arXiv:2512.19045v1 [math.RT] 22 Dec 2025

经典双 Grothendieck 过渡

Eric Marberg 数学系 香港科技大学
emarberg@ust.hk

摘要

Kirillov 和 Naruse 构造了双 Grothendieck 多项式，用以表示类型 B、C 和 D的完全旗流形中舒伯特簇的等变 K理论类。我们推导出这些多项式的递归公式，将类型 A 中已知的某些 K理论转移方程推广到所有经典类型。作为应用，我们得到一个恒等式，将类型 B、C 和 D 中的 K-Stanley 对称函数展开为 K理论 Schur P-和 Q-函数的正线性组合。我们还解决了若干与后者函数的斜形推广相关的正性猜想。

1 引言

本文研究 Kirillov 和 Naruse 引入的某些形式幂级数，[21] 它们与经典型旗簇的等变 K理论环有关。我们证明，*K类型* B、C和D中的 Stanley 对称函数（定义见 [21]）可以有限地正展开为*K理论 Schur P- 和 Q-函数*，这些函数由 Ikeda 和 Naruse 在 [18]中构造。在准确阐述这些结论之前，我们先回顾类型 A 中的一些类似性质，以此作为动机。

1.1 对称 Grothendieck 函数

记 $\mathbb{Z}$ 为整数集，并令 β 和 $z_1, z_2, z_3, \ldots$为可交换变量。我们将$\mathbf{Sym}^\beta$定义为由形式幂级数构成的子环，这些幂级数关于 $\mathbb{Z}[\beta][\![\mathbf{z}]\!] = \mathbb{Z}[\beta][\![z_1, z_2, z_3, \ldots]\!]$ 在所有置换下保持不变。令 S_∞ 表示有限支撑的正整数排列群，并记 $\ell\colon S_\infty \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$ 为其 Coxeter 长度函数，该函数将每个置换映射为其逆序数。

每个元素 $w \in S_\infty$ 都有一个相应的*对称 Grothendieck 函数* $G_w(\mathbf{z}) \in \mathbf{Sym}^\beta$，它是一种次数无界的对称形式幂级数。这些函数最初由 Fomin 和 Kirillov 于 [11], 从几何上看，它们是 *Lascoux 和 Sch*¨utzenberger [32], 的*Grothendieck 多项式*的稳定极限，有时也称为*稳定 Grothendieck 多项式*。它们还推广了 [44], 中的 Stanley 对称函数，这些函数可通过令 $\beta = 0$得到。精确定义见第 4.2 节。

有限对称 Grothendieck 函数的模上存在一种自然的双代数结构

$$\mathbf{G} := \mathbb{Z}[\beta]\text{-span}\{G_w : w \in S_\infty\} \tag{1.1}$$

$\mathbb{Z}[\beta]$-线性组合。为描述这一点，给定$u,\ v \in S_\infty$ 满足 $n = \max(\{0\} \sqcup \{i \in \mathbb{Z}_{>0} : u(i) \neq i\})$，记 $u \times v \in S_\infty$ 为由下式定义的元素

$$(u \times v)(i) = \begin{cases} u(i) & \text{if } i \in \{1, 2, \dots, n\} \\ v(i-n) + n & \text{if } i \in \{n+1, n+2, n+3, \dots\}. \end{cases}$$

此外，令 $\circ$ 表示 *Demazure* 乘积，它作用于 S_∞，这是唯一满足以下条件的结合二元运算：若 $u \circ v = uv$，则 $\ell(uv) = \ell(u) + \ell(v)$；若 $s \circ s = s$，则 $\ell(s) = 1$。

命题 1. **1** ([6])**.** 模 **G**在 $\mathbb{Z}[\beta]$-线性（余）乘法运算下构成一个双代数 s

$$G_u(\mathbf{z})G_v(\mathbf{z}) = G_{u\times v}(\mathbf{z}) \quad \text{and} \quad \Delta(G_w(\mathbf{z})) = \sum_{\substack{u,v\in S_\infty \\ u\circ v=w}} \beta^{\ell(u)+\ell(v)-\ell(w)} G_u(\mathbf{z}) \otimes G_v(\mathbf{z}),$$

这些运算扩展了有界次数对称函数 Hopf 代数上的通常（余）乘积。

证明。 这一结果隐含于 [6] 中。乘积公式可由 [7, Eq. (7)],作为练习推出，而余乘积公式可通过将 [28, Thm. 4.15] 特化得到。 □

若置换 $w \in S_\infty$ 至多有一个下降 $i \in \mathbb{Z}_{>0}$，且满足 $w(i) > w(i+1)$，则称其为 Grassmannian；此时，w 的形状为分拆 $\lambda = (w(i) - i, \dots, w(2) - 2, w(1) - 1)$。具有给定形状 λ 的所有 Grassmannian 置换都对应同一个对称 Grothendieck 函数，记作 $G_\lambda(\mathbf{z})$。以此方式得到的对称 Grothendieck 函数子集之所以重要，原因如下：

- Buch [6] 证明了 $G_\lambda(\mathbf{z})$ 有一个显式的表生成函数公式。具体而言，$G_\lambda(\mathbf{z})$ 是所有形状为 的半标准集合值表的 λ权生成函数。由此公式可推知，$G_\lambda(\mathbf{z})$ 在 $\mathbb{Z}[\beta]$上是线性无关的。

- Lascoux [30] 证明，对于每个 $w \in S_\infty$，都存在一个有限列表，其中包含（不一定互不相同的）Grassmannian 置换 $u_1,\ u_2,\ \dots\dots,\ u_k \in S_\infty$ 使得 $G_w(\mathbf{z}) = \sum_{i=1}^{k} \beta^{\ell(u_i)-\ell(w)} G_{u_i}(\mathbf{z})$。该结果的一个后续双射证明见 [7]。

- 由此可知，集合 $\{G_\lambda(\mathbf{z}) : \lambda$任意分拆$\}$ 构成双代数 $\mathbf{G}$ 的一组 $\mathbb{Z}[\beta]$-基；该双代数的乘积和余乘积的结构常数全都属于 $\mathbb{Z}_{\geq 0}[\beta]$。更进一步，Buch 的工作 [6]给出了这些系数的显式组合公式。

因此，在 A 型中，以 Grassmannian 置换为指标的对称 Grothendieck 函数组成一组基，为具有某些强正性性质的双代数提供基底。现在，我们的目标是说明如何将这些结果推广到其他经典类型 B、C 和 D。

1.2 K-Stanley 对称函数

带符号排列是一种双射 $w : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$，满足对所有 $i \in \mathbb{Z}$ 都有 $w(-i) = -w(i)$，并且对除有限多个之外的所有 $i \in \mathbb{Z}$ 都有 $w(i) = i$。定义 $W_\infty^{\mathsf{B}} = W_{\mathsf{C}\infty}$ 为所有带符号排列构成的群，并令 W_∞^{D} 为带符号排列的子群，其中排列的符号变化次数为偶数；也就是说，集合 $\{i \in \mathbb{Z}_{>0} : w(i) < 0\}$ 的大小为偶数。

受构造所有经典型旗簇中舒伯特簇的等变 K-理论代表元这一问题的启发，Kirillov 和 Naruse 提出了三种类似物

$G_w(\mathbf{z})$，分别由经典魏尔群 $W\mathrm{B}_\infty$、 W_∞^{C} 和 $W\mathrm{D}_\infty$ 中的每个群标记。这些幂级数记作 $G_w^{\mathsf{B}}(\mathbf{z})$、$G_w^{\mathsf{C}}(\mathbf{z})$ 和 $G_w^{\mathsf{D}}(\mathbf{z})$，同样属于 Sym^β，并称为 K-Stanley 对称函数。之所以采用这一术语，是因为令 $\beta = 0$ 后， $G_w^X(\mathbf{z})$ 会化为 [4] 中引入、并在 [5, 12, 26, 27] 中进一步研究的经典类型 Stanley 对称函数。精确定义见第 4.2 节。

固定一个类型 e $X \in \{\mathrm{B}、\mathrm{C}、\mathrm{D}\}$。那么我们可以考虑对称函数的子模

$$\mathbf{G}^X := \mathbb{Z}[\beta]\text{-span}\{G_w^X(\mathbf{z}) : w \in W_\infty^X\}. \tag{1.2}$$

我们的主要结果的一个推论是下面这个关于 $\mathbf{G}^X$ 的命题 1.1 类比。

定理 1.2。 模 $\mathbf{G}^{\mathsf{B}}$、$\mathbf{G}^{\mathsf{C}}$ 和 $\mathbf{G}^{\mathsf{D}}$ 是 $\mathbf{G}$ 的子双代数，其中 $\mathbf{G}^{\mathsf{C}} \subset \mathbf{G}^{\mathsf{B}} = \mathbf{G}^{\mathsf{D}}$。

这些双代数具有更精确的刻画。令 $\mathbf{SSym}^\beta$ 为幂级数 $f(\mathbf{z}) \in \mathbf{Sym}^\beta$ 的子环，其满足以下 K-超对称性性质，由 [18]引入：

$$f(t, \tfrac{-t}{1+\beta t}, z_3, z_4, z_5, \dots) = f(0, 0, z_3, z_4, z_5, \dots). \tag{1.3}$$

Ikeda 和 Naruse [18] 为 $\mathbf{SSym}^\beta$ 确定了两个特殊的伪基，它们分别由 K-理论 *Schur* P-函数和 Q-函数 $GP_\lambda(\mathbf{z})$ 以及 $GQ_\lambda(\mathbf{z})$ 给出。这些是某些 半标准集合值移位杨表 （形状为严格分拆 $\lambda = (\lambda_1 > \lambda_2 > \cdots > 0)$）的生成函数；详见第 4.3 节的详细回顾。有限线性组合的集合

$$\begin{aligned} \mathbf{GP} &:= \mathbb{Z}[\beta]\text{-span}\{GP_\lambda(\mathbf{z}) : \lambda \text{ any strict partition}\} \quad \text{and} \\ \mathbf{GQ} &:= \mathbb{Z}[\beta]\text{-span}\{GQ_\lambda(\mathbf{z}) : \lambda \text{ any strict partition}\} \end{aligned} \tag{1.4}$$

都是 $\mathbf{SSym}^\beta$ 的真子模。

模 $\mathbf{GP}$ 和 $\mathbf{GQ}$ 此前已在 [9, 10, 18, 37, 40]中研究过。已知二者在乘法下都是闭的，因而构成环 [37], ，并且有严格包含关系 $\mathbf{GQ} \subsetneq \mathbf{GP} \subsetneq \mathbf{G}$ [40, §3]。我们的结果将表明，这些子环实际上是子双代数。

带符号排列 w 是 *Grassmannian*，当且仅当 $w(i) < w(i+1)$ 对所有 $i \in \mathbb{Z}_{>0}$均成立。如果 w 具有这一性质，并且 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ 关于 $w(n) \leq 0$ 是极大的，那么我们可以定义两个严格分拆如下：

$$\begin{aligned} \lambda_{\mathsf{B}}(w) = \lambda_{\mathsf{C}}(w) &:= (-w(1), -w(2), \dots, -w(n)), \\ \lambda_{\mathsf{D}}(w) &:= (-w(1)-1, -w(2)-1, \dots, -w(n)-1). \end{aligned} \tag{1.5}$$

如果 $X \in \{\mathrm{B}、\mathrm{C}、\mathrm{D}\}$ 且 $w \in W_\infty^X$是 Grassmannian，满足 $\lambda = \lambda_X(w)$，那么已知 [21, §4.2] tha t

$$G_w^X(\mathbf{z}) = \begin{cases} GP_\lambda(\mathbf{z}) & \text{when } X \in \{\mathsf{B}, \mathsf{D}\} \\ GQ_\lambda(\mathbf{z}) & \text{when } X = \mathsf{C}. \end{cases} \tag{1.6}$$

下面的定理证实了 Kirillov–Naruse [21, Rem. 3] 和 Arroyo–Hamaker– Hawkes–Pan [2, Conj. 7.2]的预测。这里，我们记 ℓ^X 为 Coxeter 长度函数 $W_\infty^X \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$ （显式公式见 §2.3）。

定理 (参见定理 4.39)。 固定类型 $X \in \{\mathrm{B}、\mathrm{C}、\mathrm{D}\}$。那么对于每个 $w \in W_\infty^X$，都存在一个有限的（不一定互不相同的）Grassmann 元素列表 u_1， u_2， ……， $u_k \in W_\infty^X$，使得

$$G_w^X(\mathbf{z}) = \textstyle\sum_{i=1}^k \beta^{\ell^X(u_i) - \ell^X(w)} G_{u_i}^X(\mathbf{z})$$

因此，成立的是 $\mathbf{G}^{\mathsf{B}} = \mathbf{G}^{\mathsf{D}} = \mathbf{GP}$ 以及 $\mathbf{G}^{\mathsf{C}} = \mathbf{GQ}$。

我们将在第 4.6 节以更精确的形式证明这一结果。我们的方法提供了一种显式算法，用于确定 $G_w^X(\mathbf{z})$ 的 GP-和 GQ-展开（见推论 4.36），但如何像 [7] 那样，为相应的系数找到一个正的组合公式，仍是一个开放问题。近期论文 [2]为 C 型给出了一种此类公式的猜想。

定理 1.2 几乎完全可以由前面的讨论作为推论得出。现在只需说明每个子代数 $\mathbf{G}^X \subset \mathbf{G}$ 也是子余代数。我们通过以下方式证明这一性质。

第 4.3 节回顾的 $GP_\lambda(\mathbf{z})$ 和 $GQ_\lambda(\mathbf{z})$ 的移位杨表生成函数有自然的斜 analogues $GP_{\lambda/\mu}(\mathbf{z})$ 和 $GQ_{\lambda/\mu}(\mathbf{z})$，它们由严格分拆对索引，其中 $\mu \subset \lambda$ 的含义是 $\mu_i \leq \lambda_i$ 对所有 i 都成立。考虑 $\mathbf{G}$ 的余乘积时，这些函数自然出现，因为已知 [36, 推论 5.6]，即

$$\begin{aligned} &\Delta(GP_\lambda(\mathbf{z})) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}[\beta]\text{-span}\{GP_{\lambda/\kappa}(\mathbf{z}) \otimes GP_\mu(\mathbf{z}) : \kappa \subseteq \mu \subseteq \lambda\} \quad \text{and} \\ &\Delta(GQ_\lambda(\mathbf{z})) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}[\beta]\text{-span}\{GQ_{\lambda/\kappa}(\mathbf{z}) \otimes GQ_\mu(\mathbf{z}) : \kappa \subseteq \mu \subseteq \lambda\}. \end{aligned} \tag{1.7}$$

以下结果在第 4.3 节中证明，它将 [2, 定理 1.5] 从 C 型推广到其余经典类型 B 和 D。该结论表明 $\mathbf{G}^X \subset \mathbf{G}$ 是一个子余代数。

定理 （参见定理 4.23）。对于任意严格分拆 $\mu \subseteq \lambda$，存在带符号置换 $u,\ v \in W_{\mathsf{B}\infty} = W_{\mathsf{C}\infty}$ 和 $w \in W_{\mathsf{D}\infty}$，使得 $G_u^{\mathsf{B}}(\mathbf{z}) = G_w^{\mathsf{D}}(\mathbf{z}) = GP_{\lambda/\mu}(\mathbf{z})$ 且 $G_v^{\mathsf{C}}(\mathbf{z}) = GQ_{\lambda/\mu}(\mathbf{z})$。

我们强调一些主要结果的其他推论。将前述定理与 (1.6) 结合，可得以下推论，这正是 [36, 猜想 5.14] 所预言的：

推论 1.3. 存在系数 $f_{\lambda\mu}^\nu,\ g_{\lambda\mu}^\nu \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$，它们由严格分拆的三元组索引，且满足

$$GP_{\lambda/\mu} = \sum_\nu f_{\lambda\mu}^\nu \cdot \beta^{|\nu|+|\mu|-|\lambda|} \cdot GP_\nu \in \mathbf{GP} \quad \text{and} \quad GQ_{\lambda/\mu} = \sum_\nu g_{\lambda\mu}^\nu \cdot \beta^{|\nu|+|\mu|-|\lambda|} \cdot GQ_\nu \in \mathbf{GQ}.$$

当 $\mu \subseteq \lambda$ 固定时，整数 $f_{\lambda\mu}^\nu$ 和 $g_{\lambda\mu}^\nu$ 仅在有限多个 ν 取值下非零。

系数 $g_{\lambda\mu}^\nu$ 的一个猜想性组合公式见 [2,猜想 6.1]。我们可以用以下更强的陈述来概括这段讨论：

推论 1.4. 模 $\mathbf{GP}$ 和 $\mathbf{GQ}$ 是$\mathbf{G}$的子双代数，相应的集合$\{GP_\lambda : \lambda$ 严格$\}$ 和 $\{GQ_\lambda : \lambda$ 严格$\}$ 是正基，其意义是

$$\begin{aligned} GP_\lambda GP_\mu &= \sum_\nu A_{\lambda\mu}^\nu \cdot \beta^{|\nu|-|\lambda|-|\mu|} \cdot GP_\nu \qquad & \Delta(GP_\nu) &= \sum_\lambda \sum_\mu a_{\lambda\mu}^\nu \cdot \beta^{|\lambda|+|\mu|-|\nu|} \cdot GP_\lambda \otimes GP_\mu \\ GQ_\lambda GQ_\mu &= \sum_\nu B_{\lambda\mu}^\nu \cdot \beta^{|\nu|-|\lambda|-|\mu|} \cdot GQ_\nu \qquad \text{and} \qquad & \Delta(GQ_\nu) &= \sum_\lambda \sum_\mu b_{\lambda\mu}^\nu \cdot \beta^{|\lambda|+|\mu|-|\nu|} \cdot GQ_\lambda \otimes GQ_\mu \end{aligned}$$

对于某些非负整数 负整数 $A_{\lambda\mu}^\nu$、$B_{\lambda\mu}^\nu$、$a_{\lambda\mu}^\nu$、$b_{\lambda\mu}^\nu \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$，由严格分拆三元组标记。

证明。乘法结构常数 $A_{\lambda\mu}^\nu$ 和 $B_{\lambda\mu}^\nu$ 的正性已在 [37,定理 1.6]中得到证明。$\mathbf{GQ} \subsetneq \mathbf{GP} \subsetneq \mathbf{G}$ 的断言见 [40, §3]。余乘法结构常数的正性是新的，并由 (1.7) 和推论 1.3 推出。

□

关于 $A_{\lambda\mu}^\nu$ 的组合公式可由 [10, 43], 得知，但要为推论 1.4 中的其他系数找到类似表达式仍是一个未解决的问题；参见 [2, §6]中的猜想。数字 $a_{\lambda\mu}^\nu$ 和 $b_{\lambda\mu}^\nu$ 的非负性证实了 [39, 猜想 4.35 和 4.36]。

1.3 双重格罗滕迪克转移

Kirillov 和 Naruse 对 K-Stanley 对称函数 $G_w^X(\mathbf{z})$ 的定义，是他们为每一种经典型$X \in \{$双 *Grothendieck* 多项式 $\mathfrak{G}_w^X(\mathbf{x};\ \mathbf{y};\ \mathbf{z})$ 构造某些B、C、D$\}$的初步步骤。这些对象属于环

$$\mathbf{SSym}_\beta[\mathbf{x},\mathbf{y}] := \mathbf{SSym}_\beta[x_1, x_2, \ldots, y_1, y_2, \ldots],$$

推广了经典群的（双重）舒伯特多项式，这些多项式由 [4, 19]引入。我们将在第 4.4 节回顾 $\mathfrak{G}_w^X(\mathbf{x};\ \mathbf{y};\ \mathbf{z})$ 的精确定义，这里只强调 $\mathfrak{G}_w^X(\mathbf{0};\ \mathbf{0};\ \mathbf{z}) = G_w^X(\mathbf{z})$。

