arXiv:2512.18975v1 [math.MG] 22 Dec 2025

关于有限度量空间的 ℓ_1 嵌入性及影响球图

STANISLAV JABUKA 和 EHSAN MIRBAGHERI

Abstract. 我们引入了定义在含有 $n \geq 3$ 个元素的集合上的度量的对割锥 $PCUT_n$，该锥由割为二元组时所产生的割度量的非负系数组合构成。给定一个度量，我们根据直接从该度量计算得到的量，完整刻画其属于对割锥的充要条件。我们还证明了一个新结果：满足某个不等式系统的度量属于度量的（完整）割锥，从而可以 ℓ_1嵌入欧几里得空间。

我们将这些结果应用于简单图作为影响球图嵌入欧几里得空间的 ℓ_1-可嵌入性。我们给出了一个简单图的例子，该图不存在对割锥中的此类 ℓ_1-度量。

1. Introduction and Main Results

本文探讨两个相关问题。第一个问题是：一个度量空间（V_n， d），其中 $V_n = \{1, \ldots, n\}$，何时可以等距嵌入到某个配备 ℓ_1-度量的欧几里得空间中。第二个问题考察简单图 G，并询问它们能否在欧几里得空间中相对于 ℓ_1-度量实现为影响球图。尽管已知每个简单图都是某个度量空间中的影响球图，但在欧几里得空间中相对于 ℓ_1-度量实现的问题仍未解决。

1.1. ℓ_1-可嵌入性与对割锥。 设 d 是有限集 $V_n = \{1, \ldots, n\}$上的一个半度量，其中 $n \geq 3$。关于（V_n， d）是否可 ℓ_1-嵌入到某个欧几里得空间 $\mathbb{R}^m$ 中的问题，历史悠久，许多作者都对此有所贡献，参见例如 [3, 4, 11, 14, 17]。已知， ℓ_1-可嵌入性等价于 d 属于割锥 CUT_n，即由割度量 δ_C 张成的正锥： $V_n \times V_n \to \{0, 1\}$；对于子集（或割） $C \subset V_n$，其定义如下：

$$\delta_C(i,j) = \begin{cases} 0 & ; \quad |\{i,j\} \cap C| = 0 \text{ or } 2, \\ 1 & ; \quad |\{i,j\} \cap C| = 1. \end{cases} \tag{1}$$

我们同时将 δ_C 视为 V_n 上的半度量，也将其视为 $\mathbb{R}^{\binom{n}{2}}$中的一个向量。后一个空间的维数等于 V_n中的数对数量；按照数对的字典序排列，该向量 δ_C的第 $\{i,j\}$个坐标等于 $\delta_C(\{i,j\})$。

判定 d 是否属于 CUT_n 的问题已知是 NP 完全 [2],，因此颇具挑战性。已有许多不等式可以阻止一个度量 d 属于

2020 数学主题分类。05C12,05C50.

CUT_n，例如超度量不等式和零型不等式（参见 [11] 第 6.1 节）。 [8, 9]中还可以找到更专门的不等式。尽管存在如此多的阻碍条件，判定一个度量 d 是否属于割锥仍然很困难。

我们在此提出研究一个较简单的问题：判定度量 d是否属于对割锥 $PCUT_n$，该锥定义为由所有满足 $|C| = 2$ 的 $\binom{n}{2}$ 割度量 δ_C 在 $\mathbb{R}^{\binom{n}{2}}$中张成的正锥，这些割度量称为对割。

研究与特殊割 $C \subset V_n$ 相关的割度量 δ_C，而非所有可能的割，并非新想法。例如， [10], 研究了仅具有偶型或奇型的割。类似地， [7], 考虑了多种割，包括等割、多重割、等多重割和平衡多重割。只研究对割是我们提出的新方法，我们还对属于 $PCUT_n$ 给出了完整刻画。

定理 1.1。对于具有 $n \geq 5$、定义在 V_n 上的度量 d，定义该度量d的迹 $Tr(d)$，以及顶点 $i \in V_n$ 的星迹 s_i 如下：

(i) $Tr(d) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} d(i, j)$,

(ii) $s_i = \sum_{j \neq i} d(i, j)$.

那么， d属于对割锥 $PCUT_n$ 当且仅当

$$s_i + s_j \geq (n-4) \cdot d(i,j) + \frac{2}{n-2} Tr(d), \qquad for\ all\ pairs\ \{i,j\} \subset V_n. \tag{2}$$

据我们所知，对于属于由一组特定割度量张成的正锥的度量，这种完整刻画尚属首次。下面的推论给出了一个更易验证的条件；该条件虽只是必要条件，通常并不足以保证 d属于 $PCUT_n$。

推论 1.2. 若度量 d 定义在 V_n 上，且满足 $n \geq 5$，并属于对割锥 $PCUT_n$，则

$$(n-2)s_i \geq Tr(d), \quad for\ all\ i \in V_n. \tag{3}$$

定理 1.1 和推论 1.2 的应用见第 3 节，具体而言，见第 3.6 节。我们通过对一个称为方形割矩阵的$\binom{n}{2} \times \binom{n}{2}$ 矩阵 S_{sq} 进行细致的谱分析，证明了定理 1.1。该矩阵是判定 d是否成立的线性方程组 $PCUT_n$的基础矩阵。我们不仅求解这个线性方程组，还精确确定了其唯一解何时所有系数均非负。

1.2. ℓ_1**-嵌入性与割锥。 </style}完整割锥 中的成员资格同样可通过寻找线性方程组的解来判定，该方程组对应的矩阵 （我们称之为完整割矩阵**）的大小为 $(2^n - 2) \times \binom{n}{2}$。该矩阵的行数$2^n - 2$ 对应于 V_n 的“非平凡”割的数量，也就是除空集和 V_n 自身以外的所有子集。我们未能证明这一一般情形下定理 1.1 的类似结论。尽管如此，我们仍可给出以下结果。

定理 1.3。设 d 是 V_n 上的一个度量，且满足 $n \geq 5$。对于一个非平凡割 $C \subset V_n$，定义其星迹 s_C 为 $s_C = \sum_{i\in C,\ j\notin C} d(i,j)$。如果不等式

$$s_C \geq \frac{|C|(n-|C|)}{\binom{n}{2}+1} \cdot Tr(d) \tag{4}$$

若对每个非平凡割 $C \subset V_n$ 都成立，则 $d \in CUT_n$。

注意，如果 $C = \{i\}$，那么 $s_C = s_i$，即定理 1.1 中定义的第 i 个顶点 $i \in V_n$ 的星迹。这个定理的精神与上文提到的诸多不等式（例如超度量不等式）截然相反；若违反这些不等式，就会阻止度量 d 属于割锥 CUT_n。相反，如果度量 d 满足不等式 (4)，就足以保证 d 属于 CUT_n。

1.3. **影响球图**。我们探讨的第二个主题是影响球图，简称 SIGs 。给定一个简单图 $G = (V_n,\ E)$，其中 E 是 G 的邻接矩阵（定义为这样一个矩阵：若顶点 i 和 j 之间有边，则 $E_{i,\ j} = 1$；否则 $E_{i,\ j} = 0$ ）。若度量 d 定义在 V_n 上，并满足以下约束，则称其为 G 的影响球度量，或称 G 的 SIG-度量：首先，将顶点 $i \in V_n$ 的影响半径 r_i 定义为

$$r_i = \min_{j\neq i} d(i,j).$$

那么，对于任意一对 $\{i,j\} \subset V_n$，若满足以下条件，则 d 是 G 的 SIG-度量：

$$d(i,j) \begin{cases} < r_i + r_j, & ; \quad E_{i,j} = 1, \\ \geq r_i + r_j, & ; \quad E_{i,j} = 0. \end{cases} \tag{5}$$

我们将 (5) 称为 SIG-不等式。不难证明，每个简单图 G上都存在 SIG-度量。

例 1.4. 给定一个简单图 $G = (V_n,\ E)$，令 d_0 和 d_1 分别为 V_n 上的截断度量和图度量，定义如下：

$$d_0(i,j) = \begin{cases} 0 & ; \quad i = j, \\ 1 & ; \quad i \neq j \text{ and } E_{i,j} = 1, \\ 2 & ; \quad i \neq j \text{ and } E_{i,j} = 0. \end{cases}$$

距离 $d_1(i,\ j)$ 是连接顶点 i和 j的最短边路径的长度，每条边的长度均为 1。容易验证，这两种度量对于 G都是 SIG-度量。对于某些图，例如完全图，这两种度量相同；但一般而言，它们并不相同。

我们在第 3.6 节中将定理 1.1 应用于各种图族上的这两种度量。在 [11] 中曾在 ℓ_1-嵌入的背景下研究过这两种度量，参见“第三部分：图的等距嵌入”。

SIG-图由 Toussaint [18, 19, 20] 作为一种邻近图引入，应用背景是模式识别和计算机视觉中的欧几里得平面。随着这一领域的发展，人们开始在任意度量空间中研究 SIG-图，并特别关注配备了 $\mathbb{R}^m$ 的欧几里得空间，

ℓ_p-度量 d_p。回顾一下，对于给定的 $p \in [1,\infty]$, d_p： $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \to [0,\infty)$，其定义为

$$d_p(x,y) = \begin{cases} (|x_1-y_1|^p + \cdots + |x_m-y_m|^p)^{1/p} & ; \quad p \in [1,\infty), \\ \max\{|x_1-y_1|,\ldots,|x_m-y_m|\} & ; \quad p=\infty. \end{cases}$$

以下是研究影响球图时一个自然而然的问题。

问题 1. 固定一个 $p \in [1,\infty]$ 的选取。是否每个连通简单图 $G=(V_n,E)$ 都存在一个 SIG-度量 d，使得对于某个$m \geq 1$ （其中允许 m 随 G 改变），(V_n,d) 等距嵌入到 $(\mathbb{R}^m,d_p)$ 中?

目前对这个问题的理解如下：

1. 对于 $p=\infty$，根据 Michael 和 Quint [15] 的工作，答案是“是”。他们给出了一个非常简洁的嵌入：将顶点 $i \in V_n$ 映射到从 $E+2I_n$ 中删除第 n 列后得到的 $n \times(n-1)$ 矩阵的第 i 行向量，从而将 G 嵌入到 $(\mathbb{R}^{n-1},d_\infty)$ 中。2. 对于 $p \in (1,\infty)$，答案是“否”。这源于 $\mathbb{R}^m$ 上 ℓ_p-范数 $||\cdot||_p$ 的严格凸性。虽然欧几里得空间上的所有 ℓ_p-范数都是凸的，但只有当 $p \in (1,\infty)$ 时才严格凸（不考虑 $m=1$ 的平凡情形）。3. 对于 $p=1$，这个问题仍未解决。在这种情况下，该问题等价于（参见定理 2.3）：每个简单图 $G=(V_n,E)$ 是否都存在一个属于割锥 CUT_n 的 SIG-度量 d。

在后续工作中，我们将证明问题1的 $p=1$版本是 NP 完全的，因此颇具挑战性。鉴于此，并且考虑到第 1.1 节引入了对割锥，自然会提出这个修改后的问题。

问题 2。设 $G=(V_n,E)$ 是一个连通简单图。G 是否存在一种 SIG-度量d，属于对割锥 $PCUT_n$?

我们能够完整地回答这个较简单的问题。

定理 1.5。对于每个 $n \geq 5$，都存在一个连通简单图 G，它有 n 个顶点，且其 G 的任何 SIG-度量 d 都不属于对割锥 $PCUT_n$。图*4.1*中的星图 $S(n)$ 就是这样一个例子。

证明此类定理的难点在于，图 G 通常存在无穷多个 SIG-度量，必须排除它们全部属于 $PCUT_n$ 的可能性。我们的证明将定理 1.1 中的不等式 (2) 与 SIG-不等式 (5) 结合起来，证明二者相互矛盾。

1.4. **结构安排**。本文其余部分安排如下：第2节介绍必要的背景知识。具体而言，第2.1节介绍有限集上的度量背景，并将 ℓ_1-可嵌入性问题重新表述为求解线性方程组的问题。第2.3节介绍与影响球图（本文的第二个主题）相关的事实。第 3 节对上文提到的方形割矩阵进行谱分析，并证明定理 1.1 和推论 1.2。第4节介绍定理 1.1 在问题2中的应用，并证明定理1.5。第5节研究完整割矩阵，并为其构造一个右

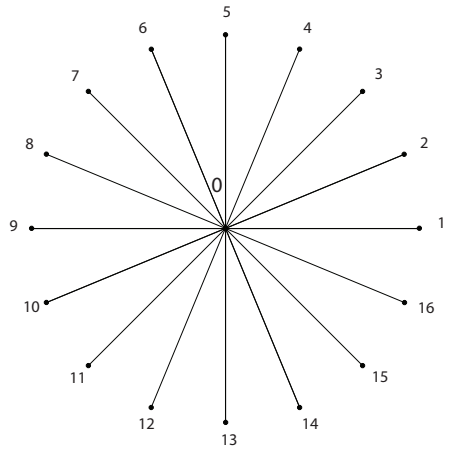


FIGURE 1. 此处展示的星图 $S(n)$，带有 $n = 16$。中心顶点标记为 0，外围顶点则以 $V_n = \{1, \ldots, n\}$ 的元素编号。

逆。这个右逆是证明定理 1.3 的主要要素。最后，在第6节中，我们确定完整割矩阵核的一个显式基。我们将说明如何利用这一结果修改定理 1.3 的结论，从而得到适用于完整割锥中度量的类似成员资格定理。

2. BACKGROUND

本节介绍有限度量空间和影响球图的背景知识。部分背景已在引言中阐述，此处不再重复，但相信读者仍记得相关内容。

2.1. 有限度量空间。 设 $n \geq 1$ 为整数，令 $V_n = \{1, \ldots, n\}$。我们将有限度量空间定义为一对 (V_n, d)，其中 $d\colon\ V_n \times V_n \to [0, \infty)$ 是一个满足以下三个条件的函数：

(a) 正定性：对于 $i, j \in V_n$, $d(i, j)$，当且仅当 $i = j$ 时，$= 0$。(b) 对称性：对于 $i, j \in V_n$, $d(i, j)$，$= d(j, i)$。(c) 三角不等式：对于 $i, j, k \in V_n$，三角不等式 $d(i, j) \leq d(i, k) + d(k, j)$ 成立。

如果满足的是较弱的条件，而不是条件 (a)，

(a') For every $i \in V_n$, $d(i, i) = 0$,

那么我们称 d V_n 上的一个半度量 。为简化术语，我们仍将这对 (V_n, d) 称为度量空间。

如果存在某个 $m \geq 1$ 的等距嵌入 $\varphi : (V_n, d) \to (\mathbb{R}^m, d_1)$，则称度量空间 (V_n, d) 可 ℓ_1嵌入 。具体来说，若记 $\varphi(i) = X_i \in \mathbb{R}^m$，则这样的嵌入要求

$$d_1(X_i, X_j) = ||X_i - X_j||_1 = d(i, j), \qquad \text{for all } i, j \in V_n.$$

