arXiv:2512.19006v1 [math.CA] 22 Dec 2025

关于求解q差分方程形式幂对数展开的求取

Nikita V. Gaianov，Anastasia V. Parusnikova

摘要

本文研究一个代数q差分方程。提出了此类方程的解在零点邻域存在形式幂对数展开的一个充分条件。举例说明了如何将这一充分条件用于构造某个q差分类第五 Painlev´ 方程在特定方程参数取值下的解的形式展开；考察了数q 的两个不同取值，由此得到第五 Painlev´ 方程解在定性上不同的形式渐近展开。

关键词：q差分方程、渐近展开、牛顿多边形、幂对数展开。

MSC 分类：34m25，34m55。

本文研究代数型q-差分方程。提出了此类方程的解在零点邻域存在形式幂对数展开的充分条件。举例说明了如何应用这一充分条件，在方程参数取特定值时构造某个q-差分类比物——第五个 Painlevé 方程解的形式展开；考察了q的两个不同取值，它们导致解的形式渐近展开在性质上截然不同。

关键词：q-差分方程、渐近展开、牛顿多边形、幂对数展开。

1 引言

目前，q差分方程与系统的理论正在积极发展 [1, 2]。以形式幂级数展开的形式求解的方法已得到充分研究

并且已有关于其收敛性的证明 [4]，然而，即使对于线性微分方程，也可能出现含有对数项的解 [5]。在作者此前的文章中 [6] ，获得了一个充分条件，使得解可以表示为关于自变量非负整数幂的幂对数展开（杜拉克级数）。在此基础上，本文将幂几何的方法和结果 [7, 8] 推广到q差分方程情形，给出代数q差分方程存在形式解的充分条件，并以比前文更一般形式的幂对数级数表示这些解，同时介绍其构造方法。此外，还给出了一个应用所得定理的例子：在方程参数取特定值时，构造某个第五潘勒韦差分类比方程解的形式展开。考察了q的两个不同取值，它们导致第五潘勒韦方程类比解的形式渐近展开在性质上存在差异。

2 基本定义

本文研究$x \to 0$的情形。

假设y 是复变量x的单值复值函数，数$q \neq 0$。我们将q-微分算子σ 定义为：

$$(\sigma y)(x) = y(qx),$$

此时，函数 σy 称为函数y的q-差分导数 .

此外，还假设$q^k \neq 1 \ \forall k \in \mathbb{N}$。

称q-差分代数方程为n阶方程：

$$f(x, y, \sigma y, \ldots, \sigma^n y) = 0, \tag{1}$$

其中，f是$n+2$个变量的多项式。

我们将文献 [7] 中针对微分方程的幂几何定义迁移过来，以构建q-差分方程的类似理论。

记 $X = (x, y)$。称 q 差单项式为 $b(x, y)$，它是单项式 $cx^{r_1}y^{r_2}$ 与有限个 q 差导数的乘积，其中 $c = \text{const}$，$r_1, r_2 \in \mathbb{R}$。

$$\sigma^l y, \quad l \in \mathbb{N}.$$

称q差和为q差单项式之和：

$$f(X)=\sum a_i(X). \tag{2}$$

对每个q差分单项式$b(X)$，按如下方式对应一个向量指标$Q(b)$：

$$Q(cx^{r_1}y^{r_2})=(r_1,r_2);\quad Q((\sigma^l y)^r)=(0,r);\quad Q(b_1(X)b_2(X))=Q(b_1(X))+Q(b_2(X)).$$

将$S(f)$记作q差分和$f(X)$的向量指标集合，并将$f_Q(X)$记作所有满足$Q(b_i)=Q$的单项式b_i之和。那么

$$f(X)=\sum_{Q\in S(f)} f_Q(X).$$

集合$S(f)$称为和$f(X)$及方程（1）的支撑。

注意，代数q差分方程的支撑位于 $\mathbb{Z}_+^2$.中 (1)

方程（1）的牛顿多边形（以及q差分和（2）的牛顿多边形）称为集合$S(f)$的凸包，记作 $\Gamma(f)$。多边形 $\Gamma(f)$的边界 $\partial\Gamma(f)$由顶点 $\Gamma^{(0)}{}_j$和边 $\Gamma^{(1)}{}_j$ 组成，即由（广义）面 $\Gamma^{(d)}{}_j$ 组成，其中上标d 表示面的维数。每个广义面对应一个边界子集

$$S_j^{(d)}=S(f)\cap\Gamma_j^{(d)},$$

定义为.....的截短和

$$\hat{f}_j^{(d)}(X)=\sum_{Q\in S_j^{(d)}} f_Q(X)$$

以及缩短方程

$$f_j^{(d)}(X)=0. \tag{3}$$

3 原方程解与缩短方程解之间的关系

如果方程（1）存在如下形式的解

$$y=cx^r+O(x^{r+\varepsilon}),r\in\mathbb{R},x\to 0,\varepsilon>0,c\in\mathbb{C}\setminus\{0\}, \tag{4}$$