[21, §6] 中的结果表明，$\mathfrak{G}_w^X(\mathbf{x};\ \mathbf{y};\ \mathbf{z})$ 的某些特化表示了类型为 $X \in \{$B、C、D$\}$ 的完全旗簇 G/B 的等变 K-理论环中的（相反）舒伯特类。这些代表元具有若干理想的稳定性性质。特别是，将 $\mathfrak{G}_v^X(\mathbf{x};\ \mathbf{y};\ \mathbf{z})$ 与 $\mathfrak{G}_w^X(\mathbf{x};\ \mathbf{y};\ \mathbf{z})$ 相乘时的展开结构常数，与等变 K-理论环 $K_T(G/B)$ 的舒伯特基所对应的结构常数相同。

这些环此前已有研究，例如 [1, 14, 15, 25, 35, 42, 49]。其中最值得一提的是，Lenart 和 Postnikov [35] 证明了适用于所有类型的等变切瓦利公式，该公式给出了$K_T(G/B)$ 中的乘法规则。通过将这一规则转化为关于 $\mathfrak{G}_w^X(\mathbf{x};\ \mathbf{y};\ \mathbf{z})$ 的多项式恒等式，我们得以证明如下形式的转移公式：

定理（参见定理 4.35）。固定一个 B、C、D$\}$ 型和一个带符号排列 $w \in W_\infty^X$。令$a \in [1,\infty)$ 在满足 $w(a) > w(a+1)$ 的条件下取最大值，定义 $b \in [a+1,\infty)$ 为满足 $w(a) > w(b)$ 的最大值，并令 $v = w(a,\ b)(-a,\ -b)$ 和 $c = w(b)$。那么存在一个显式的 $\mathbb{Z}[\beta][\mathbf{y}]$-线性算子

$$\mathfrak{R}_a^X : \mathbb{Z}[\beta][\mathbf{y}]\text{-span}\left\{\mathfrak{G}_u^X(\mathbf{x};\mathbf{y};\mathbf{z}) : u \in W_\infty^X\right\} \to \mathbb{Z}[\beta][\mathbf{y}]\text{-span}\left\{\mathfrak{G}_u^X(\mathbf{x};\mathbf{y};\mathbf{z}) : u \in W_\infty^X\right\}$$

使得

$$\mathfrak{G}_w^X(\mathbf{x};\mathbf{y};\mathbf{z}) = (1+\beta y_c)(1+\beta x_a)\mathfrak{R}_a^X \mathfrak{G}_v^X(\mathbf{x};\mathbf{y};\mathbf{z}) - \mathfrak{G}_v^X(\mathbf{x};\mathbf{y};\mathbf{z})$$

其中，若 $c<0$，则令 ~~$y_c :=$~~ $\frac{-y_{|c|}}{1+\beta y_{|c|}}$。

该陈述的形式基于 A 型中的一个类似结果，该结果见于 Lascoux 未发表的著作 [31]，并由 Weigandt 通过组合方法证明 [48, 定理 3.1]。（我们在第 4.1 节给出另一种证明。）虽然从我们的表述中并不显然，但在前一定理中令 $\mathbf{x} = \mathbf{y} = 0$，将得到一个关于 $G_w^X(\mathbf{z})$ 的 $\mathbb{Z}_{\geq 0}[\beta]$-线性递推，可用于证明上一节的主要结果。这种方法与 [3, 19] 中用于上同调情形的方法类似（但更复杂）。

计算 $\mathfrak{G}_w^X(\mathbf{x};\ \mathbf{y};\ \mathbf{z})$ 的高效方法相当有限。对于 Grassmannian 带符号置换，[17, 21]中有杨表生成函数。Tamvakis [47] 针对某些斜带符号置换找到了若干相关公式。除这些情形外，计算或表示幂级数 $\mathfrak{G}_w^X(\mathbf{x};\ \mathbf{y};\ \mathbf{z})$ 并不容易。上述结果（定理 4.35）通过给出一种显式的有限算法来展开，为这个问题提供了递归解法。

$$\mathfrak{G}_w^X(\mathbf{x};\mathbf{y};\mathbf{z}) \in \mathbb{Z}[\beta][\mathbf{y}]\text{-span}\Big\{\mathfrak{G}_u^X(\mathbf{x};\mathbf{y};\mathbf{z}) : u \in W_\infty^X \text{ is Grassmannian}\Big\}. \tag{1.8}$$

本文其余部分的组织如下。第 2 节介绍根系和魏尔群的一些标准预备知识。第 3 节回顾 Lenart 和 Postnikov 关于等变 K理论的切瓦利公式，以及其在经典型中的特化。最后，第 4 节推导经典型中双 Grothendieck 多项式和 K-Stanley 对称函数的转移公式，从而证明本引言中概述的主要结果。

致谢

本文基于作者在参加“代数组合学中的范畴化与计算”学期项目期间驻留于罗得岛州普罗维登斯的数学计算与实验研究所时，获得美国国家科学基金会 DMS-1929284 号资助所开展的研究。作者还获得了香港研究资助局 16304122 和 16304625 号资助的部分支持。

我们感谢 David Anderson、Joshua Arroyo、Stephen Griffeth、Zachary Hamaker、Cristian Lenart、Jianping Pan、Brendan Pawlowski 和 Travis Scrimshaw 所进行的有益讨论。

2 预备知识

本节回顾经典型中有关根系和魏尔群的一些预备知识。这些内容主要用于建立本文的记号，遵循 [3, 19] 中的惯例。

2.1 一般设置

设 G 为一个连通、单连通的单复李群。尽管我们即将介绍的设置完全一般，但本文其他部分将只关注G 为以下某个经典群的情形：$\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$、$\mathrm{SO}_{2n}(\mathbb{C})$、$\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{C})$或 $\mathrm{SO}_{2n+1}(\mathbb{C})$。

取定一个博雷尔子群 $B \subset G$ 和一个极大环面 $T \subset B$。令 $\mathfrak{h}$ 为李代数 $\mathfrak{g}$ （对应于 G）的相应卡当子代数。令 $\Phi \subset \mathfrak{h}^*$ 为相应的不可约根系，并记 $V = \mathbb{R}\text{-span}\{\alpha \in \Phi\} \subset \mathfrak{h}^*$ 为根的实张成。令 $(\cdot,\ \cdot) : V \times V \to \mathbb{R}$ 为由 $\mathfrak{g}$ 上的基林形式诱导的非退化双线性形式。

选择 B 决定了将 $\Phi = \Phi^+ \sqcup -\Phi^+$ 划分为正根和负根。正根集合 正根 Φ^+ 因此包含唯一的一组 单根 $\Pi = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$，它们构成 $\mathbb{R}$ 的基 V。基本权 基本权 ω_1，ω_2，……，$\omega_n \in V$是满足以下条件的元素

$$(\omega_i, \alpha_j^\vee) = \delta_{ij} := |\{i\} \cap \{j\}|, \quad \text{where } \alpha^\vee := \tfrac{2}{(\alpha,\alpha)}\alpha \text{ for any } \alpha \in \Phi. \tag{2.1}$$

这些向量构成 $\mathbb{Z}$ 的基，属于权格

$$\Lambda = \{\lambda \in V : (v, \alpha^\vee) \in \mathbb{Z} \text{ for all } \alpha \in \Phi\}. \tag{2.2}$$

最后，魏尔群 $W \subset \mathsf{GL}(V)$ G 是由反射生成的（有限）群

$$r_\alpha : \begin{array}{ccc} V & \to & V \\ v & \mapsto & v - (v, \alpha^\vee)\alpha \end{array} \quad \text{for all } \alpha \in \Phi^+. \tag{2.3}$$

较小的集合 $S = \{r_\alpha : \ \alpha \in \Pi\}$ 也生成 W，并且对 $W, S)$ 而言，($\ell(w) = |\{\alpha \in \Phi^+ : \ w(\alpha) \notin \Phi^+\}|$. 我们将 $w_0 \in W$ 记作魏尔群中的唯一最长元素，其长度为 $\ell(w_0) = |\Phi^+|$。

2.2 经典群的记号

我们固定一些记号，以描述当 G 是经典群时所关注的主要情形。全文中，n 表示一个正整数，且 $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$。我们用 $\binom{[n]}{2}$ 表示由满足 $i \neq j$的 $\{i, j\} \subset [n]$ 构成的二元子集集合。令 ε_1、ε_2、……、ε_n 为 $\mathbb{R}^n$ 的标准基，并令（·、·）为 $\mathbb{R}^n$ 上的通常双线性型，其中（ε_i、ε_j）$= \delta_{ij}$。

2.2.1 A 型

在 A 型$_{n-1}$ 中，当 $G = \mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ 时，我们选择 $T \subset B \subset G$ 和 $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$，使得正根 Φ^+和单根 Π 为

$$\begin{aligned} \Phi^+_{\mathsf{A}_{n-1}} &= \Big\{\varepsilon_j - \varepsilon_i : 1 \le i < j \le n\Big\} \quad \text{and} \\ \Pi_{\mathsf{A}_{n-1}} &= \Big\{\alpha_i = \varepsilon_{i+1} - \varepsilon_i : i \in [n-1]\Big\}, \end{aligned} \tag{2.4}$$

视为商向量空间 $V = \mathbb{R}^n/\mathbb{R}\text{-span}\{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_n\}$ 的子集。在 V 上的双线性型定义为：当 $|i-j| > 1$ 时，令 $(\alpha_i, \alpha_i) = 2$、$(\alpha_i, \alpha_{i\pm1}) = -1$，且 $(\alpha_i, \alpha_j) = 0$，

使得对所有根 $\alpha \in \Phi$，都有 $\alpha^\vee = \alpha$。基本权为

$$\omega_i = \varepsilon_{i+1} + \varepsilon_{i+2} + \cdots + \varepsilon_n \quad \text{for } 1 \le i \le n-1. \tag{2.5}$$

注意，$-\omega_1 = \varepsilon_1 \in V$，而对于 $i \in [n-2]$，$\omega_i - \omega_{i+1} = \varepsilon_{i+1}$ 且 $\omega_{n-1} = \varepsilon_n$.

令 $s_i = r_{\alpha_i}$ 以换位 $(i, i+1)$ 的方式作用于 $\mathbb{Z}$，从而确定一个同构 $W \cong S_n$。其中，对称群 S_n 定义为所有在 $\mathbb{Z}$ 上、且固定 $[n]$ 之外所有点的置换所构成的集合。$S_n = \langle s_1, s_2, \ldots, s_{n-1}\rangle$ 的最长元素是逆序置换 $w_0 = n \cdots 321$。

2.2.2 B型

对于其他三个经典群，环境向量空间为 $V = \mathbb{R}^n$，并配备满足 $(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = \delta_{ij}$ 的标准双线性形式 $(\cdot,\cdot)$。在 B 型中$_n$，当 $G = \mathrm{SO}_{2n}(\mathbb{C})$ 时，我们选择 $T \subset B \subset G$ 和 $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$，使得正根 Φ^+ 和单根 Π 为以下集合

$$\begin{aligned} \Phi^+_{\mathsf{B}_n} &= \Big\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n\Big\} \sqcup \Big\{\varepsilon_j \pm \varepsilon_i : 1 \le i < j \le n\Big\} \quad \text{and} \\ \Pi_{\mathsf{B}_n} &= \Big\{\alpha_0 = \varepsilon_1\Big\} \sqcup \Big\{\alpha_i = \varepsilon_{i+1} - \varepsilon_i : i \in [n-1]\Big\}. \end{aligned} \tag{2.6}$$

基本权为

$$\begin{aligned} &\omega_0 = \tfrac{1}{2}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_n) \text{ and} \\ &\omega_i = \varepsilon_{i+1} + \varepsilon_{i+2} + \cdots + \varepsilon_n \text{ for } 1 \le i \le n-1. \end{aligned} \tag{2.7}$$

令 $t_0 = r_{\alpha_0}$ 作用于 $\mathbb{Z}$ 上为换位 $(-1,1)$，并令当 $i > 0$ 时，$t_i = r_{\alpha_i}$ 作用为 $(i, i+1)(-i, -i-1)$，即可确定一个同构 $W \cong W_{\mathsf{B}n}$；其中，W_n^{B} 是由满足以下条件的双射$w : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ 构成的群：固定所有数字 $i > n$，且对所有 $i \in \mathbb{Z}$，都有 $w(-i) = -w(i)$。

$w \in W_n^{\mathsf{B}}$ 的单行表示是序列 $w(1)w(2)\cdots w(n)$。以这种方式书写元素时，我们用记号 $\overline{a}$ 代替 $-a$。例如，我们有 $W_2^{\mathsf{B}} = \{\underline{12},\ \underline{21},\ \underline{12},\ 21,\ 12,\ 21,\ 12,\ \overline{21}\}$. 最长元素 $W_n^{\mathsf{B}} = \langle t_0, t_1, \ldots, t_{n-1}\rangle$ 为 $w_0 = \underline{123}\cdots\underline{n}$。

2.2.3 C 型

在 C 型中，当 $G = \mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{C})$ 时，我们选择 $T \subset B \subset G$ 和 $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$，使得 Φ^+ 和 Π 为

$$\begin{aligned} \Phi^+_{\mathsf{C}_n} &= \Big\{2\varepsilon_1, 2\varepsilon_2, \ldots, 2\varepsilon_n\Big\} \sqcup \Big\{\varepsilon_j \pm \varepsilon_i : 1 \le i < j \le n\Big\} \quad \text{and} \\ \Pi_{\mathsf{C}_n} &= \Big\{\alpha_0 = 2\varepsilon_1\Big\} \sqcup \Big\{\alpha_i = \varepsilon_{i+1} - \varepsilon_i : i \in [n-1]\Big\}. \end{aligned} \tag{2.8}$$

基本权为

$$\omega_i = \varepsilon_{i+1} + \varepsilon_{i+2} + \cdots + \varepsilon_n \text{ for } 0 \le i \le n-1 \tag{2.9}$$

魏尔群 W的描述与 B型$_n$中的相同。为方便起见，令 $W_n^{\mathsf{C}} := W_{\mathsf{B}n}$.

2.2.4 D型

在 D型$_n$ 中，当 $G = \mathrm{SO}_{2n+1}(\mathbb{C})$ 时，我们选择 $T \subset B \subset G$ 和 $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$，使得 Φ^+ 和 Π 为

$$\begin{aligned} \Phi^+_{\mathsf{D}_n} &= \Big\{ \varepsilon_j \pm \varepsilon_i : 1 \le i < j \le n \Big\} \quad \text{and} \\ \Pi_{\mathsf{D}_n} &= \Big\{ \alpha_{-1} = \varepsilon_2 + \varepsilon_1 \Big\} \sqcup \Big\{ \alpha_i = \varepsilon_{i+1} - \varepsilon_i : i \in [n-1] \Big\}. \end{aligned} \tag{2.10}$$

基本权为

$$\begin{aligned} \omega_{-1} &= \tfrac{1}{2}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_n), \\ \omega_1 &= \tfrac{1}{2}(-\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_n), \text{ and} \\ \omega_i &= \varepsilon_{i+1} + \varepsilon_{i+2} + \cdots + \varepsilon_n \text{ for } 2 \le i \le n-1. \end{aligned} \tag{2.11}$$

令 $t_{-1} = r_{\alpha_{-1}}$ 在 $\mathbb{Z}$ 上作用为置换 $(1,-2)(2,-1)$，同时令 $t_i = r_{\alpha_i}$ 对 $i > 0$的作用为 $(i, i+1)(-i, -i-1)$，由此确定一个同构 $W \cong W_n^{\mathsf{D}}$，其中 $W_{\mathsf{D}n}$ 是由满足以下条件的元素 $w \in W_n^{\mathsf{B}}$ 构成的子群：满足 $w(i) < 0$ 的整数 $i \in [n]$ 的个数为偶数。Coxeter 群 $W_n^{\mathsf{D}} = \langle t_{-1}, t_1, t_2, \ldots, t_{n-1} \rangle$ 的最长元素为

$$w_0 = \begin{cases} \overline{123} \cdots \overline{n} & \text{when } n \text{ is even,} \\ 1\overline{23} \cdots \overline{n} & \text{when } n \text{ is odd.} \end{cases} \tag{2.12}$$

2.3 无限秩魏尔群

按照我们的约定，对于所有正整数 n， $S_n \subset S_{n+1}$, $W_n^{\mathsf{B}} \subset W_{\mathsf{B}n+1}$以及 $W_{\mathsf{D}n} \subset W_{\mathsf{D}n+1}$ 自然成立。无限并

$$S_\infty := \bigcup_{n \ge 1} S_n \quad \text{and} \quad W_\infty^{\mathsf{B}} := \bigcup_{n \ge 1} W_n^{\mathsf{B}} \quad \text{and} \quad W_\infty^{\mathsf{D}} := \bigcup_{n \ge 1} W_n^{\mathsf{D}} \tag{2.13}$$

也都是 Coxeter 群，分别由正整数上的所有有限支撑置换、 $\mathbb{Z}$上的所有有限支撑带符号置换，以及所有有限支撑偶带符号置换构成。为方便起见，我们还设 $W_{\mathsf{A}_\infty} = \langle t_1, \ t_2, \ t_3, \ \ldots \rangle$ 以及 $W_{\mathsf{C}\infty} := W_\infty^{\mathsf{B}}$.

