arXiv:2512.18948v1 [math.GN] 22 Dec 2025

稠密塑性子集存在问题的一个解答 $X \subseteq \mathbb{R}$基数为 $|X| < \mathfrak{c}$

WOJCIECH BIELAS

摘要。在假设 $\mathfrak{c} \geqslant \omega_2$ 下，我们给出一个基数为 $|X| < \mathfrak{c}$ 的稠密塑性子集 $X \subseteq \mathbb{R}$ 的例子。这回答了 [1] 的问题 1。

1. 引言

对于度量空间 (X, d)，我们称 $f\colon X \to X$ 为非扩张的，若对所有 $x, y \in X$，都有 $d(f(x), f(y)) \leqslant d(x, y)$。若度量空间 X 的每个非扩张双射 $f\colon X \to X$ 都是等距映射，则称该空间是可塑的。度量空间的子集 Y 若作为子空间是可塑的，则称其为可塑的。

在 [1] 中，作者还证明了赋范空间的每个可数稠密子空间都不是可塑的。这意味着，在连续统假设下，每个基数为 $|X| < \mathfrak{c}$ 的稠密子集 $X \subseteq \mathbb{R}$ 都不是可塑的。在 [1], 的问题 1 中，作者询问连续统假设是否为必要假设。在假设 $\mathfrak{c} \geqslant \omega_2$ 下，我们构造了一个基数为 $|X| = \omega_1$ 的稠密塑性子集 $X \subseteq \mathbb{R}$。子集 X 具有更强的性质：恒等映射是其唯一的非扩张双射。

2. 构造

令 $\mathcal{R} = \{[a_n, b_n]\colon n < \omega\}$ 为 $\mathbb{R}$ 的两两不相交区间族，使得对每个 $m, n < \omega$：

(i) $a_n, b_n \in \mathbb{Q}$, (ii) $2(b_{n+1} - a_{n+1}) < b_n - a_n$, (iii) 若 $b_m < a_n$，则 $a_n - b_m > b_0 - a_0$, (iv) $a_0 < a_1$, (v) 对每个 $x \in \mathbb{R}$，均存在 k 和 l，使得 $b_k < x < a_l$。

条件 (ii) 表示 $\mathcal{R}$ 的不同区间之间的距离至少为 $b_0 - a_0$。因此，对于每个 n，都存在唯一的 m，使得：

- for every $x \in [a_n, b_n]$ and $y \in [a_m, b_m]$ we have $x < y$,
- $(b_n, a_m) \cap \bigcup \mathcal{R} = \emptyset$.

2020 数学学科分类。主要分类 54E40；次要分类 03E50。关键词和短语。可塑子集，连续统假设。

在这种情况下，令 $A_n \subseteq (b_n, a_m)$ 满足：对于每个非空开 $U \subseteq (b_n, a_m)$，都有 $|A_n \cap U| = \omega_1$。我们定义

$$X = \bigcup_{n<\omega} ((\mathbb{Q} \cap [a_n, b_n]) \cup A_n).$$

3. 集合 X 的基本性质

在本节的其余部分，我们固定一个非扩张双射 $f\colon X \to X$，并对每个 $n < \omega$ 定义：

$$\delta_n = b_n - a_n, \quad a'_n = a_n + \delta_{n+1}, \quad b'_n = b_n - \delta_{n+1}.$$

回顾一下，若对于 $A \subseteq \mathbb{R}$ 的每个开邻域 U，$|A \cap U| \geqslant \omega_1$，则称 $x \in \mathbb{R}$ 是子集 $A \subseteq \mathbb{R}$ 的凝聚点。因此，如果 x 是 X 的凝聚点，那么 $f(x)$ 也是 X 的凝聚点。从现在起，当我们说凝聚点时，指的都是 X 的凝聚点。注意，对于每个 $n < \omega$：

- a_n 和 b_n 是凝聚点，
- 不存在满足 $|x - a_n| < \delta_{n+1}$ 或 $|x - b_n| < \delta_{n+1}$ 的凝聚点 x，
- 既不是 $f^{-1}(a_m)$，也不是 $f^{-1}(b_m)$ 的凝聚点。

引理 1. 对于每个 $n < \omega$，若 $f^{-1}(a'_n)\ f^{-1}(b'_n) \in [a'_n, b'_n]$，则

$$\{f^{-1}(a'_n), f^{-1}(b'_n)\} = \{b'_n, a'_n\}.$$

证明。点 $f^{-1}(a'_n)$ 和 $f^{-1}(b'_n)$ 属于长度为 $b_n - a_n - 2\delta_{n+1}$ 的区间 $[a'_n, b'_n]$，因此

$$|f^{-1}(a'_n) - f^{-1}(b'_n)| \leqslant b_n - a_n - 2\delta_{n+1}.$$

由于 f 是非扩张的，

$$b_n - a_n - 2\delta_{n+1} = |a'_n - b'_n| \leqslant |f^{-1}(a'_n) - f^{-1}(b'_n)|.$$

