 $\mathbb{M}\mathrm{od}_{\mathfrak{U}}(L)$ 包含子范畴$\mathbb{M}\mathrm{od}^{\mathrm{str}}_{\mathfrak{U}}(L)$（该子范畴不是满子范畴），二者具有相同的对象，均为 L-结构，但其中的同态现在要求是强同态，即对于任意给定的关系符号 R，一个元组满足 R，当且仅当其在该态射下的像满足 R。当然，如果语言没有关系符号（例如 L_{cat}），那么 $\mathbb{M}\mathrm{od}_{\mathfrak{U}}(L) = \mathbb{M}\mathrm{od}^{\mathrm{str}}_{\mathfrak{U}}(L)$。一般而言，我们将 $\mathrm{fct}(L)$ 写作 L的限制，即省略所有（正元数的）谓词符号后得到的结构。

5.4.**引理**。设$\mathcal{N}$是一个 $\mathit{fct}(L)$-结构，$\mathcal{M}$ 是一个 L-结构。如果 $f\colon \mathcal{N} \to \mathcal{M}|_{\mathit{fct}(L)}$ 是一个 $\mathit{fct}(L)$-同态，那么它在 $\mathcal{N}$ 上诱导出一个 L-结构，记为 $f^*\mathcal{M}$，使得 $f\colon f^*\mathcal{M} \to \mathcal{M}$ 是一个强 L-同态。此外，$f^*\mathcal{M}$ 是使 f 成为强同态的 $\mathcal{N}$ 的唯一扩张。

证明。设 R 是一个 n 元关系符号，且 $P \subseteq D(\mathcal{M})^n$ 是它在 $\mathcal{M}$ 中定义的子集。于是，我们将 R 在 $D(\mathcal{N})$ 上的解释设为子集 $f^{-1}(P)$（这里继续用 f 表示 n 重积 $f\colon D(\mathcal{N})^n \to D(\mathcal{M})^n$）。根据构造，$f$ 因而是一个强 L-同态。最后一个断言现在可由强同态的定义直接得出。□

和之前一样，设 $\mathcal{T}$ 是单变量项代数。我们无法将它扩充为一个对所有 L-结构都适用的 L-结构，因此转而考虑所有满足其到 $\mathrm{fct}(L)$ 的约化结构为 $\mathcal{T}$ 的 L-结构所组成的集合 Θ（显然 $\Theta \in \mathfrak{U}$）。

5.5. **引理**。 *The set* Θ 构成 $\mathbb{M}\mathrm{od}^{str}_{\mathfrak{U}}(L)$ 的生成元族。此外，这个生成元族是局部唯一的。

证明。 设 $f, g\colon \mathcal{M} \rightrightarrows \mathcal{N}$ 是 L-结构之间两个不同的（强）同态。它们的约化结构是 $\mathtt{fct}(L)$-结构，因此根据命题 5.1，存在一个态射 $a\colon \mathcal{T} \to \mathcal{M}|_{\mathtt{fct}(L)}$，使得 $f \circ a \neq a \circ g$。取 $\mathcal{J} := a^*\mathcal{M}$——因此 $\mathcal{J} \in \Theta$——，根据引理 5.4，我们得到所需的（强）同态 $a\colon \mathcal{J} \to \mathcal{M}$。此外，唯一性现在保证，对于任意不同于 $\mathcal{J} = a^*\mathcal{M}$ 的 $\mathcal{J}' \in \Theta$，$\mathrm{Hom}_{\mathbb{M}\mathrm{od}^{\mathrm{str}}_{\mathfrak{U}}(L)}(\mathcal{J}', \mathcal{M})$ 为空，这表明该生成元族是局部唯一的。 □

5.6. **命题**。 取如上定义的 Θ，存在函子的一个自然同构，使得对于每个小的 L-结构 $\mathcal{M}$，我们有

$$D(\mathcal{M}) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{M}\mathrm{od}^{str}_{\mathfrak{U}}(L)}(\Theta, \mathcal{M}). \tag{6}$$

证明。 令 $y \in D(\mathcal{M})$。存在唯一的 $\mathtt{fct}(L)$-同态 $a_y\colon \mathcal{T} \to \mathcal{M}|_{\mathtt{fct}(L)}$，它将自由变量映到 y。根据引理 5.5的证明，对象 $a_y^*\mathcal{M}$ 因此是 Θ 中满足以下条件的唯一结构：$a_y\colon a_y^*\mathcal{M} \to \mathcal{M}$ 是强的。

反过来，假设 $\mathcal{J} \in \Theta$，并且我们有一个强同态 $a\colon \mathcal{J} \to \mathcal{M}$。由此诱导的映射 a，从 $D(\mathcal{J}) = D(\mathcal{T})$ 到 $D(\mathcal{M})$，将自由变量映到一个元素 $y \in D(\mathcal{M})$。由于 Θ 是局部唯一的，我们必有 $a = a_y$，这就证明了该赋值是前一个赋值的逆映射。□

5.7. **推论**。 设 L 是一个一阶语言，$\mathcal{U}$ 是一个超滤子，二者都属于 $\mathfrak{U}$。给定一个 L-理论 T，相对于 $\mathcal{U}$ 的超幂 $\mathbb{M}\mathrm{od}^{str}_{\mathfrak{U}}(T)_\natural$ 同构于 $\mathbb{M}\mathrm{od}^{str}_{\mathfrak{U}}(T)$ 的一个子范畴。

证明。只要证明引理 4.6 在此设定下的等价表述，我们就可以照搬推论 5.2 的证明。为此，我们可以令 T 为空理论。因此，设 M 是 $\mathbb{M}\mathrm{od}^{\mathrm{str}}_{\mathfrak{U}}(L)_\natural$ 中的一个对象，由映射 $x \mapsto \mathcal{M}_x$ 给出，其中 $x \in X$，且每个 $\mathcal{M}_x$ 都是 $\mathbb{M}\mathrm{od}^{\mathrm{str}}_{\mathfrak{U}}(L)$ 中的一个对象。令 $\Theta_\natural$ 为集合 Θ 在 $\mathbb{M}\mathrm{od}^{\mathrm{str}}_{\mathfrak{U}}(L)_\natural$ 中的像，也就是说，它由所有映射 $X \to \Theta$ 的等价类组成。定义

$$|M| := \mathrm{Hom}_{\mathbb{M}\mathrm{od}^{\mathrm{str}}_{\mathfrak{U}}(L)_\natural}(\Theta_\natural, M).$$

根据引理 4.11，集合 $|M|$ 作为 L-结构的超积，继承了一个典范的 L-结构 $\mathcal{M}$，证明的其余部分便可照推论 5.2 的方法继续进行。 □