注 2.1。 注意， $S_\infty = \langle s_1, \ s_2, \ s_3, \ \ldots \rangle$ 在严格意义上不同于子群

$$W_\infty^{\mathsf{A}} = \langle t_1, t_2, t_3, \ldots \rangle \subsetneq W_\infty^{\mathsf{D}} = \langle t_{-1}, t_1, t_2, t_3, \ldots \rangle \subsetneq W_\infty^{\mathsf{B}} = W_\infty^{\mathsf{C}} = \langle t_0, t_1, t_2, t_3, \ldots \rangle.$$

然而，发送 $s_i \mapsto t_i$ 的映射确定了 Coxeter 群 $S_\infty \to W_\infty^{\mathsf{A}}$ 之间的同构。我们有时会通过此双射来识别这两个群的元素。

S_∞、$W_{\mathsf{B}\infty} = W_{\mathsf{C}\infty}$ 和 W_∞^{D} 的 Coxeter 长度函数，对于每个 $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ 都限制为 S_n、$W_{\mathsf{B}_n} = W_{\mathsf{C}_n}$ 和 W_n^{D} 的相应长度函数。这些映射的公式为 [3, §3]

$$\ell^{\mathsf{A}}(w) := \mathsf{inv}(w), \quad \ell^{\mathsf{B}}(w) = \ell^{\mathsf{C}}(w) := \tfrac{\mathsf{inv}(w)+\ell_0(w)}{2}, \quad \text{and} \quad \ell^{\mathsf{D}}(w) := \tfrac{\mathsf{inv}(w)-\ell_0(w)}{2} \tag{2.14}$$

其中，对于任意有限支撑置换 w of $\mathbb{Z}$，我们定义

$$\begin{aligned} \mathsf{inv}(w) &:= |\{(i,j) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} : i<j \text{ and } w(i)>w(j)\}| \quad \text{and} \\ \ell_0(w) &:= |\{i \in \mathbb{Z}_{>0} : w(i) < 0\}|. \end{aligned} \tag{2.15}$$

Coxeter 群中的反射是与简单生成元共轭的元素。在 S_∞中，这些元素是形如 (i, j) 的对换，其中 $1 \le i < j$。

为表示 $W_{\mathsf{B}_\infty} = W_\infty^{\mathsf{C}}$ 和 $W_{\mathsf{D}\infty}$ 中的反射，我们定义

$$t_{ij} := (i,j)(-j,-i) \in W_\infty^{\mathsf{D}} \quad \text{and} \quad t_{0k} := (-k,k) \in W_\infty^{\mathsf{B}} = W_\infty^{\mathsf{C}} \tag{2.16}$$

对于所有满足 $k \neq 0$ 的整数 i，j，$k \in \mathbb{Z}$。用 [3], 的记号，我们有

$$t_{0k} = s_{kk} \quad \text{and} \quad t_{-i,j} = s_{ij} \quad \text{for } i,j,k \in [n] \text{ with } i \neq j. \tag{2.17}$$

注意到 $t_{jj} = t_{-j,\,j} = 1$，并且 $t_{ij} = t_{ji} = t_{-i,\,-j} = t_{-j,\,-i}$。$W_\infty^{\mathsf{B}} = W^{\mathsf{C}\infty}$ 中互不相同的反射由满足 $|i| < j$ 的元素 t_{ij} 构成。$W_{\mathsf{D}\infty}$ 中的反射由同一集合构成，但对所有 $j \in \mathbb{Z}_{>0}$，排除 t_{0j}。

我们在本节末回顾引理 1 和 2] 中的性质，这些性质刻画了经典魏尔群元素乘以一个反射后长度恰好增加一的情形。

引理 2.2 ([3, 引理 1])。固定 $X \in \{\mathsf{A}, \mathsf{B}, \mathsf{C}, \mathsf{D}\}$ 并记 $\ell = \ell^X$。假设 $t = t_{ij} = (i,\ j)(-i,\ -j)$，其中 $0 < i < j$。那么，$w \in W_\infty^X$ 具有 $\ell(wt) = \ell(w) + 1$ 当且仅当

$$w(i) < w(j) \quad \text{and} \quad \text{no } e \in \mathbb{Z} \text{ exists with } i < e < j \text{ and } w(i) < w(e) < w(j).$$

引理 2.3 ([3, 引理 2])。固定 $X \in \{\mathsf{B}, \mathsf{C}\}$ 并记 $\ell = \ell^X$。假设 $t = t_{0j} = (-j,\ j)$，其中$0 < j$。那么，$w \in W_\infty^X$ 具有 $\ell(wt) = \ell(w) + 1$ 当且仅当

$$0 < w(j) \quad \text{and} \quad \text{no } e \in \mathbb{Z} \text{ exists with } 0 < e < j \text{ and } -w(j) < w(e) < w(j).$$

引理 2.4 ([3, 引理 2])。固定 $X \in \{\mathsf{B}, \mathsf{C}, \mathsf{D}\}$ 并记 $\ell = \ell^X$。令 $t = t_{-i,\,j} = (-i,\ j)(i,\ -j)$，其中 $0 < i < j$。那么，$w \in W_\infty^X$ 具有 $\ell(wt) = \ell(w) + 1$ 当且仅当满足以下条件：

(a) 我们有 $-w(i) < w(j)$；

(b) 当 $X = \mathsf{B}$ 时，要么 $w(i) < 0$，要么 $w(j) < 0$；

(c) 不存在满足 $0 < e < i$ 且 $-w(j) < w(e) < w(i)$ 的 $e \in \mathbb{Z}$；以及

(d) 不存在满足 $0 < e < j$ 且 $-w(i) < w(e) < w(j)$ 的 $e \in \mathbb{Z}$。

记下降集的 $w \in W_\infty^{\mathsf{B}}$ 为 $\mathsf{Des}(w) = \{i \in \mathbb{Z}_{>0} : w(i) > w(i+1)\}$。然后，按照[3, §5], 我们定义最小下降的 $w \in W_\infty^{\mathsf{B}}$ 为非负整数

$$\mathsf{LD}(w) = \max\left(\{0\} \sqcup \mathrm{Des}(w)\right) \in \mathbb{Z}_{\ge 0}. \tag{2.18}$$

引理 2.2、2.3 和 2.4 的以下技术性推论将在第 4.6 节中使用。

引理 2.5. 固定 $X \in \{\mathsf{B},\mathsf{C},\mathsf{D}\}$ 和 $n \in \mathbb{Z}_{>0}$。假设 $w \in W_n^X$。选取整数 $i \in \mathbb{Z}$ 和 $k \in [n]$，使得 $i < k$ 满足 $t := t_{ik} \in W_\infty^X$ 且 $\ell^X(wt) = \ell^X(w) + 1$。则有：

(a) $wt \in W_{n+1}^X$；(b) $wt(k) < w(k)$；以及 (c) $\mathrm{Des}(wt) \subseteq \mathrm{Des}(w) \cup \{k-1\}$。

此外，若还有 $wt \notin W_n^X$，则以下附加性质成立：

(d) $i = -n-1$；以及 (e) 对所有满足 $t_{jk} \in W_\infty^X$ 的整数 $i < j < k$，$\ell^X(wt \cdot t_{jk}) \neq \ell^X(wt) + 1$。

证明。若 $-n \leq i < k$，则 $t \in W_n^X$，因此 $wt \in W_n^X$；若 $i < -n-1$，则由引理 2.4 得 $\ell(wt) \neq \ell(w) + 1$。只有在剩下的情形，即 $i = -n-1$ 且 $t \in W_{n+1}^X$ 时，才可能有 $wt \in W_{n+1}^X$。这证明了 (a) 部分，也说明若 $wt \notin W_n^X$，则 $i = -n-1$。在此情形下，对所有 $i < j < k$，均有 $wt(k) = -n-1$ 且 $-n \leq wt(j) \leq n$，因此由引理 2.2、2.3 和 2.4 可知 (e) 部分显然成立。

由相同的引理也可清楚看出 (b) 部分。只需检验 (c) 部分。若 $0 < i < k$，则引理 2.2 表明，$\mathrm{Des}(wt)$ 是通过同时移除 $i-1$（当 $i > 1$ 和 $w(k) > w(i-1) > w(i)$ 时）、移除 k（当 $w(k) > w(k+1) > w(i)$ 时），并在 $i = k-1$ 的情况下添加 $k-1$，由 $\mathrm{Des}(w)$ 得到的。因此，此时所需的包含关系 $\mathrm{Des}(wt) \subseteq \mathrm{Des}(w) \cup \{k-1\}$ 显然成立。若 $i < 0 < k$，则可验证 $\mathrm{Des}(wt) \subseteq \mathrm{Des}(w)$；参见 [3, 引理 3]。□

3 等变切瓦利公式

本节回顾 Lenart 和 Postnikov [35] 提出的等变 K-理论环 G/B 的乘法规则。我们首先介绍该规则的原始版本，接着将其改写为适用于反 Schubert 类基底的形式，最后给出专用于经典型的更简洁形式。本节的主要结果是定理 3.3 和 3.9，以及推论 3.10 和 3.12。

3.1 等变 K 理论环

我们回到第 2.1 节的一般设定。下面，我们根据 [35, §3] 回顾完全旗簇 G/B 的等变 K 理论环 $K_T(G/B)$ 的标准表示。

设 $\mathbb{Z}[\Lambda]$ 和 $\mathbb{Z}[X]$ 是自由的 $\mathbb{Z}$ 模，其基分别由形式符号 e^λ 和 x^λ 给出，其中 $\lambda \in \Lambda$。这些阿贝尔群是环，其乘法规则为

$$e^\lambda e^\mu = e^{\lambda+\mu} \quad \text{and} \quad x^\lambda x^\mu = x^{\lambda+\mu}.$$

我们将 $\mathbb{Z}[\Lambda]$ 视为权格的群代数，将 $\mathbb{Z}[X]$ 视为 T 的特征群的表示环。$\mathbb{Z}[\Lambda] = \mathbb{Z}[e^{\pm\omega_1}, \ldots, e^{\pm\omega_n}]$ 和 $\mathbb{Z}[X] = \mathbb{Z}[x^{\pm\omega_1}, \ldots, x^{\pm\omega_n}]$ 都同构于具有 n 个变量的劳朗多项式环。

等变 K-理论环 $K_T(G/B)$ 是相干 T-等变层在 G/B 上的 Grothendieck 环。该环自然是一个 $\mathbb{Z}[X]$-模，且事实证明它是自由的 [25]。下文将介绍一些特殊的 $\mathbb{Z}[X]$-基。

环 $K_T(G/B)$ 同构于 $\mathbb{Z}[X]\otimes\mathbb{Z}[\Lambda]$ 的以下商。魏尔群W 通过 $w(e^\lambda):=e^{w(\lambda)}$作用于 $\mathbb{Z}[\Lambda]$ 。令 $\mathbb{Z}[\Lambda]^W$ 为 W-不变元素构成的子代数。记$\iota:\mathbb{Z}[\Lambda]\to\mathbb{Z}[X]$ 为将 $e^\lambda\mapsto x^\lambda$ 映射到的同构，并考虑理想

$$I:=\left\langle \iota(f)\otimes 1-1\otimes f : f\in\mathbb{Z}[\Lambda]^W\right\rangle\subset\mathbb{Z}[\Lambda]\otimes\mathbb{Z}[X]. \tag{3.1}$$

对于每个 $\lambda\in\Lambda$，令 $\mathbb{C}_{-\lambda}$ 为一维复 B-表示，其特征在 T 上限制为 $-\lambda$；定义 $\mathcal{L}_\lambda:=G\times_B\mathbb{C}_{-\lambda}$ 为与权 $\lambda\in\Lambda$ 相关联的、位于 G/B 上的线丛，并将其在 $K_T(G/B)$ 中的类记为 $[\mathcal{L}_\lambda]$。于是存在唯一的 $\mathbb{Z}[X]$-代数同构

$$K_T(G/B)\xrightarrow{\sim}(\mathbb{Z}[X]\otimes\mathbb{Z}[\Lambda])/I \tag{3.2}$$

将 $[\mathcal{L}_\lambda]\mapsto e^{-\lambda}.$ 送至 K_T。我们将 $K_T(G/B)$ 与其在该映射下的像等同，因此从现在起

$$[\mathcal{L}_\lambda]=e^{-\lambda}\in K_T(G/B)\quad\text{for all }\lambda\in\Lambda. \tag{3.3}$$

旗簇 G/B 是一个光滑射影簇，可分解为以下互不相交并：舒伯特胞腔 BwB/B 它们由魏尔群 $w\in W$中的元素索引。舒伯特簇

$$X_w:=\overline{BwB/B}\quad\text{for }w\in W \tag{3.4}$$

是相应舒伯特胞腔的闭包。在此记号下，子簇 X_w 的维数为$\ell(w)$，余维数为 $\ell(w_0)-\ell(w)$，并且有 $X_u\subseteq X_v$ 当且仅当 $u\le v$ 在 （强）布鲁哈特序 中 W （参见 [35,§2]）。

对于每个 $w\in W$ 令 $\mathcal{O}_{X_w}$ 为 X_w的结构层，并将 $[\mathcal{O}_{X_w}]$ 写作 $K_T(G/B$中的对应类。这些 舒伯特类 构成 $K_T(G/B$作为自由 $\mathbb{Z}[X]$-模 $[25,\S4]$的一组基。由于 $X_{w_0}=G/B$ 的余维数为零，因此有

$$[\mathcal{O}_{X_{w_0}}]=1\in K_T(G/B). \tag{3.5}$$

Lenart 和 Postnikov [35, 引理 8.1] （另见 [15, 等式 (0.3)]）在余维数为一的情形下，给出了 $[\mathcal{O}_{X_w}]$ 的一个简明公式：若 $\alpha_k\in\Pi$ 是单根且 $s_k=r_{\alpha_k}\in W$，则

$$[\mathcal{O}_{X_{w_0s_k}}]=1-x^{-w_0(\omega_k)}[\mathcal{L}_{-\omega_k}]=1-x^{-w_0(\omega_k)}e^{\omega_k}\in K_T(G/B) \tag{3.6}$$

其中 $\omega_k\in\Lambda$ 是满足 $(\omega_k,\ \alpha_k^\vee)=1$的唯一基本权。

备注 3.1。 文献中在研究 $K_T(G/B)$ 时，记号上存在一些容易造成混淆的差异 [1, 14, 15, 25, 35, 42, 49] 。下表试图澄清这一情况：

此处的符号以及在 [35]中	[15]中的符号	[1, 14]中的符号	[42]中的符号
$\mathcal{L}_\lambda$	X^λ	$\mathcal{L}(\lambda)$	$\mathcal{L}_{-\lambda}$
$e^\lambda=[\mathcal{L}_{-\lambda}]$	$[X^{-\lambda}]$	$[\mathcal{L}(-\lambda)]$	$[\mathcal{L}_\lambda]$
x^λ	$e^{-\lambda}$	e^λ	e^λ

最后，存在一个环对合 $*:K_T(G/B)\to K_T(G/B)$，将 $x^\lambda e^\mu\mapsto x^{-\lambda}e^{-\mu}$ 映射为相应对象，而 [35] 中的大多数结果都是用修正后的舒伯特类 $[\mathcal{O}_w]:=*[\mathcal{O}_{X_w}]$ 来表述的。

3.2 Lenart–Postnikov 切瓦利公式

在本节中，我们始终固定一个任意的权 $\lambda \in \Lambda$。这里，我们回顾由 *Lenart 和 Postnikov*证明的切瓦利公式，该公式将 $[\mathcal{L}_\lambda] \cdot [\mathcal{O}_{X_w}]$ 在 K_T的舒伯特基中展开（G/B）。

定义 3.2 （见 [35, §6]）。 定义 $\mathcal{S}_\lambda$ 为满足以下条件的有序对集合 (α, k):

$$(\lambda, \alpha^\vee) \neq 0 \quad \text{and} \quad \begin{cases} 0 \leq k < (\lambda, \alpha^\vee) & \text{if } (\lambda, \alpha^\vee) > 0, \\ 0 > k \geq (\lambda, \alpha^\vee) & \text{if } (\lambda, \alpha^\vee) < 0. \end{cases} \tag{3.7}$$

现在，令 $<$ 为 $\mathcal{S}_\lambda$ 上的全序，使得 $(\alpha, k) < (\alpha', k')$ 当且仅当 $h((\alpha, k)) < h((\alpha', k'))$ 在 $\mathbb{R}^{n+1}$上的字典序中成立，其中 $h\colon \mathcal{S}_\lambda \to \mathbb{R}^{n+1}$ 是将.....映射到.....的映射

$$(\alpha, k) \mapsto \tfrac{1}{(\lambda, \alpha^\vee)} \begin{bmatrix} k & (\omega_1, \alpha^\vee) & (\omega_2, \alpha^\vee) & \cdots & (\omega_n, \alpha^\vee) \end{bmatrix}^\top. \tag{3.8}$$

最后，假　　设相对于此全序，$\mathcal{S}_\lambda = \{(\alpha_1, k_1) < (\alpha_2, k_2) < \cdots < (\alpha_m, k_m)\}$.

给定 $\beta = (\alpha, k) \in \mathcal{S}_\lambda$，令 $r_\beta^{\mathrm{aff}}\colon V \to V$表示仿射反射

$$r_\beta^{\mathrm{aff}}(v) = r_\alpha(v) + k\alpha = v - (v, \alpha^\vee)\alpha + k\alpha. \tag{3.9}$$

对于每个集合 $J = \{j_1 < \cdots < j_l\} \subseteq [m]$，令

$$n(J) = |\{j \in J : k_j < 0\}|. \tag{3.10}$$

最后，定义 $r_J^{[p]} = r_{\alpha_{j_1}} \cdots r_{\alpha_{j_p}}$（$p \in [l]$），以及 $r_J = r_{\alpha_{j_1}} \cdots r_{\alpha_{j_l}}$ 和 $r_J^{\mathrm{aff}} = r_{\beta_{j_1}}^{\mathrm{aff}} \cdots r_{\beta_{j_l}}^{\mathrm{aff}}$.

定理 3.3 (Lenart–Postnikov [35, 定理 6.1 和命题 6.7])。 若 $u \in W$，则

$$[\mathcal{L}_\lambda] \cdot [\mathcal{O}_{X_{w_0 u}}] = \sum_{w \in W} \sum_{\mu \in \Lambda} b_{u,w}^{\lambda,\mu} \cdot x^{-w_0(\mu)} \cdot [\mathcal{O}_{X_{w_0 w}}]$$

其中 $b^{\lambda,\mu}_{u,w} = \sum_J (-1)^{n(J)}$ 是对所有满足以下性质的子集 $J \subseteq [m]$ 求和:

$$\mu = u \cdot r_J^{\mathrm{aff}}(\lambda), \quad w = u \cdot r_J, \quad \text{and} \quad \ell(u \cdot r_J^{[p]}) = \ell(u) + p \text{ for all } 1 \leq p \leq |J|. \tag{3.11}$$

注3.4。 要看出定理 3.3 与 [35, §6], 中结果的等价性，注意到

(1) 我们的集合 $\mathcal{S}_\lambda$ 与 [35, 命题 6.7] 中的集合 $\mathcal{R}_\lambda$ 之间有如下关系: $\mathcal{S}_\lambda = \{(\alpha, -k) : (\alpha, k) \in \mathcal{R}_\lambda\}$;

(2) 我们的系数 $b^{\lambda,\mu}_{u,w}$ 与 [35, 定理 6.1] 中的数 $c^{\lambda,\mu}_{w_0 u, w_0 w}$ 之间的关系为 $b^{\lambda,\mu}_{u,w} = c^{\lambda,w_0\mu}_{w_0 u, w_0 w}$。

Lenart 和 Postnikov 在 [35, §15 和§16] 中给出了几个例子来说明定理 3.3。由于我们的重点是下一节中针对反 *Schubert* 类 给出的重新表述，因此这里不再重现这些例子。

3.3 反 Schubert 类的重新表述

定义 对偶施*ubert*簇 $v \in W$ 为

$$X^v = w_0 X_{w_0 v} \subseteq G/B \tag{3.12}$$

其中 $w_0 \in W$ 仍表示魏尔群的最长元素。等价地，这是对偶波雷尔子群 $B_- = w_0 B w_0$ 作用于 G/B的轨道的闭包。每个簇 X^v的维数为 $\ell(w_0) - \ell(v)$，余维数为 $\ell(v)$。

反 Schubert 簇的结构层的类 $[\mathcal{O}_{X^w}] \in K_T(G/B)$ 为 $\mathbb{Z}[X]$的等变 K理论环 G/B提供了另一组 $\mathbb{Z}[X]$-基。为使记号更加简洁，我们定义

$$\Theta_w := [\mathcal{O}_{X^w}] \in K_T(G/B) \quad \text{for each } w \in W. \tag{3.13}$$

由于 $X^1 = w_0 X_{w_0} = w_0 G/B = G/B$，我们有

$$\Theta_1 = 1 \in K_T(G/B). \tag{3.14}$$

许多其他值得关注的“反向”公式都可以利用下面来自 [42],的结果推导出来；该结果推广了诸如 [14, Rem.3.11] 和 [14,Lem.7.5]之类的早期观察。

引理 3.5 （参见 [42, §5.2 和 §9.2.2]）。环对合 w_0^L: $K_T(G/B) \to K_T(G/B)$，将$x^\lambda e^\mu \mapsto x^{w_0(\lambda)} e^\mu$映射为 λ, $\mu \in \Lambda$ 对所有 $v \in W$，其在舒伯特类上的作用为 $w_0^L([\mathcal{O}_{w_0 v}]) = \Theta_v$。

对等式（3.6）两边应用 w_0^L，得到:

推论 3.6. 若 $\alpha_k \in \Pi$ 是单根，且$s_k = r_{\alpha_k} \in S$，则

$$\Theta_{s_k} = 1 - x^{-\omega_k}[\mathcal{L}_{-\omega_k}] = 1 - x^{-\omega_k} e^{\omega_k} \in K_T(G/B)$$

其中， $\omega_k \in \Lambda$ 仍是满足（ω_k, $\alpha_k^\vee$）$= 1$的唯一基本权 .