2.2. 割锥 CUT_n。 V_n 的一个割 是将 V_n 分解为两个不相交部分$C \sqcup (V_n - C)$，其中一部分是某个子集 $C \subset V_n$。直观地，我们认为 C 表示 V_n 中各点之间的一种距离概念：点 i，$j \in V_n$ 若同时位于 C 或同时位于 $V_n - C$，则彼此“接近”（例如距离为 0）；而若$i \in C$和 $j \in V_n - C$，或反之，则认为 i和 j之间存在某个正距离，例如距离为 1。将 V_n 分解为 C 和 $V_n - C$的不相交并时，我们将 C 本身称为割。注意，割 C 和 $V_n - C$ 会得到 V_n的相同分解。

这种用割来解释距离的方式，引出了如下对 V_n 上 割度量 δ_C[1] 的定义，如式 (1) 所示，显然有 $\delta_C = \delta_{V_n - C}$。两个平凡割，即$C = \emptyset$ 和 $C = V_n$，导出 $\delta_C \equiv 0$，因此我们主要只考虑 V_n 的 $2^n - 2$非平凡割。

回顾一下，我们将半度量 δ_C 视为 $\mathbb{R}^{\binom{n}{2}}$ 中的向量，正如引言中公式 (1) 后的段落所解释的那样。它们的所有坐标均为 0 或 1，因此实际上是超立方体 $[0,1]^{\binom{n}{2}}$ 的顶点。我们将割多胞体 $CUT_n^\square$和割锥 CUT_n定义为

$$\mathrm{CUT}_n = \left\{ \sum_{C \subset V_n} w_C \, \delta_C \,\middle|\, w_C \geq 0 \right\} \subset \mathbb{R}^{\binom{n}{2}},$$

$$\mathrm{CUT}_n^\square = \left\{ \sum_{C \subset V_n} w_C \, \delta_C \,\middle|\, w_C \geq 0,\ \sum_{C \subset V_n} w_C = 1 \right\} \subset CUT_n \subset \mathbb{R}^{\binom{n}{2}}. \tag{6}$$

割多胞体 $CUT_n^\square$ 是 $\mathbb{R}^{\binom{n}{2}}$ 中由有限集 X 生成的凸包 Conv(X)，其中的元素是超立方体 $[0,1]^{\binom{n}{2}}$ 上对应于割度量 δ_C 的顶点。割锥 CUT_n 是 $CUT_n^\square$ 的正锥。我们所说的多胞体，指的是欧几里得空间中有限子集的凸包，因此这一术语也适用于此处。割多胞体 $CUT_n^\square$ 仍未被充分理解。例如，只有在 $n \leq 7$ 时，其面（即余维一面）才完全已知（对于 $n \leq 6$，见 [8],；对于 $n = 7$，见 [12]）；而对于更大的 n，这些面仍难以确定。

*Exam*第 2.1. 当 $n = 3$, $CUT_3^\square$由 4 个顶点在 $[0,1]^3 \subset \mathbb{R}^3$ 中生成时 es

$$\begin{aligned} \delta_{\{\}} = \delta_{\{1,2,3\}} &= (0,0,0), & \delta_{\{1\}} = \delta_{\{2,3\}} &= (1,1,0), \\ \delta_{\{2\}} = \delta_{\{1,3\}} &= (1,0,1), & \delta_{\{3\}} = \delta_{\{1,2\}} &= (0,1,1), \end{aligned}$$

表明 $CUT_3^\square$是图2中的四面体。

关于凸包的以下经典结果归功于 Carath´eodory。

定理 2.2 （Carath´eodory [5]）。设 $X \subset \mathbb{R}^d$ 是一个有限集，且 x 是其凸包 *Conv*（X）$\subset \mathbb{R}^d$ 中的一个点。那么 x 位于 X 的一个 d 维单形中。

[1]函数 δ_C 只是一个半度量，但为了便于阐述，我们发现称它们为割度量更容易。

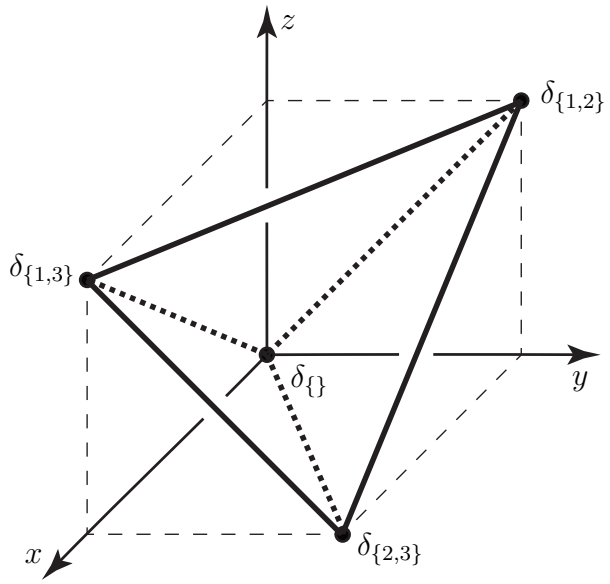


FIGURE 2. $CUT_3^{\square}$和 $PCUT_3^{\square}$的可视化。前者是由 $\delta_{\{\}}$、 $\delta_{\{1,2\}}$、 $\delta_{\{1,3\}}$ 和 $\delta_{\{2,3\}}$张成的四面体，后者则是由 $\delta_{\{1,2\}}$、 $\delta_{\{1,3\}}$ 和 $\delta_{\{2,3\}}$张成的三角形。

Said d 换言之，存在 $d+1$ 个线性无关点 x_0，.....， x_d，使得 t

$$x = \sum_{i=0}^{d} \lambda_i x_i, \qquad with \qquad \lambda_i \geq 0 \ and \ \sum_{i=0}^{d} \lambda_i = 1.$$

关于 $(V_n,\ d)$ 的 ℓ_1-可嵌入性与割锥之间的联系，体现为 [1]中的以下优美结果。

T定理 2.3。 度量 d 在 V_n 上是 ℓ_1-可嵌入的，当且仅当 $d \in CUT_n$.

事实上，若 $d \in CUT_n$ 和 $d = \sum_{i=1}^{m} w_i \delta_{C_i}$，其中某个 $w_i \geq 0$ 以及某些割C_1，... ...， $C_m \subset V_n$ 满足（ $m \leq \binom{n}{2}$） ，则 $(V_n,\ d)$ 到 $(\mathbb{R}^m,\ d_1)$ 的一个 ℓ_1-嵌入可定义为

$$i \mapsto X_i \quad \text{with} \quad (X_i)_j = \begin{cases} w_j & ; \quad i \in C_j, \\ 0 & ; \quad i \notin C_j. \end{cases}$$

容易验证，对于所有 $i,\ j \in V_n$， $||X_i - X_j||_1 = d(i,\ j)$。反向命题也不难证明，见 [11] 中的命题 4.2.2。

这一结果将 ℓ_1-可嵌入性问题转化为验证给定度量 d 是否属于割锥 CUT_n 的问题。然而，这并非易事。

定理 2.4 (Avis-Deza [2])。 判定定义在 V_n 上的度量 d 是否属于割锥 CUT_n 的问题是 *NP* 完全的。

2.3. **影响球图**。 这里我们沿用第1.3节中引入的有关影响球图（简称 SIGs ）的定义和符号。在

该节中，我们从一个简单连通图 $G = (V_n, E)$ 出发，并证明总存在定义在 V_n 上的度量 d，使其关联的 SIG 为 G。

反过来，如果我们从 V_n 上的度量 d 出发，就可以构造其影响球图 G，其顶点为 V_n，边矩阵 $E = [E_{i,j}]$ 由下式确定

$$E_{i,j} = \begin{cases} 0 & ; \quad i = j, \\ 1 & ; \quad i \neq j \text{ and } d(i,j) < r_i + r_j, \\ 0 & ; \quad i \neq j \text{ and } d(i,j) \geq r_i + r_j. \end{cases}$$

与之前一样，$r_i = \min_{j \neq i} d(i,j)$。根据构造，$G$ 是一个简单图，但它可能连通，也可能不连通。6

继续之前，我们简要回顾引言中的问题1。在其后的段落中，我们说明了如何为每个简单图 $G = (V_n, E)$赋予一个 SIG-度量 d，使得 (V_n, D) 可嵌入到 $(\mathbb{R}^{n-1}, d_\infty)$ 中。我们还指出，如果 $p \in (1, \infty)$，一般而言不存在这样的度量；这里我们通过一个例子说明原因。这一结果为专家所熟知，我们仅为完整起见将其列出。

定理2.5。对于任意 $p \in (1, \infty)$，都存在连通的简单图 G，它们无法嵌入任何欧几里得空间，且嵌入参数为 ℓ_p-SIG。

证明很简单，一个图就能为所有 $p \in (1, \infty)$ 提供反例。回想一下，如果 $p \in (1, \infty)$，那么对于点 $a, b, c \in \mathbb{R}^m$，$d_p(a, c) = d_p(a, b) + d_p(b, c)$ 蕴含 a, b, c 共线。对于 $p = 1, \infty$，这一点不成立，因为关于 d_p 的单位球严格凸当且仅当 $p \in (1, \infty)$；参见 [13] (第2.11节) 或[16](第3章)。

例 2.6。考虑图3中的星图 $S(3)$。设 d是 $W_4 = \{0\} \cup V_3$ 上的一个 SIG-度量，且对 $i = 1, 2, 3$ 有 $a_i = d(i, 0)$。由于顶点 1，2，3 的度均为 1，因此可得 $r_i = a_i$, $i = 1, 2, 3$。将 SIG- 不等式 (5) 应用于各对

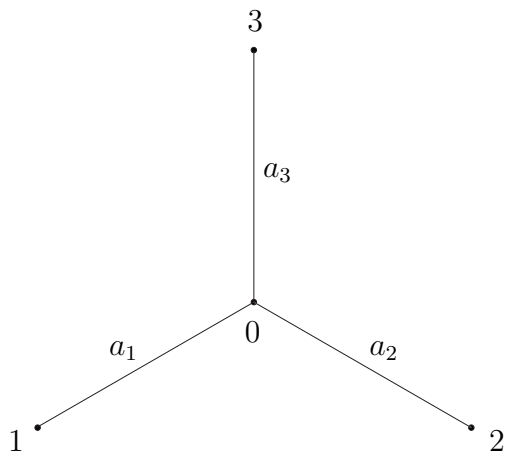


FIGURE 3. 星图 $S(3)$。

个顶点　　不共享一条边的那些边，以及三角不等式，意味着

$$d(1,2) \geq r_1 + r_2 = a_1 + a_2 = d(1,0) + d(0,2) \geq d(1,2),$$

这表明 $d(1,2) = a_1 + a_2 = d(1,0) + d(0,2)$。同样的论证表明，$d(1,3) = d(1,0) + d(0,3)$，且 $d(2,3) = d(2,0) + d(0,3)$。如果 $S(3)$ 可以嵌入到 $(\mathbb{R}^m, d_p)$ 中，且嵌入满足 SIG，其中某个 $p \in (1,\infty)$，那么每组三个点 $\{1,2,0\}$、$\{1,3,0\}$ 和 $\{2,3,0\}$ 都将共线，因此这 4 个点也都共线，这就产生了矛盾。

由于所有简单图是否都存在属于割锥 CUT_n 的 SIG-度量这一问题仍未解决，我们转而研究 SIG-度量是否属于对割锥 $PCUT_n$。

3. The Square Cut-Matrix and the Pair-Cut Cone $PCUT_n$

本节介绍我们研究的主要对象——对割锥 $PCUT_n$和方形割矩阵 S_{sq}。本节的主要成果包括对 S_{sq} 的显式谱分解（第 3.4 节），以及对定义在 V_n上的度量 d 属于 $PCUT_n$的完整刻画（定理 3.6）。

3.1. p air-cut cone. 回想一下，每个度量 $d \in CUT_n$ 都是一个线性组合

$$d = \sum_{i=1}^{m} w_i \, \delta_{C_i},$$

对于某些割 C_1，……，C_m的 V_n 以及某些系数 $w_i \geq 0$。根据 Carath´eodory 定理 2.2，我们可以假设 $m \leq \binom{n}{2}$，尽管对于给定的度量 d，我们无法知道使用了哪些割 C_1，……，C_m。

本节中，我们对 m 和割C_1，……，C_m都作出一个我们认为自然的选择。具体而言，我们选择考虑:

(i) $m = \binom{n}{2}$。(ii) 对应于 $\binom{n}{2}$ 对 $\{i,j\} \subset V_n$的割，称为对割，并按字典序排列。我们将它们标记为对 $\{i,j\}$ 或割 C_1，C_2，…… ，其中指标指它们在字典序排列中的序号。例如

$$C_1 = \{1,2\}, C_2 = \{1,3\}, \ldots, C_{\binom{n}{2}} = \{n-1,n\}.$$

有了这些选择，我们将研究形如 d on V_n 的度量

$$d = \sum_{\{i,j\} \subset V_n} w_{\{i,j\}} \cdot \delta_{\{i,j\}}, \qquad w_{\{i,j\}} \geq 0. \tag{7}$$

令 $PCUT_n^{\square}$为对割多胞体，即所有对割度量$\delta_{\{i,j\}}$的凸包；令 $PCUT_n$表示对割锥，它是 $PCUT_n^{\square}$上的正锥。因此， $d \in PCUT_n$当且仅当（7）有解。明确这一点后，我们在此要探讨的主要问题是:

问题 3. 度量 d 在 V_n 属于对割锥$PCUT_n$的条件是什么?