6. 泛范畴

设 $\mathcal{M}$ 是一个 L-结构。如果每个与 $\mathcal{M}$ 初等等价且基数小于 $\mathcal{N}$ 的 L-结构 $\mathcal{N}$ 都嵌入（分别地，初等嵌入）到 $\mathcal{M}$ 中，我们就称 $\mathcal{M}$ 泛（分别地，强泛）。

根据这个定义，任何可数结构都平凡地是泛的，因此我们排除这种情形。

6.1. **例子**。任何不可数代数闭域 K 在环语言中都是强泛的。这只是以下结果的一个特例：

6.2. **命题**。 设 T 是一个完备、不可数且范畴的 L-理论，$\mathcal{M}$ 是 T 的一个基数为 λ 的模型。若 λ 至少与语言 L 的大小相同，则 $\mathcal{M}$ 是强泛的。

证明。 设 $\mathcal{N}$ 是一个基数为 $\beta < \lambda$的模型。根据向上 L¨owenheim-Skolem 定理，存在一个 $\mathcal{N}'$ 的 $\mathcal{N}$的初等扩张，其大小为 λ （例如，参见 [9, 定理 8.4。3]），根据范畴性，前者必定与 $\mathcal{M}$同构。 □

与其使用基数，以下以格罗滕迪克宇宙为基础的定义更适合我们的需要。回想一下， $D(\mathcal{M})$ 表示一个 L-结构的底集，而 小 表示这个集合属于 $\mathfrak{U}$。

6.3. **定义**。 若一个 L-结构 $\mathcal{M}$满足 $D(\mathcal{M}) \subseteq \mathfrak{U}$，且对于任何与之初等等价的小$L$-结构 $\mathcal{N}$，都存在一个嵌入 $\mathcal{N} \hookrightarrow \mathcal{M}$，则称其为泛。

由于基数方面的原因，泛结构的底集子集永远不能是 $\mathfrak{U}$的元素，只能是其子集。普适性意味着，小子结构构成一个初等类：

6.4. **命题**。 设 $\mathcal{M}$ 是一个一阶语言 L中的泛结构， T 是它的完备 L-理论，而 $\mathcal{N}$ 是一个小的 L-结构。那么， $\mathcal{N}$ 是 $\mathcal{M}$的子结构（同构意义下）当且仅当它是 $T_\forall$的一个模型。

证明。 一个方向由全称保持性显然成立（见 [9, 引理 6.2。2]），因此设$\mathcal{N}$ 是 $T_\forall$的一个小模型。根据同一条引理，存在 $\mathcal{M}' \models T$ 使得$\mathcal{N} \hookrightarrow \mathcal{M}'$。由命题4.2，于是存在某个小的 $\mathcal{M}_0 \models T$ 满足 $\mathcal{N} \hookrightarrow \mathcal{M}_0$。由普适性，我们还得到一个嵌入 $\mathcal{M}_0 \hookrightarrow \mathcal{M}$，从而证明了 $\mathcal{N} \hookrightarrow \mathcal{M}$。 □

6.5. **例**。 令 $\emptyset$ 表示空语言中的空理论，也就是说，集合理论，因此 $\mathbb{M}\mathrm{od}_{\mathfrak{U}}(\emptyset)$ 就是 $\mathfrak{U}$。令 SET^∞（分别地， SET^n）表示无限集合理论（分别地，基数为 n 的集合理论）。那么 $\mathbb{M}\mathrm{od}_{\mathfrak{U}}(SET^\infty)$ 不包含终对象，而 $\mathfrak{U}$ 包含，因此它们的完备 L_{cat}-理论并不相同。[8] 然而，它们的全称理论相同，因为存在一个嵌入 $\mathfrak{U} \hookrightarrow \mathbb{M}\mathrm{od}_{\mathfrak{U}}(T^\infty)$，其将集合 $X \in \mathfrak{U}$映射到 $F^2(X)$，其中 $F(-) := \mathrm{Hom}_{\mathfrak{U}}(-, \omega)$（由于 $F(\emptyset)$ 是单例集，我们需要应用 F 两次，以始终得到无限集合并保持协变性）。

6.6. **定理**。 给定语言 L 和一个 L-理论 T，范畴 $\mathbb{M}\mathrm{od}_{\mathfrak{U}}(T)$ 和 $\mathbb{M}\mathrm{od}^{str}_{\mathfrak{U}}(T)$ 都是泛的（在范畴的语言 L_{cat} 中）。

证明。设 $\mathbb{C}$ 是一个小范畴，它与 $\mathbb{M}\mathrm{od}_{\mathfrak{U}}(T)$ 初等等价（在 L_{cat} 意义下）。根据备注 3.2，存在某个超幂 $\mathbb{M}\mathrm{od}_{\mathfrak{U}}(T)^\natural$，它是相对于集合 $X \in \mathfrak{U}$ 上的某个超滤子构造的，使得 $\mathbb{C}$ 初等嵌入 $\mathbb{M}\mathrm{od}_{\mathfrak{U}}(T)^\natural$；根据推论 5.2，后者嵌入 $\mathbb{M}\mathrm{od}_{\mathfrak{U}}(T)$。关于 $\mathbb{M}\mathrm{od}^{\mathrm{str}}_{\mathfrak{U}}(T)$ 的情形，可用同样的论证，只需改用推论 5.7。□

6.7. **推论**。 设 L 是一阶语言， E 是 $\mathfrak{U}$ 中一族对取超积和取同构封闭的 L-结构。令 $\mathbb{E}$ 为 $\mathbb{M}\mathrm{od}_{\mathfrak{U}}(L)$ 的满子范畴，其对象是 E 中的结构。那么 $\mathbb{E}$ 是泛的。

证明。 设 $\mathbb{C}$ 是一个与 $\mathbb{E}$ 初等等价的小范畴。再次根据注记 3.2，存在一个超滤子 $\mathfrak{U}$，使得 $\mathbb{C}$ 可初等嵌入到超幂 $\mathbb{E}^\natural$ 中。令 $i\colon \mathbb{M}\mathrm{od}_{\mathfrak{U}}(L)_\natural \to \mathbb{M}\mathrm{od}(L)$ 为推论 5.2给出的嵌入，并考虑它在子范畴 $\mathbb{E}^\natural$ 上的限制。设 B 是 $\mathbb{E}^\natural$ 中的一个对象，由序列 $x \mapsto \mathcal{B}_x$ 给出，其中 $\mathcal{B}_x \in E$。根据假设，后者的超积 $\mathcal{B}_\natural$ 也

[8] 这些 $\mathbb{M}\mathrm{od}_{\mathfrak{U}}(SET^n)$ 也都不是初等等价的，因为 $\mathbb{M}\mathrm{od}_{\mathfrak{U}}(SET^n)$ 中的任意同态集都恰好有 n^n 个元素（这是一阶可表达性质）。