则称其为约化解

$$y=cx^r, \tag{5}$$

而方程 (4) 的解的法锥称为射线 $\lambda(-1,\ -r)$，其中 $\lambda>0$。面的法锥 $\Gamma^{(d)}_j$ 称为集合

$$U_j^{(d)}=\left\{\begin{array}{ll} P: & \langle P,Q\rangle=\langle P,Q'\rangle, \quad Q,Q'\in S_j^{(d)} \\ & \langle P,Q\rangle>\langle P,Q''\rangle, \quad Q''\in S(f)\backslash S_j^{(d)} \end{array}\right\},$$

其中 $\langle P,\ Q\rangle := p_1q_1+p_2q_2$ – 向量 $P=(p_1,p_2)$ 与 $Q=(q_1,q_2)$ 的内积。

定理1. 如果方程 (1) 有解 (4)，且解 (4) 的正规锥U满足 $U\subset U^{(d)}{}_j$，那么截短解 (5) 就是相应截短方程 (3) 的解。

证明。将解 (4) 代入方程 (1)：

$$f(X)=\sum_{Q\in S(f)} f_Q(x,cx^r+O(x^{r+\varepsilon}))=\sum_{Q\in S_j^{(d)}} f_Q(x,cx^r)+O(x^{r'})+O(x^{r''})=0,$$

其中 $r'=\underset{Q\in S_j^{(d)}}{\text{最小值}}\ \langle Q,(1,\ r+\varepsilon)\rangle$，$r''=\underset{Q\in S(f)\backslash S_j^{(d)}}{\text{最小值}}\ \langle Q,(1,\ r)\rangle$.

但是，由于 $U\subset U^{(d)}{}_j$，因此 $r''>\langle Q,\ (1,\ r)\rangle$ 对所有 $Q\in S^{(d)}{}_j$ 均成立。由此得到

$$f(X)=\sum_{Q\in S_j^{(d)}} f_Q(x,cx^r)(1+o(1)),x\to 0,$$

而要使等式成立，需要

$$\sum_{Q\in S_j^{(d)}} f_Q(x,cx^r)=0,$$

这便是缩短方程 (3)。 □

4 缩短方程的求解

考虑与牛顿多边形的顶点$\Gamma^{(0)}=(q_1,q_2)$相对应的缩短方程 $\hat{}f^{(0)}=0$。将 $y=cx^r$ 代入其中，并约去x 和 c 的幂，得到方程

$$c^{-q_2}x^{-q_1-q_2r}\hat{f}^{(0)}(x,cx^r)=\chi(r)=0,$$

它只取决于r，一般来说也取决于q。多项式 $\chi(r)$ 称为q-差分和 $f_{(0)}(X)$ 的特征多项式。

必须从其根中选出使向量 $(-1,-r)$ 位于法锥$U^{(0)}$中的那些根。

考虑与位于直线上的边 $\Gamma^{(1)}$相对应的截短方程 $q_1+rq_2+c=0.$。要使解 $y=cx^r$ 成为截短方程 $\hat{f}_{(1)}(x,y)=0$的解，必须满足 $(-1,-r)\in U^{(1)}$，这唯一确定了 r 的值。c_r 的值由确定方程求得:

$$x^c\hat{f}_j^{(1)}(x,c_rx^r)=0.$$

因此，每个截短方程都有一个或多个合适的解，满足 $U\subset U^{(d)}$。

5 截短方程的临界数

若已找到截短解 (5)，则代换 $y=cx^r+z$ 可将方程 (1) 化为

$$\tilde{f}(x,z)=f(x,cx^r+z)=0. \tag{6}$$

在许多情况下，方程 (6) 经过除以 x 的某个幂次后，可能具有如下形式:

$$\tilde{f}(x,z):=\mathscr{L}(\sigma)z+h(x,z)=0, \tag{7}$$

其中，$\mathscr{L}(\sigma)$ 是具有常系数的线性 q差分算子，即

$$\mathscr{L}(\sigma)=a_m\sigma^m+\ldots+a_1\sigma+a_0, \tag{8}$$

点 $Q(\mathscr{L}(\sigma)z)=(0,1)$ 属于方程（7）的支撑，并且是多边形 $\Gamma(\tilde{f})$ 的多边形的顶点，而支撑 $S(h)$ 不包含点 $(0,1)$。