因此，点 $f^{-1}(a'_n)$ 与 $f^{-1}(b'_n)$ 之间的距离等于 $b_n - a_n - 2\delta_{n+1}$，但区间 $[a'_n, b'_n]$ 中只有这样一对点：$\{a'_n, b'_n\}$。□

引理 2. 对于每个 $n < \omega$，若 $f(a'_n) = a'_n$，则 $f(a_n) = a_n$ 且 $f(b_n) = b_n$；但若 $f(a'_n) = b'_n$，则 $f(a_n) = b_n$ 且 $f(b_n) = a_n$。

证明。假设 $f(a'_n) = a'_n$。我们有 $|a_n - a'_n| = \delta_{n+1}$，因此 $|f(a_n) - f(a'_n)| \leqslant \delta_{n+1}$。由于 a_n 是一个凝聚点，$f(a_n)$ 也是凝聚点，但满足 $|x - a'_n| \leqslant \delta_{n+1}$ 的凝聚点 x 只有一个，即 $x = a_n$。因此 $f(a_n) = a_n$。由 $f(a'_n) = a'_n$ 可得 $f(b'_n) = b'_n$，类似地可证明 $f(b_n) = b_n$。

情形 $f(a'_n) = b'_n$ 是类似的。□

引理 3. 对于每个 $n < \omega$，若 $\{f(a_n)\ f(b_n)\} = \{a_n, b_n\}$，则 $f|_{[a_n,b_n]\cap X}$ 是到 $[a_n, b_n] \cap X$ 上的等距映射。

证明。 由于 $\{f(a_n)\ f(b_n)\} = \{a_n, b_n\}$，对于任意 $t \in [a_n, b_n]$，不等式组

$$(*) \quad \begin{cases} |f(a_n) - x| \leqslant |a_n - t|, \\ |f(b_n) - x| \leqslant |b_n - t| \end{cases}$$

有唯一解，即当 $f(a_n) = a_n$ 时为 t，当 $f(a_n) = b_n$ 时为 $x = a_n + b_n - t$。另一方面，由于 f 是非扩张的，我们有

$$(**) \quad \begin{cases} |f(a_n) - f(t)| \leqslant |a_n - t|, \\ |f(b_n) - f(t)| \leqslant |b_n - t|. \end{cases}$$

因此， $f(t)$ 是（$*$）的唯一解，所以对于所有 $t \in [a_n, b_n]$，若 $f(a_n) = a_n$，则 $f(t) = t$；或者对于所有 $t \in [a_n, b_n]$，若 $f(a_n) = b_n$，则 $f(t) = a_n + b_n - t$。□

引理 4。 对于每个 $n < \omega$， $f|_{[a_n,b_n]\cap X}$ 是到 $[a_n, b_n]\cap X$ 上的等距映射。

证明。 固定 n，并假设该假设对 $k < n$ 成立。我们将证明

$$f^{-1}(a'_n), f^{-1}(b'_n) \in [a'_n, b'_n].$$

假设 $f^{-1}(a'_n) \notin [a'_n, b'_n]$。根据归纳假设，

$$f[[a_k, b_k] \cap X] = [a_k, b_k] \cap X$$

对于 $k < n$。由于 $f(f^{-1}(a'_n)) = a'_n \in [a_n, b_n]$，我们有 $f^{-1}(a'_n) \notin \bigcup_{k<n}[a_k, b_k]$。因此，要么 $f^{-1}(a'_n) \in X \setminus \bigcup_{k<\omega}[a_k, b_k]$，这意味着 $f^{-1}(a'_n)$ 是一个凝聚点，与假设矛盾；要么对于某个 $m \geqslant n$，$f^{-1}(a'_n) \in [a_m, b_m] \cap X$。由于 a_m 是一个凝聚点， $f(a_m)$ 也是凝聚点。现在，如果 $m = n$，那么 $f^{-1}(a'_n) \notin [a'_n, b'_n]$ 意味着

$$f^{-1}(a'_n) \in [a_n, a'_n) \cup (b'_n, b_n],$$

这意味着

$$\min\{|f^{-1}(a'_n) - a_n|, |b_n - f^{-1}(a'_n)|\} < \delta_{n+1}.$$

如果 $|f^{-1}(a'_n) - a_n| < \delta_{n+1}$，那么

$$|f(a_n) - a'_n| = |f(a_n) - f(f^{-1}(a'_n))| \leqslant |a_n - f^{-1}(a'_n)| < \delta_{n+1},$$