属于 E。由于 $i(B) \cong \mathcal{B}_\natural$，$i(B) \in E$ 也成立，因此我们得到一个诱导嵌入$i\colon \mathbb{E}_\natural \hookrightarrow \mathbb{E}$，它与初等嵌入 $\mathbb{C} \hookrightarrow \mathbb{E}_\natural$ 复合后，便得到所需的嵌入。□

6.8. **例.** 这给出了大量不以一阶理论的模型范畴形式出现的泛范畴示例。例如，设 $S \subseteq \omega$ 是一个子集，除 0 外还由素数构成，并令 $\mathbb{F}\mathrm{ld}_S$ 为 $\mathbb{M}\mathrm{od}_{\mathfrak{U}}(FLD)$ 的子范畴，其中包含所有特征属于 S的小域。由于 $\mathbb{F}\mathrm{ld}_S$ 中的对象关于超积封闭，根据推论 6.7，该范畴是泛的。然而，如果 S 是一个无限且余无限集，$\mathbb{F}\mathrm{ld}_S$ 并非由一阶理论诱导。

7. 泛化理论

现在，对于一阶语言中的任意理论 T，我们可以关联一个（完备的） L_{cat}-理论$\mathbf{T}$，即 $\mathbb{M}\mathrm{od}_{\mathfrak{U}}(T)$ 的理论。然而，如果 S是 T的扩展（例如完备化），则 $\mathbf{T}$ 与 $\mathbf{S}$（因为二者都是完备理论）之间并不存在直接联系。当然，仍有可能$\mathbf{S} = \mathbf{T}$，尽管我不知道任何例子，但证明不相等并不显然，而且目前我只知道临时性的论证。

7.1. **例子**。令 FLD 和 ACF 分别表示环语言中的域论和代数闭域论，并令 $\mathbf{FLD}$ 和 $\mathbf{ACF}$ 分别为 $\mathbb{M}\mathrm{od}_{\mathfrak{U}}(FLD)$ 和 $\mathbb{M}\mathrm{od}_{\mathfrak{U}}(ACF)$ 的相应 L_{cat}-理论。要看出它们并不相同，只需注意康托尔-伯恩斯坦性质对后者成立，但对前者不成立。更准确地说，令 CB 为表达 $K \hookrightarrow L$ （即存在一个单态射 $K \to L$）且 $L \hookrightarrow K$ 蕴含 $K \cong L$ 的语句；那么 $\mathbb{M}\mathrm{od}_{\mathfrak{U}}(ACF) \models \mathrm{CB}$，因为 K 和 L 必有相同的特征和超越次数，因而根据施泰尼茨定理同构。另一方面， K 和 $K(x)$（其中 K不可数且代数闭，而 x 是一个变量）可以相互嵌入，却不同构，因为后者并非代数闭域，因此 CB 不属于 $\mathbf{FLD}$。

区分 $\mathbb{M}\mathrm{od}_{\mathfrak{U}}(ACF)$ 和 $\mathbb{M}\mathrm{od}_{\mathfrak{U}}(RCF)$ 的一种方法：只有后者有一个能嵌入任何其他对象的对象（实代数数域）。令 ACF_p 为所有特征为 p 的代数闭域的集合，它现在也具有这一性质；但理论$\mathbf{ACF}_p$ 和 $\mathbf{RCF}$ 仍可区分，因为只有前者是全序的：对于任何两个特征相同的代数闭域 K 和 L，根据范畴性， $K \hookrightarrow L$ 或 $L \hookrightarrow K$。这一性质在 $\mathbb{M}\mathrm{od}_{\mathfrak{U}}(RCF)$ 中完全不成立。

7.2. 注记。由于 L_{cat} 是一种可数语言，完备的 L_{cat}理论至多有连续统多个。另一方面，在 $\mathfrak{U}$所有可能的语言中，一阶理论要多得多。特别是，存在互不相交的语言 L 和 L'，以及分别属于这些语言的理论 T 和 T'，使得 $\mathbf{T} = \mathbf{T}'$。由普适性可得，T 的模型与 T' 的模型之间存在一种弱形式的定义等价，具体如下。设 $\mathbb{C}$ 是 $\mathbb{M}\mathrm{od}_{\mathfrak{U}}(T)$ 的一个小的初等子结构（根据命题 4.2，甚至可以确保它包含给定的小型模型集合）。由于$\mathbb{C}$ 也与 $\mathbb{M}\mathrm{od}_{\mathfrak{U}}(T')$ 初等等价，根据普适性，它可嵌入其中，从而为属于$\mathbb{C}$ 的 T的每个模型，得到一个相应的 T'模型。

命题6.4 表明，就普适性而言，全称理论就足够了。但在具体情形下，无论是完备理论还是全称理论，都不易描述。下一个定义对这一点作了推广，希望我们能找到某种具体的公理化方式，就像阿贝尔群的情形一样，从而获得普适性。

7.3. **定义**。给定一种语言 $L \in \mathfrak{U}$，称一个 L-理论 U 泛化的，如果它存在一个模型 $\mathcal{M}$，满足 $D(\mathcal{M}) \subseteq \mathfrak{U}$，使得任意小模型 $\mathcal{N} \models U$ 都嵌入 $\mathcal{M}$。

由此可知，上述 $\mathcal{M}$ 是泛的，因为任何与之初等等价的小模型也是 U 的模型，因此嵌入 $\mathcal{M}$。我们用 U是泛化的 $\mathcal{M}$ 来表达这一点。显然，泛结构 T 的完备理论 $\mathcal{M}$ 是该结构的泛化理论，$T_\forall$ 根据命题 6.4 也如此。

例 6.5 表明，同一个理论可以是不同结构的泛化理论。下面的结果说明，任意两个泛结构至少必须彼此比较。这里，给定语言 T 中的一个理论 L，我们称一个 L-语句 σ 属于 $\Delta_2(T)$，如果存在一个 $\forall\exists$-语句 σ_1 和一个 $\exists\forall$-语句 σ_2，使得 $\mathcal{M} \models \sigma \leftrightarrow \sigma_1 \leftrightarrow \sigma_2$ 在 $\mathcal{M}$ 的每个模型中都成立 T。

7.4. **命题**。假设一个 L-理论 U 是对两个 L-结构 $\mathcal{M}$ 和 $\mathcal{N}$ 泛化的。那么，$\mathcal{M}$ 和 $\mathcal{N}$ 在所有 $\Delta_2(U)$- 语句上都一致。