3.2. 方形割矩阵。 我们首先将系统 (7) 改写为矩阵形式。令

$$w = [w_{\{1,2\}}, \dots, w_{\{n-1,n\}}]^\tau \in \mathbb{R}^{\binom{n}{2}}.$$

对于固定的 $n \geq 3$（在记号中省略不写），我们将方形割矩阵 S_{sq}定义为列向量为 $\delta_{\{1,2\}}$、 $\delta_{\{1,3\}}$、……、 $\delta_{\{n-1,n\}}$的 $\binom{n}{2} \times \binom{n}{2}$ 方阵，因此系统 (7) 变为

$$S_{sq} \cdot w = d, \quad w \geq 0. \tag{8}$$

此处及下文中，写作 $w \geq 0$ 表示 w 是一个所有坐标均非负的向量。若将 S_{sq} 的行和列都视为由 V_n 中的$\binom{n}{2}$ 对按字典序枚举，则 S_{sq}中第 k 行、第 ℓ 列的元素为 $\delta_{\{a,b\}}(\{i,j\})$，其中 $\{a,b\}$ 和 $\{i,j\}$ 分别是第 k对和第 ℓ对。特别地，这表明 S_{sq} 是一个对称矩阵，因此具有实特征值。

例 3.1。 对于 $n = 4$ $V_4 = \{1,2,3,4\}$ 中有序对的字典序排列为$\{1,2\}$、 $\{1,3\}$、 $\{1,4\}$、 $\{2,3\}$、 $\{2,4\}$、 $\{3,4\}$，从而得到

$$S_{sq} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

S_{sq}的特征值，事实证明，是众所周知的。

定理 3.2。 对于 $n \geq 3$ 矩阵 S_{sq} 的特征值及其重数为：

（i） $2n-4$，重数为 1；（ii） $n-4$，重数为 $n-1$；（iii） -2，重数为 $\frac{1}{2}n(n-3)$。 –

因此，对于 $n \geq 5$， S_{sq} 是一个正则矩阵。

S_{sq} 的特征值已在文献中得到广泛研究，例如在 [6] 中（参见定理 4.17）。谱图理论是利用图的邻接矩阵的特征值研究图的理论，而 S_{sq} 等于线图 $L(K_n)$ 的邻接矩阵 $A = A_n$，其中线图 $L(K_n)$ 是这样一个图：其顶点与 K_n的边一一对应，并且 $L(K_n)$ 中的两个顶点 e_1、 e_2 （其中 e_1、 e_2 是 K_n 的边）在 $L(K_n)$ 中相邻，当且仅当 e_1 和 e_2 在 K_n中共享一个顶点。由于 K_n 有 $\binom{n}{2}$ 条边，因此 $L(K_n)$ 有 $\binom{n}{2}$个顶点；我们将用无序对 $\{i,j\} \subset V_n$ 为这些顶点编号（它们对应于 K_n 中连接顶点 i和 j的唯一一条边）。

令 $B = B_n$ 为 的顶点-边关联矩阵。这是一个大小为 $n \times \binom{n}{2}$ 的矩阵，其中第（k, ℓ）个元素在 K_n 的第 k 个顶点是第 ℓ 条边的端点时等于 1，否则第（k, ℓ）个元素等于 0。这个矩阵也受到了

谱图理论的广泛关注。具体而言，以下恒等式众所周知，也很容易通过显式计算验证：

$$\begin{aligned} B^\tau B &= 2I_{\binom{n}{2}} + A \\ BB^\tau &= (n-2)I_n + J_n, \end{aligned} \tag{9}$$

这里， I_n 是 $n \times n$ 单位矩阵，而 J_n 是 $n \times n$ 所有元素均为 1 的矩阵。我们将利用这些关系，得到$A = S_{sq}$的显式谱分解。

3.3. 的谱分解 S_{sq}。本节将明确给出 $A = S_{sq}$的特征子空间 E_λ，以及投影到各特征子空间上的正交投影算子。回顾一下， A的特征值及其重数已在定理 3.2 中列出。我们假设 $n \geq 5$，因此 A 是一个正则矩阵。首先注意到

$$v \in \mathrm{Ker}(B) = \mathrm{Ker}(B^\tau B) \text{ if and only if } Av = -2v \quad (\text{by } (9))$$

因此 $\mathrm{Ker}(B) = E_{-2}$。根据定理 3.2，$\dim \mathrm{Ker}(B) = \frac{1}{2}n(n-3)$。由于对应不同特征值的对称矩阵的特征子空间彼此正交，我们得到

$$E_{2n-4} \oplus E_{n-4} = E_{-2}^\perp = (\mathrm{Ker}(B))^\perp = \mathrm{Col}(B^\tau),$$

其中，$\mathrm{Col}(B^\tau)$ 是 B^τ 的列空间。根据正交补的唯一性，可知 $\mathrm{Col}(B^\tau) = E_{2n-4} \oplus E_{n-4}$，从而得到以下正交分解：

$$\mathbb{R}^{\binom{n}{2}} = \mathrm{Ker}(B) \oplus \mathrm{Col}(B^\tau) = E_{-2} \oplus (E_{2n-4} \oplus E_{n-4}). \tag{10}$$

对于 A 的特征值 λ，令 $P_\lambda : \mathbb{R}^{\binom{n}{2}} \to \mathbb{R}^{\binom{n}{2}}$ 为投影到 E_λ 上的正交投影算子。回顾一般情形，算子 $P : \mathbb{R}^{\binom{n}{2}} \to \mathbb{R}^{\binom{n}{2}}$ 是正交投影算子（投影到 $\mathrm{Im}(P)$ 上）当且仅当 $P^2 = P = P^*$，其中 P^* 是 P 的伴随算子，并由表示 P 的矩阵的转置表示。接下来我们将确定 P_{2n-4}、P_{n-4} 和 P_{-2}。

引理 3.3. 到 $Col(B^\tau)$ 上的正交投影算子 $P_{Col} : \mathbb{R}^{\binom{n}{2}} \to R^{\binom{n}{2}}$ 由下式给出

$$P_{Col} = B^\tau (BB^\tau)^{-1} B.$$

证明。 利用 (10)，将任意 $v \in \mathbb{R}^{\binom{n}{2}}$ 唯一地写为 $v = v_1 + v_2$，其中 $v_1 \in \mathbf{Ker}(B)$ $v_2 \in \mathbf{Col}(B^\tau)$。于是

$$\begin{aligned}
B^\tau(BB^\tau)^{-1}B(v_1+v_2) &= B^\tau(BB^\tau)^{-1}B(v_2)\\
&= B^\tau(BB^\tau)^{-1}B(\lambda_1 B_1^\tau + \cdots + \lambda_n B_n^\tau) \qquad (B_i^\tau = i\text{-th column of } B^\tau)\\
&= \sum_{i=1}^n \lambda_i B^\tau(BB^\tau)^{-1}BB_i^\tau\\
&= \sum_{i=1}^n \lambda_i B^\tau(BB^\tau)^{-1}(BB^\tau)_i \quad ((BB^\tau)_i = i\text{-th column of } BB^\tau)\\
&= \sum_{i=1}^n \lambda_i B^\tau \cdot [0,\dots,0,\underbrace{1}_{i-th \text{ coordinate}},0\dots,0]^\tau\\
&= \sum_{i=1}^n \lambda_i B_i^\tau\\
&= v_2.
\end{aligned}$$

此外

$$\begin{aligned}
(B^\tau(BB^\tau)^{-1}B)^2 &= B^\tau(BB^\tau)^{-1}(BB^\tau)(BB^\tau)^{-1}B = B^\tau(BB^\tau)^{-1},\\
(B^\tau(BB^\tau)^{-1}B)^\tau &= B^\tau(BB^\tau)^{-\tau}B = B^\tau(BB^\tau)^{-1}B.
\end{aligned}$$

证明至此完成。 □

已知到 B^τ 列空间的正交投影算子 P_{Col}，我们可以推导出到 A 的各特征子空间的正交投影算子。

命题 3.4。 对于$\lambda = n-4$、$2n-4$、-2，到 A 的特征子空间 E_λ 的正交投影算子 P_λ 如下：

(i) $P_{-2} = I_{\binom{n}{2}} - P_{Col} = I_{\binom{n}{2}} - B^\tau(BB^\tau)^{-1}B.$

(ii) $P_{2n-4} = \frac{1}{\binom{n}{2}} J_{\binom{n}{2}}.$

(iii) $P_{n-4} = P_{Col} - P_{2n-4} = B^\tau(BB^\tau)^{-1}B - \frac{1}{\binom{n}{2}} J_{\binom{n}{2}}.$

证明。 由于 $E_{-2} = \mathbf{Ker}(B) = (\mathbf{Col}(B^\tau)^\perp$，因此到 E_{-2} 的正交投影算子 P_{-2} 由 $P_{-2} = I_{\binom{n}{2}} - P_{\mathrm{Col}}$ 给出，正如 (i) 中所述。

E_{2n-4} 的唯一生成元很容易看出为 $\mathbf{1}$（维数为 $\binom{n}{2}$、所有坐标均为 1 的列向量），因此投影到 E_{2n-4} 上的正交投影算子 P_{2n-4} 为

$$P_{2n-4} = \lambda \mathbf{1}_{\binom{n}{2}} \cdot \mathbf{1}^\tau_{\binom{n}{2}} = \lambda J_{\binom{n}{2}},$$

对于某个 $\lambda \in \mathbb{R}$ 的选择。显然，对于任意 λ 的选择，$P^*_{2n-4} = P_{2n-4}$，但 $P^2_{2n-4} = \lambda^2 J^2_{\binom{n}{2}} = \lambda^2 \binom{n}{2} J_{\binom{n}{2}}$，这表明 $\lambda = {}^1\!/_{\binom{n}{2}}$。这就得到 $P_{2n-4} = {}^1\!/_{\binom{n}{2}}\, J_{\binom{n}{2}}$，从而证明 (ii)。

由于 $\mathsf{Col}(B^\tau) = E_{n-4} \oplus E_{2n-4}$，因此 P_{n-4} 到 E_{n-4} 的正交投影算子可先利用已经计算出的 P_{Col}，将向量正交投影到 $\mathsf{Col}(B^\tau)$ 上，然后应用 $I_{\binom{n}{2}} - P_{2n-4}$ 得到。这就得到

$$P_{n-4} = \left(I_{\binom{n}{2}} - P_{2n-4}\right) P_{\mathrm{Col}} = P_{\mathrm{Col}} - P_{2n-4} = B^\tau (BB^\tau)^{-1} B - \frac{1}{\binom{n}{2}} J_{\binom{n}{2}}.$$

上述推导中，我们利用了这样一个事实：$E_{2n-4} \subset \mathsf{Col}(B^\tau)$，因此 $P_{2n-4} P_{\mathrm{Col}} = P_{2n-4}$。最后请注意，

$$\begin{aligned}
P_{n-4}^* &= (P_{\mathrm{Col}} - P_{2n-4})^* = P_{\mathrm{Col}}^* - P_{2n-4}^* = P_{\mathrm{Col}} - P_{2n-4} = P_{n-4}, \\
P_{n-4}^2 &= (P_{\mathrm{Col}} - P_{2n-4})^2 = P_{\mathrm{Col}}^2 - P_{\mathrm{Col}} P_{2n-4} - P_{2n-4} P_{\mathrm{Col}} + P_{2n-4}^2 \\
&= P_{\mathrm{Col}} - P_{\mathrm{Col}} P_{2n-4} - P_{2n-4} P_{\mathrm{Col}} + P_{2n-4} \\
&= P_{\mathrm{Col}} - P_{2n-4} - P_{2n-4} + P_{2n-4} \\
&= P_{\mathrm{Col}} - P_{2n-4} \\
&= P_{n-4}.
\end{aligned}$$

这证明了 **(iii)**，从而完成了该命题的证明。 □

3.4. 和的谱分解根据上述对方形割矩阵 $S_{sq} = A$ 的特征子空间 E_λ 及其对应的正交投影算子 $P_\lambda : \mathbb{R}^{\binom{n}{2}} \to \mathbb{R}^{\binom{n}{2}}$的计算，现在我们使用谱定理得到以下恒等式：

$$S_{sq} = A = -2P_{-2} + (2n-4)P_{2n-4} + (n-4)P_{n-4}.$$

继续假设 $n \geq 5$成立，我们看到 A 可逆，因此对 A^{-1} 应用谱定理可得：

$$A^{-1} = -\frac{1}{2} P_{-2} + \frac{1}{2n-4} P_{2n-4} + \frac{1}{n-4} P_{n-4}. \tag{11}$$

根据命题 3.4，我们可以将 **(11)** 简化如下：

$$\begin{aligned}
A^{-1} &= -\frac{1}{2} P_{-2} + \frac{1}{2n-4} P_{2n-4} + \frac{1}{n-4} P_{n-4}, \\
&= -\frac{1}{2} \left(I_{\binom{n}{2}} - P_{\mathrm{Col}}\right) + \frac{1}{2n-4} P_{2n-4} + \frac{1}{n-4} \left(P_{\mathrm{Col}} - P_{2n-4}\right), \\
&= -\frac{1}{2} I_{\binom{n}{2}} - \frac{n}{2(n-2)(n-4)} P_{2n-4} + \frac{n-2}{2(n-4)} P_{\mathrm{Col}}. \qquad (12)
\end{aligned}$$

3.5. 求解系统 $S_{sq}w = d$。 $S_{sq}w_{sq} = Aw_{sq} = d$的唯一解 w_{sq} （即线性方程组 (8)）由 (12) 和命题 3.4 给出，为

$$\begin{aligned} w_{sq} &= A^{-1}\, d, \\ &= -\frac{1}{2}d - \frac{n}{2(n-2)(n-4)}P_{2n-4}(d) + \frac{n-2}{2(n-4)}P_{\mathrm{Col}}(d), \\ &= -\frac{1}{2}d - \frac{n}{2(n-2)(n-4)}\cdot\frac{2}{n(n-1)}J_{\binom{n}{2}}d + \frac{n-2}{2(n-4)}P_{\mathrm{Col}}(d), \\ &= -\frac{1}{2}d - \frac{1}{(n-1)(n-2)(n-4)}\mathrm{Tr}(d)\mathbf{1}_{\binom{n}{2}} + \frac{n-2}{2(n-4)}P_{\mathrm{Col}}\, d. \end{aligned} \tag{13}$$

在上文中，我们引入了记号 Tr(d)，并将其称为度量的迹 d，其定义为

$$\mathrm{Tr}(d) = \sum_{i<j} d(i,j). \tag{14}$$

(13) 最后一行中的前两项是完全明确的，而第三项则不是。我们接下来对此加以处理。根据顶点-边矩阵 B 的定义，对每个 $i \in V_n$，我们有：

$$(Bd)_i = \sum_{k\neq i} d(i,k).$$

由于上式右侧出现的这类求和在下文的公式中频繁出现，我们将其称为第 s_i 个 i顶点的星形迹 $i \in V_n$，即

$$s_i = \sum_{k\neq i} d(i,k). \tag{15}$$

星形迹是从第 i 个顶点到所有其他顶点 $k \in V_n - \{i\}$ 的距离之和。注意，$(Bd)_i = s_i$，并且 Tr(d) $= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} s_i$。接下来，我们利用 (9) 计算 $(BB^\tau)^{-1}(Bd)_i$，由此可得

$$(BB^\tau)^{-1} = \frac{1}{n-2}I_n - \frac{1}{2(n-1)(n-2)}J_n.$$

Thus

$$\begin{aligned} (BB^\tau)^{-1}(Bd) &= \left(\frac{1}{n-2}I_n - \frac{1}{2(n-1)(n-2)}J_n\right)(Bd), \\ &= \frac{1}{n-2}(Bd) - \frac{1}{2(n-1)(n-2)}J_n(Bd), \\ &= \frac{1}{n-2}(Bd) - \frac{1}{2(n-1)(n-2)}\left(\sum_{i=1}^{n} s_i\right)\mathbf{1}_n, \\ &= \frac{1}{n-2}(Bd) - \frac{1}{(n-1)(n-2)}\mathrm{Tr}(d)\mathbf{1}_n. \end{aligned}$$

最后，我们将 B^τ 应用于两边，并再次利用 (9)：

$$\begin{aligned}
P_{\mathrm{Col}}(d) &= B^\tau(BB^\tau)^{-1}(Bd),\\
&= \frac{1}{n-2}(B^\tau B)d - \frac{1}{(n-1)(n-2)}\mathrm{Tr}(d)B^\tau\mathbf{1}_n,\\
&= \frac{1}{n-2}(2I_{\binom{n}{2}} + A)d - \frac{1}{(n-1)(n-2)}\mathrm{Tr}(d)B^\tau\mathbf{1}_n,\\
&= \frac{2}{n-2}d + \frac{1}{n-2}(Ad) - \frac{1}{(n-1)(n-2)}\mathrm{Tr}(d)(B^\tau\mathbf{1}_n).
\end{aligned}$$