当 c 是排列或带符号排列，且 G 分别是 A_{n-1}、B_n、C_n或 D_n型的经典群时，我们用 Θ_v^{A}、 Θ_v^{B}、Θ_v^{C}和 Θ_v^{D}代替 Θ_v。

例 3.7. 当 $\ell(v) = 1$时，我们可以利用推论 3.6 计算 Θ_v^X。

(a) 在 A_{n-1} 型中，当 $G = \mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$时，对每个 $k \in [n-1]$，我们有

$$\begin{aligned} 1 - \Theta_{s_k}^{\mathsf{A}} = x^{-\omega_k} e^{\omega_k} &= x^{-\varepsilon_{k+1} - \cdots - \varepsilon_n} e^{\varepsilon_{k+1} + \cdots + \varepsilon_n} \\ &= x^{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_k} e^{-\varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \cdots - \varepsilon_k} = \textstyle\prod_{i \in [k]} x^{\varepsilon_i} e^{-\varepsilon_i}. \end{aligned}$$

（b）在B型$_n$ 中，当 $G = \mathrm{SO}_{2n}(\mathbb{C})$时，对于每个 $k \in [n-1]$，我们有

$$\begin{aligned} (1 - \Theta_{t_0}^{\mathsf{B}})^2 = x^{-2\omega_0} e^{2\omega_0} &= \textstyle\prod_{i=1}^n x^{-\varepsilon_i} e^{\varepsilon_i}, \\ 1 - \Theta_{t_k}^{\mathsf{B}} = x^{-\omega_k} e^{\omega_k} &= \textstyle\prod_{i=k+1}^n x^{-\varepsilon_i} e^{\varepsilon_i}. \end{aligned}$$

（c）在 C 型$_n$ 且 $G = \mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{C})$ 时，对于每个 $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$，我们有

$$1 - \Theta_{t_k}^{\mathsf{C}} = x^{-\omega_k} e^{\omega_k} = \textstyle\prod_{i=k+1}^n x^{-\varepsilon_i} e^{\varepsilon_i}.$$

（d）在 D型$_n$ 且 $G=\mathsf{SO}_{2n+1}(\mathbb{C})$ 时，对于每个 $k\in\{2,3,\dots,n-1\}$，我们有

$$\begin{aligned}(1-\Theta^{\mathsf{D}}_{t_1})(1-\Theta^{\mathsf{D}}_{t_{-1}}) = x^{-\omega_1-\omega_{-1}}e^{\omega_1+\omega_{-1}} &= \textstyle\prod_{i=2}^{n} x^{-\varepsilon_i}e^{-\varepsilon_i},\\ 1-\Theta^{\mathsf{D}}_{t_k} = x^{-\omega_k}e^{\omega_k} &= \textstyle\prod_{i=k+1}^{n} x^{-\varepsilon_i}e^{\varepsilon_i}.\end{aligned}$$

利用这些　例子，通过直接计算可得以下命题　　n.

命题　　3.8。当 G 为经典型时，以下恒等式在 $K_T(G/B)$ 中成立：

(a) 若 $G=\mathsf{SL}_n(\mathbb{C})$，则 $[\mathcal{L}_{\varepsilon_1}]=x^{-\varepsilon_1}(1-\Theta^{\mathsf{A}}_{s_1})$ 且对 $2\le k<n$ 有 $[\mathcal{L}_{\varepsilon_k}]=x^{-\varepsilon_k}\frac{1-\Theta^{\mathsf{A}}_{s_k}}{1-\Theta^{\mathsf{A}}_{s_{k-1}}}$。

(b) 若 $G=\mathsf{SO}_{2n}(\mathbb{C})$，则 $[\mathcal{L}_{\varepsilon_1}]=x^{-\varepsilon_1}\frac{1-\Theta^{\mathsf{B}}_{t_1}}{(1-\Theta^{\mathsf{B}}_{t_0})^2}$，且对 $2\le k<n$ 有 $[\mathcal{L}_{\varepsilon_k}]=x^{-\varepsilon_k}\frac{1-\Theta^{\mathsf{B}}_{t_k}}{1-\Theta^{\mathsf{B}}_{t_{k-1}}}$。(c) 若 $G=\mathsf{Sp}_{2n}(\mathbb{C})$，则对 $1\le k<n$ 有 $[\mathcal{L}_{\varepsilon_k}]=x^{-\varepsilon_k}\frac{1-\Theta^{\mathsf{C}}_{t_k}}{1-\Theta^{\mathsf{C}}_{t_{k-1}}}$。

(d) 如果 $G=\mathsf{SO}_{2n+1}(\mathbb{C})$，那么对于 $3\le k\le n$，$[\mathcal{L}_{\varepsilon_k}]=x^{-\varepsilon_k}\frac{1-\Theta^{\mathsf{D}}_{t_k}}{1-\Theta^{\mathsf{D}}_{t_{k-1}}}$，以及

$$[\mathcal{L}_{\varepsilon_1}]=x^{-\varepsilon_1}\frac{1-\Theta^{\mathsf{D}}_{t_1}}{1-\Theta^{\mathsf{D}}_{t_{-1}}}\quad\text{and}\quad[\mathcal{L}_{\varepsilon_2}]=x^{-\varepsilon_2}\frac{1-\Theta^{\mathsf{D}}_{t_2}}{(1-\Theta^{\mathsf{D}}_{t_1})(1-\Theta^{\mathsf{D}}_{t_{-1}})}.$$

同样地，将 w_0^L 应用于定理 3.3 可得到这个“相反的”切瓦利公式。

定理 3.9。如果 $\lambda\in\Lambda$ 且 $u\in W$，那么 $[\mathcal{L}_\lambda]\cdot\Theta_u=\sum_{w\in W}\sum_{\mu\in\Lambda}b^{\lambda,\ \mu}_{u,\ w}\cdot x^{-\mu}\cdot\Theta_w$ 其中 $b^{\lambda,\ \mu}_{u,\ w}\in\mathbb{Z}$的定义同定理 3.3。

3.4 经典特化

当 G 是一个经典群且 $\lambda=\varepsilon_k$ 是一个标准基向量时，我们可以将定理 3.9 表达为更明确的形式；本节将介绍这一形式以及一些相关例子。

首先假设 G　$=\mathsf{SL}_n(\mathbb{C})$，并通过以下公式定义 $\mathbb{Z}$-线性算子 $K_T(G/B)\to K_T(G/B)$　　s

$$\begin{aligned}\mathbf{t}^{\mathsf{A}}_{ij}: x^\mu\cdot\Theta^{\mathsf{A}}_w &\mapsto \begin{cases}x^\mu\cdot\Theta^{\mathsf{A}}_{w(i,j)} & \text{if } \ell(w(i,j))=\ell(w)+1\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}\\ \mathbf{u}^{\mathsf{A}}_{ij}: x^\mu\cdot\Theta^{\mathsf{A}}_w &\mapsto \begin{cases}x^{w(i,j)w^{-1}(\mu)}\cdot\Theta^{\mathsf{A}}_{w(i,j)} & \text{if } \ell(w(i,j))=\ell(w)+1\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}\\ \mathbf{v}^{\mathsf{A}}_k: x^\mu\cdot\Theta^{\mathsf{A}}_w &\mapsto x^{\mu-w(\varepsilon_k)}\cdot\Theta^{\mathsf{A}}_w\end{aligned}\tag{3.15}$$

对所有整数 $1\le i<j\le n$ 和 $k\in[n]$。然后令

$$\mathbf{M}^{\mathsf{A}}_{n,k}=(1-\mathbf{t}^{\mathsf{A}}_{k,k+1})(1-\mathbf{t}^{\mathsf{A}}_{k,k+2})\cdots(1-\mathbf{t}^{\mathsf{A}}_{k,n})(1+\mathbf{u}^{\mathsf{A}}_{1,k})\cdots(1+\mathbf{u}^{\mathsf{A}}_{k-2,k})(1+\mathbf{u}^{\mathsf{A}}_{k-1,k})\mathbf{v}^{\mathsf{A}}_k.\tag{3.16}$$

推论 3.10。若 $u\in S_n$ 且 $k\in[n]$ 则 $[\mathcal{L}_{\varepsilon_k}]\cdot\Theta^{\mathsf{A}}_u=\mathbf{M}^{\mathsf{A}}_{n,\ k}\Theta^{\mathsf{A}}_u$.

证明。对于 $1 \le j < k < l \le n$，定义 $r_{jk}^{\mathrm{aff}} = r_{(\varepsilon_k - \varepsilon_j, 0)}^{\mathrm{aff}}$ 以及 $r_{kl}^{\mathrm{aff}} = r_{(\varepsilon_l - \varepsilon_k, -1)}^{\mathrm{aff}}$. 现在取整数

$$1 \le a_p < \cdots < a_1 < k < b_q < b_{q-1} < \cdots < b_1 \le n$$

并定义 $w = u(a_1,\ k)(a_2,\ k)\cdots(a_p,\ k)(k,\ b_1)(k,\ b_2)\cdots(k,\ b_q) \in S_n$. 由于 $r_{kl}^{\mathrm{aff}}(\varepsilon_k) = \varepsilon_k$，我们有

$$\mu := u \cdot r_{a_1,k}^{\mathrm{aff}} \cdot r_{a_2,k}^{\mathrm{aff}} \cdots r_{a_p,k}^{\mathrm{aff}} \cdot r_{k,b_1}^{\mathrm{aff}} \cdot r_{k,b_2}^{\mathrm{aff}} \cdots r_{k,b_q}^{\mathrm{aff}}(\varepsilon_k) = u(a_1,k)(a_2,k)\cdots(a_p,k)(\varepsilon_k).$$

由此可得

$$(-\mathbf{t}_{k,b_q}^{\mathsf{A}})\cdots(-\mathbf{t}_{k,b_2}^{\mathsf{A}})(-\mathbf{t}_{k,b_1}^{\mathsf{A}})\mathbf{u}_{a_p,k}^{\mathsf{A}}\cdots\mathbf{u}_{a_2,k}^{\mathsf{A}}\mathbf{u}_{a_1,k}^{\mathsf{A}}\mathbf{v}_k^{\mathsf{A}}\Theta_u^{\mathsf{A}} = \begin{cases} (-1)^q \cdot x^{-\mu}\cdot\Theta_w^{\mathsf{A}} & \text{if (*) holds} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \tag{3.17}$$

其中 **(*)** 表示，定义 w 的乘积中的连续乘法每次都使长度恰好增加一。由于在 A 型中$_{n-1}$ 当 $\lambda = \varepsilon_k$时，定义 3.2 中的集合 $\mathcal{S}_\lambda$ 为

$$\mathcal{S}_{\varepsilon_k} = \left\{ \begin{matrix} (\varepsilon_k - \varepsilon_{k-1}, 0) < (\varepsilon_k - \varepsilon_{k-2}, 0) < \cdots < (\varepsilon_k - \varepsilon_1, 0) \\ < (\varepsilon_n - \varepsilon_k, -1) < (\varepsilon_{n-1} - \varepsilon_k, -1) < \cdots < (\varepsilon_{k+1} - \varepsilon_k, -1) \end{matrix} \right\}, \tag{3.18}$$

将 (3.17) 与定理 3.9 中 $b^{\lambda,\ u^{\mu},\ w}$ 的定义进行比较，即可得出该推论。 □

例 3.11。当 $n = k = 3$ 时，我们计算得

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{3,3}^{\mathsf{A}}\Theta_1^{\mathsf{A}} &= (1+\mathbf{u}_{1,3}^{\mathsf{A}})(1+\mathbf{u}_{2,3}^{\mathsf{A}})\mathbf{v}_3^{\mathsf{A}}\Theta_1^{\mathsf{A}} \\ &= (1+\mathbf{u}_{1,3}^{\mathsf{A}})(1+\mathbf{u}_{2,3}^{\mathsf{A}})\left(x^{-\varepsilon_3}\cdot\Theta_1^{\mathsf{A}}\right) \\ &= (1+\mathbf{u}_{1,3}^{\mathsf{A}})\left(x^{-\varepsilon_3}\cdot\Theta_1^{\mathsf{A}} + x^{-\varepsilon_2}\cdot\Theta_{132}^{\mathsf{A}}\right) = x^{-\varepsilon_3}\cdot\Theta_1^{\mathsf{A}} + x^{-\varepsilon_2}\cdot\Theta_{132}^{\mathsf{A}} + x^{-\varepsilon_1}\cdot\Theta_{231}^{\mathsf{A}} \end{aligned}$$

因此

$$[\mathcal{L}_{\varepsilon_3}]\cdot\Theta_1^{\mathsf{A}} = x^{-\varepsilon_3}\cdot\Theta_1^{\mathsf{A}} + x^{-\varepsilon_2}\cdot\Theta_{s_2}^{\mathsf{A}} + x^{-\varepsilon_1}\cdot\Theta_{s_1s_2}^{\mathsf{A}}.$$

利用引理 3.5（回顾一下备注 3.1 中 $[\mathcal{O}_w] = *[\mathcal{O}_{X_w}]$ 的定义），我们得到

$$e^{\varepsilon_3}\cdot[\mathcal{O}_{w_0}] = x^{\varepsilon_1}\cdot[\mathcal{O}_{w_0}] + x^{\varepsilon_2}\cdot[\mathcal{O}_{s_2s_1}] + x^{\varepsilon_3}\cdot[\mathcal{O}_{s_1}].$$

注意到 $[35, §15]$ 中记作 $[a,b,c]$ 的权对应于我们记作 $c\varepsilon_1 + b\varepsilon_2 + a\varepsilon_3 \in \Lambda$ 的内容后，这就还原了 $[35,$ Ex. 15.6$]$。当 $n > k = 3$ 时，存在一个更长的稳定展开

$$\begin{aligned} [\mathcal{L}_{\varepsilon_3}]\cdot\Theta_1^{\mathsf{A}} &= \mathbf{M}_{n,3}^{\mathsf{A}}\Theta_1^{\mathsf{A}} \\ &= (1-\mathbf{t}_{3,4}^{\mathsf{A}})(1-\mathbf{t}_{3,5}^{\mathsf{A}})\cdots(1-\mathbf{t}_{3,n}^{\mathsf{A}})\left(x^{-\varepsilon_3}\cdot\Theta_1^{\mathsf{A}} + x^{-\varepsilon_2}\cdot\Theta_{132}^{\mathsf{A}} + x^{-\varepsilon_1}\cdot\Theta_{231}^{\mathsf{A}}\right) \\ &= (1-\mathbf{t}_{3,4}^{\mathsf{A}})\left(x^{-\varepsilon_3}\cdot\Theta_1^{\mathsf{A}} + x^{-\varepsilon_2}\cdot\Theta_{132}^{\mathsf{A}} + x^{-\varepsilon_1}\cdot\Theta_{231}^{\mathsf{A}}\right) \\ &= x^{-\varepsilon_3}\cdot\Theta_1^{\mathsf{A}} + x^{-\varepsilon_2}\cdot\Theta_{132}^{\mathsf{A}} + x^{-\varepsilon_1}\cdot\Theta_{231}^{\mathsf{A}} + x^{-\varepsilon_3}\cdot\Theta_{1243}^{\mathsf{A}} + x^{-\varepsilon_2}\cdot\Theta_{1342}^{\mathsf{A}} + x^{-\varepsilon_1}\cdot\Theta_{2341}^{\mathsf{A}}. \end{aligned}$$

我们简化其他经典类型的记号。固定 $X \in \{\mathsf{B}、\mathsf{C}、\mathsf{D}\}$，并定义如下作用于 $K_T(G/B)$ 上的 $\mathbb{Z}$-线性算子，其中 $i \in \mathbb{Z}$ 和 j 为整数，$k \in [n]$，且 $-n \le i < j$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{t}_{ij}^X &: x^\mu \cdot \Theta_w^X \mapsto \begin{cases} x^\mu \cdot \Theta_{wt_{ij}}^X & \text{if } t_{ij} \in W_n^X \text{ and } \ell^X(wt_{ij}) = \ell^X(w)+1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \\
\mathbf{u}_{ij}^X &: x^\mu \cdot \Theta_w^X \mapsto \begin{cases} x^{wt_{ij}w^{-1}(\mu)} \cdot \Theta_{wt_{ij}}^X & \text{if } t_{ij} \in W_n^X \text{ and } \ell^X(wt_{ij}) = \ell^X(w)+1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \\
\mathbf{v}_k^X &: x^\mu \cdot \Theta_w^X \mapsto x^{\mu - w(\varepsilon_k)} \cdot \Theta_w^X \\
\mathbf{o}_k^X &: x^\mu \cdot \Theta_w^X \mapsto \begin{cases} \Theta_{w(-k,k)}^X & \text{if } X = \mathsf{B} \text{ and } \ell^{\mathsf{B}}(w(-k,k)) = \ell^{\mathsf{B}}(w)+1 \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases}
\end{aligned} \tag{3.19}$$

Note 即 $\mathbf{t}_{-j,\ j}^X = \mathbf{u}_{-j,\ j}^X = 0$ 令 $t_{-j,\ j} = 1$，并且令 $\mathbf{o}_k^{\mathsf{C}} = \mathbf{o}_k^{\mathsf{D}} = \mathbf{t}_{0,\ j}^{\mathsf{D}} = \mathbf{u}_{0,\ j}^{\mathsf{D}} = 0$。则 l　　et

$$\mathbf{M}_k^X = (1-\mathbf{t}_{k,k+1}^X)(1-\mathbf{t}_{k,k+2}^X)\cdots(1-\mathbf{t}_{k,n}^X)(1+\mathbf{o}_k^X)(1+\mathbf{u}_{-n,k}^X)\cdots(1+\mathbf{u}_{k-2,k}^X)(1+\mathbf{u}_{k-1,k}^X)\mathbf{v}_k^X. \tag{3.20}$$

推论 3.12。固定一种 $X \in \{\mathsf{B}、\mathsf{C}、\mathsf{D}\}$型。若 $u \in W_n^X$且 $k \in [n]$，则 $[\mathcal{L}_{\varepsilon_k}] \cdot \Theta_u^X = \mathbf{M}_k^X \Theta_u^X$。

证明。只需验证我们的算子公式等价于 B_n型、C_n 型和 D_n 型中的定理 3.9，其中 $\lambda = \varepsilon_k$。直接计算表明，在 B_n 型中，$\mathcal{S}_{\varepsilon_k}$ 由下式给出

$$\mathcal{S}_{\varepsilon_k} = \left\{ \begin{array}{l} (\varepsilon_k - \varepsilon_{k-1}, 0) < (\varepsilon_k - \varepsilon_{k-2}, 0) < \cdots < (\varepsilon_k - \varepsilon_1, 0) \\ < (\varepsilon_k, 0) \\ < (\varepsilon_k + \varepsilon_1, 0) < (\varepsilon_k + \varepsilon_2, 0) < \cdots < (\varepsilon_k + \varepsilon_{k-1}, 0) \\ < (\varepsilon_{k+1} + \varepsilon_k, 0) < (\varepsilon_{k+2} + \varepsilon_k, 0) < \cdots < (\varepsilon_n + \varepsilon_k, 0) \\ < (\varepsilon_k, 1) \\ < (\varepsilon_n - \varepsilon_k, -1) < (\varepsilon_{n-1} - \varepsilon_k, -1) < \cdots < (\varepsilon_{k+1} - \varepsilon_k, -1) \end{array} \right\}, \tag{3.21}$$

在 C_n 型中由下式给出

$$\mathcal{S}_{\varepsilon_k} = \left\{ \begin{array}{l} (\varepsilon_k - \varepsilon_{k-1}, 0) < (\varepsilon_k - \varepsilon_{k-2}, 0) < \cdots < (\varepsilon_k - \varepsilon_1, 0) \\ < (2\varepsilon_k, 0) \\ < (\varepsilon_k + \varepsilon_1, 0) < (\varepsilon_k + \varepsilon_2, 0) < \cdots < (\varepsilon_k + \varepsilon_{k-1}, 0) \\ < (\varepsilon_{k+1} + \varepsilon_k, 0) < (\varepsilon_{k+2} + \varepsilon_k, 0) < \cdots < (\varepsilon_n + \varepsilon_k, 0) \\ < (\varepsilon_n - \varepsilon_k, -1) < (\varepsilon_{n-1} - \varepsilon_k, -1) < \cdots < (\varepsilon_{k+1} - \varepsilon_k, -1) \end{array} \right\}, \tag{3.22}$$