证明。我们将构造一个序列 $\mathcal{M}_0 \hookrightarrow \mathcal{N}_0 \hookrightarrow \mathcal{M}_1 \hookrightarrow \mathcal{N}_1 \hookrightarrow \ldots$，其中所有 $\mathcal{M}_i$都是 $\mathcal{M}$ 的初等子结构，并且所有 $\mathcal{N}_i$ 都是 $\mathcal{N}$的初等子结构。假设我们已经有了这样一条链，令 $\mathcal{L}$ 为它们的滤余极限（即直极限）。注意到，此时 $\mathcal{L}$ 也是子序列 $\mathcal{M}_0 \hookrightarrow \mathcal{M}_1 \ldots$和 $\mathcal{N}_0 \hookrightarrow \mathcal{N}_1 \hookrightarrow \ldots$的滤余极限（不过，这些链不一定是初等的）。令 σ 为 L 中的一个 Δ_2(U)-语句，且该语句在$\mathcal{M}$中成立。由于 $\mathcal{M}_i$ 是初等子结构，σ 在其中每一个中都成立，因此根据 [3, 定理 2.4，$\mathcal{L}$中也成立。6], 因为 σ 与一个 $\forall\exists$-语句 U等价。假设 $\neg\sigma$ 在 $\mathcal{N}$中成立。由于它也属于 $\Delta_2(U)$，通过子序列 $\mathcal{N}_i$应用同样的论证可知，$\neg\sigma$ 在 $\mathcal{L}$中成立，矛盾。

为了构造给定的序列，设 $\mathcal{M}_0$ 是 $\mathcal{M}$的任意一个小初等子结构。由于它因此是 U 的一个模型，并且 $\mathcal{N}$ 对于 U是泛化的，因此存在一个嵌入 $\mathcal{M}_0 \hookrightarrow \mathcal{N}$。根据命题4.2，我们可以找到 $\mathcal{N}_0$ 的一个小初等子结构 $\mathcal{N}$ 以及一个嵌入 $\mathcal{M}_0 \hookrightarrow \mathcal{N}_0$。现在可以重复这一论证，用 $\mathcal{N}_0$ 代替 $\mathcal{M}_0$，得到一个嵌入 $\mathcal{N}_0 \hookrightarrow \mathcal{M}_1$，其中 $\mathcal{M}_1$ 是 $\mathcal{M}$的一个小初等子结构，等等。□

让我们重新考察引言中介绍的理论**AB**：它由命题 prod、null 和 gen 组成，分别表达有限积、零对象和生成元的存在；此外还有命题 (Ab1) 和 (Ab2)，分别断言存在唯一的群箭头，以及每个态射都与这些群运算相容。

7.5. **命题**。理论 **AB** 是泛化的（对 $\mathbb{M}\mathrm{od}_{\mathfrak{U}}(T_{Ab})$）。作为部分逆命题，若 $\mathbb{C}$ 是 $\mathbb{M}\mathrm{od}_{\mathfrak{U}}(T_{Ab})$的一个小满子范畴，且具有积和一个零对象，那么$\mathbb{C} \models \mathbf{AB}$。

证明。设 C 是 AB 的一个小模型，因此特别地，它有一个生成元 I。令$|G| := \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(I, G)$，其中 G 是 C 中任意对象。利用唯一的群箭头 μ_G: $G \times G \to G$ on G，我们可以如下定义 $|G|$ 上的加法：对于 α, β: $I \to G$，令 $\alpha + \beta := \mu_G \circ (\alpha, \beta)$，其中 (α, β): $I \to G \times G$ 是由积给出的唯一态射。现在不难证明，群箭头的性质使 $|G|$ 成为一个群，而 C 中的任意态射 $G \to H$ 都会导出一个群同态 $|G| \to |H|$。由于 I 是一个生成元，函子 $|-|$ 因此给出一个嵌入，不仅嵌入到 $\mathfrak{U}$中，而且已经嵌入到 $\mathbb{M}\mathrm{od}_{\mathfrak{U}}(T_{\mathrm{Ab}})$中。

对于第二个陈述，现在假设 i: $\mathbb{C} \hookrightarrow \mathbb{M}\mathrm{od}_{\mathfrak{U}}(T_{\mathrm{Ab}})$ 是一个全嵌入，且$\mathbb{C}$ 满足积和零对象。设 G是$\mathbb{C}$中的一个对象，因此根据假设，$i(G)$ 是一个带有加法 $+$的阿贝尔群。由于嵌入保留锥，$i(G \times G)$ 是$\mathbb{M}\mathrm{od}_{\mathfrak{U}}(T_{\mathrm{Ab}})$中的一个锥，因此存在唯一的态射 $i(G \times G) \to i(G) \times i(G)$（我们不知道

这是否为同构，因为 i 可能不保留极限）。与+: $i(G) \times i(G) \to i(G)$复合，得到一个态射 $i(G \times G) \to i(G)$。由于 i 是满的，因此必定存在一个态射 μ: $\mathbb{C}$ 中的 $G \times G \to G$，使得 $i(\mu)$ 等于这个复合。现在不难看出，μ 是 G 上的群箭头，并且公理（Ab1）和（Ab2）在$\mathbb{C}$中成立，这表明它是$\mathbf{AB}$的一个模型。□

8. 弱泛范畴

在本节中，我们将构造一些具有某些泛性质、但并非作为某个一阶理论的模型给出的“代数”范畴。

8.1. 定义。如果一个 $\mathfrak{U}$-具体范畴满足：对于任意与 $\mathbb{C}$ 初等等价的小范畴 $\mathbb{D}$，都存在一个函子 i: $\mathbb{D} \to \mathbb{C}$，且该函子在对象上是单射，那么我们称其为 $\mathbb{C}$ 弱泛范畴。

换句话说，i 可能不再是忠实的。下面的例子已经展示了我们的主要技术：使用截积。回忆一下，如果 $(R_x, \mathfrak{m}_x)$ 是诺特局部环，那么它们的截积 $R_\sharp$ 按定义是它们的超积 $(R_\natural, \mathfrak{m}_\natural)$ 对无穷小理想的商，也就是说，是所有幂 $\mathfrak{m}_\natural^n$的交。根据 [10, 定理 8.1, 4], 如果 R_x的嵌入维数有界，也就是说，如果 $\mathfrak{m}_x$的最小生成元个数有界，那么 $R_\sharp$ 再次成为诺特环（其嵌入维数与几乎所有 R_x相同），而且还是完备的。

8.2. 例。考虑由等特征零离散赋值环构成的范畴 $\mathbb{D}_{\mathbb{VR}}$，将其视为局部环范畴的满子范畴。它具有生成元$P := \mathbb{Q}[t]_{(t)}$。相应的遗忘函子 $|-|$ 将一个离散赋值环V映射为其极大理想 $\mathfrak{m} \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{D}_{\mathbb{VR}}}(P, V)$。然而，我们总能从其极大理想 $\mathfrak{m}$上的环运算中恢复出离散赋值环 V:

> **条件（PI）：** 存在一个元素 $t \in \mathfrak{m}$，使得对于任意 $a, b \in \mathfrak{m}$，存在唯一的 $z \in \mathfrak{m}$，使得 $ab = tz$。

令 $a * b := z$ 于是可在 $\mathfrak{m}$ 上定义新的乘法，使其成为与 V同构的环结构。因此，对 $|A|$ 中的对象 A 所对应的集合 $\mathbb{D}_{\mathbb{VR}^\natural}$，由离散赋值环序列 A_x 给出，根据 4.6 引理，它是这些 $\mathfrak{m}_x$ 的超积，因而特别再次满足条件（PI）。所得的环 $A_\natural$ 现在很容易看出是这些 A_x的超积。遗憾的是，它将不再属于 $\mathbb{D}_{\mathbb{VR}}$（因为其值群是非标准整数环）。然而，它的截积 $A_\sharp$ 属于 $\mathbb{D}_{\mathbb{VR}}$。此外，如果 B 是一个不同于 A的对象，那么 $|A|$和 $|B|$不相交，因此它们的商空间 $A_\sharp$ 和 $B_\sharp$也不相交。现在不难看出，将对象 A 映射到截积 $A_\sharp$ 的赋值 $\mathbb{D}_{\mathbb{VR}_\natural} \hookrightarrow \mathbb{D}_{\mathbb{VR}}$ 是函子性的，并且在对象上是单射的。如同定理 6.6的证明中那样，随即可得 $\mathbb{D}_{\mathbb{VR}}$ 是弱泛的。但请注意，成为离散赋值环这一概念不是一阶可定义的，因为该类在超积下不封闭，而只在截积下封闭。

对等特征零的限制只是为了确定生成元的选择。在特征 p 下，我们应改为取 $P := \mathbb{F}_P[t]_{(t)}$。然而，在混合特征下似乎不存在这样的生成元。但在等特征下，我们现在有一个生成元族，而且它们实际上是局部唯一的；同样的论证便可证明，这个更大的离散赋值环范畴是弱泛的。

我们将要使用的关键结果（上述内容也是它的一个特设应用）如下（证明留待未来的论文给出）。

8.3. **命题**。 设 R 是一个正维数的正规诺特局部环，并将其极大理想 $\mathfrak{m}$视为环语言中的一个结构。那么 R 在 $\mathfrak{m}$ 中是可解释的。更确切地说，存在环语言中的公式 $\rho(x)$ 和 $\mu(x,y,z)$，使得 $\mathfrak{m}^3$ 中由 μ 定义的子集是子集 $Z\subseteq\mathfrak{m}$ 上函数 $*$ 的图像，其中 $Z\subseteq\mathfrak{m}$ 由 ρ 定义；并且 $(Z,+,*)$ 是一个与 R 同构的环。□

8.4. 注记。 </style由 ρ 定义的 $Z\subseteq\mathfrak{m}$ 实际上是 R中的一个可逆理想，正是借助这个可逆理想，才能「重构」 R。

8.5. **定理**。 由小的、正维数的、等特征的、正规诺特局部整环组成，且嵌入维数至多为 e的范畴$\mathbb{N}\mathbb{o}\mathbb{r}\mathbb{m}_e$ 是弱泛的。

证明。 令 Θ 为所有 $k[t]_{(t)}$构成的集合，其中 t 是一个单变量，而 k 遍历所有素域；也就是说， k 或者是 $\mathbb{Q}$，或者是一个含 p个元素的域 $\mathbb{F}_p$。不难看出，它们构成$\mathbb{N}\mathbb{o}\mathbb{r}\mathbb{m}_e$ 的一个生成元族，而且这个生成元族局部唯一。对于$\mathbb{N}\mathbb{o}\mathbb{r}\mathbb{m}_e$中的 R，我们定义

$$|R|:=\mathrm{Hom}_{\mathbb{N}\mathbb{o}\mathbb{r}\mathbb{m}_e}(\Theta,R).$$

由于在Norm$_e$中，态射都假设为局部态射，因此 $|R|$ 与 R的极大理想同构。取关于集合 $X\in\mathfrak{U}$上的一个超滤子的超幂(Norm$_e$)$^\natural$，并令 $\Theta_\natural$ 为族 Θ在对角嵌入下的像，于是它们构成超幂(Norm$_e$)$^\natural$的一个局部唯一生成元族。对于超幂中的一个对象 A，它由一列嵌入维数至多为 e的诺特正规局部整环 A_x 给出，因此我们再次定义 $|A|:=\mathrm{Hom}_{(\mathbb{N}\mathbb{o}\mathbb{r}\mathbb{m}_e)^\natural}(\Theta_\natural,A)$；由引理 4.11，这个集合 $|A|$ 恰好是集合 $|A_x|$的超积。使用命题 8.3 中的记号，由 ρ 定义的子集 $Z\subseteq|A|$ 以及由 μ定义在 Z 上的函数 $*$，分别是子集 Z_x 和二元函数 $*_x$ （对每个x而言）的超积。由于$(Z_x,+,*_x)\cong A_x$，可知$(Z,+,*)$同构于 A_x的超积，因此特别是一个局部环，其极大理想 $\mathfrak{m}$至多由e 个元素生成。令 $A_\sharp$ 为 A_x的cataproduct，因此它同构于 $Z/\mathfrak{M}$，其中 $\mathfrak{M}$ 是所有幂 $\mathfrak{m}^n$ 的交。根据 [10, 定理 8.1.4], ，cataproduct $A_\sharp$¯是一个完备诺特局部整环，嵌入维数至多为 e。令 $A_\sharp$ 为 $A_\natural$,[9] 的整闭包，使其属于Norm$_e$。我们定义了一个映射¯(Norm$_e$)$_\natural\to$ Norm$_e$：$A\mapsto A_\sharp$，现在很容易验证此映射具有函子性。再用命题 3.1 的通常论证即可得到弱泛性。□

¯遗憾的是，虽然该函子在对象上是单射，但在态射上却不再如此。例如，由态射序列$t\mapsto t^n$ （指标集为 $X=\mathbb{N}$）给出的 $(k[t]_{(t)})^\natural$ 上的自同态，与 $(k[t]_{(t)})^\natural$ 中由$t\mapsto 0$给出的自同态不同，但在 cataproduct 中，它们是相同的。