但不存在满足 $|x - a'_n| < \delta_{n+1}$ 的凝聚点 x；矛盾。 $|b_n - f^{-1}(a'_n)| < \delta_{n+1}$ 的情形类似。如果 $m > n$，那么

$$\min\{|a_m - f^{-1}(a'_n)|, |b_m - f^{-1}(a'_n)|\} \leqslant \tfrac{1}{2}\delta_m.$$

若 $|a_m - f^{-1}(a'_n)| \leqslant \frac{1}{2}\delta_m$，则

$$|f(a_m) - a'_n| = |f(a_m) - f(f^{-1}(a'_n))| \leqslant |a_m - f^{-1}(a'_n)| \leqslant \tfrac{1}{2}\delta_m < \delta_{n+1};$$

矛盾。 $|b_m - f^{-1}(a'_n)| \leqslant \frac{1}{2}\delta_m$ 的情形类似。最后， $f^{-1}(a'_n) \in [a'_n, b'_n]$ 以及 $f^{-1}(b'_n) \in [a'_n, b'_n]$ 这一事实可用类似方法证明。

由引理 1 可知，$\{f^{-1}(a'_n)\ f^{-1}(b'_n)\} = \{a'_n, b'_n\}$。根据引理 2，我们有 $\{f(a_n)\ f(b_n)\} = \{a_n, b_n\}$。于是，根据引理 3，$f|_{[a_n,b_n]\cap X}$ 是到 $[a_n, b_n] \cap X$ 上的等距映射。□

4. 主定理

定理 5。 集合 X 是可塑的。

证明。 固定一个非扩张双射 $f\colon X \to X$。根据引理 4，对于每个 $n < \omega$，限制映射 $f|_{[a_n,b_n]\cap X}$ 是到 $[a_n, b_n]\cap X$ 上的等距映射。若 $f(b_0) = a_0$ 且 $f(b_1) = a_1$，则

$$|f(b_1)-f(b_0)| = a_1-a_0 = (a_1-b_0)+(b_0-a_0) > (a_1-b_0)+(b_1-a_1) = b_1-b_0;$$

矛盾。若 $f(b_0) = a_0$ 且 $f(b_1) = b_1$，则

$$|f(b_1) - f(b_0)| = b_1 - a_0 > b_1 - b_0;$$

矛盾。因此 $f(b_0) = b_0$，从而 $f(a_0) = a_0$。固定 $1 \leqslant n < \omega$，并假设对 $k < n$，$f(a_k) = a_k$ 且 $f(b_k) = b_k$。设 $f(b_{n+1}) = a_{n+1}$。若 $a_n < a_{n+1}$，则 $b_n < a_{n+1}$ 并且

$$b_{n+1} - b_n = f(a_{n+1}) - f(b_n) \leqslant a_{n+1} - b_n < b_{n+1} - b_n;$$

矛盾。如果 $a_{n+1} < a_n$，那么 $b_{n+1} < a_n$ 并且

$$a_n - a_{n+1} = f(a_n) - f(b_{n+1}) \leqslant a_n - b_{n+1} < a_{n+1} - a_n;$$

矛盾。因此 $f(b_{n+1}) = b_{n+1}$，从而 $f(a_{n+1}) = a_{n+1}$。由归纳法，$f(a_n) = a_n$并且 $f(b_n) = b_n$对每个 $n < \omega$都成立。

固定 $t \in X$。存在 m 和 n 使得 $a_m < t < a_n$。再次，t是不等式组的唯一解

$$(***) \quad \begin{cases} |a_m - x| \leqslant |a_m - t|, \\ |a_n - x| \leqslant |a_n - t|, \end{cases}$$

另一方面，由于 f 是非扩张的，我们有

$$(**) \quad \begin{cases} |f(a_m) - f(t)| \leqslant |a_m - t|, \\ |f(a_n) - f(t)| \leqslant |a_n - t|. \end{cases}$$

由于 $f(a_m) = a_m$并且 $f(a_n) = a_n$，$f(t)$ 的值是 $(***)$ 的唯一解，因此 $f(t) = t$。□

定理 6。连续统假设等价于不存在基数为 $|X| < \mathfrak{c}$ 的可塑稠密子集 $X \subseteq \mathbb{R}$。

证明。 连续统假设和 [1] 中的推论 2 表明，不存在基数为 $|X| < \mathfrak{c}$ 的可塑稠密子集 $X \subseteq \mathbb{R}$。

若假设 $\mathfrak{c} \geqslant \omega_2$，那么集合 X 是可塑的、稠密的，且其基数为 $\omega_1 < \mathfrak{c}$。□

参考文献

[1] T. Banakh、O. Mazurenko、O. Zavarzina，《可塑度量空间与群》，https://arxiv.org/pdf/2510.10537