对应于数对 $\{i,j\}$ 的右端坐标不难计算。我们用记号 $A_{\{i,j\}}$ 表示与数对 $\{i,j\}$ 对应的 A 的行：

$$\begin{aligned}
(P_{\mathrm{Col}}(d))_{\{i,j\}} &= \frac{2}{n-2}d(i,j) + \frac{1}{n-2}(Ad)_{\{i,j\}} - \frac{\mathrm{Tr}(d)}{(n-1)(n-2)}(B^\tau\mathbf{1}_n)_{\{i,j\}},\\
&= \frac{2}{n-2}d(i,j) + \frac{1}{n-2}A_{\{i,j\}}\cdot d - \frac{\mathrm{Tr}(d)}{(n-1)(n-2)}(B^\tau)_{\{i,j\}}\mathbf{1}_n),\\
&= \frac{2}{n-2}d(i,j) + \frac{1}{n-2}\left(\sum_{k\neq i,j}\delta_{\{i,k\}} + \sum_{k\neq i,j}\delta_{\{j,k\}}\right)\cdot d - \frac{2\,\mathrm{Tr}(d)}{(n-1)(n-2)},\\
&= \frac{2}{n-2}d(i,j) + \frac{1}{n-2}\left(\sum_{k\neq i,j}d(i,k) + \sum_{k\neq i,j}d(j,k)\right) - \frac{2\,\mathrm{Tr}(d)}{(n-1)(n-2)},\\
&= \frac{1}{n-2}\left(\sum_{k\neq i}d(i,k) + \sum_{k\neq j}d(j,k)\right) - \frac{2\,\mathrm{Tr}(d)}{(n-1)(n-2)},\\
&= \frac{1}{n-2}\left(s_i + s_j\right) - \frac{2\,\mathrm{Tr}(d)}{(n-1)(n-2)}.
\end{aligned}$$

上述计算证明了该定理的大部分内容：

定理 3.5. 假设 $n \geq 5$，并令 w_{sq} 为系统 (8) 的唯一解，其中该系统由 $S_{sq}\cdot w_{sq} = d$ 给出。那么，w_{sq} 的第 $\{i,j\}$ 个坐标为

$$(w_{sq})_{\{i,j\}} = -\frac{1}{2}d(i,j) - \frac{1}{(n-2)(n-4)}\,Tr(d) + \frac{1}{2(n-4)}\left(s_i + s_j\right),$$

其中 $\boldsymbol{Tr}(d)$ 和 s_i 如(14)及(15)所示。

证明。 定理之前的计算证明了

$$w_{sq} = -\frac{1}{2}d - \frac{1}{(n-1)(n-2)(n-4)}\mathrm{Tr}(d)\mathbf{1}_{\binom{n}{2}} + \frac{n-2}{2(n-4)}P_{Col}(d),$$

由此我们可以计算出 w_{sq} 的第 $\{i,j\}$ 个坐标:

$$\begin{aligned}
(w_{sq})_{\{i,j\}} &= -\frac{1}{2}d(i,j) - \frac{1}{(n-1)(n-2)(n-4)}\mathrm{Tr}(d) + \frac{n-2}{2(n-4)}(P_{\mathrm{Col}}\, d)_{\{i,j\}}, \\
&= -\frac{1}{2}d(i,j) - \frac{1}{(n-1)(n-2)(n-4)}\mathrm{Tr}(d) \\
&\quad + \frac{n-2}{2(n-4)}\left(\frac{1}{n-2}\left(\sum_{k\neq i} d(i,k) + \sum_{k\neq j} d(j,k)\right) - \frac{2}{(n-1)(n-2)}\mathrm{Tr}(d)\right), \\
&= -\frac{1}{2}d(i,j) - \frac{1}{(n-2)(n-4)}\mathrm{Tr}(d) + \frac{1}{2(n-4)}\left(\sum_{k\neq i} d(i,k) + \sum_{k\neq j} d(j,k)\right), \\
&= -\frac{1}{2}d(i,j) - \frac{1}{(n-2)(n-4)}\mathrm{Tr}(d) + \frac{1}{2(n-4)}\left(\sum_{k\neq i} d(i,k) + \sum_{k\neq j} d(j,k)\right), \\
&= -\frac{1}{2}d(i,j) - \frac{1}{(n-2)(n-4)}\mathrm{Tr}(d) + \frac{1}{2(n-4)}\left(s_i + s_j\right).
\end{aligned}$$

这证明了该定理。 □

以下是引言中定理 1.1 的重述，供读者参考。它完整地回答了问题 3。

定理 3.6。 度量 d *on* V_n 满足 $n \geq 5$，当且仅当每个 $\binom{n}{2}$不等式均成立时，它属于对割锥 $PCUT_n$:

$$s_i + s_j \geq (n-4)d(i,j) + \frac{2}{n-2}\,Tr(d). \tag{16}$$

这些不等式由各对 $\{i,j\} \subset V_n$ 枚举，且是最优的（见例 *3.8*）。

证明。 由定理 3.5 可知，$(w_{sq})_{\{i,j\}} \geq 0$ 当且仅当

$$\begin{aligned}
0 &\leq -\frac{1}{2}d(i,j) - \frac{1}{(n-2)(n-4)}\mathrm{Tr}(d) + \frac{1}{2(n-4)}\left(s_i + s_j\right), \\
\frac{1}{2}d(i,j) &\leq \frac{1}{2(n-4)}\left(s_i + s_j\right) - \frac{1}{(n-2)(n-4)}\mathrm{Tr}(d), \\
(n-4)d(i,j) &\leq (s_i + s_j) - \frac{2\mathrm{Tr}(d)}{(n-2)}.
\end{aligned}$$

至此，证明完成。 □

推论 3.7. 如果 d 上的度量 V_n 满足 $n \geq 5$ 且属于对割锥 $PCUT_n$，那么

$$(n-2)s_i \geq\ Tr(d), \quad \textit{for all } i \in V_n. \tag{17}$$

证明。 这个推论可由前一个定理对所有指标 $j \neq i$ 求和得到:

$$\begin{aligned}
\sum_{j\neq i} s_i + \sum_{j\neq i} s_j &\geq (n-4)\sum_{j\neq i} d(i,j) + \frac{2(n-1)}{n-2}\mathrm{Tr}(d),\\
(n-1)s_i + \sum_{j\neq i}\sum_{k\neq j} d(j,k) &\geq (n-4)s_i + \frac{2(n-1)}{n-2}\mathrm{Tr}(d),\\
(n-1)s_i + \sum_{a\neq b} d(a,b) - \sum_{k\neq i} d(i,k) &\geq (n-4)s_i + \frac{2(n-1)}{n-2}\mathrm{Tr}(d),\\
(n-1)s_i + 2\mathrm{Tr}(d) - s_i &\geq (n-4)s_i + \frac{2(n-1)}{n-2}\mathrm{Tr}(d),\\
(n-2)s_i + 2\mathrm{Tr}(d) &\geq (n-4)s_i + \frac{2(n-1)}{n-2}\mathrm{Tr}(d),\\
2s_i &\geq \frac{2n-2-2n+4}{n-2}\mathrm{Tr}(d),\\
(n-2)s_i &\geq \mathrm{Tr}(d).
\end{aligned}$$

□

例 3.8. 考虑 $d = \delta_{\{p,q\}}$ 在 V_n, $n \geq 5$ 上的情形，显然它属于对割锥 $PCUT_n$。我们仅将其用作示例，以比较不等式 (16) 的两边。具体而言， d 由以下内容描述:

$$d(i,j) = \begin{cases} 1 & ; \quad |\{i,j\} \cap \{p,q\}| = 1, \\ 0 & ; \quad |\{i,j\} \cap \{p,q\}| \neq 1. \end{cases}$$

由此可得 $\mathrm{Tr}(d) = 2(n-2)$，并且

$$s_i = \begin{cases} 2 & ; \quad i \notin \{p,q\}, \\ n-2 & ; \quad i \in \{p,q\}. \end{cases}$$

于是，不等式 (16) 可写为

$$s_i + s_j \geq (n-4)d(i,j) + \frac{2}{n-2}\mathrm{Tr}(d) = (n-4)d(i,j) + 4.$$

对于 i,j 相对于 p,q 的各种取值，后一不等式变为:

$$\begin{aligned}
2+2-[0+4] = 0 \quad &; \quad |\{i,j\} \cap \{p,q\}| = 0,\\
2+(n-2)-[(n-4)+4] = 0 \quad &; \quad |\{i,j\} \cap \{p,q\}| = 1,\\
(n-2)+(n-2)-[0+4] > 0 \quad &; \quad |\{i,j\} \cap \{p,q\}| = 2.
\end{aligned}$$

在大多数情况下，不等式会取等号，这正是定理 3.6 的陈述中“这些不等式是最佳可能的”这句话所要表达的意思。此例中的不等式 (17) 为 $2(n-2) \geq 2(n-2)$ 和 $(n-1)(n-2) \geq 2(n-2)$，这也表明了此情形下的紧性。

3.6. 例子与应用。 本节致力于定理 3.6 的应用。我们考察若干著名的图族，它们配备截断度量 d_0 或图度量 d_1 （参见例 1.4），并探讨它们在何种条件下（如果存在这样的条件）属于对割锥 $PCUT_n$。对于不属于 $PCUT_n$ 的那些度量，我们将简述关于它们是否属于 CUT_n 的已知结果，以作比较。定理 3.6 的所有应用都需要计算度量的迹 $\mathrm{Tr}(d)$，以及星迹 s_i、 $i \in V_n$。我们将在每个例子中进行这些计算，而不再进一步说明它们的用途。计算出这些量后，我们将检验不等式 (16) 是否成立。回顾一下，这些不等式为

$$(n-2)(s_i+s_j) \geq (n-4)(n-2)d(i,j) + 2\,Tr(d), \quad \text{for all } \{i,j\} \subset V_n. \tag{18}$$

还要注意，定理 3.6 要求 $n \geq 5$。

例 3.9（完全图 $\mathbf{K_n}$）。 对于 $n \in \mathbb{N}$，令 K_n 表示顶点按 $V_n = \{1, \ldots, n\}$ 编号的 n 阶完全图。对于此例，截断度量与图度量相同，我们用 d 表示其中任意一个。每个距离 $d(i,\ j)$ 都等于 1。因此

(i) $\mathrm{Tr}(d) = \binom{n}{2}$。(ii) 对所有 $i \in V_n$，$s_i = n-1$。

因此，不等式 (16) 及其化简形式变为：

$$\begin{aligned} 2(n-2)(n-1) &\geq (n-4)(n-2) + 2\cdot\tbinom{n}{2}, \\ 2n^2 - 6n + 4 &\geq (n^2 - 6n + 8) + (n^2 - n), \\ 2n^2 - 6n + 4 &\geq 2n^2 - 7n + 8. \end{aligned}$$

关于 d 的结论。 完全图 K_n 上的图度量 d （其中 $n \geq 5$）属于对割锥 $PCUT_n$。

例 3.10（正则图与圈）。 一个 k 度正则图$R_{n,\ k}$ 包含 n 个顶点，是指每个顶点的度均为 k 的图。n 和 k 的取值并不总能完全确定图 $R_{n,\ k}$，但为使记号简洁，我们仍采用这种写法。假设$2 \leq k$，并注意到 $k \leq n-1$。若 $k = n-1$，则可得到前一个例子中的完全图。因此，在本例余下部分中，我们假设 $k < n-1$。我们只考虑截断度量 d_0，因为图度量 d_1 取决于具体的 k度正则图。对于 d_0，我们得到：

(i) $s_i = k + 2(n-1-k) = 2n-k-2$ for all $i \in V_n$.
(ii) $\mathrm{Tr}(d_0) = \frac{1}{2}n(k + 2(n-1-k)) = \frac{1}{2}n(2n-k-2)$.

转向不等式（16）及其简化形式，我们先考虑一对不共享边的顶点 $i,\ j \in V_n$，使得 $d_0(i,\ j) = 2$：

$$\begin{aligned} (n-2)(4n-2k-4) &\geq (n-4)(n-2)2 + 2\cdot\tfrac{1}{2}n(2n-k-2), \\ 4n^2 - 12n - 2kn + 4k + 8 &\geq (2n^2 - 12n + 16) + (2n^2 - kn - 2n), \\ 4n^2 - 12n - 2kn + 4k + 8 &\geq 4n^2 - 14n - kn + 16, \\ 2n + 4k &\geq nk + 8. \end{aligned}$$

后一个不等式对 $k=2$ 成立，此时它成为等式。然而，如果 $k \geq 3$和 $n \geq 5$，该不等式不成立。正则图 $C_n := R_{n,\,2}$ 被称为圈，并且由 n 唯一确定。我们仍需对共享一条边的一对顶点考虑（16）：

$$\begin{aligned}(n-2)(4n-2k-4) &\geq (n-4)(n-2)+2\cdot\tfrac{1}{2}n(2n-k-2),\\ 4n^2-12n-2kn+4k+8 &\geq (n^2-6n+8)+(2n^2-kn-2n),\\ 4n^2-12n-2kn+4k+8 &\geq 3n^2-8n-kn+8,\\ n^2+4k &\geq 4n+kn\end{aligned}$$

由于根据前一个不等式，我们已经限定在 $k=2$ 的情形，因此后一个不等式变为 $n^2+8\geq 6n$，它对所有 $n\geq 4$ 都成立。

关于 d 的结论$_0$. </style}在正则图 ,k 中，满足 $2\leq k\leq n-2$ 且满足$n\geq 5$的图里，只有 $k=2$ 情形下的截断度量属于对割锥。由此可得，$n\geq 5$ 时，圈 C_n 上的 d_0 属于 $PCUT_n$。

我们尚未发现有关截断度量 d_0 在 k-正则图上的研究，尤其是关于它是否属于割锥 CUT_n 的研究。

例 3.11（**鸡尾酒会图 CP$_n$**). *</style}*鸡尾酒会图由完全图 删除与一个完美匹配对应的边得到。记号 并不完整；为求简便，我们省略了完美匹配，希望这不会造成混淆。所有鸡尾酒会图都是 ,$_{2n-2}$ 型的正则图，因此前例适用，可得：

关于 d 的结论$_0$。*</style}*对于 $n\geq 3$，鸡尾酒会图 CP_n 上的截断度量 d_0 不属于 $PCUT_n$。

相反，对于所有 $n\geq 2$ 和所有完美匹配，截断度量 d_0 属于 CUT_{2n} 。为此，假设 V_{2n} 被划分为 n 个互不相交的配对 P_1、.....、P_n，它们对应于 V_{2n} 上的某个完美匹配。考虑由以下元素构成的族 $\mathcal{T}$： V_{2n} 的横截切</style}

$$\mathcal{T}=\{C\subset V_{2n}\,|\,|C\cap P_i|=1 \text{ for all } i=1,\dots,n\}.$$

2^n 个横截切 C 各由 n 个元素组成，每个配对 P_1、.....、P_n 中各取一个。因此，若对于某个 i 有 $\{x,y\}=P_i$，则对每个 $C\in\mathcal{T}$，$=1(x,y)$，于是 $\sum_{C\in\mathcal{T}}\delta_C(x,y)$ $=2^n$。若 $\{x,y\}$ 不是一对匹配项，则有 2^{n-2} 个横截切包含 x 但不包含 y，也有同样多的横截切包含 y 但不包含 x。这 2^{n-1} 个横截切所对应的割度量 δ_C 给出 $\delta_C(x,y)=1$，而其余的 2^{n-1} 个横截切各自给出 $\delta_D(x,y)=0$。因此 $\sum_{C\in\mathcal{T}}\delta_C(x,y)=2^{n-1}$。由此可得

$$d_0=\frac{1}{2^{n-1}}\sum_{C\in\mathcal{T}}\delta_C,$$

因此 $d_0\in CUT_{2n}$。

对 CP_n 上图度量 d_1 的分析取决于具体的图。这里我们考虑一个简单示例，其中 V_{2n} 上的完美匹配由以下

各对 $P_i = \{i, i+n\}$、 $i = 1$、.....、 n 给出。于是，对所有 $i = 1$、.....、 n 以及所有 $j \neq i$，均有

$$d_1(i,j) = \begin{cases} 1 & ; \quad j \neq i+n, \\ 2 & ; \quad j = i+n, \end{cases}$$

由此可得

(i) $s_i = 2 + \binom{2n}{2} - 2 = \binom{2n}{2} = n(2n-1)$ for all $i \in V_n$.
(ii) $\mathrm{Tr}(d_1) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2n} s_i = \frac{1}{2} \cdot (2n) \cdot \binom{2n}{2} = n^2(2n-1)$.