8.6. **推论**。 对于 d、 e 为正整数的情形，以下重数为 e 的小型 d 维等特征正规局部环范畴是弱泛的：*Cohen-Macaulay*、戈伦斯坦、完全交。特别地，等特征d维正则局部环范畴是弱泛的。

证明。 最后一个断言只是 $e=1$的情形。所有给定的范畴都是$\mathbb{N}\mathbb{o}\mathbb{r}\mathbb{m}_{d+e-1}$ 的子范畴，现在唯一需要注意的是，所述性质在截积下保持不变。正则性由 [11, 推论 8.2。], Cohen–Macaulay 条件则由 [11, 定理 8.8。], 而剩下的两个性质由 [11,定理 8.12。]处理。□

[9]很可能 $A_\sharp$ 已经是正规环，但由于我暂时没有证明，所以就加上这一步。

8.7. 注记。 由于 cataproduct 总是完备的，普适性也适用于上述范畴中仅由该范畴的完备局部环构成的子范畴。

9. 附录：范畴等价与初等等价。

设 $\mathbb{C}$ 是一个范畴。所谓 $\mathbb{i}$[10] 的同构图，是指一个薄且宽的 $\mathbb{C}$子范畴$\mathbb{i}$，使得 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{i}}(A, B) \neq \emptyset$ 当且仅当 $A \cong B$ （在$\mathbb{C}$中）。特别地，若$\mathbb{C}$ 是骨架范畴，则$\mathbb{i}$是离散的（因而唯一）；但对于非骨架范畴，可能存在许多同构图（假设选择公理成立，同构图总是存在）。

注意，若 $\alpha \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{i}}(A, B)$，则它实际上是一个同构：因为必然有$A \cong B$，存在 $\beta \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{i}}(B, A)$，因而 $\beta\alpha \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{i}}(A, A) = \{1_A\}$，所以事实上，$\beta = \alpha^{-1}$。因此，$\mathbb{i}$ 是一个同构图，当且仅当它是一个具有相同对象的子范畴，其中所有态射都是同构，且恒等态射是唯一的自同构（这也迫使该范畴是薄的）。若同构图已明确，我们用$A \Rightarrow B$表示属于$\mathbb{i}$ 的一个箭头。给定态射 $f\colon A \to B$、 $g\colon C \to D$ 和$h\colon P \to Q$，令 $\mathsf{QC}_{\mathbb{i}}(f, g, h)$表示以下（拟合成）交换图的存在性

(7)
$$\begin{array}{ccccccc} P & & \xrightarrow{\qquad\qquad h\qquad\qquad} & & & & Q \\ \Downarrow & & & & & & \Downarrow \\ A & \xrightarrow[f]{} & B & \Longrightarrow & C & \xrightarrow[g]{} & D. \end{array}$$

当然，这里隐含着 $A \cong P, B \cong C$ 和 $D \cong Q$。

9.1. **引理**。 给定态射 $f\colon A \to B, g\colon B \to D$ 和 $h\colon A \to D$，则 $\mathsf{QC}_{\mathbb{i}}(f, g, h)$ 当且仅当 $h = g \circ f$。

证明。 一个方向显然成立，因此假设 $\mathsf{QC}_{\mathbb{i}}(f, g, h)$ 成立。但这样一来，在图表 (7) 中，所有 $\Rightarrow$-箭头都必须是恒等态射，从而证明了 $h = gf$。 □

9.2. 引理。设 $\mathbb{C}$ 和 $\mathbb{D}$ 是范畴，其对应的同构图分别为 $\mathbb{i}$ 和 $\mathbb{j}$。若 $F\colon \mathbb{C} \to \mathbb{D}$ 是保持这些同构图（即诱导出函子 $\mathbb{i} \to \mathbb{j}$）的全忠实函子，那么对于某些 $\mathbb{C}$-态射 f, g, h，$\mathsf{QC}_{\mathbb{i}}(f, g, h)$ 在 $\mathbb{C}$ 中成立，当且仅当 $\mathsf{QC}_{\mathbb{j}}(F(f)\ F(g)\ F(h))$ 在 $\mathbb{D}$ 中成立。

证明。 对于任何保持同构图的函子，其中一个方向都成立。为证明逆命题，我们先证明 $A \Rightarrow B$当且仅当 $F(A) \Rightarrow F(B)$。一个方向由假设得出，因此设 $\alpha\colon F(A) \Rightarrow F(B)$。由于此时也有 $\alpha^{-1}\colon F(B) \Rightarrow F(A)$，且 F是满的，所以存在 $a\colon A \to B$和 $b\colon B \to A$，使得 $F(a) = \alpha$且 $F(b) = \alpha^{-1}$。因此，$F(ba) = 1_{F(A)} = F(1_A)$，而忠实性随后推出 $ba = 1_A$。特别地，$A \cong B$，因此存在 $\sigma\colon A \Rightarrow B$，并且由假设 $F(\sigma) = \alpha$。

因此，如果 $\mathsf{QC}_{\mathbb{j}}(F(f)\ F(g)\ F(h))$ 成立，即如果我们有一个交换图

$$\begin{array}{ccccccc} F(P) & & \xrightarrow{\qquad\qquad F(h)\qquad\qquad} & & & & F(Q) \\ \Downarrow & & & & & & \Downarrow \\ F(A) & \xrightarrow[F(f)]{} & F(B) & \Longrightarrow & F(C) & \xrightarrow[F(g)]{} & F(D). \end{array}$$

[10]宽 表示它们具有相同的对象；窄 表示同态集至多含有一个元素。

在 $\mathbb{D}$中，那么这是图表（ F （7）在 F 下的像。由于 F 是忠实的，后一个图表也交换，即 $\mathtt{QC}_{\mathbb{i}}(f,g,h)$ 成立。□

9.3. **引理**。 设$\mathbb{d}$ 是$\mathbb{C}$的有限子范畴。存在一个 L_{cat}-公式$\mathtt{subisogr}(\mathbb{d})$，用于表达$\mathbb{d}$ 可以扩展为$\mathbb{C}$的同构图。

证明。 除了$\mathbb{d}$中同态集上的显然约束外，我们还必须检查$\mathbb{d}$ 中的态射复合不会产生真自同构。如果$\mathbb{d}$ 具有 n 个态射，那么只需检查这些态射的 n 个“词”即可。□

注意，iso-graph $\mathbb{i}$ 的态射集合也可以定义为

(8) α is an $\mathbb{i}$-morphism if and only if $(\forall p)[(\exists q)\mathtt{QC}_{\mathbb{i}}(\alpha,p,q)\to\mathtt{QC}_{\mathbb{i}}(\alpha,p,p)]$.