在 D_n 型中由下式给出

$$\mathcal{S}_{\varepsilon_k} = \left\{ \begin{array}{l} (\varepsilon_k - \varepsilon_{k-1}, 0) < (\varepsilon_k - \varepsilon_{k-2}, 0) < \cdots < (\varepsilon_k - \varepsilon_1, 0) \\ < (\varepsilon_k + \varepsilon_1, 0) < (\varepsilon_k + \varepsilon_2, 0) < \cdots < (\varepsilon_k + \varepsilon_{k-1}, 0) \\ < (\varepsilon_{k+1} + \varepsilon_k, 0) < (\varepsilon_{k+2} + \varepsilon_k, 0) < \cdots < (\varepsilon_n + \varepsilon_k, 0) \\ < (\varepsilon_n - \varepsilon_k, -1) < (\varepsilon_{n-1} - \varepsilon_k, -1) < \cdots < (\varepsilon_{k+1} - \varepsilon_k, -1) \end{array} \right\}. \tag{3.23}$$

利用这些公式，并注意到对于 $k < l$，$r^{\mathrm{aff}}_{(\varepsilon_l - \varepsilon_k, -1)}(\varepsilon_k) = \varepsilon_k$，且 $r^{\mathrm{aff}}_{(\varepsilon_k, 1)}(\varepsilon_k) = 0$，通过类似于推论 3.10 证明的论证即可得出结果。 □

例3.13。 当 X =B、 $n=2$ 和 $k=1$ 时，我们可以利用推论 3.12 进行计算

$$\begin{aligned}
[\mathcal{L}_{\varepsilon_1}]\cdot\Theta^{\mathsf{B}}_{12} &= \mathbf{M}^{\mathsf{B}}_1\Theta^{\mathsf{B}}_{12}\\
&= (1-\mathbf{t}^{\mathsf{B}}_{1,2})(1-\mathbf{o}^{\mathsf{B}}_1)(1+\mathbf{u}^{\mathsf{B}}_{-2,1})(1+\mathbf{u}^{\mathsf{B}}_{0,1})\mathbf{v}^{\mathsf{B}}_1\Theta^{\mathsf{B}}_{12}\\
&= (1-\mathbf{t}^{\mathsf{B}}_{1,2})(1-\mathbf{o}^{\mathsf{B}}_1)(1+\mathbf{u}^{\mathsf{B}}_{-2,1})(1+\mathbf{u}^{\mathsf{B}}_{0,1})\left(x^{-\varepsilon_1}\cdot\Theta^{\mathsf{B}}_{12}\right)\\
&= (1-\mathbf{t}^{\mathsf{B}}_{1,2})(1-\mathbf{o}^{\mathsf{B}}_1)(1+\mathbf{u}^{\mathsf{B}}_{-2,1})\left(x^{-\varepsilon_1}\cdot\Theta^{\mathsf{B}}_{12}+x^{\varepsilon_1}\cdot\Theta^{\mathsf{B}}_{\bar{1}2}\right)\\
&= (1-\mathbf{t}^{\mathsf{B}}_{1,2})(1-\mathbf{o}^{\mathsf{B}}_1)\left(x^{-\varepsilon_1}\cdot\Theta^{\mathsf{B}}_{12}+x^{\varepsilon_1}\cdot\Theta^{\mathsf{B}}_{\bar{1}2}+x^{\varepsilon_2}\cdot\Theta^{\mathsf{B}}_{2\bar{1}}\right)\\
&= (1-\mathbf{t}^{\mathsf{B}}_{1,2})\left(x^{-\varepsilon_1}\cdot\Theta^{\mathsf{B}}_{12}-(1-x^{\varepsilon_1})\cdot\Theta^{\mathsf{B}}_{\bar{1}2}+x^{\varepsilon_2}\cdot\Theta^{\mathsf{B}}_{2\bar{1}}\right)\\
&= x^{-\varepsilon_1}\cdot\left(\Theta^{\mathsf{B}}_{12}-\Theta^{\mathsf{B}}_{21}\right)-(1-x^{\varepsilon_1})\cdot\left(\Theta^{\mathsf{B}}_{\bar{1}2}-\Theta^{\mathsf{B}}_{2\bar{1}}\right)+x^{\varepsilon_2}\cdot\left(\Theta^{\mathsf{B}}_{2\bar{1}}-\Theta^{\mathsf{B}}_{\bar{1}2}\right).
\end{aligned}$$

类似地，可以验证 $[\mathcal{L}_{\varepsilon_1}]\cdot\Theta^{\mathsf{B}}_{12}=\mathbf{M}^{\mathsf{B}}_1\Theta^{\mathsf{B}}_{12}=x^{\varepsilon_1}\cdot\left(\Theta^{\mathsf{B}}_{12}-\Theta^{\mathsf{B}}_{21}\right)+x^{-\varepsilon_2}\cdot\left(\Theta^{\mathsf{B}}_{21}-\Theta^{\mathsf{B}}_{12}\right)$.

4 转移方程

本节将上文讨论的 $K_T(G/B)$ 乘法公式转化为 Lascoux–Sch¨utzenberger 的 [32]双 Grothendieck 多项式的某些多项式恒等式，以及 Kirillov–Naruse 给出的经典型类比 [21]。本节的主要新成果是定理4.29、4.35和4.39，以及第 4.6 节中的推论。

4.1 双 Grothendieck 多项式

令 β为一个形式参数，并令 x_1, x_2, x_3, ...以及 y_1, y_2, y_3, ...为两列可交换变量。令 $\mathbb{Z}[\beta][\mathbf{y}]=\mathbb{Z}[\beta,y_1,y_2,y_3,\dots]$ 和 $\mathbb{Z}[\beta][\mathbf{x};\mathbf{y}]=\mathbb{Z}[\beta,x_1,x_2,x_3,\dots,y_1,y_2,y_3,\dots]$ 表示这些变量构成的通常多项式环。

我们将 $\mathbb{Z}[\beta][\mathbf{y}]$ 和 $\mathbb{Z}[\beta][\mathbf{x};\mathbf{y}]$ 中的典型元素分别记作 $f(\mathbf{y})$ 和 $f(\mathbf{x};\mathbf{y})$。群 S_∞ 通过置换 x 个变量作用于 $\mathbb{Z}[\beta][\mathbf{x};\mathbf{y}]$，且对每个 $i\in\mathbb{Z}_{>0}$，公式

$$\pi_i f(\mathbf{x};\mathbf{y}) := \tfrac{(1+\beta x_{i+1})f(\mathbf{x};\mathbf{y})-(1+\beta x_i)s_i f(\mathbf{x};\mathbf{y})}{x_i-x_{i+1}} \tag{4.1}$$

定义了一个 $\mathbb{Z}[\beta][\mathbf{y}]$-线性映射 $\mathbb{Z}[\beta][\mathbf{x};\mathbf{y}]\to\mathbb{Z}[\beta][\mathbf{x};\mathbf{y}]$。这些算子满足 S_∞ 的考克斯特辩关系，以及恒等式 $\pi_i\pi_i=-\beta\pi_i$。

定义 4.1 ([11, 32]). The 双 *Grothendieck* 多项式 $\mathfrak{G}_w(\mathbf{x};\mathbf{y})$ 对于 $w\in S_\infty$ 是 $\mathbb{Z}[\beta][\mathbf{x};\mathbf{y}]$ 中满足以下条件的唯一元素:

(a) if $n\in\mathbb{Z}_{>0}$ then $\mathfrak{G}_{n\cdots321}(\mathbf{x};\mathbf{y})=\prod_{\substack{i,j\in[n-1]\\ i+j\le n}} x_i\oplus y_j$ where $x\oplus y=x+y+\beta xy$; and

(b) 若 $i\in\mathbb{Z}_{>0}$ 满足 $w(i)>w(i+1)$，则 $\mathfrak{G}_{ws_i}(\mathbf{x};\mathbf{y})=\pi_i\mathfrak{G}_w(\mathbf{x};\mathbf{y})$。

我们还 形式 $\mathfrak{G}_w(\mathbf{x}):=\mathfrak{G}_w(\mathbf{x};0)$，方法是将所有 y-变量设为零 .

在条件 (a) 中取 $n=1$，可得 $\mathfrak{G}_1(\mathbf{x};\mathbf{y})=1$。条件 (a) 表明，如果定义 $\deg\beta=-1$，且 $\deg x_i=\deg y_i=1$，那么 $\mathfrak{G}_w(\mathbf{x};\mathbf{y})$ 总是次数为 $\ell(w)$ 的齐次多项式。令 $\beta=0$，即可将 $\mathfrak{G}_w(\mathbf{x};\mathbf{y})$ 转化为双施ubert多项式 $\mathfrak{S}_w(\mathbf{x};\mathbf{y})$；参见 [38, §2.3]。

例 4.2. 关于 $\mathfrak{G}_w(\mathbf{x};\mathbf{y})$，已有许多更为明确的公式；例如参见 [8, 11, 22, 23,31, 48]。由 [48,定理 1.1] 可知，实际上我们有

$$\mathfrak{G}_w(\mathbf{x};\mathbf{y})\in\mathbb{Z}_{\geq 0}[\beta][x_1,x_2,\dots,x_{n-1},y_1,y_2,\dots,y_{n-1}]\quad\text{for all } w\in S_n. \tag{4.2}$$

此外，由 [22, 推论 5.4] 可立即得到

$$1+\beta\mathfrak{G}_{s_k}(\mathbf{x};\mathbf{y})=\textstyle\prod_{i\in[k]}(1+\beta x_i)(1+\beta y_i). \tag{4.3}$$

这意味着我们可以写成

$$1+\beta x_1=\tfrac{1+\beta\mathfrak{G}_{s_1}(\mathbf{x};\mathbf{y})}{1+\beta y_1}\quad\text{and}\quad 1+\beta x_k=\tfrac{1}{1+\beta y_k}\cdot\tfrac{1+\beta\mathfrak{G}_{s_k}(\mathbf{x};\mathbf{y})}{1+\beta\mathfrak{G}_{s_{k-1}}(\mathbf{x};\mathbf{y})}\text{ for } k>1. \tag{4.4}$$

对于 $w\in S_n$，多项式 $\mathfrak{G}_w(\mathbf{x};\mathbf{y})$ 与 A 型等变K-理论环中的舒伯特基之间满足以下恒等式 [13, 定理 3]（另见 [16, 命题 3.13]）：

$$\Theta_w^{\mathsf{A}}=\mathfrak{G}(x_i\mapsto 1-e^{-\varepsilon_i};y_i\mapsto 1-x^{\varepsilon_i})|_{\beta=-1}\in K_T(\mathsf{SL}_n(\mathbb{C})/B). \tag{4.5}$$

这一性质蕴含以下引理，该引理在文献中虽未明确提出，但隐含其中。考虑这些环

$$\begin{aligned}\mathbb{A}_\beta^{(n)}&:=\mathbb{Z}[\beta]\left[y_1,\tfrac{1}{1+\beta y_1},y_2,\tfrac{1}{1+\beta y_2},\dots,y_{n-1},\tfrac{1}{1+\beta y_{n-1}}\right],\\ \mathbb{A}_\beta&:=\mathbb{Z}[\beta]\left[y_1,\tfrac{1}{1+\beta y_1},y_2,\tfrac{1}{1+\beta y_2},y_3,\tfrac{1}{1+\beta y_3},\dots\right]=\textstyle\bigcup_{n\geq 1}\mathbb{A}_\beta^{(n)}.\end{aligned} \tag{4.6}$$

与 $\mathbb{Z}[\beta][\mathbf{y}]$, 一样，我们将 $\mathbb{A}_\beta$ 的一个典型元素记作 $f(\mathbf{y})$。

$\mathbb{A}_\beta$ 中的元素称为齐次元素，如果它是相同次数项的 $\mathbb{Z}$线性组合，其中 $\deg\beta=-1$、$\deg\frac{1}{1+\beta y_i}=0$ 以及 $x_i=\deg y_i=1$。如果 $f(\mathbf{y})\in\mathbb{Z}[\beta][\mathbf{y}]$ 是次数为 d 的齐次元素，那么可由 $g(\mathbf{y}):=f(\mathbf{y})|_{\beta=-1}$ 通过公式 $f(\mathbf{y})=(-\beta)^{-d}g(y_i\mapsto-\beta y_i)$恢复。

引理 4.3。 固定置换 $u,\ v\in S_\infty$。则存在唯一的齐次系数$c_{u,\ v}^{w}(\mathbf{y})\in\mathbb{A}_\beta$，使得对于 $w\in S_\infty$，有 $\mathfrak{G}_u(\mathbf{x};\mathbf{y})\cdot\mathfrak{G}_v(\mathbf{x};\mathbf{y})=\sum_{w\in S_\infty}c_{u,\ v}^{w}(\mathbf{y})\cdot\mathfrak{G}_w(\mathbf{x};\mathbf{y})$，并且有

(a) $\{c_{u,v}^{w}(\mathbf{y}):\ w\in S_n\}\subset\mathbb{A}_\beta^{(n)}$，以及

(b) $\Theta_u^{\mathsf{A}}\Theta_v^{\mathsf{A}}=\sum_{w\in S_n}c_{u,v}^{w}(y_i\mapsto 1-x^{\varepsilon_i})|_{\beta=-1}\Theta_w^{\mathsf{A}}\in K_T(\mathsf{SL}_n(\mathbb{C})/B)$ for all $n\in\mathbb{Z}_{>0}$ with $u,v\in S_n$.

证明。众所周知，所有双 Grothendieck 多项式构成一个环的齐次 $\mathbb{A}_\beta$-基（例如参见 [28, §8.6]），因此系数 $c_{u,v}^{w}(\mathbf{y})\in\mathbb{A}_\beta$ 存在且唯一。若 $u,v\in S_n$ 则由 (4.2) 可得 $\{c_{u,v}^{w}(\mathbf{y}):\ w\in S_\infty\}\subset\mathbb{A}_\beta^{(n)}$，其余等式则由 (4.5) 推出。 □

我们已经定义了 S_∞ 在 $\mathbb{Z}[\beta][\mathbf{x};\mathbf{y}]$ 上的作用，它会置换 x 变量。令 $\star$ 表示 S_∞ 在 $\mathbb{A}_\beta$ 上的类似作用，它会置换 y 变量，因此

$$w\star f(\mathbf{y})=f(y_{w(1)},y_{w(2)},y_{w(3)},\dots)\quad\text{for } w\in S_\infty. \tag{4.7}$$

现在我们在 $\mathbb{A}_\beta$-模上定义若干个 $\mathbb{Z}[\beta]$-线性算子

$$\mathbb{V} := \mathbb{A}_\beta\text{-span}\{\mathfrak{G}_w(\mathbf{x};\mathbf{y}) : w \in S_\infty\} \subseteq \mathbb{A}_\beta[\mathbf{x}] := \mathbb{A}_\beta[x_1, x_2, x_3, \dots]. \tag{4.8}$$

这些算子记作 $\mathfrak{t}_{ij}$、$\mathfrak{u}_{ij}$、$\mathfrak{v}_k$ 和 $\mathfrak{M}_k$。固定正整数 $i<j$ 和 k。首先，令 $\mathfrak{t}_{ij}$ 为将.....映至.....的 $\mathbb{A}_\beta$-线性算子

$$\mathfrak{t}_{ij} : \mathfrak{G}_w(\mathbf{x};\mathbf{y}) \mapsto \begin{cases} \mathfrak{G}_{w(i,j)}(\mathbf{x};\mathbf{y}) & \text{if } \ell(w)+1 = \ell(w(i,j)) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \tag{4.9}$$

对每个 $w \in S_\infty$。接着，令 $\mathfrak{u}_{ij}$ 为作用于 $\mathbb{V}$、将.....映至.....的 $\mathbb{Z}[\beta]$-线性算子

$$\mathfrak{u}_{ij} : f(\mathbf{y}) \cdot \mathfrak{G}_w(\mathbf{x};\mathbf{y}) \mapsto \big(w(i,j)w^{-1} \star f(\mathbf{y})\big) \cdot \mathfrak{t}_{ij}\mathfrak{G}_w(\mathbf{x};\mathbf{y}) \tag{4.10}$$

for 每个 $f(\mathbf{y}) \in \mathbb{A}_\beta$ 和 $w \in S_\infty$。最后，令 $\mathfrak{v}_k : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ 为具有.....的 $\mathbb{A}_\beta$-线性映射 h

$$\mathfrak{v}_k : \mathfrak{G}_w(\mathbf{x};\mathbf{y}) \mapsto \tfrac{1}{1+\beta y_{w(k)}} \cdot \mathfrak{G}_w(\mathbf{x};\mathbf{y}). \tag{4.11}$$

注意，$\mathfrak{u}_{ij}$ 不是 $\mathbb{A}_\beta$-线性的。最后，将 $\mathfrak{M}_k$ 定义为以下复合

$$\mathfrak{M}_k = \prod_{k<l<\infty}^{[<]} (1+\beta\mathfrak{t}_{kl}) \cdot \prod_{0<j<k}^{[<]} (1-\beta\mathfrak{u}_{jk}) \cdot \mathfrak{v}_k \tag{4.12}$$

$[<]$，其中 $\prod$ 表示一种乘积，其展开顺序为指标递增时从左至右。尽管第一个乘积包含无限多项，但当 $w \in S_n$ 且 $l > \max\{k,n\}+1$ 时，我们有 $(1+\beta\mathfrak{t}_{kl})\mathfrak{G}_w(\mathbf{x};\mathbf{y}) = \mathfrak{G}_w(\mathbf{x};\mathbf{y})$。因此，$\mathfrak{M}_k$ 是一个定义良好的 $\mathbb{Z}[\beta]$-线性映射 $\mathbb{V} \to \mathbb{V}$。

定理 4.4。若 $u \in S_\infty$ 且 $k \in \mathbb{Z}_{>0}$，则 $(1+\beta x_k)\mathfrak{G}_u(\mathbf{x};\mathbf{y}) = \mathfrak{M}_k\mathfrak{G}_u(\mathbf{x};\mathbf{y})$。

证明。鉴于 (4.4)，只需证明

$$\begin{aligned} &(1+\beta\mathfrak{G}_{s_1}(\mathbf{x};\mathbf{y}))\cdot\mathfrak{G}_u(\mathbf{x};\mathbf{y}) = (1+\beta y_1)\cdot\mathfrak{M}_1\mathfrak{G}_u(\mathbf{x};\mathbf{y}) && \text{and} \\ &(1+\beta\mathfrak{G}_{s_k}(\mathbf{x};\mathbf{y}))\cdot\mathfrak{G}_u(\mathbf{x};\mathbf{y}) = (1+\beta y_k)\cdot(1+\beta\mathfrak{G}_{s_{k-1}}(\mathbf{x};\mathbf{y}))\cdot\mathfrak{M}_k\mathfrak{G}_u(\mathbf{x};\mathbf{y}) && \text{for } k\geq 2. \end{aligned} \tag{4.13}$$

这需要对每个 $w \in S_\infty$ 检验 $\mathbb{A}_\beta$ 中某些齐次表达式的等式，这些表达式涉及系数 $c^w_{s_k u}(\mathbf{y})$ 和 $c^w_{s_{k-1}v}(\mathbf{y})$，其中 v 遍历展开式 $\mathfrak{M}_k\mathfrak{G}_u(\mathbf{x};\mathbf{y})$ 中各项的指标。由引理 4.3 可知，对于所有充分大的 n，若代入 $\beta \mapsto -1$ 和 $y_i \mapsto 1-x^{\varepsilon_i}$，这些等式在 A 型 $_{n-1}$ 环面之表示环 $\mathbb{Z}[X]$ 中成立，因为命题 3.8(a) 和定理 3.10 表明恒等式

$$\begin{aligned} &(1-\Theta^{\mathsf{A}}_{s_1})\cdot\Theta^{\mathsf{A}}_u = x^{\varepsilon_1}\cdot\mathbf{M}^{\mathsf{A}}_{n,k}\Theta^{\mathsf{A}}_u && \text{and} \\ &(1-\Theta^{\mathsf{A}}_{s_k})\cdot\Theta^{\mathsf{A}}_u = x^{\varepsilon_k}\cdot(1-\Theta^{\mathsf{A}}_{s_{k-1}})\cdot\mathbf{M}^{\mathsf{A}}_{n,k}\Theta^{\mathsf{A}}_u && \text{for } k\geq 2 \end{aligned}$$