我们按如下公式定义 q差分和 $\mathscr{L}(\sigma)z$ 的特征多项式

$$\nu(k)=x^{-k}\mathscr{L}(\sigma)[x^k].$$

如果 $\nu(k)\neq 0,$，则多项式 $\nu(k)$ 的根 $k_1,\ldots,k_s$ 称为约化解（5）的特征值。对于满足 $k>r$ 的实特征值 $k\in\{k_1,\ldots,k_s\}$，称为临界数。

引入一些附加记号。将支撑 $S(\tilde{f})$ 平移到 $(0,-1)$，并将新的集合 $S'(\tilde{f})=S(\tilde{f})-(0,1)$ 记为。设给定

一个数 r，使得对于每个点 $Q' \in S'(\tilde{f})$，标量积 $\langle R, Q' \rangle \leq 0$，其中 $R = (1, r)$。用 $S'_+(\tilde{f})$ 表示由点 $Q' \in S'(\tilde{f})$ 与向量 $(k1, -1) \ldots, (k_s, -1)$ 的有限和组成的集合，其中 $k1, \ldots, k_s$– 为截短解 $y = cx^r$ 的临界数。设 $K(k1, \ldots, k_s)$ 是满足 $(q1, -1) \in S'_+(\tilde{f})$ 的 $q_1 \in \mathbb{R}$ 的集合。

6 解的幂-对数展开

正如文章 [6] 所示，并非每个代数 q-差分方程的所有解都是幂级数，即空间 $\mathbb{C}[[x]] = \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k, c_k = \text{const} \in \mathbb{C} \right\}$. В работе [6] 的元素。在该工作中，我们仅考虑了级数形式的形式解

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_k(\log_q x) x^k,$$

其中 p_k – 是复系数多项式。

本文考虑形式更为一般的级数（9）——解的幂-对数渐近展开。

下文将给出一个与 [7]中针对微分方程所述条件类似的充分条件的证明，该条件保证 q-差分代数方程存在形式幂-对数渐近解的展开。

定理 2. 考虑方程 (1) 及其截短解 (5)。设作代换 $y = cx^r + z$ 并进行变换后，得到方程 (7)，且方程 (7) 的支集满足以下条件：

(1) 点 (0,1) 是 $\Gamma(\tilde{f})$ 的顶点；

(2) 在方程 $\tilde{f}(x, z) = 0$ 中，与顶点 $(0, 1)$ 对应的项只有 $\mathscr{L}(\sigma)z$，其中 $\mathscr{L}(\sigma)$ 是一个线性 q-差分算子，由公式 (8) 定义（$\mathscr{L}(\sigma)$ 是关于 σ 的多项式，其系数为常数）。

那么方程 (7) 有如下形式的形式解

$$z = \sum_k \beta_k(\log_q x) x^k, \quad k \in K(k_1, \ldots, k_s), k > r, \tag{9}$$

其中 β_k 是变量 $\log_q x$ 的多项式，而 $k_1, \ldots, k_s$ 是截短解 (5) 的临界数。

证明。将方程 (7) 表示为

$$\mathscr{L}(\sigma)z = -h(x,z).$$

将形式解 (9) 代入方程 (7)。代入后，左边包含幂次为 x^k 的项，其中 $k \in K(k_1,\ldots,k_s), k > r$。右边则包含幂次形式为 $x^{\langle Q,(1,k)\rangle}$ 的项，其中 $Q = (q_1,q_2) \in S(\tilde{f})$。

但是数 $\langle Q,(1,k)\rangle \in K(k_1,\ldots,k_s)$，因为 $\langle Q,(1,k)\rangle = q_1 + kq_2$。集合 $K(k_1,\ldots,k_s)$ 中包含 $Q' + q_2(k,-1) = (q_1, q_2 - 1) + q_2(k,-1) = (q_1 + kq_2, -1)$ 的顶点横坐标（这里我们利用了 $q_2 \in \mathbb{Z}_+$，也就是说，将点 $(k,-1)$ 与自身相加有限次）。