事实上，对于给定的 p，如果存在某个 q使得 $\mathsf{QC}_{\mathbb{i}}(\alpha,p,q)$ 成立，那么 α的值域 B 与 p的定义域同构。因此，如果 α还是一个$\mathbb{i}$-态射，那么 $\mathsf{QC}_{\mathbb{i}}(\alpha,p,p)$ 成立。反之，如果该条件成立，那么取 $p=q=1_B$，于是准复合图表（7）表明 α 属于$\mathbb{i}$。这个定义公式是以下公式类的一个例子：

9.4. **定义**。 由谓词 $\mathsf{QC}_{\mathbb{i}}$ 通过布尔组合和量化构造出的任意表达式，都称为同伦公式。

注意，这类公式中不允许出现相等关系，因为函子一般并非单射（即使它们是忠实的）。与使用依赖类型的文献中的系统（例如 [1, 2, 6, 12]）不同，这里的量化不受限制。

9.5. **定理**。 任意两个等价范畴对同伦语句的判断一致。

证明。 我们将证明更强的命题：若$\mathbb{C}$ 是$\mathbb{D}$的骨架，那么任何以$\mathbb{C}$ 中的元素为参数的同伦语句 σ，在$\mathbb{C}$ 中成立，当且仅当它在$\mathbb{D}$中成立。一般结论由此得出，因为两个范畴等价，当且仅当它们具有同构的骨架。

注意，$\mathbb{C}$ 有唯一的同构图，即其底层的离散范畴。固定$\mathbb{D}$中的某个同构图$\mathbb{i}$ 。我断言存在一个等价 $G\colon \mathbb{D}\to\mathbb{C}$，它保持同构图，并且在$\mathbb{C}$上为恒等映射。事实上，给定$\mathbb{D}$中的任意对象 A，令 $G(A)$ 为$\mathbb{C}$ 中与 A 同构的唯一对象。给定一个态射 $f\colon A\to B$，令$\alpha\colon G(A)\Rightarrow A$和 $\beta\colon G(B)\Rightarrow B$为唯一的$\mathbb{i}$-态射，然后定义 $G(f):=\beta^{-1}f\alpha$。容易验证， G 是一个满、忠实且（本质上）满射的函子，它将$\mathbb{i}$ 中的态射映为恒等态射，并且其在$\mathbb{C}$ 上的限制是恒等函子。

如果 σ 没有量词，那么结论可由引理 9.2应用于 G得出。通过对量词个数进行归纳，我们可以将问题归结为 σ 具有$(\exists x)\varphi(x)$的形式，其中 $\varphi(x)$是一个同伦公式，并且对于<C>中的每个 a，两个范畴对 $\varphi(a)$的有效性意见一致；我们需要证明 σ也满足这一点。关键是证明存在<C>中的 b，使得$\mathbb{D}$满足 $\models\varphi(b)$。由于 $\varphi(b)$中唯一不属于$\mathbb{C}$ 的参数是 b，引理9.2 给出$\mathbb{C}\models\varphi(G(b))$，因此 σ 在$\mathbb{C}$中也成立。□

极限。 我们的目标是证明，有限极限（以及余极限）的存在性可以用同伦语句来表达。为便于讨论，我们先为范畴 $\mathbb{C}$ 中具有固定同构图的态射 $p\colon A\to B$和 $q\colon C\to D$引入以下记号

$\mathbb{i}$. 用 $p \cong_{\mathbb{i}} q$ 表示存在一个交换图

(9)
$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{p} & B \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ C & \xrightarrow[q]{} & D. \end{array}$$

我们用 $p\colon C \rightsquigarrow_{\mathbb{i}} D$ 表示这一点，不提及 q，并称 p a 是从 C 到 D 的准 i-态射。显然，$\cong_{\mathbb{i}}$ 是一个等价关系。当 i 可由上下文明确确定时，我们省略它，只写 $p \cong q$、$C \rightsquigarrow D$ 等。注意，$p \cong q$ 当且仅当存在一个 i- 态射 α 使得 $\mathsf{QC}(\alpha, p; q)$，因此利用 (8)，我们得到一个定义 $\cong$ 的同伦公式。此外，根据引理 9.1，我们有

(10) $$p \cong q \leftrightarrow p = q \quad \text{for all parallel morphisms } p, q\colon A \to B.$$

固定一个有限范畴 d，并令 $J\colon \mathsf{d} \to \mathsf{C}$ 为一个函子（视为一个参数，用于编码有限多个 $J(A)$ 和 $J(s)$，其中 A 和 s 分别遍历 d 的所有对象和态射）；我们将这种情形称为 C 中的一个有限 d-图表。定义一个同伦公式 $\mathsf{qcone}_J(x, y)$（一个准-J-锥），其中 $x\colon C \Rightarrow C'$ 是 i 中的某个态射，而 y-变量对应于准态射 $\psi_A\colon C \rightsquigarrow J(A)$，其中 A 遍历 d 中的所有对象，并要求 $\mathsf{QC}(\psi_A, J(s); \psi_B)$，其中 $s\colon A \to B$ 遍历 d 中的所有态射。特别地，对每个 A，存在态射 $\varphi_A\colon C \to J(A)$ 使得 $\psi_A \cong \varphi_A$。于是引理 9.1 表明，(C, φ_A) 是一个真正的 J-锥。

接下来，我们定义公式 $\mathsf{qlim}_J(x)$，其中 $x\colon L \Rightarrow L'$ 仍是某个$\mathbb{i}$-态射，表示存在 λ_A 使得 $\mathsf{qcone}_J(x, \lambda_A)$ 成立（即 λ_A 构成一个准-J-锥），并且具有如下性质：每当对于某个 $\alpha\colon C \Rightarrow C'$，$\mathsf{qcone}_J(\alpha, \psi_A)$ 成立时，就存在一个准态射 $u\colon C \rightsquigarrow L$，使得对于所有 A，$\mathsf{QC}(u, \lambda_A; \psi_A)$ 成立；并且，如果 $v\colon C \rightsquigarrow L$是另一个准态射，且对于所有 A，$\mathsf{QC}(v, \lambda_A; \psi_A)$ 成立，那么 $u \cong v$。

9.6. **命题**。 设$\mathbb{C}$ 是一个范畴，具有固定的同构图$\mathbb{i}$，并设 $J\colon \mathbb{d} \to \mathbb{C}$ 是一个有限图表。那么，同伦语句$(\exists x)\mathtt{qlim}_J(x)$ 在$\mathbb{C}$ 中成立，当且仅当 J 在$\mathbb{C}$中有极限。