因此，对于所有成对的 $\{i,j\}$， $s_i + s_j = 4n^2 - 2n$。首先考虑顶点对 i 和 $i+n$ 的不等式 (16)，得到:

$$\begin{aligned} (2n-2)(4n^2-2n) &\geq (2n-2)(2n-4)2 + 2n^2(2n-1), \\ 8n^3 - 12n^2 + 4n &\geq (8n^2 - 24n + 16) + (4n^3 - 2n^2), \\ 8n^3 - 12n^2 + 4n &\geq 4n^3 + 6n^2 - 24n + 16, \\ 4n^3 + 28n &\geq 18n^2 + 16, \end{aligned}$$

对所有 $n \geq 2$ 均成立。类似地，对于顶点对 i， j，其中 $j \neq i+n$，可得此不等式 $4n^3 + 16n \geq 14n^2 + 8$，它对 $n \geq 2$ 也成立。

关于 d 的结论$_1$。 对于与完美匹配 $i \to i+n$ 对应的鸡尾酒会图 CP_n （ $i = 1$，.....， n），其图度量 d_1 对所有 $n \geq 3$ 均属于 $PCUT_n$。

前述例子具有特殊性：星迹 s_i 与顶点 i 无关。更一般地，假设我们有一个具有此性质的度量空间 (V_n, d)，并令 s 表示任意选取 i 时的星迹 s_i。那么度量的迹为 $\mathrm{Tr}(\underline{d}) = \frac{1}{2}ns$。于是，不等式 (16) 变为:

$$\begin{aligned} (n-2)2s &\geq (n-2)(n-4)d(i,j) + 2 \cdot \tfrac{1}{2}ns, \\ 2ns - 4s &\geq (n-2)(n-4)d(i,j) + ns, \\ s(n-4) &\geq (n-2)(n-4)d(i,j), \\ \frac{s}{n-2} &\geq d(i,j). \end{aligned}$$

这证明了以下命题。

命题 3.12. 设 d 是定义在 V_n 上的度量，且 s_i 与 $i \in V_n$的取值无关，并设 $s = s_i$。那么 $d \in PCUT_n$ 当且仅当

$$d(i,j) \leq \frac{s}{n-2}, \qquad \textit{for all pairs } \{i,j\} \subset V_n.$$

例 3.13 **(超立方体图 Q_n)。** 当 $n \geq 2$ 时，超立方体图 Q_n 是超立方体 $[0,1]^n \subset \mathbb{R}^n$ 的 1-骨架。两个顶点相邻，当且仅当它们的坐标恰有一项不同。超立方体图是$R_{2^n,\ n}$ 正则图的例子，因此例 3.10 适用。由于定理 3.6 要求图至少有 5 个顶点，对于 Q_n，这意味着我们要求 $n \geq 3$。

关于 d 的结论$_0$。 超立方体图 Q_n 上的截断度量 d_0 对于任意 $n \geq 3$ 都不属于对割锥。

众所周知， Q_n 上的截断度量 d_0 仅在 $n=1$，2 时属于割锥。对于 $n\geq 3$，五边形超度量不等式排除了这种可能性（例如，将该不等式应用于顶点 $A=$(0，0，0，.....)、$B=$(0，1，1，.....)、$C=$(0，0，1，.....)、$D=$(0，1，0，.....)和 $E=$(1，0，0，.....)，其中省略号表示所有坐标均为零）。

接下来考虑 d_1 上的图度量 Q_n。对于给定顶点，它到超立方体中任意其他顶点的距离，等于两者坐标不同的位置数。对于给定的 $k\in\{0,1,\ldots,n\}$，存在 $\binom{n}{k}$ 个顶点与给定顶点在 k 个坐标上不同，因此任意顶点的星迹 x 为

$$s_x=\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}=n\,2^{n-1}.$$

我们看到，星迹与顶点无关，因此可以使用命题 3.12，促使我们考察以下不等式：

$$d(i,j)\leq\frac{s}{2^n-2}=\frac{n\,2^{n-1}}{2(2^{n-1}-1)}.$$

(0，.....，0) 与 (1，.....，1) 之间的距离等于 n，并且表示任意一对顶点之间的最大距离。因此，我们需要满足以下不等式：

$$\begin{aligned}n&\leq\frac{n\,2^{n-1}}{2(2^{n-1}-1)},\\2^n&\leq 2^{n-1}+2.\end{aligned}$$

该不等式仅在 $n=1$，2 时成立。

关于 d 的结论$_1$ 超立方体图 Q_n 上的图度量 d_1 对任意 $n\geq 3$都不属于对割锥。

相比之下， Q_n 上的图度量 d_1 对所有 $n\geq 1$ 都属于割锥 CUT_{2^n}，因为d_1 与限制在 Q_n上的 ℓ_1-度量 $\mathbb{R}^n$ 重合。

例 3.14（**完全二部图** $B_{m,\ n}$）。完全二部图$B_{m,\ n}$, m，$n\geq 1$由两组顶点构成，分别为 x_1，.....，x_n和 y_1，.....，y_m；其中一组中的每个顶点都与另一组中的每个顶点通过一条边相连，而同一组中的任意两个顶点之间都没有边。对于此例，截断度量与图度量相等，我们将它们记作 d。我们先计算迹和星迹，后者分别记作 $s(x_i)$和 $s(y_j)$，其含义显而易见。

(i) $\mathrm{Tr}(d)=mn+n(n-1)+m(m-1)$。
(ii) 对所有 $i=1,\ldots n$，$s(x_i)=m+2(n-1)$。
$s(y_j)$ 对所有 $j=1,\ldots m$，$=n+2(m-1)$。

转向不等式（16），我们首先计算左边 t.

$$\begin{aligned}\text{LHS of (18)} = (n+m-2)(s(x_{i_1})+s(x_{i_2})) &= (n+m-2)(2m+4n-4)\\ &= 4n^2+2m^2+6mn-12n-8m+8,\\ (n+m-2)(s(y_{j_1})+s(y_{j_2})) &= (n+m-2)(4m+2n-4)\\ &= 2n^2+4m^2+6mn-12m-8n+8,\\ (n+m-2)(s(x_i)+s(y_j)) &= (n+m-2)(3m+3n-4)\\ &= 3n^2+3m^2+6mn-10m-10n+8.\end{aligned}$$

接下来，为了计算 (18) 的右侧，我们区分顶点之间是否有边相连的情形。将顶点之间没有边相连的情形称为情形 *1*（此时顶点之间的距离为 2），将顶点之间有边相连的情形称为情形 *2*（此时它们之间的距离为 1）。于是，(18) 的右侧变为：

$$\begin{aligned}\text{RHS of (18), Case 1} &= 2(m+n-4)(m+n-2)+2mn+2n^2-2n+2m^2-2m\\ &= 4m^2+4n^2+6mn-14m-14n+16,\\ \text{RHS of (18), Case 2} &= (m+n-4)(m+n-2)+2mn+2n^2-2n+2m^2-2m\\ &= 3m^2+3n^2+4mn-8m-8n+8\end{aligned}$$

在情形 1 中，不等式 (18) 可写为以下形式之一：

$$4n^2+2m^2+6mn-12n-8m+8 \geq 4m^2+4n^2+6mn-14m-14n+16, \quad \text{or,}$$
$$2n^2+4m^2+6mn-12m-8n+8 \geq 4m^2+4n^2+6mn-14m-14n+16$$

化简得

$$\begin{aligned}n+3m &\geq m^2+4,\\ m+3n &\geq n^2+4.\end{aligned}$$

由于两个不等式都必须成立，将它们相加可得 $0 \geq (m-2)^2+(n-2)^2$，进而得到 $m=n=2$。情形 2 对应的不等式为

$$3n^2+3m^2+6mn-10m-10n+8 \geq 3m^2+3n^2+4mn-8m-8n+8$$

化简得

$$\begin{aligned}mn-m-n &\geq 0\\ (m-1)(n-1) &\geq 1.\end{aligned}$$

当 $m,n \geq 2$ 时，该不等式成立。总之：

d 的结论。对于满足 $m+n \geq 5$ 的完全二部图 $B_{m,n}$，截断度量和图度量均不属于 $PCUT_{m+n}$。

已知 $B_{2,2}$ 和 $B_{1,n}$, $n \geq 1$ 上的图度量都属于割锥。注意，$B_{1,n}$ 是星图 $S(n)$，我们将在定理 4.2 的证明中分析它。

例 3.15（**线性图** L_n）。线性图 L_n 指的是一个闭线段，其端点是一对顶点，并且还包含 $n-2$ 个作为顶点的内部点。必然有 $n \geq 2$。不失一般性，我们假设该线段为 $[1,n] \subset \mathbb{R}$，其中顶点是该线段上的整数。那么，L_n 上的图度量 d_1 就是 $\mathbb{R}$ 上的 ℓ_1- 度量，即 $d_1(i,j) = |i-j|$，因此显然对于所有 $n \geq 2$，都有 $d_1 \in CUT_n$。由此，我们可以计算任意顶点的 d_1 的星迹。若 $2i \leq n$，则

$$\begin{aligned} s_i &= 2\sum_{j=1}^{i-1} j + \sum_{j=2i}^{n}(j-i), \\ &= i(i-1) + \sum_{j=0}^{n-2i}(j+i), \\ &= i(i-1) + (n-2i+1)i + \tfrac{1}{2}(n-2i+1)(n-2i), \\ &= i^2 - i(n+1) + \tfrac{1}{2}n(n+1), \qquad 2i \leq n. \end{aligned}$$

如果 $2i > n$ 那么由对称性可得 $s_i = s_{n-i+1}$，其中 $2(n-i+1) \leq n+1$，从而得到

$$s_i = (n-i+1)^2 - (n-i+1)(n+1) + \tfrac{1}{2}n(n+1) = i^2 - i(n+1) + \tfrac{1}{2}n(n+1),\ 2i > n.$$

剩下的情形 $2i = n+1$ 比较特殊，结果为 $s_i = i^2 - i$。感兴趣的读者可以再次验证，这与其他情形得到的公式一致。综上

$$s_i = i^2 - i(n+1) + \tfrac{1}{2}n(n+1), \qquad \text{for all } i \in V_n.$$

由此可轻易得到 d_1 的迹：

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}(d_1) &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} s_i, \\ &= \tfrac{1}{2}\left(\textstyle\sum_{i=1}^{n} i^2 - (n+1)\sum_{i=1}^{n} i + \tfrac{1}{2}n^2(n+1)\right), \\ &= \tfrac{1}{12}n(n+1)(2n+1) - \tfrac{1}{4}n(n+1)^2 + \tfrac{1}{4}n^2(n+1), \\ &= \tfrac{1}{6}(n^3 - n). \end{aligned}$$

对于一对顶点 $1 \leq i < j \leq n$，不等式 (16) 变为：

$$(n-2)(i^2+j^2-(i+j)(n+1)+n(n+1)) \geq (n-2)(n-4)(j-i) + \tfrac{2}{6}(n^3-n).$$

这些不等式必须对 $1 \leq i < j \leq n$ 的所有取值都成立。取 $i=1$ 和 $j=n$ 可得

$$\begin{aligned} (n-2)(1+n^2-(1+n)(n+1)+n(n+1)) &\geq (n-2)(n-4)(n-1) + \tfrac{2}{6}(n^3-n), \\ n^3 - 3n^2 + 2n &\geq \tfrac{4}{3}n^3 - 7n^2 + \tfrac{41}{3}n - 8, \\ 4n^2 + 8 &\geq \tfrac{1}{3}n^3 - 7n^2 + \tfrac{35}{3}n, \end{aligned}$$

这对所有 $n \geq 9$ 都不成立。

d 的结论$_1$。设 d_1 为线性图 L_n上的图度量。那么，对于任意$n \geq 9$、$d_1 \notin PCUT_n$，但对于所有 $n \geq 2$，$d_1 \in CUT_n$。

接下来考虑截断度量 d_0，并假设 $n \geq 2$，我们得到

$$s_i = \begin{cases} 2n-3 & ; \quad i = 1, n, \\ 2n-4 & ; \quad i = 2, \ldots, n-1 \text{ and } n \geq 3. \end{cases}$$

由此可以很容易地求出截断度量的迹：

$$\mathrm{Tr}(d_0) = \begin{cases} 1 & ; \quad n = 2, \\ (n-1)^2 & ; \quad n \geq 3. \end{cases}$$

较小的星迹出现在“内部”顶点上，即不等于 1 和 n 的顶点，因此我们首先考虑它们对应的、带有 $n \geq 4$ 的不等式 (16)。当我们考虑一对内部顶点时，右端最小；而当这些顶点不共享一条边时，右端最大。若要存在两个这样的顶点，则要求 $n \geq 5$。在此情形下，(16) 变为：

$$\begin{aligned} (n-2)(4n-8) &\geq 2(n-2)(n-4) + 2(n-1)^2 \\ 4n^2 - 16n + 16 &\geq 4n^2 - 16n + 18 \\ 0 &\geq 2, \end{aligned}$$

这显然不成立。

关于 d 的结论$_0$。 线性图上的截断度量 d_0 对于任意 $n \geq 5$都不属于 $PCUT_n$。

另一方面，对于所有 $n \geq 2$， d_0 都属于割锥 CUT_n，如以下分解所示：

$$d_0 = \frac{1}{2}\left(\delta_{\{1\}} + \left(\sum_{i=1}^{n-1} \delta_{\{i,i+1\}}\right) + \delta_{\{n\}}\right) \in CUT_n.$$