在 $K_T(\mathsf{SL}_n(\mathbb{C})/B)$ 中对所有 $n \gg 0$都成立。回忆 $x^{\varepsilon_1+\varepsilon_2+\cdots+\varepsilon_n} = 1$在 $X[T]$中。由于将 β设为-1不会因齐次性而损失任何信息，我们推得原方程对所有 $\mathbb{A}^{(n)}_\beta$ 都成立，$n \gg 0$ 模去由以下对称多项式生成的余不变理想 $I\Lambda_n \subseteq \mathbb{A}^{(n)}_\beta$（其中这些对称多项式是关于$y_1$，$y_2$，.....，$y_n$且常数项为零）。由于 $\bigcap_{n\geq N} I\Lambda_n = 0$对任意给定的 $N \in \mathbb{Z}_{>0}$都成立，我们得出方程实际上在 $\mathbb{A}_\beta$中成立，因此 (4.13) 成立，定理得证。 □

例 4.5。 在定理 4.4 中取 $k=3$ 和 $u=1$，得到恒等式

$$\begin{aligned}1+\beta x_3 &= (1+\beta x_3)\mathfrak{G}_1\\ &= (1+\beta y_3)^{-1}\cdot\mathfrak{G}_1-\beta\cdot(1+\beta y_2)^{-1}\cdot\mathfrak{G}_{132}+\beta^2\cdot(1+\beta y_1)^{-1}\cdot\mathfrak{G}_{231}\\ &\quad+\beta\cdot(1+\beta y_3)^{-1}\cdot\mathfrak{G}_{1243}-\beta^2\cdot(1+\beta y_2)^{-1}\cdot\mathfrak{G}_{1342}+\beta^3\cdot(1+\beta y_1)^{-1}\cdot\mathfrak{G}_{2341}.\end{aligned}$$

与例 3.11 中的第二个计算进行比较。

例 4.6。 定理 4.4 的这个特例，在 $\beta=-1$ 且 $\mathbf{y}=0$ 时，得出 [34, 例 3.9]：

$$\begin{aligned}(1+\beta x_3)\mathfrak{G}_{13452}(\mathbf{x};\mathbf{y}) &= (1+\beta y_4)^{-1}\cdot\mathfrak{G}_{13452}(\mathbf{x};\mathbf{y})+\beta\cdot(1+\beta y_4)^{-1}\cdot\mathfrak{G}_{13542}(\mathbf{x};\mathbf{y})\\ &\quad-\beta\cdot(1+\beta y_3)^{-1}\cdot\mathfrak{G}_{14352}(\mathbf{x};\mathbf{y})-\beta^2\cdot(1+\beta y_3)^{-1}\cdot\mathfrak{G}_{14532}(\mathbf{x};\mathbf{y})\\ &\quad+\beta^2\cdot(1+\beta y_1)^{-1}\cdot\mathfrak{G}_{34152}(\mathbf{x};\mathbf{y})+\beta^3\cdot(1+\beta y_1)^{-1}\cdot\mathfrak{G}_{34512}(\mathbf{x};\mathbf{y})\\ &\quad+\beta^3\cdot(1+\beta y_1)^{-1}\cdot\mathfrak{G}_{34251}(\mathbf{x};\mathbf{y})+\beta^4\cdot(1+\beta y_1)^{-1}\cdot\mathfrak{G}_{34521}(\mathbf{x};\mathbf{y}).\end{aligned}$$

定理 4.4 是 [34, 定理 3.1], 的自然等变推广，但在此之前似乎尚未见诸文献。我们可以改写这个结果，使其更接近 [34] 中的记号。对于置换 $u,v\in S_\infty$ 以及正整数 $a<b$，我们记作 $u\xrightarrow{(a,b)}v$，表示 $v=u(a,b)$ 且 $\ell(v)=\ell(u)+1$。以下结论与定理 4.4 等价：

推论 4.7。若 $u\in S_n$ 且 $k\in[n]$ 则

$$(1+\beta x_k)\mathfrak{G}_u(\mathbf{x};\mathbf{y})=\sum_\gamma \mathsf{sgn}(\gamma)\cdot(1+\beta y_\gamma)^{-1}\cdot\beta^{\mathsf{len}(\gamma)}\cdot\mathfrak{G}_{\mathsf{end}(\gamma)}(\mathbf{x};\mathbf{y})$$

其中求和遍及所有形如以下形式的链 γ

$$u=u_0\xrightarrow{(a_1,k)}\cdots\xrightarrow{(a_p,k)}u_p\xrightarrow{(k,b_1)}\cdots\xrightarrow{(k,b_q)}u_{p+q}=\mathsf{end}(\gamma)$$

其中 $1\le a_p<\cdots<a_1<a_0=k<b_q<b_{q-1}<\cdots<b_1$，并且我们设

$$\mathsf{sgn}(\gamma)=(-1)^p,\quad y_\gamma=y_{u(a_p)},\quad\text{and}\quad \mathsf{len}(\gamma)=p+q.$$

我们再指出一个简单的推论。

推论 4.8. 成立：$\mathbb{V}=\mathbb{A}_\beta[\mathbf{x}]$.

证明。 定理 4.4 表明，$x_k\mathfrak{G}_u(\mathbf{x};\mathbf{y})=\beta^{-1}(\mathfrak{M}_k-1)\mathfrak{G}_u(\mathbf{x};\mathbf{y})$ 是双 Grothendieck 多项式的有限 $\mathbb{A}_\beta$-线性组合。因此，$x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_k}=x_{i_1}(x_{i_2}(\cdots(x_{i_k}\mathfrak{G}_1(\mathbf{x};\mathbf{y}))\cdots))$ 也是这样的线性组合，所以 $\mathbb{A}_\beta[\mathbf{x}]\subseteq\mathbb{V}$。反向包含由定义可得。 □

最后，我们说明如何得到转移方程 [48, 定理 3.1], ，该方程重新表述了 Lascoux 的一项未发表的结果 [31]。令 $\mathbb{U}:=\mathbb{Z}[\beta]$-张成$\{\mathfrak{G}_w(\mathbf{x};\mathbf{y}):\ w\in S_\infty\}\subsetneq\mathbb{V}$。然后定义

$$\mathfrak{R}_k=(1+\beta\mathfrak{t}_{k-1,k})\cdots(1+\beta\mathfrak{t}_{2,k})(1+\beta\mathfrak{t}_{1,k})=\prod_{0<j<k}^{[>]}(1+\beta\mathfrak{t}_{jk}):\mathbb{V}\to\mathbb{V}$$

[>]对每个 $k\in\mathbb{Z}_{>0}$，其中 $\prod$ 表示按指标递减的顺序从左向右展开的乘积。

引理 4.9. 设 $k \in \mathbb{Z}_{>0}$、 $w \in S_\infty$ 和 $F \in \mathbb{U}$。则 $(1+\beta x_k)\mathfrak{R}_k F = \left(\prod_{k<l<\infty}^{[<]} (1+\beta \mathfrak{t}_{kl}) \cdot \mathfrak{v}_k \right) F$。

证明。由于 $\mathfrak{R}_k$ 保持 $\mathbb{U}$，并且由于 $\mathfrak{M}_k$ 是一个 $\mathbb{Z}[\beta]$-线性算子，定理 4.4 蕴含

$$(1+\beta x_k)\mathfrak{R}_k F = \mathfrak{M}_k \mathfrak{R}_k F = \left(\prod_{k<l<\infty}^{[<]} (1+\beta \mathfrak{t}_{kl}) \cdot \prod_{0<j<k}^{[<]} (1-\beta \mathfrak{u}_{jk}) \cdot \mathfrak{v}_k \cdot \prod_{0<j<k}^{[>]} (1+\beta \mathfrak{t}_{jk}) \right) F.$$

令 $t = (j,\ k) \in S_\infty$，其中 $1 \le j < k$。由于 $1+\beta \mathfrak{t}_{jk}$ 将 $\mathbb{U} \to \mathbb{U}$映射到，只需证明

$$((1-\beta \mathfrak{u}_{jk}) \cdot \mathfrak{v}_k \cdot (1+\beta \mathfrak{t}_{jk}))F = \mathfrak{v}_k F,$$

因为这样 $\left(\prod_{0<j<k}^{[<]} (1-\beta \mathfrak{u}_{jk}) \cdot \mathfrak{v}_k \cdot \prod_{0<j<k}^{[>]} (1+\beta \mathfrak{t}_{jk}) \right) F = \mathfrak{v}_k F$ 由归纳法得出。由于 $\mathfrak{t}_{jk}$、 $\mathfrak{u}_{jk}$ 和 $\mathfrak{v}_k$ 都是 $\mathbb{Z}[\beta]$-线性的，我们不妨设 $F = \mathfrak{G}_w(\mathbf{x};\ \mathbf{y})$ 对某个 $w \in S_\infty$成立，于是所需恒等式可直接由相关定义得到。 □

对于任意整数 $n \in \mathbb{Z}$，令 $[n, \infty) = \{i \in \mathbb{Z} :\ i \ge n\}$。

定理 4.10 ([48, 定理 2.3])。固定 $1 \ne w \in S_\infty$。令 $a \in [1, \infty)$ 为满足 $w(a) > w(a+1)$ 的最大值，将 $b \in [a+1, \infty)$ 定义为满足 $w(a) > w(b)$ 的最大值，并令 $v = w(a,\ b)$ 和 $c = v(a)$。则

$$\mathfrak{G}_w(\mathbf{x};\mathbf{y}) = \beta^{-1}\Big((1+\beta y_c)(1+\beta x_a)\mathfrak{R}_a \mathfrak{G}_v(\mathbf{x};\mathbf{y}) - \mathfrak{G}_v(\mathbf{x};\mathbf{y}) \Big).$$

证明。设 $c = v(a) = w(b)$。a 和 b 的极大性意味着，如果 $a < i < \infty$，那么 $\ell(v(a,i)) = \ell(v) + 1$ 当且仅当 $i = b$；并且对于所有 $a < i < b$，$\ell(w(a,i)) \ne \ell(w) + 1$。因此，由引理 4.9

$$(1+\beta x_a)\mathfrak{R}_a \mathfrak{G}_v(\mathbf{x};\mathbf{y}) = \left(\prod_{a<i<\infty}^{[<]} (1+\beta \mathfrak{t}_{ai}) \cdot \mathfrak{v}_a \right) \mathfrak{G}_v(\mathbf{x};\mathbf{y}) = \tfrac{1}{1+\beta y_c} \left(\mathfrak{G}_v(\mathbf{x};\mathbf{y}) + \beta \mathfrak{G}_w(\mathbf{x};\mathbf{y}) \right).$$

代入 这个恒等式代入所需公式的右侧，得到 $\mathfrak{G}_w(\mathbf{x};\mathbf{y}$). □

注 4.11。在 [48, 定理 2.3], 中，整数 b 被定义为满足 $(a,b) \in D(w)$ 的最大数，其中 $D(w) := \{(i,j) \in \mathbb{Z}_{>0} \times \mathbb{Z}_{>0} :\ w(i) > j,\ \text{且 } w^{-1}(j) > i\}$ 是 $w \in S_\infty$的罗特图。可以验证，这等同于要求 $b \in [a+1, \infty)$ 是使 $w(a) > w(b)$ 成立的极大值。

定理 4.4 和 4.10 推广了若干已知的（单）Grothendieck 多项式和（双）舒伯特多项式恒等式，例如见 [24, 30, 33, 34]；参见 [48,§2.5]中的讨论。

4.2 K-Stanley 对称函数

在描述其他经典类型中 $\mathfrak{G}_w(\mathbf{x};\mathbf{y})$ 的对应类比之前，我们必须先回顾 Kirillov 和 Naruse 对带符号置换的 *K-Stanley* 对称函数的定义。

为此，我们在参数 β, x_1、 x_2、 x_3、..... 和 y_1、 y_2、 y_3、.....之外，再添加第三列两两可交换的变量 z_1、 z_2、 z_3、.....。记

$$\mathbb{Z}[\beta][\![\mathbf{z}]\!] = \mathbb{Z}[\beta][\![z_1, z_2, z_3, \ldots]\!] \quad \text{and} \quad \mathbb{Z}[\beta][\![\mathbf{x};\mathbf{y};\mathbf{z}]\!] = \mathbb{Z}[\beta][\![x_1, x_2, , \ldots, y_1, y_2, \ldots z_1, z_2, \ldots]\!]$$

对于这些变量所对应的形式幂级数环。

回顾一下，Coxeter 群上的*Demazure 乘积* W 长度函数为 $\ell:\ W\to\mathbb{Z}_{\geq 0}$ 它是唯一满足以下条件的结合运算 $\circ:\ W\times W\to W$

$$u\circ v=uv \text{ if } \ell(uv)=\ell(u)+\ell(v) \quad \text{and} \quad s\circ s=s \text{ if } \ell(s)=1. \tag{4.14}$$

固定一种类型 $X\in\{\mathsf{B}、\mathsf{C}、\mathsf{D}\}$，并令 $w\in W_\infty^X$let $\mathcal{H}^X(w)$ 表示满足 $a_i\in\{-1,0,1,2,\dots\}$ 的有限整数序列$a=(a_1、\ a_2、\ \dots\dots、\ a_k)$ 的集合

$$w=t_{a_1}\circ t_{a_2}\circ\cdots\circ t_{a_k}$$

当相对于 Coxeter 群 $\circ$计算 Demazure 乘积 $W=W_\infty^X$时，$a\in\mathcal{H}^X\ (w)$ 中的所有元素都必须属于集合 $\{0,1,2,3,\dots\}$，当 $X\in\{\mathsf{B}、\mathsf{C}\}$时；而当 $\{-1,1,2,3,\dots\}$时，必须属于集合 $X=\mathsf{D}$。注意，$\mathcal{H}^{\mathsf{B}}\ (w)=\mathcal{H}^{\mathsf{C}}\ (w)$。我们将 $\mathcal{H}^X\ (w)$ 称为 *Hecke 字*，对应于 w。

定义 4.1 **2.** 设 $a=(a_1、\ a_2、\ \dots\dots、\ a_k)$ 是任意整数序列。令 $\ell(a)=k$ 并定义

$$o^{\mathsf{B}}(a)=|\{i\in[k]:a_i=0\}|,\quad o^{\mathsf{C}}(a)=0,\quad \text{and}\quad o^{\mathsf{D}}(a)=|\{i\in[k]:a_i=\pm 1\}|. \tag{4.15}$$

接下来，令 $\mathcal{C}^X(a)$ 为满足以下性质的整数序列集合 $b=(b_1,b_2,\dots,b_k)$:

(a) 有 $1\leq b_1\leq b_2\leq\cdots\leq b_k$;

(b) 若 $|a_{i-1}|\leq|a_i|\geq|a_{i+1}|$ 对某个 $i\in\{2,3,\dots,k-1\}$ 成立，则 $b_{i-1}<b_{i+1}$;

(c) 若 $X=\mathsf{B}$ 且 $a_i=a_{i+1}=0$，则 $b_i<b_{i+1}$; 并且

(d) 若 $X=\mathsf{D}$ 且 $a_i=a_{i+1}\in\{-1,1\}$，则 $b_i<b_{i+1}$。

给定 $b\in\mathcal{C}^X(a)$，令 $\mathbf{z}^b=z_{b_1}z_{b_2}\cdots z_{b_k}$ 和 $|b|=|\{b_1,b_2,\dots,b_k\}|$，并定义

$$\gamma(a,b)=|\{i\in[k-1]:a_i=a_{i+1}\text{ and }b_i=b_{i+1}\}|. \tag{4.16}$$

我们将 $\mathcal{C}^X(a)$ 的元素称为 *相容序列*，对应于 a。

以下并非 [21]，中给出的第一个 K-Stanley 对称函数定义，但我们认为它比 [21,Def. 7]更自成一体，也更明确。

定义 4.13 ([21, 命题 17])。固定 $X\in\{\mathsf{B}、\mathsf{C}、\mathsf{D}\}$。记 $\ell=\ell^X$ 并假设 $w\in W_\infty^X$。类型*K-Stanley 对称函数* 对于 w 类型 X 是形式幂级数

$$G_w^X(\mathbf{z})=\sum_{a\in\mathcal{H}^X(w)}\ \sum_{b\in\mathcal{C}^X(a)}2^{|b|-\gamma(a,b)-o^X(a)}\cdot\beta^{\ell(a)-\ell(w)}\cdot\mathbf{z}_b\in\mathbb{Z}[\beta][\![\mathbf{z}]\!].$$

注 4.14。此定义修正了 [21, 命题 17], 中的一个小错误：该命题（错误地）对类型 B 和 C 使用了相同的相容序列概念。具体而言，[21, 命题 17] 断言，K-Stanley 对称函数 $G_w^{\mathsf{B}}(\mathbf{z})$ 等于以下求和

$$\textstyle\sum_{a\in\mathcal{H}^{\mathsf{B}}(w)}\sum_{b\in\mathcal{C}^{\mathsf{C}}(a)}2^{|b|-\gamma(a,b)-o^{\mathsf{B}}(a)}\cdot\beta^{\ell(a)-\ell(w)}\cdot\mathbf{z}_b.$$

然而，通过取 $w=t_0$ 可以看出，这个表达式未必是具有整数系数的幂级数。Kirillov 和 Naruse 在证明 [21,命题 17]，的 B 型情形时省略了细节，但补全这些细节便可得到我们的公式。

在 D 型中，根据定义可立即得到

$$G^{\mathsf{D}}_w(\mathbf{z}) = G^{\mathsf{D}}_{w^*}(\mathbf{z}) \quad \text{for all } w \in W^{\mathsf{D}}_\infty \tag{4.17}$$

其中 $*$ 是交换 t_{-1} 和 t_1、同时固定所有 t_i（对任意 $i \geq 2$）的自同构。对于所有类型，不那么显然的对称性 $G^X_w(\mathbf{z}) = G^X_{w^{-1}}(\mathbf{z})$ 由 [21, 引理 7] 得证。

例4.15。若 $\ell(w) = 1$，则 $\mathcal{H}^X(w) = \{(a), (a, a), (a, a, a) \dots\}$，其中某个 $a \in \{-1, 0, 1, 2, \dots\}$。若 $a \in \{-1, 0, 1\}$ 且 $X \in \{\mathsf{B}, \mathsf{D}\}$，则所有相容序列都必须严格递增，因此

$$G^{\mathsf{B}}_{t_0}(\mathbf{z}) = G^{\mathsf{D}}_{t_1}(\mathbf{z}) = G^{\mathsf{D}}_{t_{-1}}(\mathbf{z}) = \sum_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} \sum_{i_0 < i_1 < \cdots < i_n} \beta^n z_{i_0} z_{i_1} \cdots z_{i_n}.$$

另一方面，若 $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ 是任意非负整数，则

$$G^{\mathsf{B}}_{t_{k+1}}(\mathbf{z}) = G^{\mathsf{C}}_{t_k}(\mathbf{z}) = G^{\mathsf{D}}_{t_{k+2}}(\mathbf{z}) = \sum_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} \sum_{i_0 < i_1 < \cdots < i_n} \beta^n (2z_{i_0} + \beta z_{i_0}^2)(2z_{i_1} + \beta z_{i_1}^2) \cdots (2z_{i_k} + \beta z_{i_n}^2).$$

我们给出 $G^X_w(\mathbf{z})$ 的另一种公式，这种写法可能显得更自然。记 $\prec$ 为 $\mathbb{Z}$ 上具有 $0 \prec -1 \prec 1 \prec -2 \prec 2 \prec \cdots$ 的全序。

定义4.16。给定一个整数序列 $a = (a_1, a_2, \dots\dots, a_k)$，定义 $\mathcal{U}(a)$ 为满足以下性质的整数序列 $b = (b_1, b_2, \dots\dots, b_k)$ 的集合：