因此，将相同 x^k 次幂的系数相等，得到关于 β_k 的一族差分方程，其中此处及下文 $t = \log_q x$:

$$\mathscr{L}(q^k T)\beta_k(t) + \theta_k(t) = 0, \tag{10}$$

其中 θ_k 是关于函数 β_ℓ, 的多项式，其中 $\ell \in K(k_1,\ldots,k_s)$，以及 $\ell < k$；平移算子 T 由公式 $(Tf)(t) = f(t+1)$. 定义。 □

注释1. 定理2中得到了方程(10)，它与 [6]中已有的方程类似，但现在指标 k 不再仅为非负整数。

如果方程(10)中的函数 $\theta_k(t) \equiv 0$，则称临界数k 满足相容条件。

注释2. 在定理2的条件下，设所有临界数k 都满足相容条件，且所有临界数 k 均为非重数。则方程(6)的形式解(9)不含对数。

证明。函数 β_k 作为差分方程（10）的解得到。

如果k 是非重数临界值，且满足相容条件，那么关于 β_k 的方程形式为

$$\mathscr{L}(q^k T)\beta_k(t) = 0,$$

于是，解 $\beta_k(t) = C_k, C_k \in \mathbb{C}$，其中 – 是任意常数。

设k 不是临界值。方程（10）中函数 $\theta_k(t) = A_k$ 为常数，关于 β_k 的方程形式为

$$\mathscr{L}(q^k T)\beta_k(t) = -A_k = \text{const},$$

那么，它的解 $\beta_k(t) = -A_k/\mathscr{L}(q^k)$ 是唯一确定的常数。

□

7 展开中的对数的幂

我们来看看展开式 (9) 中对数幂的增长情况。记 $\mu(j)$ 为 q^j 作为 $\mathscr{L}$ (s) 的根的重数。

定理 3. 假设满足定理 2 的条件。那么，解 (9) 中多项式的次数满足估计

$$\deg \beta_k \le C(k-r) \sum_{r<j\le k} \mu(j) \tag{11}$$

当 $C = 1 + \max_{\ell \in K(k_1,\dots,k_s)\cap\{\ell>r\}} \ell^{-\frac{1}{r}}$

证明。特别指出，这里将零多项式的次数视为零。

用归纳法证明。考虑展开式 (9) 中的最小次数 $k^{(0)} = \min (K(k_1,\dots,k_s) \cap \{ k > r\})$。那么 $\deg \beta_{k^{(0)}} \le \mu(k^{(0)})$，并且由于 $C > {}^{1}{}_{k^{(0)}-r}$，不等式 (11) 成立。

假设对于所有 β_j，当 $j < k$ 时，不等式 (11) 均成立。对于β_k，我们有方程 (10)，其中 θ_k 是单项式的线性组合，单项式形式如下

$$\beta_{i_{0,0}}^{\alpha_{0,0}}(t)\dots\beta_{i_{0,N_0}}^{\alpha_{0,N_0}}(t)\,\beta_{i_{1,0}}^{\alpha_{1,0}}(t+1)\dots\beta_{i_{1,N_1}}^{\alpha_{1,N_1}}(t+1)\dots\beta_{i_{n,0}}^{\alpha_{n,0}}(t+n)\dots\beta_{i_{n,N_n}}^{\alpha_{n,N_n}}(t+n), \tag{12}$$

其中 $\alpha_{0,\ 0}i_{0,\ 0}+\dots+\alpha_{n,\ N_n}i_{n,\ N_n} \le k$。由最后一个不等式还可得

$$\alpha_{0,0}(i_{0,0}-r)+\dots+\alpha_{n,N_n}(i_{n,N_n}-r) \le k-r.$$

根据归纳假设，(12) 中每个单项式的次数都不超过

$$\begin{aligned}
&\alpha_{0,0}\deg\beta_{i_{0,0}}+\dots+\alpha_{n,N_n}\deg\beta_{i_{n,N_n}} \le \\
&\le C\left(\alpha_{0,0}(i_{0,0}-r)\sum_{r<j\le i_{0,0}}\mu(j)+\dots+\alpha_{n,N_n}(i_{n,N_n}-r)\sum_{r<j\le i_{n,Nn}}\mu(j)\right) \le \\
&\le C(k-r)\sum_{r<j<k}\mu(j).
\end{aligned}$$

那么

$$\deg\beta_k \le \deg\theta_k+\mu(k) \le C(k-r)\sum_{r<j<k}\mu(j)+\mu(k) \le C(k-r)\sum_{r<j\le k}\mu(j).$$