特别是， $d_0 - \frac{1}{2}\delta_{\{1\}} - \frac{1}{2}\delta_{\{n\}} \in PCUT_n$。

4. Simple graphs with no SIG metric in $PCUT_n$

特别地，我们回到简单图 $G = (V_n, E)$ 和问题2，该问题询问 G 何时拥有一个位于 $PCUT_n$ 中的 SIG-度量 d。这个问题需要双管齐下：首先，在 V_n 上选取一个 SIG-度量 d；其次，借助定理 3.6 检验 $d \in PCUT_n$ 是否成立。这个过程之所以复杂，是因为典型的图G 拥有无穷多个 SIG-度量；正如我们接下来将展示的，其中一些可能属于 $PCUT_n$，另一些则可能不属于。

4.1. 不同 SIG-度量的可嵌入性。 给定一个简单图 G，自然会想知道，对于 G 的某个 SIG-度量而言，属于 $PCUT_n$ 这一性质是否为 G 的所有 SIG-度量所共有。换句话说，如果 G 的一个 SIG-度量属于 $PCUT_n$，那么它们是否都属于？遗憾的是，答案是否定的，这使问题2变得更加复杂。

例 4.1. 考虑图4中的图 $G = (V_7, E)$。我们将考虑 G 上的两个SIG-度量 d_0 和 d_1，分别为截断度量和图度量（参见例 1.4）。首先考虑截断度量 d_0，我们得到：

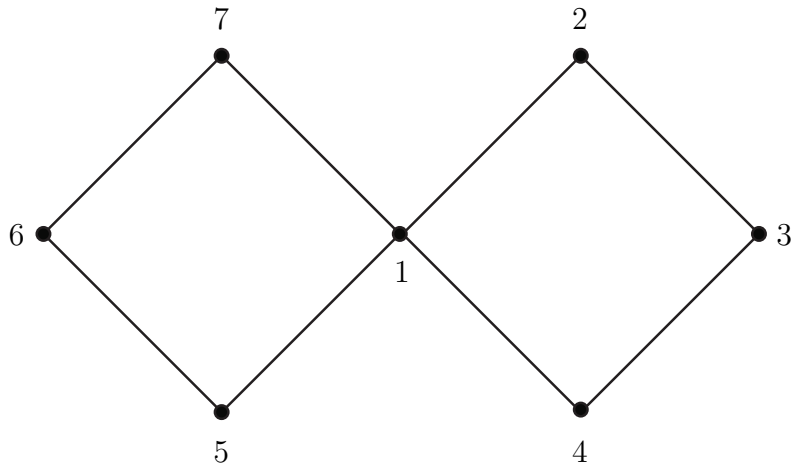


FIGURE 4. 一个有 7 个顶点的图。

$$\mathrm{Tr}(d_0) = 8 \cdot 1 + 13 \cdot 2 = 34, \quad s_1 = 8, \quad s_i = 10, i = 2, \ldots, 7.$$

我们发现，对于配对 $\{i, j\} = \{1, 3\}, \{1, 6\}$，不等式 (16) 不成立：

$$18 = 8 + 10 = s_1 + s_j \geq (7-4)d(1,j) + \frac{2}{7-2}\mathrm{Tr}(d_0) = 19\tfrac{3}{5}, \quad i = 1, j = 3, 6,$$

表明 $d_0 \notin PCUT_7$。接下来，我们对图度量 d_1进行相同的计算，其取值如下：

$$\begin{array}{lllllll} d(1,2)=1, & d(1,3)=2, & d(1,4)=1, & d(1,5)=1, & d(1,6)=2, & d(1,7)=1, \\ d(2,3)=1, & d(2,4)=2, & d(2,5)=2, & d(2,6)=3, & d(2,7)=2, & & \\ d(3,4)=1, & d(3,5)=3, & d(3,6)=4, & d(3,7)=3, & & & \\ d(4,5)=2, & d(4,6)=3, & d(4,7)=2, & & & & \\ d(5,6)=1, & d(5,7)=2, & & & & & \\ d(6,7)=1, & & & & & & \end{array}$$

我们看到，$\mathrm{Tr}(d_1) = 40$ 并且

$$s_1 = 8, \quad s_2 = s_4 = s_5 = s_7 = 11, \quad s_3 = s_6 = 14.$$

对所有成对的 $\{i, j\}$ 都必须满足的不等式为

$$s_i + s_j \geq 3 \cdot d(i,j) + 16.$$

不难验证，所有 21 个不等式都成立：

$$\begin{aligned} &19 = s_1 + s_j \geq 3 + 16 = 19, && j = 2, 4, 5, 7, \\ &22 = s_1 + s_j \geq 6 + 16 = 22, && j = 3, 6, \\ &22 = s_i + s_j \geq 6 + 16 = 22, && i \neq j,\ i, j \in \{2, 4, 5, 7\}, \\ &25 = s_i + s_j \geq 3 + 16 = 19, && \{i, j\} = \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{6, 7\}, \{5, 6\}, \\ &25 = s_i + s_j \geq 9 + 16 = 25, && \{i, j\} = \{2, 6\}, \{4, 6\}, \{3, 5\}, \{3, 7\}, \\ &28 = s_3 + s_6 \geq 12 + 16 = 28. \end{aligned}$$

由此可得 $d_1 \in PCUT_7$。

总之，图4中的图 G 具有两个 SIG-度量 d_0 和 d_1，其中$d_0 \notin PCUT_7$且 $d_1 \in PCUT_7$。

以下是引言中定理 1.5 的另一种表述。

定理 4.2. 对于任意 $n \geq 5$，都存在连通简单图，使得没有 SIG-度量属于对割锥 $PCUT_n$。

证明。 通过给出一个具有所述性质的图的例子，即可证明该定理。考虑图5中的星图 $S(n)$，其中 $n \geq 4$。我们将中心顶点标记为 0，并用 $V_n = \{1, \ldots, n\}$ 中的元素标记外围顶点。

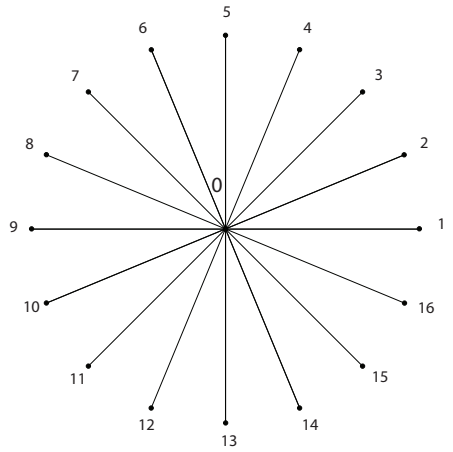


FIGURE 5. 此处所示的星图 $S(n)$，其中 $n = 16$。中心顶点标记为 0，外围顶点则用 $V_{16} = \{1, \ldots, 16\}$ 中的元素编号。

令 d 为 $W_n = \{0, 1, \ldots, n\} = \{0\} \cup V_n$ 上的一个 SIG-度量，并令 $a_i = d(0, i)$。由于每个顶点 $i \in V_n$ 的度均为 1，因此对于所有 $i \in V_n$，都有 $r_i = a_i$。根据 $S(n)$ 固有的对称性，不失一般性，我们可以假设

$$a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n. \tag{19}$$

因此 $r_0 = a_1$。由于 d 是 SIG度量，适用于 G，且任意两个顶点 $i, j \in V_n$之间都没有边，由三角不等式和 aSIG-不等式 (5) 可得

$$a_i + a_j \leq d(i, j) \leq a_i + a_j, \qquad \{i, j\} \subset V_n.$$

相应地，对于 $\{i, j\} \subset V_n$，$d(i, j) = a_i + a_j$。

接下来计算该度量的迹和星迹:

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}(d) &= \sum_{i=1}^{n} d(0,i) + \sum_{1\le i<j\le n} d(i,j),\\ &= \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right) + \left(\sum_{1\le i<j\le n} a_i + a_j\right),\\ &= \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right) + (n-1)\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right),\\ &= n\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right).\end{aligned}$$

令 $\alpha = \sum_{i=1}^{n} a_i$，使得 $\mathrm{Tr}(d) = n\cdot\alpha$。星迹也很容易计算:

$$s_0 = \sum_{i=1}^{n} d(0,i) = \sum_{i=1}^{n} a_i = \alpha,$$

$$\begin{aligned}s_i &= d(0,i) + \sum_{j\neq 0,i} d(i,j),\\ &= a_i + \sum_{j\neq 0,i} (a_i + a_j),\\ &= a_i + (n-1)a_i + \sum_{j\neq 0,i} a_j,\\ &= (n-1)a_i + \sum_{j=1}^{n} a_j,\\ &= (n-1)a_i + \alpha.\end{aligned}$$

现在考虑关于 s_0 和 s_1 的不等式 (16)，并记住 $S(n)$ 有 $n+1$ 个顶点:

$$\begin{aligned}s_0 + s_1 &\ge (n-3)\, d(0,1) + \frac{2}{n-1}\mathrm{Tr}(d),\\ \alpha + (n-1)a_1 + \alpha &\ge (n-3)\, a_1 + \frac{2}{n-1} n\alpha,\\ \alpha(2n-2) + a_1(2n-2) &\ge 2n\alpha,\\ (n-1)a_1 &\ge \alpha,\\ (n-1)a_1 &\ge a_1 + a_2 + \cdots + a_n \ge a_1 + a_1 + \cdots + a_1,\\ (n-1)a_1 &\ge n a_1.\end{aligned}$$

这是一个矛盾，因为 $a_1 = d(0,1) > 0$。由此可得 $d \notin PCUT_{n+1}$，又由于 d 是 $S(n)$ 的任意 SIG-度量，我们得出结论：对于任意度量 $d \in PCUT_{n+1}$，$S(n)$ 都不是 SIG-图，从而证明了该定理。□

5. The Full Cut Matrix

在确定度量 d在 V_n上何时属于对割锥 $PCUT_n$之后，我们转而讨论 d 何时属于割锥 CUT_n。在此，我们无法给出完整的刻画（请记住，完成这一任务是一个 NP 完全问题），但能够给出一组足以保证 $d \in CUT_n$的条件。为此，我们定义完整割矩阵 S，这是一个维数为 $\binom{n}{2} \times (2^n - 2)$ 的矩阵，其列由 V_n的非平凡割枚举，行由 V_n中的数对枚举。V_n 的非平凡割与 V_n 中的数对均按字典序排列。按照这一约定， S的第（k, ℓ）项为 $\delta_C(\{i, j\})$，其中 $\{i, j\}$ 是第 k个数对， C 是第 ℓ个割。

设 $m = \binom{n}{2}$。直接计算可得

$$S \cdot S^\tau = 2^{n-2}(I_m + J_m), \tag{20}$$

其中 J_m 如前所述，是一个所有元素均为 1 的 $m \times m$ 矩阵。事实上，$\binom{n}{2} \times \binom{n}{2}$ 矩阵 $S \cdot S^\tau$ 的行和列均以字典序排列的数对 $\{i, j\} \subset V_n$ 为索引。若 $\{i, j\}$ 和 $\{k, \ell\}$ 分别是第 p 个和第 q 个数对，则 $S \cdot S^\tau$ 的第（p， q）个元素为

$$(S \cdot S^\tau)_{p,q} = \sum_{C \subset V_n} \delta_C(i, j) \cdot \delta_C(k, \ell).$$

若 $\{i, j\} = \{k, \ell\}$，则

$$\begin{aligned}
(S \cdot S^\tau)_{p,p} &= \sum_{C \subset V_n} \delta_C(i, j), \\
&= \left(\textstyle\sum_{i \in C, j \notin C} 1\right) + \left(\textstyle\sum_{i \notin C, j \in C} 1\right), \\
&= 2^{n-2} + 2^{n-2}, \\
&= 2^{n-1}.
\end{aligned}$$

如果 $\{i, j\} \neq \{k, \ell\}$ 且 $|\{i, j\} \cap \{k, \ell\}| = 0$，那么我们得到

$$\begin{aligned}
(S \cdot S^\tau)_{p,q} &= \sum_{C \subset V_n} \delta_C(i, j)\delta_C(k, \ell), \\
&= \sum_{i,k \in C,\, j,\ell \notin C} 1 + \sum_{i,\ell \in C,\, j,k \notin C} 1 + \sum_{j,k \in C,\, i,\ell \notin C} 1 + \sum_{j,\ell \in C,\, i,k \notin C} 1, \\
&= 2^{n-4} + 2^{n-4} + 2^{n-4} + 2^{n-4}, \\
&= 2^{n-2}.
\end{aligned}$$

最后，如果 $\{i,j\} \neq \{k,\ell\}$ 但 $|\{i,j\} \cap \{k,\ell\}| = 1$，设 $i = k$，则

$$\begin{aligned}(S \cdot S^\tau)_{p,q} &= \sum_{C \subset V_n} \delta_C(i,j)\delta_C(i,\ell), \\ &= \sum_{i \in C,\, j,\ell \notin C} 1 + \sum_{j,\ell \in C,\, i \notin C} 1, \\ & 2^{n-3} + 2^{n-3}, \\ &= 2^{n-2}.\end{aligned}$$

这证明了等式 (20)。矩阵 $S \cdot S^\tau$ 可逆，这一点可以通过显式验证：

$$(SS^\tau)^{-1} = \frac{1}{2^{n-2}} \left(I_m - \frac{1}{m+1} J_m \right),$$

因为

$$\begin{aligned}(SS^\tau) \cdot \frac{1}{2^{n-2}} \left(I_m - \frac{1}{m+1} J_m \right) &= (I_m + J_m) \cdot \left(I_m - \frac{1}{m+1} J_m \right), \\ &= I_m - \frac{1}{m+1} J_m + J_m - \frac{1}{m+1} J_m \cdot J_m, \\ &= I_m - \frac{1}{m+1} J_m + J_m - \frac{m}{m+1} J_m, \\ &= I_m.\end{aligned}$$

利用这一表示，我们可以找到 S 的一个右逆，记作 S_r，其形式为

$$S_r = S^\tau (SS^\tau)^{-1} \qquad \text{so that} \qquad SS_r = I_m.$$

给定 V_n 上的一个度量 d，我们再次将其视为列向量

$$d = [d(1,2), d(1,3), \ldots, d(n-1,n)]^\tau \in \mathbb{R}^{\binom{n}{2}}.$$

那么， d 属于割锥 CUT_n，当且仅当系统 $Sw = d$ 有一个满足 $w \geq 0$ 的解 $w \in \mathbb{R}^{2^n-2}$。$Sw = d$ 的一个解为$\mathbf{w} = S_r d$，因为

$$S\mathbf{w} = SS_r d = I_m d = d.$$

在继续之前，我们先给出一个定义。为了说明其动机，回顾一下，星迹$s_i = \sum_{j \neq i} d(i, j)$在关于第 3 节中对割锥 $PCUT_n$的讨论中发挥了重要作用。半度量 $\delta_{\{i\}}$作为 $\mathbb{R}^m$中的一个向量，其第 $\{k,\ell\}$个坐标在 $i \in \{k,\ell\}$时等于 1，否则为 0。因此， $s_i = d \cdot \delta_{\{i\}}$，其中右侧为 $\mathbb{R}^m$上的欧几里得内积。受此观察启发，我们将任意割 $C \subset V_n$ 的 C-迹 s_C 定义为

$$s_C = d \cdot \delta_C = \sum_{\{i,j\} \subset V_n} \delta_C(\{i,j\}) \cdot d(i,j) = \sum_{i \in C,\, j \notin C} d(i,j).$$