(a) 有 $0 \neq b_1 \preceq b_2 \preceq \cdots \preceq b_k$；

(b) 若对于某个 $i \in [k-1]$，$b_i = b_{i+1}$ 为负，则 $|a_i| > |a_{i+1}|$；

(c) 若对于某个 $i \in [k-1]$，$b_i = b_{i+1}$ 为正，则 $|a_i| < |a_{i+1}|$。

依照 [2], ，我们将 $\mathcal{U}(a)$ 的元素称为 单峰分解，对应于 a。我们还定义

$$\begin{aligned}
\mathcal{U}^{\mathsf{B}}(a) &:= \{b \in \mathcal{U}(a) : b_i \text{ is positive whenever } a_i = 0\},\\
\mathcal{U}^{\mathsf{C}}(a) &:= \mathcal{U}(a),\\
\mathcal{U}^{\mathsf{D}}(a) &:= \{b \in \mathcal{U}(a) : b_i \text{ is positive whenever } a_i = \pm 1\}.
\end{aligned}$$

对于每个 $b \in \mathcal{U}^X(a)$，令 $\mathbf{z}^b = z_{|b_1|} z_{|b_2|} \cdots z_{|b_k|}$，其中 $k = \ell(a) = \ell(b)$。

Pr命题 4.17. 固定 $X \in \{\mathsf{B}、\mathsf{C}、\mathsf{D}\}$。记 $\ell = \ell^X$，并假设 $w \in W^X_\infty$。则

$$G^X_w(\mathbf{z}) = \sum_{a \in \mathcal{H}^X(w)} \sum_{b \in \mathcal{U}^X(a)} \beta^{\ell(a) - \ell(w)} \cdot \mathbf{z}_b \in \mathbb{Z}[\beta][\![\mathbf{z}]\!].$$

证明。在 C 型中，这个结果是 [2,命题 3.2]。这里的证明类似。

假设 $b \in \mathcal{U}^X(a)$，并令 $|b| = (|b_1|, |b_2|, |b_3|, \dots\dots)$。序列 $|b|$ 弱递增，且若 $|b_{i-1}| = |b_i| = |b_{i+1}|$，则要么 $b_{i-1} = b_i < 0$（因此 $|a_{i-1}| > |a_i|$），要么 $b_i = b_{i+1} > 0$（因此$|a_i| < |a_{i+1}|$）。因此，若 $|a_{i-1}| \leq |a_i| \geq |a_{i+1}|$，则必有 $|b_{i-1}| < |b_{i+1}|$。此外，若 $X = \mathsf{B}$ 且 $a_i = a_{i+1} = 0$，或若 $X = \mathsf{D}$ 且 $|a_i| = |a_{i+1}| = 1$，则必有 $b_i = |b_i| < |b_{i+1}| < b_{i+1}$。

我们得出 $|b| \in \mathcal{C}^X(a)$。还需验证，在映射 $|\cdot|$ 下，任意 $b \in \mathcal{C}^X(a)$ 的原像大小为 $2^{|b| - \gamma(a,b) - o^X(a)}$。这是一个直接的练习。 □

此外还有 K-Stanley 对称函数，属于A类型，我们在此简要回顾，以作比较。这些幂级数记作 $G_w(\mathbf{z})$，通常在文献中称为稳定 *Grothendieck* 多项式或对称 *Grothendieck* 函数 [6, 7, 8, 11]。

给定 $w \in S_\infty$，令 $\mathcal{H}(w)$ 为由有限整数序列 $a = (a_1, a_2, \ldots, a_k)$ 构成的集合，其中 $w = s_{a_1} \circ s_{a_2} \circ \cdots \circ s_{a_k}$。然后，给定 $a = (a_1, a_2, \ldots, a_k) \in \mathcal{H}(w)$，令 $\mathcal{C}(a)$ 为满足 $b_j < b_{j+1}$（若 $a_j \leq a_{j+1}$）的弱递增正整数序列 $b = (b_1 \leq b_2 \leq \cdots \leq b_k)$ 的集合。最后，令

$$G_w(\mathbf{z}) = \sum_{a \in \mathcal{H}(w)} \sum_{b \in \mathcal{C}(a)} \beta^{\ell(a)-\ell(w)} \mathbf{z}_b \in \mathbb{Z}[\beta][\![\mathbf{z}]\!]. \tag{4.18}$$

该对象与第 4.1 节中的 Grothendieck 多项式相关，其关系由公式 [7, §2] 给出

$$G_w(\mathbf{z}) = \lim_{N \to \infty} \mathfrak{G}_{1^N \times w}(\mathbf{z}) \tag{4.19}$$

其中极限是在形式幂级数意义下取的，且 $1^N \times w \in S_\infty$ 表示固定 $i \in [n]$并将 $i + n \mapsto w(i)$ 映射为 $+n$（对 $i \in \mathbb{Z}_{>0}$）的那个映射。

恒等式 (4.18) 结合定义 4.1 中的性质 (b)，可得 $G_w(\mathbf{z})$ 属于由$\mathbf{Sym}_\beta \subset \mathbb{Z}[\beta][\![\mathbf{z}]\!]$ 构成的对称形式幂级数（次数无界）的环，其系数属于 $\mathbb{Z}[\beta]$。对称函数 $G_w(\mathbf{z})$ 推广了 A 型*Stanley* 对称函数（定义在 [44], 上），令 $\beta = 0$即可恢复这些函数。

当 $w \in W_\infty^{\mathsf{A}} \cong S_\infty$ 时，$G_w^X(\mathbf{z})$ 与 $G_w(\mathbf{z})$ 之间存在密切关系。令 FSeq 表示有限整数序列的集合。若有限整数序列 $a = (a_1, a_2, \ldots, a_k) \in$ FSeq 满足 $a_i \neq a_{i+1}$ 对所有 $i \in [k-1]$ 都成立，则称其为多重排列。令 MPerm 表示所有多重排列构成的集合，并按公式定义映射 mperm：FSeq $\to$ MPerm，其满足 mperm(a) $= (a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_r})$，其中

$$\{i_1 < i_2 < \cdots < i_r\} = \{i \in [\ell(a)] : i = 1 \text{ or } a_{i-1} \neq a_i\}.$$

Fin此外，给定任意多重排列 $\pi \in$MPerm，考虑形式幂级数 s

$$L_\pi^{(\beta)} := \sum_{\substack{a \in \mathsf{FSeq} \\ \mathsf{mperm}(a) = \pi}} \sum_{b \in \mathcal{C}(a)} \beta^{\ell(a)-\ell(\pi)} \mathbf{z}_b \quad \text{and} \quad K_\pi^{(\beta)} := \sum_{\substack{a \in \mathsf{FSeq} \\ \mathsf{mperm}(a) = \pi}} \sum_{b \in \mathcal{U}(a)} \beta^{\ell(a)-\ell(\pi)} \mathbf{z}_b \tag{4.20}$$

这些与多重基本拟对称函数 和多重峰拟对称函数 中研究的 [29, 36, 39]相同。它们还原了 Gessel 的基本拟对称函数以及 Stembridge 的峰拟对称函数 [45] 当 $\beta = 0$时。

幂级数 $L_\pi^{(\beta)}$仅取决于 $\ell(\pi)$ 和下降集 Des$(\pi) = \{i\colon \pi_i > \pi_{i+1}\}$ [36,§3.3]。类似地，$K_\pi^{(\beta)}$仅取决于 $\ell(\pi)$ 和峰集 Peak$(\pi) = \{i\colon \pi_{i-1} < \pi_i > \pi_{i+1}\}$[36, §4.3]。这两个元素都属于拟对称函数的环 $\mathbf{QSym}_\beta \subset \mathbb{Z}[\beta][\![\mathbf{z}]\!]$（次数无界），其系数取自 $\mathbb{Z}[\beta]$；事实上，$\mathbf{QSym}^\beta$ 中的每个元素都能唯一地写成一个无限的 $\mathbb{Z}[\beta]$-线性组合，由 $L^{(\beta)}$-函数构成。

根据 [36, 推论 4.22] 存在一个（连续）环自同态 $\Theta : \mathbf{QSym}^\beta \to \mathbf{QSym}^\beta$，满足

$$\Theta(L_\pi^{(\beta)}) = K_\pi^{(\beta)} \quad \text{for all } \pi \in \mathsf{MPerm}. \tag{4.21}$$

下面，我们定义 $G_w(\mathbf{z})$，其中 $w \in W_\infty^A$ 是通过将 w 与 S_∞ 以显然的方式对应起来得到的。

命题 4.18. 设 $w \in W_\infty^A$和 $X \in \{\mathsf{B}, \mathsf{C}, \mathsf{D}\}$。假设 $w(\mathbf{1}) = 1$当且仅当 $X = \mathsf{D}$。那么

$$G_w^X(\mathbf{z}) = \Theta(G_w(\mathbf{z})).$$

证明。 在这些情形下， w 的 Hecke 字在 B 型和 C 型中都不含字母 0，在 D 型中也不含 ± 1，因此 $\mathcal{U}^X(a) = \mathcal{U}(a)$ 当且仅当 $a \in \mathcal{H}^X(w)$，且 $G_w^X(\mathbf{z}) = \sum_{\pi \in \mathcal{H}^X(w) \cap \mathsf{MPerm}} \beta^{\ell(\pi)-\ell(w)} K_\pi^{(\beta)}$。同样，由于我们有 $G_w(\mathbf{z}) = \sum_{\pi \in \mathcal{H}(w) \cap \mathsf{MPerm}} \beta^{\ell(\pi)-\ell(w)} L_\pi^{(\beta)}$，结论由 (4.21) 得出。 □

更一般地，对于任意 $w \in W_\infty^{\mathsf{C}}$，显然有

$$G_w^{\mathsf{C}}(\mathbf{z}) = \sum_{\pi \in \mathcal{H}^{\mathsf{C}}(w) \cap \mathsf{MPerm}} \beta^{\ell(\pi)-\ell^{\mathsf{C}}(w)} K_\pi^{(\beta)}. \tag{4.22}$$

当 $w \notin W_\infty^A$ 时，给出 $G_w^{\mathsf{B}}(\mathbf{z})$ 和 $G_w^{\mathsf{D}}(\mathbf{z})$ 的 $K^{(\beta)}$-展开是一个更微妙的问题，我们在此不作探讨。若能知道 D 型下的这一展开，就可以推广 [46, 定理 11.2]。

4.3 超对称函数

本节将说明一些杨表公式，它们可用于某些类别的带符号置换，给出 $G_w^X(\mathbf{z})$。

回顾第 1.2 节，$\mathbf{SSym}^\beta$ 表示幂级数 $f(\mathbf{z}) \in \mathbf{Sym}^\beta$ 中满足对称性质 (1.3) 的子环。虽然从定义 4.13 中并不明显，但事实证明 [21,引理 6]，

$$G_w^X(\mathbf{z}) \in \mathbf{SSym}_\beta \quad \text{for all } X \in \{\mathsf{B}, \mathsf{C}, \mathsf{D}\} \text{ and } w \in W_\infty^X. \tag{4.23}$$

Fol以下 [18, 21], 我们将$\mathbf{SSym}^\beta$ 中的元素称为 *K-超对称函数* .

环 $\mathbf{SSym}^\beta$ 最早由 Ikeda 和 Naruse 在 [18] 中考察，因为它恰好由可表示为无限多个 $\mathbb{Z}[\beta]$-线性组合的 *K-理论 Schur P-函数和 Q-函数*所组成，下面回顾它们的定义。

一个 分拆 是一个非负整数的弱递减序列 $\lambda = (\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots)$，其和有限 $|\lambda| = \sum_i \lambda_i$。若一个分拆满足 严格 条件，即 $\lambda_i = \lambda_{i+1}$ 蕴含 $\lambda_i = \lambda_{i+1} = 0$，则称其为严格分拆。严格分拆 的移位图 是由以下成对元素构成的集合 λ：

$$\mathsf{SD}_\lambda = \{(i, i+j-1) \in \mathbb{Z}_{>0} \times \mathbb{Z}_{>0} : 1 \leq j \leq \lambda_i\} \tag{4.24}$$

我们将其视为 p矩阵中的位置。记作 $\mu \subseteq^{\lambda \text{ 若 SD}} \mu \subseteq \mathsf{SD}_\lambda$ 并定义 SD $_{\lambda/\mu} = \mathsf{SD}_\lambda \backslash \mathsf{SD}_\mu$.

形状为 λ/μ 的集合值移位杨表 是一个映射 T，它将 $\mathsf{SD}^{\lambda/\mu}$ 映射到全序字母表 $\{1' < 1 < 2' < 2 < \dots\}$ 的有限非空子集集合。若 T是这样的杨表，则记 $(i, j) \in T$表示 (i, j) 属于其定义域，并令 T_{ij} 表示 T 赋给该位置的集合。我们还定义 $|T| = \sum_{(i,j) \in T} |T_{ij}|$ 和

$$\mathbf{z}^T = \prod_{k=1}^{\infty} z_k^{a_k+b_k} \quad \text{where} \begin{cases} a_k \text{ is the number of pairs } (i,j) \in T \text{ with } k \in T_{ij}, \\ b_k \text{ is the number of pairs } (i,j) \in T \text{ with } k' \in T_{ij}. \end{cases} \tag{4.25}$$

集合值移位杨表是半标准 的，当且仅当

(a) $\max(T_{ij}) \leq \min(T_{i,j+1})$ with $T_{ij} \cap T_{i,j+1} \subset \{1, 2, 3, \dots\}$ whenever $(i,j), (i,j+1) \in T$; and

(b) $\max(T_{ij}) \leq \min(T_{i+1,\,j})$, 其中 $T_{ij} \cap T_{i+1,\,j} \subset \{1', 2', 3', \dots\}$，只要 $(i,\ j),\ (i+1,\ j) \in T$。

用 $\mathsf{SetShTab}^+(\lambda/\mu)$ 表示形状为 λ/μ 的半标准集合值移位杨表的集合。令

$$\mathsf{SetShTab}(\lambda/\mu) = \{T \in \mathsf{SetShTab}^+(\lambda/\mu) : T_{ij} \subset \mathbb{Z}_{>0} \text{ for all } (i,j) \in T \text{ with } i = j\}. \tag{4.26}$$

我们简写为

$$\mathsf{SetShTab}(\lambda) = \mathsf{SetShTab}(\lambda/\emptyset) \quad \text{and} \quad \mathsf{SetShTab}^+(\lambda) = \mathsf{SetShTab}^+(\lambda/\emptyset). \tag{4.27}$$

例4.19。 若 $\lambda=(5,\ 3,\ 2)$ 且 $\mu=(2)$，则 $T\in\mathsf{SetShTab}(\lambda/\mu)$ 中的一个元素为

$$T=\begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline \multicolumn{2}{|c|}{\multirow{2}{*}{}} & 2'3' & 4 & 457\\\cline{3-5}
 & 12 & 3'3 & 5' & \multicolumn{1}{c}{}\\\cline{2-3}
 & & 4 & 5'57 & \multicolumn{1}{c}{}\\\cline{3-4}\end{array}$$

并且我们有 $T_{23}=\{3',3\}$、 $|T|=15$ 和 $\mathbf{z}^T=z_1z_2^2z_3^3z_4^3z_5^4z_7^2$。

为方便起见，当 $\mu\not\subset\lambda$ 时，我们令 $\mathsf{SetShTab}(\lambda/\mu)=\mathsf{SetShTab}^+(\lambda/\mu)=\varnothing$ 为空集。

定义 4.20 ([18, §9])。 若 μ 和 λ 是严格分拆，则以 *K-理论 Schur P- 和Q-函数* 为指标的 λ/μ 是关于 $\mathbb{Z}_{\geq 0}[\beta][\![\mathbf{z}]\!]$ 的形式幂级数，定义如下

$$GP_{\lambda/\mu}(\mathbf{z})=\sum_{T\in\mathsf{SetShTab}(\lambda/\mu)}\beta^{|T|-|\lambda|}\mathbf{z}^T\quad\text{and}\quad GQ_{\lambda/\mu}(\mathbf{z})=\sum_{T\in\mathsf{SetShTab}^+(\lambda)}\beta^{|T|-|\lambda|}\mathbf{z}^T.$$

我们简写为 $GP_\lambda(\mathbf{z})=GP_{\lambda/\emptyset}(\mathbf{z})$ 和 $GQ_\lambda(\mathbf{z})=GQ_{\lambda/\emptyset}(\mathbf{z})$。我们还令

$$GP_0(\mathbf{z})=GQ_0(\mathbf{z})=1,\quad GP_n(\mathbf{z})=GP_{(n)}(\mathbf{z}),\quad\text{and}\quad GQ_n(\mathbf{z})=GQ_{(n)}(\mathbf{z})\tag{4.28}$$

当 n 是正整数时。若 $\deg(z_i)=1$ 且 $\deg(\beta)=-1$，则 $GP_{\lambda/\mu}(\mathbf{z})$ 和 $GQ_{\lambda/\mu}(\mathbf{z})$ 都是次数为 $|\lambda/\mu|=|\lambda|-|\mu|$ 的齐次式，只要 $\mu\subset\lambda$。

例4.21。 如果我们将 $e_k(\mathbf{z})=\sum_{1\leq i_1<i_2<\cdots<i_k}z_{i_1}z_{i_2}\cdots z_{i_k}$ 写作 $k\in\mathbb{Z}_{>0}$，那么

$$GP_1(\mathbf{z})=e_1(\mathbf{z})+\beta e_2(\mathbf{z})+\beta^2e_3(\mathbf{z})+\beta^3e_4(\mathbf{z})+\cdots\quad\text{and}\quad GP_2(\mathbf{z})=\left(GP_1(\mathbf{z})\right)^2,$$

以及 $GQ_1(\mathbf{z})=2\cdot GP_1(\mathbf{z})+\beta\cdot GP_2(\mathbf{z})$。一般而言，$GQ_n(\mathbf{z})=2\cdot GP_n(\mathbf{z})+\beta\cdot GP_{n+1}(\mathbf{z})$。

Ikeda 和 Naruse [18]已证明，对于所有严格分拆 λ，$GP_\lambda(\mathbf{z})$ 和 $GQ_\lambda(\mathbf{z})$ 都是 SSym^β 的元素。根据 [36, 推论 5.13]，$GP_{\lambda/\mu}(\mathbf{z})$ 和 $GQ_{\lambda/\mu}(\mathbf{z})$ 也同样如此。集合 $\{GP_\lambda(\mathbf{z}):\ \lambda\text{严格}\}$ 是 SSym^β 的一个伪基，其含义是，SSym^β 中的每个元素都可以唯一地表示为 $\mathbb{Z}[\beta]$ 的函数的形式（即可能是无限的）线性组合。每个 $GQ_\lambda(\mathbf{z})$ 都是 GP 函数的有限 $\mathbb{Z}[\beta]$ 线性组合 [9],，由此可知，SSym^β 中的每个元素都可以唯一地表示为 $\mathbb{Q}[\beta]$ 的函数的形式线性组合。

回顾引言中的 (1.5) 和 (1.6)，带符号排列 $w\in W_\infty^{\mathsf{B}}=W_{\mathsf{C}\infty}$ 当且仅当*是 Grassmannian* 若 $w(1)<w(2)<w(3)<\cdots$，且若 $w\in W_\infty^X$ 具有此性质，则存在严格分拆 $\lambda_{\mathsf{B}}(w)=\lambda_{\mathsf{C}}(w)$ 以及 $\lambda_{\mathsf{D}}(w)$，使得 [21, 引理 7] 成立

$$G_w^X(\mathbf{z})=\begin{cases}GP_{\lambda_X(w)}(\mathbf{z}) & \text{when } X\in\{\mathsf{B},\mathsf{D}\}\\ GQ_{\lambda_X(w)}(\mathbf{z}) & \text{when } X=\mathsf{C}.\end{cases}$$

这个公式表明，任意 $GP_\lambda(\mathbf{z})$ 都可以作为 B 型或 D 型的 K-Stanley 对称函数出现，而任意 $GQ_\lambda(\mathbf{z})$ 都可以作为 C 型的 K-Stanley 对称函数出现。下一个结果将表明，对于以斜形为指标的 GP-函数和 GQ-函数，这一结论同样成立。