最后一个不等式成立，这是因为 $C(k-r) > 1$. □

8 幂对数展开示例

考虑第五个Painlevé方程:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\left(\frac{1}{2y}+\frac{1}{y-1}\right)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-\frac{1}{x}\frac{dy}{dt}+\frac{(y-1)^2}{x^2}\left(a_1y+\frac{a_2}{y}\right)+a_3\frac{y}{x}+a_4\frac{y(y+1)}{y-1},$$

其中 a_1,a_2,a_3,a_4– 复参数。令 $a_1=a_2=0,a_3,a_4\neq 0$并令算子为 $\delta=x\,\frac{d}{dx}$, 得到方程

$$\frac{\delta^2y-\delta y}{x^2}=\left(\frac{1}{2y}+\frac{1}{y-1}\right)\frac{(\delta y)^2}{x^2}-\frac{1}{x^2}\delta y+a_3\frac{y}{x}+a_4\frac{y(y+1)}{y-1}.$$

形式上，将算子 δ 替换为 σ，得到某个q-差分方程

$$\frac{\sigma^2y-\sigma y}{x^2}=\left(\frac{1}{2y}+\frac{1}{y-1}\right)\frac{(\sigma y)^2}{x^2}-\frac{1}{x^2}\sigma y+a_3\frac{y}{x}+a_4\frac{y(y+1)}{y-1}.$$

将其两边乘以 $x^2y(y-1)$，即可化简，得到方程

$$-a_3xy^3+a_3xy^2-a_4x^2y^3-a_4x^2y^2+(\sigma^2y)y^2-\frac{3(\sigma y)^2y}{2}-(\sigma^2y)y+\frac{(\sigma y)^2}{2}=0. \tag{13}$$

方程 (13) 的牛顿多边形 Γ如图1所示。

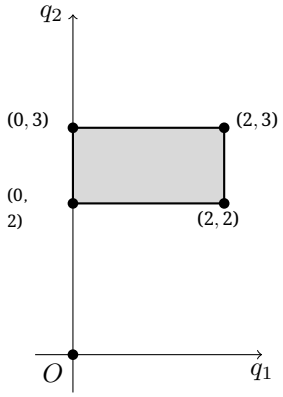

图1：方程 (13) 的牛顿多边形。

我们关注多边形的左侧垂直边 Γ。它所对应的特征方程为

$$\frac{c^2}{2}-\frac{3c^3}{2}-c^2+c^3=0,$$

其唯一的非零解为$c=-1$. 将$y=$替换为$z-1$，代入方程（13），并将其化为方程

$$-a_3xz^3+4a_3xz^2-5a_3xz+2a_3x-a_4x^2z^3+2a_4x^2z^2-a_4x^2z+(\sigma^2z)z^2-z^2-$$
$$-\frac{3}{2}(\sigma z)^2z+3(\sigma z)z-3(\sigma^2z)z+\frac{3z}{2}+2(\sigma z)^2-4(\sigma z)+2(\sigma^2z)=0, \quad (14)$$

其牛顿多边形如图2所示。

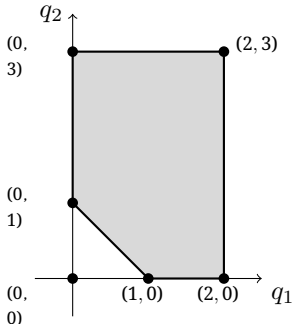

图2：方程（14）的牛顿多边形。

方程（14）的线性部分为 $\mathscr{L}(\sigma)z=2\sigma^2z-4\sigma z+3z/2$,由此得到特征方程

$$\nu(k)=2q^{2k}-4q^k+3/2=0,$$

其根 k 由方程 $q^k=1/2$ 或 $q^k=3/2$.确定

将截短解 $y=-1$ 继续展开，得到方程（13）的解的形式展开。

考虑参数 q的几个取值。

情况 1. 首先设 $q=1/2$，那么特征值为 $k_1=1$，$k_2=1-\log_2 3$。只有 k_1 是临界数（$k_2<0$）。

由于方程 (14) 的支撑集中所有点的坐标都是非负整数，临界数是自然数，且支撑集中没有点 (0，0)，因此集合 $K(k_1)\subset\mathbb{N}$。另一方面，集合 $S'_+(\tilde{f})$ 中有点 (0，1) 和 (1，-1)，它们的有限和覆盖了所有形如 $(n,-1)$，$n\in\mathbb{N}$ 的数，因此 $K(k_1)=\mathbb{N}$。于是，方程 (14) 有一个支撑集包含于 $\mathbb{N}$ 中的幂对数解。