顺便一提，

$$\begin{aligned} s_i + s_j &= \sum_{k\neq i} d(i,k) + \sum_{\ell\neq j} d(j,\ell) \\ &= \left(\sum_{a\in\{i,j\}, b\notin\{i,j\}} d(a,b) \right) + 2d(i,j) \\ &= s_{\{i,j\}} + 2d(i,j), \end{aligned}$$

结合这一关系，定理 3.6 中的不等式 (16) 可改写为

$$s_{\{i,j\}} \geq (n-6)\, d(i,j) + \frac{2}{n-2}\mathrm{Tr}(d).$$

经过这段简短的旁述后，我们可以计算 C-坐标 $\mathbf{w}_C$ ofw $= S_r d$:

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_C &= (S_r d)_C \\ &= \left(S^\tau (S S^\tau)^{-1} d\right)_C \\ &= \frac{1}{2^{n-2}} \left(S^\tau \left(I_m - \frac{1}{m+1} J_m \right) d \right)_C \\ &= \frac{1}{2^{n-2}} \left(S^\tau d\right)_C - \frac{1}{m+1} \left(S^\tau J_m d\right)_C \\ &= \frac{1}{2^{n-2}} s_C - \frac{\mathrm{Tr}(d)}{m+1} \left(S^\tau \mathbf{1}_m\right)_C \\ &= \frac{1}{2^{n-2}} \left(s_C - \frac{\mathrm{Tr}(d)}{m+1} |C|(n-|C|) \right). \end{aligned} \tag{21}$$

上文用到了这样一个事实：对应于 C 的 S^τ 行为 δ_C^τ，因此 $(S^\tau d)_C = \delta_C \cdot d = s_C$。我们还用到了一个容易验证的事实，即 $J_m d = \mathrm{Tr}(d) \cdot \mathbf{1}_m$。最后，$(S^\tau \mathbf{1}_m)_C = \delta_C \cdot \mathbf{1}_m$，它等于 δ_C 的坐标之和。δ_C 的非零坐标均为 1，它们对应于满足 $i \in C$ 且 $j \notin C$ 的配对 $\{i,j\}$，这表明 $(S^\tau \mathbf{1}_m)_C = |C| \cdot (n - |C|)$。由此证明了下面的定理。

定理 5.1. 如果对于每个割 $C \subset V_n$ 我们都得到

$$s_C \geq \frac{|C|(n-|C|)}{\binom{n}{2}+1} \cdot Tr(d) \tag{22}$$

那么 $(V_n, d) \in CUT_n$。

对于 $C = \{i,j\}$，不等式 (22) 变为

$$\begin{aligned} s_{\{i,j\}} &\geq \frac{2(n-2)}{\frac{1}{2}(n^2-n)+1} \mathrm{Tr}(d), \\ s_i + s_j &\geq 2d(i,j) + \frac{2(n-2)}{\frac{1}{2}(n^2-n)+1} \mathrm{Tr}(d), \end{aligned}$$

这与定理 3.6 中的不等式 (16) 截然不同。这正是我们所预期的；否则，任何不满足一个或多个不等式 (16) 的度量 d，也会至少不满足一个不等式 (22)。当然，我们预期有许多度量属于割锥，却不属于对割锥。

例 5.2。再次考虑带有图度量 d 的 K_n 完全图 n。由于对于所有 $i,\ j \in V_n$，均有 $d(i,\ j) = 1$，因此对于任意割 $C \subset V_n$，我们得到$s_C = |C|(n - |C|)$。d 的迹仍等于 $\binom{n}{2}$，从而不等式 (22) 变为

$$|C|(n-|C|) \geq \frac{|C|(n-|C|)}{\binom{n}{2}+1} \cdot \binom{n}{2},$$

或者简单地写成 $\binom{n}{2} + 1 \geq \binom{n}{2}$，这对 $C \subset V_n$ 的任意选择及任意 $n \geq 1$ 都成立。事实上，图度量由 $d = \frac{1}{2}\left(\delta_{\{1\}} + \cdots + \delta_{\{n\}}\right)$ 给出，而显然它属于 CUT_n。

6. A basis for the kernel of S

由于 S_{sq} 是与对割对应的 S 子矩阵，且根据定理 3.2，对于 $n \geq 5,\ S_{sq}$ 是正则矩阵，因此可得 $\mathbf{rk}(S) = \binom{n}{2}$。秩-零度定理意味着

$$\text{rk Ker}(S) = 2^n - 2 - \binom{n}{2}. \tag{23}$$

$Sw = d$ 的一般解 w 可表示为 $\mathbf{w} + w_N$，其中 $\mathbf{w}$ 如式 (21) 所示，且 $w_N \in \mathbf{Ker}(S)$。因此，关键在于理解 S 的核。我们能够确定 $\mathbf{Ker}(S)$ 的一组基，下面给出这一计算过程。

回想一下，对于任意割 $C \subset V_n$，都有 $\delta_C = \delta_{V_n - C}$。容易验证，若在 V_n 的非平凡割的字典序中，C 是第 k 个元素，那么 $V_n - C$ 就是第 $(2^n - 1 - k)$ 个元素。为后续使用，我们记作 $C = V_n - C$；这一运算可视为 V_n 的割集上的一个对合。

6.1. 反对称核生成元。令 $\{e_1, \ldots, e_{2^n-2}\}$ 为 $\mathbb{R}^{2^n-2}$ 的标准基，对于 $k = 1, \ldots, 2^{n-1} - 1$，令

$$\varphi_k = e_k - e_{2^n-1-k}. \tag{24}$$

如果 $C \subset V_n$ 是按字典序排列的割中的第 k 个割，那么我们也可以写作 $\varphi_k = \delta_C - \delta_{\bar{C}}$，将每个割视为 $\mathbb{R}^{2^n-2}$ 的一个标准基向量（不要与我们先前将 δ_C 视为 $\mathbb{R}^{\binom{n}{2}}$ 中的向量的约定相混淆）。这种对应关系体现了割的字典序，因此，如果 C 是按字典序排列的第 k 个割，那么 δ_C 对应于 e_k。不难验证，集合 $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_{2^{n-1}-1}\}$ 线性无关，且包含于 S的核中，由此证明：

命题 6.1。 向量 $\varphi_1, \ldots, \varphi_{2^{n-1}-1}$ 在 $\mathit{Ker}(S_n)$ 中生成一个维数为 $2^{n-1} - 1$ 的子空间。

例 6.2。 考虑 $n=4$，那么向量 $\varphi_1,\dots,\varphi_7$ 由下式给出

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &= (1,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,-1),\\
\varphi_2 &= (0,1,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,-1,0),\\
\varphi_3 &= (0,0,1,0,0,0,0,0,0,0,0,0,-1,0,0),\\
\varphi_4 &= (0,0,0,1,0,0,0,0,0,0,0,-1,0,0,0),\\
\varphi_5 &= (0,0,0,0,1,0,0,0,0,0,-1,0,0,0,0),\\
\varphi_6 &= (0,0,0,0,0,1,0,0,0,-1,0,0,0,0,0),\\
\varphi_7 &= (0,0,0,0,0,0,1,0,-1,0,0,0,0,0,0).
\end{aligned}$$

6.2. 交错和核生成元。 这里我们假设 $n\geq 5$。设$T\subset V_n$ 为一个具有 $3\leq|T|\leq n$的集合。将 V_n 的非平凡割视为$\mathbb{R}^{2^n-2}$ 中的基向量，我们定义

$$\psi_T=\sum_{C\subset T}(-1)^{|C|}\,\delta_C\in\mathbb{R}^{2^n-2}. \tag{25}$$

上面的和遍历所有包含在 T中的割 C；由于 $T\subset V_n$，它们当然也是 V_n中的割。在求和中，我们包含空割 $C=\emptyset$，尽管 $\delta_C=0$，因为它将在下面命题 6.4 的证明中发挥重要作用。在割与 $\mathbb{R}^{2^n-2}$中的向量之间转换时，两个平凡割 $\delta_\emptyset$ 和 δ_{V_n} 都对应于零向量。为了了解这些核生成元，不妨看一个例子。

例 6.3。 考虑 $n=4$。 V_4 的非平凡割按字典序排列如下（同时给出割与 $\mathbb{R}^{14}$标准基向量之间的对应关系）：

$$\begin{gathered}
\delta_{\{1\}}=e_1,\ \delta_{\{2\}}=e_2,\ \delta_{\{3\}}=e_3,\ \delta_{\{4\}}=e_4,\\
\delta_{\{1,2\}}=e_5,\ \delta_{\{1,3\}}=e_6,\ \delta_{\{1,4\}}=e_7,\ \delta_{\{2,3\}}=e_8,\ \delta_{\{2,4\}}=e_9,\ \delta_{\{3,4\}}=e_{10},\\
\delta_{\{1,2,3\}}=e_{11},\ \delta_{\{1,2,4\}}=e_{12},\ \delta_{\{1,3,4\}}=e_{13},\ \delta_{\{2,3,4\}}=e_{14}.
\end{gathered}$$

向量 ψ_T由以下选择构造而成：T分别为 $T_1=\{1,2,3\},T_2=\{1,2,4\},T_3=\{1,3,4\}$，$T_4=\{2,3,4\}$和 $T_5=\{1,2,3,4\}$。由此我们得到

$$\begin{aligned}
\psi_{T_1} &= (\overbrace{-1,-1,-1,0}^{\text{Singleton cuts}},\overbrace{1,1,0,1,0,0}^{\text{Pair cuts}},\overbrace{-1,0,0,0}^{\text{Tripe cuts}})\\
\psi_{T_2} &= (-1,-1,0,-1,1,0,1,0,1,0,0,-1,0,0)\\
\psi_{T_3} &= (-1,0,-1,-1,0,1,1,0,0,1,0,0,-1,0)\\
\psi_{T_4} &= (0,-1,-1,-1,0,0,0,1,1,1,0,0,0,-1)\\
\psi_{T_5} &= (-1,-1,-1,-1,1,1,1,1,1,1,-1,-1,-1,-1)
\end{aligned}$$

命题 6.4。 对于每个满足 $3\leq|T|\leq n$ 的子集 $T\subset V_n$，向量 ψ_T 都属于 S 的核。

证明。 证明是直接计算。我们需要证明， S 的每一行与 ψ_T 的点积都等于零。设

$$S_{\{i,j\}}=\text{ row of } S \text{ corresponding to the pair } \{i,j\}\subset V_n.$$

S 的列由 V_n的非平凡割 C 枚举，且 $S_{\{i,j\}}$的 C坐标等于 $\delta_C(\{i,j\})$。当且仅当 C包含 i或 j 之一（但不同时包含二者）时，该坐标等于 1。对于所有其他割，该坐标等于 0。根据 $T\cap\{i,j\}$ 的基数是 0、1 还是 2，计算点积 $S_{\{i,j\}}\cdot\psi_T$时需要考虑三种情况。

的情形 $T\cap\{i,j\}=\emptyset$。 在这种情况下， ψ_T的非零坐标对应于割 $C\subset T\subset V_n$，其中没有一个包含 i 或 j。因此，在点积 $S_{\{i,j\}}\cdot\psi_T$ 中，我们求和 2^n-2 项；每一项都是坐标 $S_{\{i,j\}}$ 与坐标ψ_T 的乘积，而其中至少有一个始终为 0。因此， $S_{\{i,j\}}\cdot\psi_T=0$。

的情形 $T\cap\{i,j\}=\{i\}$。 T的割可以分成两个不相交的集合，即

(a) 割 $C\subset T-\{i\}$。(b) 形如 $C\cup\{i\}$ 的割，其中 C 如(a)中所述。

这些割中没有一个包含 j，只有(b)中的割包含 i。对于其他所有割， ψ_T 中相应的项等于零。对于(a)部分中的割 C， $S_{\{i,j\}}$ 中相应的坐标等于零。因此

$$\begin{aligned}
S_{\{i,j\}}\cdot\psi_T &= \sum_{\substack{C\cup\{i\},\\ C\subset T-\{i\}}}(-1)^{|C|+1}\\
&= -\sum_{C\subset T-\{i\}}(-1)^{|C|}\\
&= -\sum_{k=0}^{|T|-1}\ \sum_{\substack{C\subset T-\{i\}\\ |C|=k}}(-1)^k\\
&= -\sum_{k=0}^{|T|-1}(-1)^k\binom{|T|-1}{k}\quad\text{(use Binomial Theorem)}\\
&= -(1-1)^{|T|-1}\\
&= 0.
\end{aligned}$$

请注意，这里将空割 $C=\emptyset$ 纳入对 $T-\{i\}$ 中各割的求和十分重要，否则割 $\{i\}=\emptyset\cup\{i\}$ 就不会出现在上文 (b) 部分的各割之中。

情形 $T\cap\{i,j\}=\{i,j\}$。 在这种情况下，我们将 T 的各割划分为 4 个互不相交的类别：

（a）割 $C\subset T-\{i,j\}$（由于假设 $|T|\geq 3$，因此 $T-\{i,j\}\neq\emptyset$）。
（b）割 $C\cup\{i\}$，其中 C 与（a）中相同。 （c）割 $C\cup\{j\}$，其中 C 与（a）中相同。 （d）割 $C\cup\{i,j\}$，其中 C 与（a）中相同。

部分（a）和（d）中的割使 $S_{\{i,j\}}$ 的坐标为零，因此不会对内积 $S_{\{i,j\}} \cdot \psi_T$ 作出贡献。对于每个带有 $C \subset T - \{i,j\}$ 的割 $C \cup \{i\}$ 和 $C \cup \{j\}$， $S_{\{i,j\}}$ 的相应坐标均等于 1。因此：

$$S_{\{i,j\}} \cdot \psi_T = \sum_{\substack{C \cup \{i\} \\ C \subset T - \{i,j\}}} (-1)^{|C|+1} + \sum_{\substack{C \cup \{j\} \\ C \subset T - \{i,j\}}} (-1)^{|C|+1} = -2 \sum_{C \subset T - \{i,j\}} (-1)^{|C|}.$$

由于与情形 2 相同的原因，这一项为零（因为 $|T - \{i,j\}| \geq 1$），因此我们证明了每个 ψ_T 都属于 S 的核。

最后这个情形说明了条件 $3 \leq |T|$ 的必要性。如果我们有$|T| = 2$，那么对于某对指标 i， j， T将等于 $\{i,j\}$。于是上述求和只包含一项，对应于 $C = \emptyset \subset T - \{i,j\} = \emptyset$，此时$S_{\{i,j\}} \cdot \psi_T = -2$。我们将此留作练习：证明 $\psi_{\{i\}}$ 同样不是核元素，而 $\psi_\emptyset$ 是零向量。□