证明。一种方向显然，因此假设 $\mathsf{qlim}_J(\alpha)$ 成立，其中 $\alpha\colon L \Rightarrow L'$。特别地，根据假设，存在准-$J$-锥 (L, λ_A)，也就是说，$\mathsf{qcone}_J(\alpha, \lambda_A)$ 成立。我们已经指出，可以假设它是一个实际锥。设 (C, φ_A) 是任意一个锥。将其视为准-J-锥，存在一个准态射 $u\colon C \rightsquigarrow L$，使得对所有 A，$\mathsf{QC}(u, \lambda_A; \varphi_A)$ 都成立。将 u 替换为一个同构副本后，可以假设 $u\colon L \to C$ 是一个实际态射，因此由引理 9.1 得 $\varphi_A = \lambda_A \circ u$。我们需要证明，具有此性质的 u 是唯一的。设 $v\colon C \to L$ 是满足 $\varphi_A = \lambda_A \circ v$ 的另一个态射。由 $\mathsf{qlim}_J(\alpha)$，可得 $u \cong v$，从而由 (10) 得 $u = v$。□

显然，余极限同样可以用同伦公式编码。将这一切与定理 9.5结合起来，我们便得到一个众所周知的事实：

9.7. **推论**。 两个等价范畴具有相同的有限极限和余极限。 □

结论。 虽然模型论学家通常将等号视为逻辑符号，但也可以选择不这样做。于是考虑由二元谓词 $\cong$ 和三元谓词 QC 构成的同伦语言 L_{homo}；其中，原子公式（从而一般公式）按照通常方式构造，唯一的例外是：我们必须使用 $\cong$ 来代替 $=$（事实上，可以省略谓词 $\cong$，因为它可由 QC 定义）。换言之，我们不再只有项等式，而只有项同构；还要注意，唯一的项

是变量（允许使用参数时则为态射）。因此， L_{homo}-公式现在就是同伦公式（将每个 $\cong$ 符号替换为其同伦定义之后）。

任意范畴$\mathbb{C}$ 都可以通过选择某个同构图 L_{homo}，构造为一个 $\mathbb{i} \subseteq \mathbb{C}$-结构；以 $\mathbb{C}$ 的态射作为底集，并令 $\cong$ 和 $\mathtt{QC}$ 如上所述定义。因此，定理9.5表明，在这种语言中，初等等价与范畴等价是一回事。对于骨架范畴，两者并无区别：

9.8. **命题**。 设$\mathbb{C}$ 是一个作为 L_{homo}-结构来看待的骨架范畴。那么，可以将其扩充为语言 $L_{cat} \cup L_{homo}$ 中的一个结构，使得任意 L_{cat}-公式都等价于一个 L_{homo}-公式，反之亦然。

证明。 由于$\mathbb{C}$ 是骨架范畴，因此只有一个同构图，即底层的离散范畴。这个同构图的态射集合可定义为所有满足 $(\forall y)\mathtt{QC}(\alpha,\ y; y)$ 的 α，且恰好由所有恒等态射组成。对于每个这样的态射 α，在 o-排序 $|\alpha|$中引入一个新元素，同时将 L_{homo}-结构中的元素作为 m-排序的元素。

由于同构对象相等，定义域谓词和值域谓词定义如下

$$\mathtt{dom}(f) = |\alpha| \leftrightarrow \mathtt{QC}(\alpha, f; f) \qquad \text{and} \qquad \mathtt{rng}(f) = |\beta| \leftrightarrow \mathtt{QC}(f, \beta; f)$$

而根据引理 9.1，复合定义为 $h = g \circ f$ 当且仅当 $\mathtt{QC}(f, g;\ h)$。一元函数 $\mathtt{Id}$就是 $|\alpha| \mapsto \alpha$。最后，根据（10），相等关系编码为 $\cong$。这就从三元谓词 $\mathtt{QC}$定义了每个带相等关系的 L_{cat}-公式，而（7）反过来又在 L_{cat}中定义了 QC。 □

在定理 6.6中，引入语言 L_{cat} 仅仅是为了确保初等等价的结构仍然是一个范畴，因为其余论证都基于超积。因此，我们也完全可以用另一种语言来看待范畴。于是，若一个 $\mathfrak{U}$-具体范畴 $\mathbb{C}$ 是同伦泛的，则任意与之L_{homo}-初等等价的小范畴$\mathbb{D}$ 都会嵌入其中。于是，定理 6.6 中的论证表明，任何形如 $\mathbb{M}\mathrm{od}_{\mathfrak{U}}(T)$的范畴 T，只要它来自某个一阶语言中的某个理论，就是同伦泛的。此外，根据定理 9.5，任何与 $\mathbb{M}\mathrm{od}_{\mathfrak{U}}(T)$ 等价（按范畴意义）的 $\mathfrak{U}$-具体范畴也同样是同伦泛的。

参考文献

[1] Georges Blanc， ´范畴论中的自然等价与逻辑公式，《数学逻辑与基础档案》19 (1978/79)，第 3-4 期，131–137。3，19[2] Peter Freyd，范畴等价类型中的不变性质，载于《代数、拓扑与范畴论》（为纪念 Samuel Eilenberg 而编的论文集），学术出版社，纽约—伦敦，1976 年，第 55 61 3, 19 – 页。W. Hodges，《模型论》，剑桥大学出版社，剑桥，[3] 1993 5, 15 。F. W. Lawvere，代数理论的函子性语义，[4]《美国国家科学院院刊》50 (1963)，869–872。3[5] F. W. Lawvere，量词与层，国际数学家大会论文集（尼斯，1970），第 1, 1971, 329 334 3 卷，Gauthier-Villars，巴黎，第 – 页。Michael Makkai 和 Robert Pare，[6]《可及范畴：范畴模型论的基础》，《当代数学》，第 104, 1989 3, 19 卷，美国数学学会，罗德岛州普罗维登斯，。Michael Makkai 和 Gonzalo E. Reyes，[7]《一阶范畴逻辑》，《数学讲义》，第 611 卷，Springer-Verlag，柏林—纽约，1977，《托扑及相关范畴理论中的模型论方法》。[8] V. Mehta 和 V. Srinivas，理性奇点的刻画，《亚洲数学杂志》 **1** 1997 249 271 5 （），–。P. Rothmaler，[9]《模型论引言》，《代数、逻辑与应用》，第 卷，戈登与布里奇科学出版社，阿姆斯特丹，2000。7，8，13 15,

[10] Hans Schoutens，超积在交换代数中的应用，《数学讲义》，第 1999 卷，Springer-Verlag，2010 16, 17。有限嵌入维数局部环的维数与奇点理论，《代数杂志》**386** (2013)，[11] ———，1–60。17[12] Michael A. Shulman，*Stack*语义与实体集合论和结构集合论的比较，2010。3，19

数学系，纽约市立大学纽约城市技术学院，纽约州纽约市，邮编 11201（美国）电子邮箱：hschoutens@citytech.cuny.edu