接下来求解。展开式中的第二项满足方程

$$2\sigma^2z-4\sigma z+\frac{3}{2}z+2a_3x=0.$$

将形式为 $z=\beta_1(\log_q x)x\ \ \beta_1\in\mathbb{C}[\log_q x]$,的解代入上面的方程，并换元为 $t=\log_q x$，得到关于 β_1 的差分方程：

$$\frac{1}{2}\beta_1(t+2)-2\beta_1(t+1)+\frac{3}{2}\beta_1(t)+2a_3=0,$$

其所有以多项式形式表示的解都可写成 $\beta_1(t)=2a_3t+C,\ C\in\mathbb{C}.$

综上，得到方程 (13) 在 $q=1/2$ 时解的形式展开的初始段：

$$y(x)=-1+(C-2a_3\log_2 x)x+\ldots,\quad C\in\mathbb{C}.$$

情况 2。现在设 $q=1/4$，则特征值为：$k_1=1/2$，$k_2=-\log_4(3/2)$：只有 k_1 是临界的。

由于方程 (14) 支撑集内所有点的坐标都是非负整数，临界数是正的半整数，且支撑集中没有点 (0，0)，因此集合 $K(k_1)\subset\mathbb{N}/2$。另一方面，在集合 $S'_+(\tilde{f})$ 中有点 (0，1) 和 $(1/2,\ -1)$，它们的有限和覆盖所有形如 $(n/2,\ -1)$，$n\in\mathbb{N}$ 的数，因此，$K(k_1)=\mathbb{N}/2$。

我们将求解的展开式的第一项。关于 $\beta_{1/2}(t)$ 的方程为

$$\frac{1}{2}\beta_{1/2}(t+2)-2\beta_{1/2}(t+1)+\frac{3}{2}\beta_{1/2}(t)=0.$$

对于该方程，相容条件成立。此类差分方程的所有多项式解都是常数：$\beta_{1/2}(t)=C,\ C\in\mathbb{C}$ – 任意常数。我们来求展开式的下一项：关于 β_1 的差分方程为

$$\frac{1}{8}\beta_1(t+2)-\beta_1(t+1)+\frac{3}{2}\beta_1(t)=-2a_3-C^2/4.$$

该差分方程唯一的多项式解是 $\beta_1(t)=-\frac{2}{5}(8a_3+C^2)$。

于是得到方程（13）的解的展开式的下一个初始部分：

$$y(x)=-1+C\sqrt{x}+-\frac{2}{5}(8a_3+C^2)x+\ldots$$

因此，我们展示了根据参数q 的取值，代数q-差分方程（13）的幂截断解可以延拓为$q=1/2$ 时的（9）式幂对数展开，或者在$q=1/4$时延拓为幂级数展开——即形式 Puiseux 级数。

致谢。本文是在俄罗斯国立高等经济大学（HSE大学）基础研究计划框架下完成的。

参考文献

[1] Joshi N., Roffelsen P. 关于 q-差分第六 Painlevé 方程的晶体极限 // 《非线性科学杂志》. 2025. 第35卷. 第1期. 第31页. Вьюгин И. В., Левин Р. И. 关于差分系统和 q-差分系统的黎曼–希尔伯特问题 // В. А. Стеклов 数学研究所论文集. 297, 326–326 (2017).[2] Cano J., Fortuny Ayuso P. 非线性 q-差分方程的幂级数解与牛顿–普伊苏多边形 // 动力系统定性理论 . 2022. 第 21 卷 . 第 4 期 . 第 123 页 .[3]Gontsov R., Goryuchkina I., Lastra A. 关于 q-差分方程广义幂级数解的收敛性 // 《数学等式》. 2022. 第96卷. 第3期. 第579-597页.[4]Adams C. R. 关于线性常q-差分方程 // 《数学年刊》. 1928. 第30卷. 第1期. 第195-205页.[5] Гаянов Н. В., Парусникова А. В. 关于含对数的 q-差分方程形式解 // 西伯利亚数学杂志 . 65:5, 863–875 (2024).[6] Брюно А. Д. 常微分方程的渐近式与解的展开 // 数学科学进展. 59:3, 31-80 (2004).[7] Брюно А. Д. 代数方程与微分方程中的幂几何. 莫斯科：科学出版社. 1998.

所属机构：高等经济学院大学，俄罗斯莫斯科市塔林斯卡娅街34号，邮编123458；电子邮箱：parus-a@mail.ru、gajanovnv@gmail.com