接下来的这个结果在后文中并非必需；为了完整起见，我们将其列出，但不作证明。

引理 6.5。 如果 T_1、 $T_2 \subset V_n$ 是满足 $|T_1| = 1$ 和 $|T_2| = 2$ 的子集，即 $T_1 = \{i\}$ 和 $T_2 = \{i,j\}$，那么对于 $m = 1$， $S \cdot \psi_{T_m}$ 的 $\{k,\ell\}$ 阶坐标由下式给出：2

$$(S \cdot \psi_{T_1})_{\{k,\ell\}} = \begin{cases} 1 & ; \quad i \in \{k,\ell\}, \\ 0 & ; \quad i \notin \{k,\ell\}, \end{cases}$$

$$(S \cdot \psi_{T_2})_{\{k,\ell\}} = \begin{cases} -2 & ; \quad \{i,j\} = \{k,\ell\}, \\ 0 & ; \quad \{i,j\} \neq \{k,\ell\}. \end{cases}$$

命题 6.4 对每个子集 $T \subset V_n$、 $3 \leq |T|$ 生成 S 的核元素 ψ_T。这样的集合共有 $2^n - 1 - \binom{n}{2} - n$ 个。

命题 6.6。令 $n \geq 3$。集合

$$\mathcal{V}_n = \{\psi_T \,|\, T \subset V_n,\, 1 \leq |T| \leq n\}$$

由 $2^n - 1$ 个 $2^n - 2$ 维向量组成，具有如下性质：从中任意移除一个向量后，剩余的 $2^n - 2$ 个向量线性无关，因此构成 $\mathbb{R}^{2^n-2}$ 的一组基。特别地，其子集

$$\mathcal{T}_n = \{\psi_T \,|\, T \subset V_n, 3 \leq |T|\}$$

对于所有 $n \geq 3$，都线性无关。

证明。 我们首先证明集合 $\mathcal{W}_n = \{\psi_T \,|\, T \subset V_n, 1 \leq |T| < n\}$ 线性无关且是一个基。

首先注意到集合 $\{\psi_{\{1\}}, \ldots, \psi_{\{n\}}\}$ 线性无关。这是因为 $\psi_{\{i\}}$ 只有一个非零坐标，即第 i 个坐标分量上的 -1。

接下来考虑集合 $\{\psi_{\{1\}}, \ldots, \psi_{\{n\}}, \psi_{\{1,2\}}, \ldots, \psi_{\{n-1,n\}}\}$。当且仅当将其修改为线性无关的集合时，该集合才线性无关，其中我们将

每个 $\psi_{\{i,j\}}$ 替换为 $\psi_{\{i,j\}} - \psi_{\{i\}} - \psi_{\{j\}}$。但修改后的集合现在只有一个非零坐标，即在割 $\{i,j\}$ 处的坐标为 1，因此修改后的集合显然线性无关。

一般而言，可以通过从元素 $\psi_{\{i_1,\dots,i_k\}}$ 中减去与基数小于 k 的割相关联的向量，以此构造一个仅有一个非零坐标的向量，即割 $\{i_1,\dots,i_k\}$ 对应的坐标项 $(-1)^k$。这证明了 $\mathcal{V}_n$ 的线性无关性，也表明它是 $\mathbb{R}^{2^n-2}$ 的一个基，因为 $|\mathcal{V}_n| = 2^n - 2$。

为完成证明，我们证明

$$\psi_{V_n} = (-1)^{n-1} \sum_{\substack{T \subset V_n \\ 1 \le |T| < n}} (-1)^{|T|}\, \psi_T. \tag{26}$$

给定一个割 $C \subset V_n$，左边的 C 坐标等于 $(-1)^{|C|}$。右边具有非零 C 坐标的项对应于包含 C 的非空集合$T \subsetneq V_n$，在这种情况下，ψ_T 的 C 坐标 $(\psi_T)_C$ 也等于 $(-1)^{|C|}$。令 $m = |V_n - C| = n - |C|$，则 (26) 的右边变为

$$\begin{aligned}
(-1)^{n-1} \sum_{\substack{T \subset V_n \\ 1 \le |T| < n}} (-1)^{|T|}\, (\psi_T)_C &= (-1)^{|C|} \sum_{C \subset T \subsetneq V_n} (-1)^{|T|} \\
&= (-1)^{|C|+n-1} \sum_{\substack{T = C \sqcup D \\ D \subsetneq V_n - C}} (-1)^{|T|} \\
&= (-1)^{|C|+n-1} \sum_{\substack{T = C \sqcup D \\ D \subsetneq V_n - C}} (-1)^{|C|} \cdot (-1)^{|D|} \\
&= (-1)^{n-1} \textstyle\sum_{i=0}^{m-1} (-1)^i \binom{m}{i} \\
&= (-1)^{n-1} \left[\left(\textstyle\sum_{i=0}^{m} (-1)^i \binom{m}{i} \right) - (-1)^m \binom{m}{m} \right] \\
&= (-1)^{n-1} \left[(1-1)^m - (-1)^m \binom{m}{m} \right] \\
&= (-1)^{n+m} \\
&= (-1)^{|C|}.
\end{aligned}$$

由于 $\mathcal{W}_n$ 线性无关，且 $\mathcal{V}_n = \mathcal{W}_n \cup \{\psi_{v_n}$，并且 ψ_{V_n} 是由 $\mathcal{W}_n$ 中的向量组成的线性组合，每个向量旁的系数为 $\pm$，因此对于任意选择的 $\emptyset \neq T \subsetneq V_n$，$\mathcal{V}_n - \psi_T$也线性无关，因而构成一个基，从而证明了该命题。□

命题 6.1、6.4 和 6.6 总共得到

$$\left(2^{n-1} - 1\right) + \left(2^n - 1 - \binom{n}{2} - n\right) = \left(2^n - 2 - \binom{n}{2}\right) + \left(2^{n-1} - n\right)$$

S 的核中的向量。由于核的维数为 $2^n - 2 - \binom{n}{2}$，我们得到了一组线性相关的核向量。从中可以提取出一个特定的

基。注意，这两个族中的所有向量，其坐标都等于 -1、0 或 1。

6.3. S**的核的一组基**。

命题 6.7. 如前所述，令 $\mathcal{T}_n = \{\psi_T \,|\, T \subset V_n, 3 \leq |T|\}$ 为 S的核中 $2^n - 1 - \binom{n}{2} - n$元素组成的集合。那么

$$\mathcal{B}_n = \mathcal{T}_n \cup \{\varphi_i\}_{i=1,\dots,n-1}$$

是 S的核的一组基。

证明。 $\mathcal{B}_n$ 的基数与 Ker(S) 的维数相同，因此我们只需证明 $\mathcal{B}_n$线性无关。

对于指标 $k \in V_n$，考虑线性泛函 P_k：$\mathbb{R}^{2^n-2} \to \mathbb{R}$，定义如下

$$P_k\left(\sum_{\emptyset \subsetneq C \subsetneq V_n} \lambda_C \, \delta_C\right) = \sum \lambda_C \cdot I(k \in C).$$

这里，$I(k \in C)$ 是示性函数：当 $k \in C$ 时返回 1，当 $k \notin C$ 时返回 0。显然，P_k 是线性映射，因为它是一个正交投影（投影到由满足 $k \in C$ 的基向量 δ_C 张成的子空间）与迹泛函的复合。

对于任意 $\psi_T \in \mathcal{T}_n$ 以及任意选择的 $k \in V_n$，我们得到 $P_k(\psi_T) = 0$，如下所示：若 $k \notin T$，则显然 $P_k(\psi_T) = 0$。因此，假设 $k \in T$，则

$$\begin{aligned}
P_k(\psi_T) &= P_k\left(\sum_{C \subset T} (-1)^{|C|} \delta_C\right), \\
&= P_k\left(\sum_{C \subset T - \{k\}} (-1)^{|C|+1} \delta_{C \cup \{k\}}\right), \\
&= \sum_{C \subset T - \{k\}} (-1)^{|C|+1}, \\
&= -\sum_{i=0}^{|T|-1} (-1)^i, \\
&= -(1-1)^{|T|-1}, \\
&= 0.
\end{aligned}$$

另一方面，

$$P_k(\varphi_j) = \begin{cases} 1 & ; \quad j = k, \\ -1 & ; \quad j \neq k. \end{cases}$$

由此，我们定义新的线性泛函 L_k：$\mathbb{R}^{2^n-2} \to \mathbb{R}$，令 $L_k = P_k - P_{k+1}$，其中 $k = 1, \dots, n-1$。那么，对于每个 $\psi_T \in \mathcal{T}_n$，仍有 $L_k(\psi_T) = 0$。在

另一方面，

$$L_{n-1}(\varphi_j) = \begin{cases} 2 & ; \quad j = n-1, \\ 0 & ; \quad j < n-1, . \end{cases}$$

$$L_k(\varphi_j) = \begin{cases} 2 & ; \quad j = k, \\ -2 & ; \quad j = k+1, \\ 0 & ; \quad j \neq k, k+1, \end{cases}$$

对于 $k < n-1$。明确这一点后，假设集合 $\mathcal{B}_n$ 线性相关，并考虑如下线性相关关系：

$$\sum_{i=1}^{n-1} \mu_i \, \varphi_i + \sum_{\psi_T \in \mathcal{T}_n} \lambda_T \, \psi_T = 0.$$

首先对等式两边应用线性泛函 P_{n-1}，得到 $\mu_{n-1} = 0$。接着依次将 P_{n-2}、……、P_1 应用于该线性相关关系，可进一步得到$\mu_{n-2} = 0$、……、$\mu_1 = 0$。由于我们已经证明 $\mathcal{T}_n$ 线性无关（参见命题 6.6），因此对所有 T，都有 $\lambda_T = 0$，命题得证。□

注 6.1。 前面的命题可以推广，事实上可以证明每个集合

$$\mathcal{T}_n \cup \{\varphi_{i_1}, \ldots, \varphi_{i_{n-1}}\},$$

对于任意选取的指标 $1 \leq i_1 < \cdots < i_{n-1} \leq 2^{n-1} - 1$，都是线性无关的，因此也是 S 的核的一个基。证明过程较为复杂，但思路与前面给出的证明类似。

6.4. 结语。 第5节和第6.3节的结果为判断度量 d 是否属于割锥 CUT_n提供了一条途径：首先求出线性方程组 $Sw = d$ 的一个初始解$\mathbf{w}$，使其满足

$$\mathbf{w}_C = \frac{1}{2^{n-2}} \left(\left(\sum_{i \in C, j \notin C} d(i,j) \right) - \frac{\mathrm{Tr}(d)}{\binom{n}{2} + 1} |C|(n - |C|) \right),$$

其中 $C \subset V_n$ 是一个非平凡割。如果$\mathbf{w} \geq 0$, d 属于割锥。如果不是，则考察以下线性组合

$$\mathbf{w} + \sum_{i=1}^{n-1} \mu_i \, \varphi_i + \sum_{\psi_T \in \mathcal{T}_n} \lambda_T \, \psi_T,$$

取 $\mu_i, \lambda_T \in \mathbb{R}$，并取 S 的基元素 μ_i, ψ_T，如命题 6.7 所示。那么，$d \in CUT_n$ 当且仅当这些向量中存在一个所有坐标均非负的向量。这在计算上颇具挑战性，尤其是随着 n 增大时，但对于具体例子而言并非不可能。我们将这一方法的探索留待未来工作。

References

[1] Patrice Assouad。《在 L^1 中的等距嵌入：分析方面》。载于《分析入门研讨会：G. Choquet-M. Rogalski-J. Saint-Raymond，第 19 年：1979/1980》，第 41 卷，皮埃尔和玛丽·居里大学数学出版物，第 14 号报告，第 23 页。巴黎第六大学，巴黎，1980 年。[2] David Avis 和 Michel Deza。《割锥、 L^1 可嵌入性、复杂性与多商品流》。Networks，21(6)：595–617，1991 年。[3] Leonard M. Blumenthal。《距离几何理论及其应用》。牛津，克拉伦登出版社，1953 年。[4] Arthur Caley。《关于位置几何中的一个定理》。《剑桥数学杂志》，II：267–271，1841 年。.[5] Constantin Carath´eodory。《关于正调和函数傅里叶常数的变动范围》。《巴勒莫数学学会会报》（1884–1940）（德文），32：193–217，1911 年。[6] Drago˘ s Cvetkovi´c、Peter Rowlinson 和 Slobodan Simi´c。《图谱理论导论》，第 75 卷，伦敦数学会学生读物。剑桥大学出版社，剑桥，2010 年。[7] M. Deza、M. Gr¨otschel 和 M. Laurent。《小型多割多面体的完整描述》。载于《应用几何与离散数学》，DIMACS 离散数学与理论计算机科学丛书第 4 卷，第 221–252 页。美国数学学会，普罗维登斯，罗得岛州，1991 年。[8] Michel Deza 和 Monique Laurent。《割锥的面 I》。《数学规划》，56(2)：121–160，1992 年。[9] Michel Deza 和 Monique Laurent。《割锥的面 II：团网不等式》。《数学规划》，56(2)：161–188，1992 年。[10] Michel Deza 和 Monique Laurent。《偶割多面体与奇割多面体》。第 119 卷，第 49–66 页，1993 年。ARIDAM IV 和 V（新不伦瑞克，新泽西州，1988/1989）。[11] Michel Marie Deza 和 Monique Laurent。《割与度量几何》，算法与组合学第 15 卷。施普林格，海德堡，2010 年。1997 年原版的首个平装本印次[MR1460488]。[12] V. P. Grishukhin。《割锥 C_n 的所有面已知，其中 $n = 7$ 》。欧洲组合学杂志，11(2)：115–117，1990 年。[13] G. H. Hardy、J. E. Littlewood 和 G. P´olya。《不等式》。剑桥，剑桥大学出版社，1952 年。第 2 版。[14] Karl Menger。《关于一般度量的研究》。《数学年刊》，100(1)：75–163，1928 年。 ¨T. S. Michael 和 Thomas Quint。《影响球图与 L_∞-度量》。《离散应用数学》，127(3)：447–460，2003 年。[16]Walter Rudin。《泛函分析》。纯粹与应用数学国际丛书。麦格劳-希尔公司，纽约，第 2 版，1991 年。[17] I. J. Schoenberg。《对 Maurice Fr´echet 文章“关于一类可向量式映射到希尔伯特空间的距离空间的公理化定义”的评注》 [MR1503246]。《数学年刊》（第 2 辑），36(3)：724–732，1935 年。[18] Godfried T. Toussaint。《模式识别与几何复杂性》。载于第五届国际模式识别会议论文集，迈阿密海滩，第 1324–1347 页，1980 年。[19] Godfried T. Toussaint。《模式识别中的计算几何问题》。载于《模式识别理论与应用》（牛津，1981），北约高级研究所系列 C：数学与物理科学第 81 卷，第 73–91 页。赖德尔，多德雷赫特，1982 年。[20] Godfried T. Toussaint。《图论原始草图》。载于《计算形态学》，G.T. Toussaint（编），第 229–260 页。爱思唯尔北荷兰出版社，阿姆斯特丹，1988 年。电子邮件地址：jabuka@unr.edu

电子邮件地址: mirbagherisme@gmail.com

Department of Mathematics and Statistics, University of Nevada, Reno NV 89557.