固定两个严格分拆 $\mu\subseteq\lambda$。我们按照以下步骤定义两个由斜形λ/μ 索引的带符号置换。首先，令 $T_{\lambda/\mu}^{\mathsf{B}}$ 为形状 λ/μ 的移位杨氏图，其中 $j-i$ 位于

每个位置 $(i,j) \in \mathrm{SD}^{\lambda/\mu}$。然后，令 $T^{\mathsf{D}}_{\lambda/\mu}$ 为形状 λ/μ 的移位杨氏图；若 $i \neq j$，则 $j-i+1$ 位于位置 $(i,j) \in \mathrm{SD}^{\lambda/\mu}$；若 $i=j$，则将 $(-1)^i$ 置于该位置。最后，定义

$$w_{\mathsf{B}}(\lambda/\mu) = w_{\mathsf{C}}(\lambda/\mu) = t_{a_1}t_{a_2}\cdots t_{a_k} \quad \text{and} \quad w_{\mathsf{D}}(\lambda/\mu) = t_{b_1}t_{b_2}\cdots t_{b_k} \tag{4.29}$$

其中 $k=|\lambda/\mu|$ 以及 $a_1a_2\cdots a_k$ 和 $b_1b_2\cdots b_k$ 是 $T^{\mathsf{B}\lambda/\mu}$ 的条目，而 $T^{\mathsf{D}}_{\lambda/\mu}$ 则按行从左到右读取，行索引从最小值开始。

例 4.22。当 $\lambda=(5,3,1)$ 和 $\mu=(2)$ 是我们的两个移位杨氏图时，

$$T^{\mathsf{B}}_{(5,3,1)/(2)} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline \multicolumn{2}{c}{} & 2 & 3 & 4 \\ \cline{3-5} \multicolumn{1}{c}{} & 0 & 1 & 2 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{2-4} \multicolumn{2}{c}{} & 0 & \multicolumn{2}{c}{} \\ \cline{3-3} \end{array} \quad \text{and} \quad T^{\mathsf{D}}_{(5,3,1)/(2)} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline \multicolumn{2}{c}{} & 3 & 4 & 5 \\ \cline{3-5} \multicolumn{1}{c}{} & -1 & 2 & 3 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{2-4} \multicolumn{2}{c}{} & +1 & \multicolumn{2}{c}{} \\ \cline{3-3} \end{array},$$

相应的带符号置换为

$$\begin{aligned} w_{\mathsf{B}}(\lambda/\mu) = w_{\mathsf{C}}(\lambda/\mu) &= t_2t_3t_4t_0t_1t_2t_0 = \bar{3}4\bar{1}52 \qquad \text{and} \\ w_{\mathsf{D}}(\lambda/\mu) &= t_3t_4t_5t_{-1}t_2t_3t_1 = 4\bar{2}5\bar{1}63. \end{aligned} \tag{4.30}$$

Coxeter 群的一个元素称为 全可交换的，如果它的每个约化词都可以通过依次交换相邻的可交换生成元对而转换为任意其他约化词（从而避免使用任何非平凡的辫子关系）。在对称群 S_∞ 中，全可交换元素的集合恰好与 321-避免置换类重合 [46, 推论 5。8]。

按照 [46], 的术语，带符号置换 $w_{\mathsf{B}}(\lambda/\mu)$ 是 $W\mathrm{B}_\infty$ 中形状为 λ/μ 的全可交换顶元素，而从 $T^{\mathsf{B}}_{\lambda/\mu}$ 中读出的序列 $a_1a_2\cdots a_k$ 是它的典范约化词[46, 推论 5.6]。类似地，$w_{\mathsf{D}}(\lambda/\mu)$ 是 W^{D}_∞ 中一个形状为 λ/μ 的全可交换 A-稳定元素，而从 $T^{\mathsf{D}}_{\lambda/\mu}$ 中读出的序列 $b_1b_2\cdots b_k$ 是它的典范约化词 [46, 推论 10.2]。

定理 4.23. 设 $\mu \subseteq \lambda$ 为严格分拆。那么

$$G^{\mathsf{B}}_{w_{\mathsf{B}}(\lambda/\mu)}(\mathbf{z}) = GP_{\lambda/\mu}(\mathbf{z}), \quad G^{\mathsf{C}}_{w_{\mathsf{C}}(\lambda/\mu)}(\mathbf{z}) = GQ_{\lambda/\mu}(\mathbf{z}), \quad \text{and} \quad G^{\mathsf{D}}_{w_{\mathsf{D}}(\lambda/\mu)}(\mathbf{z}) = GP_{\lambda/\mu}(\mathbf{z}).$$

证明. C 型公式为 [2, 推论 3.12], ，其余公式则可用类似的论证推导得到。具体而言，令 $v = w_{\mathsf{B}}(\lambda/\mu) = w_{\mathsf{C}}(\lambda/\mu)$ 和 $w = w_{\mathsf{D}}(\lambda/\mu)$。那么 [2, 定理 3.11] 构造了一个双射

$$\mathsf{res} : \mathsf{SetShTab}^{+}(\lambda/\mu) \to \left\{(a,b) : a \in \mathcal{H}^{\mathsf{C}}(v) \text{ and } b \in \mathcal{U}^{\mathsf{C}}(a)\right\}$$

该双射在如下意义下保权重：$|T| = \ell(a) = \ell(b)$ 且 $\mathbf{z}^T = \mathbf{z}_b$，只要 $\mathsf{res}(T) = (a,b)$。从 [2]中该映射的定义可清楚看出，它限制为一个双射

$$\mathsf{SetShTab}(\lambda/\mu) \to \left\{(a,b) : a \in \mathcal{H}^{\mathsf{B}}(v) \text{ and } b \in \mathcal{U}^{\mathsf{B}}(a)\right\}.$$

根据命题 4.17，这些双射的存在性证明了 (a) 部分。

给定一个整数序列 $a=(a_1,a_2,\ldots,a_k)$，令 $\sigma(a) = (|a_1|-1, |a_2|-1, \ldots, |a_k|-1)$。根据[46, 命题 9.8 和推论 10.2], ，运算 σ 定义了一个从 $w \in W^{\mathsf{D}}_\infty$ 的约化词集合到 $v \in W\mathrm{B}_\infty$ 的约化词集合的双射。由于 v 和 w 都是完全交换的，因此可知 σ 扩展为一个双射 $\mathcal{H}^{\mathsf{D}}(w) \to \mathcal{H}^{\mathsf{B}}(v)$。由于对于 $a \in \mathcal{H}^{\mathsf{D}}(w)$，$b \in \mathcal{U}^{\mathsf{D}}(a)$当且仅当 $b \in \mathcal{U}^{\mathsf{B}}(\sigma(a))$，映射 $(a,b) \mapsto \mathsf{res}^{-1}(\sigma(a)\ b)$是一个保权重双射

$$\left\{(a,b) : a \in \mathcal{H}^{\mathsf{D}}(v) \text{ and } b \in \mathcal{U}^{\mathsf{D}}(a)\right\} \to \mathsf{SetShTab}(\lambda/\mu)$$

根据命题 4.17，这足以证明（b）部分。 □

Tamvakis 在 [47, 定理 2 和 3] 中为 $G_w^X(\mathbf{z})$ 推导出了另一族杨表公式。然而，将这里的结果作为 [47] 的特殊情形似乎并不直接；参见 [2, §73]。

4.4 Kirillov–Naruse 多项式

本节回顾 [21] 中环的某些元素 $\mathfrak{G}_w^X(\mathbf{x};\ \mathbf{y};\ \mathbf{z})$ 的构造

$$\mathbf{SSym}_\beta[\mathbf{x};\mathbf{y}] := \mathbf{SSym}_\beta[x_1,x_2,x_3,\dots,y_1,y_2,y_3,\dots] \subset \mathbb{Z}[\beta][\![\mathbf{x};\mathbf{y};\mathbf{z}]\!].$$

我们可以直接用下式定义这些幂级数，该公式涉及 A 型 Grothendieck 多项式、 K-Stanley 对称函数以及 Demazure 乘积。

定义 4.24 ([21, 命题 2]). 固定 $X \in \{\mathsf{B},\ \mathsf{C},\ \mathsf{D}\}$ 并令 $\ell = \ell^X$。那么，对于 $w \in W_\infty^X$ 定义

$$\mathfrak{G}_w^X(\mathbf{x};\mathbf{y};\mathbf{z}) = \sum_{(\sigma,u,\tau)} \beta^{\ell(\sigma)+\ell(u)+\ell(\tau)-\ell(w)} \cdot \mathfrak{G}_\sigma(\mathbf{y}) \cdot G_u^X(\mathbf{z}) \cdot \mathfrak{G}_\tau(\mathbf{x}) \in \mathbf{SSym}_\beta[\mathbf{x};\mathbf{y}]$$

其中求和遍及所有满足 $\sigma^{-1}\circ u\circ\tau = w$ 的三元组 $(\sigma,\ u,\ \tau) \in W_{\mathsf{A}_\infty} \times W_\infty^X \times W^{\mathsf{A}\infty}$。

我们将 $\mathfrak{G}_w^X(\mathbf{x};\mathbf{y};\mathbf{z})$ 称为 *Kirillov–Naruse 多项式* 或 双 *Grothendieck 多项式*。

注 4.25。 所引用的公式 [21, 命题 2]意外遗漏了 β 的幂次；为与 [21, 定义 7]相符，应将其包含在内。添加这一因子后，按照通常约定 $\deg\beta = -1$ 且 $\deg x_i = \deg y_i = 1$， $\mathfrak{G}_w^X(\mathbf{x};\mathbf{y};\mathbf{z})$ 关于次数 $\ell^X(w)$ 是齐次的。正如 [21], 所指出的，这一定义的 $\mathfrak{G}_w^X(\mathbf{x};\mathbf{y};\mathbf{z})$ 等价于 [20] 中较早的构造，但更为简洁。

令 $\beta = 0$ 将 $\mathfrak{G}_w^X(\mathbf{x};\mathbf{y};\mathbf{z})$ 转化为 经典群的双重舒伯特多项式，该多项式由 [19] 引入；进一步令 $\mathbf{y} = 0$，即可得到 舒伯特多项式，由 Billey 和 Haiman 在 [4] 中构造。注意，我们总有 $\mathfrak{G}_w^X(0;0;\mathbf{z}) = G_w^X(\mathbf{z})$。

例4.26。 若 $X \in \{\mathsf{B}、\mathsf{C}\}$ 和 $w = 21 = t_1t_0 \in W_{\mathsf{B}\infty} = W_{\mathsf{C}\infty}$，则定义 $\mathfrak{G}_w^X(\mathbf{x};\mathbf{y};\mathbf{z})$ 的求和所依据的三元组 $(\sigma,\ u,\ \tau)$ 为 $(\mathbf{1},\ t_1t_0,\ \mathbf{1})$、$(t_1,\ t_0,\ \mathbf{1})$ 和 $(t_1,\ t_1t_0,\ \mathbf{1})$。由于 $\mathfrak{G}_{\mathbf{1}}(\mathbf{x}) = 1$和 $\mathfrak{G}_{t_1}(\mathbf{x}) = \mathfrak{G}_{21}(\mathbf{x}) = x_1$，并且 $t_0 = 1$ 和 $t_1t_0 = 21$ 都是 Grassmannian，因此我们有

$$\mathfrak{G}^{\mathsf{B}}_{21}(\mathbf{x};\mathbf{y};\mathbf{z}) = y_1GP_1(\mathbf{z}) + (1+\beta y_1)GP_2(\mathbf{z}) \quad \text{and} \quad \mathfrak{G}^{\mathsf{C}}_{21}(\mathbf{x};\mathbf{y};\mathbf{z}) = y_1GQ_1(\mathbf{z}) + (1+\beta y_1)GQ_2(\mathbf{z}).$$

Kirillov 和 Naruse 证明，形式幂级数 $\mathfrak{G}_w^X(\mathbf{x};\mathbf{y};\mathbf{z})$ 表示 B、C、D 型中 G/B 的等变 K-理论环里的反 Schubert 类 [21, §6]。特别地，将 $\mathfrak{G}_v^X(\mathbf{x};\mathbf{y};\mathbf{z})$ 与 $\mathfrak{G}_w^X(\mathbf{x};\mathbf{y};\mathbf{z})$ 的乘积展开为 $\mathfrak{G}^X$-函数时所得到的结构常数，与 $K_T(G/B)$ 的反 Schubert 基的结构常数相同，具体来说：

引理 4.27 ([21, 推论 2])。 固定 $X \in \{\mathsf{B},\ \mathsf{C},\ \mathsf{D}\}$ 以及 $u,\ v \in W_\infty^X$。那么，对于每个满足条件的 $w \in W_\infty^X$，都存在唯一的齐次系数 $c_{u,\ v}^w(\mathbf{y}) \in \mathbb{A}_\beta$，使得

$$\mathfrak{G}_u^X(\mathbf{x};\mathbf{y};\mathbf{z}) \cdot \mathfrak{G}_v^X(\mathbf{x};\mathbf{y};\mathbf{z}) = \textstyle\sum_{w\in W_\infty^X} c_{u,v}^w(\mathbf{y}) \cdot \mathfrak{G}_w^X(\mathbf{x};\mathbf{y};\mathbf{z}),$$

并且对于所有满足 $u,\ v \in W_n^X$的 $n \in \mathbb{Z}_{>0}$，都有 $\{c_{u,v}^w(\mathbf{y}) :\ w \in W_n^X\} \subset \mathbb{A}_\beta^{(n)}$，且

$$\Theta_u^X \cdot \Theta_v^X = \textstyle\sum_{w\in W_n^X} c_{u,v}^w(y_i \mapsto 1 - x^{\varepsilon_i})|_{\beta=-1} \cdot \Theta_w^X \in K_T(G/B)$$

当 G 是类型为 X 的秩为 n 的经典群时。

这种联系将使我们能够从第3.3节中的等变切瓦利公式推导出 转移公式，适用于 $\mathfrak{G}_w^X(\mathbf{x};\ \mathbf{y};\ \mathbf{z})$。这一应用将用到下面例子中的计算。

例 4.28. 若 $\ell(w) = 1$ 且 $w \notin W_\infty^{\mathsf{A}} \cong S_\infty$，则 $\mathfrak{G}_w^X(\mathbf{x};\mathbf{y};\mathbf{z}) = G_w^X(\mathbf{z})$；而若 $\ell(w) = 1$ 且$w \in W_\infty^{\mathsf{A}}$，则 $w = t_k$ 对某个 $i \in \mathbb{Z}_{>0}$ 成立，由定义 4.24 可立即得到

$$1 + \beta\mathfrak{G}_w^X(\mathbf{x};\mathbf{y};\mathbf{z}) = (1 + \beta\mathfrak{G}_{s_k}(\mathbf{y}))\left(1 + \beta G_{t_k}^X(\mathbf{z})\right)(1 + \beta\mathfrak{G}_{s_k}(\mathbf{x}))\,.$$

Com将此方程与例 4.2 和 (1.6) 比较，可得以下恒等式 s:

(a) 在类型 $X = \mathsf{B}$ 中，我们有 $1 + \beta\mathfrak{G}_{t_0}^{\mathsf{B}}(\mathbf{x};\mathbf{y};\mathbf{z}) = 1 + \beta GP_1(\mathbf{z})$，以及

$$1 + \beta\mathfrak{G}_{t_k}^{\mathsf{B}}(\mathbf{x};\mathbf{y};\mathbf{z}) = (1 + \beta GQ_1(\mathbf{z}))\textstyle\prod_{i\in[k]}(1 + \beta x_i)(1 + \beta y_i)$$

对于 $k \geq 1$。由于

$$1 + \beta GQ_1(\mathbf{z}) = (1 + \beta GP_1(\mathbf{z}))^2 = 1 + 2\beta GP_1(\mathbf{z}) + \beta^2 GP_2(\mathbf{z}),$$

由例4.26可知

$$1 + \beta GQ_1(\mathbf{z}) = 1 + \beta \cdot \tfrac{2+\beta y_1}{1+\beta y_1} \cdot \mathfrak{G}_{\overline{1}}^{\mathsf{B}}(\mathbf{x};\mathbf{y};\mathbf{z}) + \beta^2 \cdot (1 + \beta y_1)^{-1} \cdot \mathfrak{G}_{\overline{21}}^{\mathsf{B}}(\mathbf{x};\mathbf{y};\mathbf{z}).$$

因此，我们有

$$1 + \beta x_1 = \tfrac{1}{1+\beta y_1} \cdot \tfrac{1}{1+\beta\mathfrak{G}_{t_0}^{\mathsf{B}}(\mathbf{x};\mathbf{y};\mathbf{z})} \cdot \tfrac{1+\beta\mathfrak{G}_{t_1}^{\mathsf{B}}(\mathbf{x};\mathbf{y};\mathbf{z})}{1+\beta\mathfrak{G}_{t_0}^{\mathsf{B}}(\mathbf{x};\mathbf{y};\mathbf{z})} = \tfrac{1+\beta\mathfrak{G}_{\overline{21}}^{\mathsf{B}}(\mathbf{x};\mathbf{y};\mathbf{z})}{(1+\beta y_1)+\beta(2+\beta y_1)\mathfrak{G}_{\overline{1}}^{\mathsf{B}}(\mathbf{x};\mathbf{y};\mathbf{z})+\beta^2\mathfrak{G}_{\overline{21}}^{\mathsf{B}}(\mathbf{x};\mathbf{y};\mathbf{z})}$$

且对于 $k \geq 2$有 $1 + \beta x_k = \frac{1}{1+\beta y_k} \cdot \frac{1+\beta\mathfrak{G}_{t_k}^{\mathsf{B}}(\mathbf{x};\mathbf{y};\mathbf{z})}{1+\beta\mathfrak{G}_{t_{k-1}}^{\mathsf{B}}(\mathbf{x};\mathbf{y};\mathbf{z})}$.

(b) 在类型 $X = \mathsf{C}$ 中，对所有 $k \geq 0$，都有

$$1 + \beta\mathfrak{G}_{t_k}^{\mathsf{C}}(\mathbf{x};\mathbf{y};\mathbf{z}) = (1 + \beta GQ_1(\mathbf{z}))\textstyle\prod_{i\in[k]}(1 + \beta x_i)(1 + \beta y_i).$$

因此，若 $k \geq 1$则 $1 + \beta x_k = \frac{1}{1+\beta y_k} \cdot \frac{1+\beta\mathfrak{G}_{t_k}^{\mathsf{C}}(\mathbf{x};\mathbf{y};\mathbf{z})}{1+\beta\mathfrak{G}_{t_{k-1}}^{\mathsf{C}}(\mathbf{x};\mathbf{y};\mathbf{z})}$.

(c) 在类型 $X = \mathsf{D}$ 中，我们有

$$\begin{aligned}
1 + \beta\mathfrak{G}_{t_{-1}}^{\mathsf{D}}(\mathbf{x};\mathbf{y};\mathbf{z}) &= 1 + \beta GP_1(\mathbf{z}),\\
1 + \beta\mathfrak{G}_{t_1}^{\mathsf{D}}(\mathbf{x};\mathbf{y};\mathbf{z}) &= (1 + \beta GP_1(\mathbf{z}))\,(1 + \beta x_1)(1 + \beta y_1),\\
1 + \beta\mathfrak{G}_{t_k}^{\mathsf{D}}(\mathbf{x};\mathbf{y};\mathbf{z}) &= (1 + \beta GQ_1(\mathbf{z}))\textstyle\prod_{i\in[k]}(1 + \beta x_i)(1 + \beta y_i),
\end{aligned}$$

对所有 $k \geq 2$ 都成立。因此

$$1 + \beta x_1 = \tfrac{1}{1+\beta y_1} \cdot \tfrac{1+\beta\mathfrak{G}_{t_1}^{\mathsf{D}}(\mathbf{x};\mathbf{y};\mathbf{z})}{1+\beta\mathfrak{G}_{t_{-1}}^{\mathsf{D}}(\mathbf{x};\mathbf{y};\mathbf{z})}$$

and

$$1 + \beta x_2 = \tfrac{1}{1+\beta y_2} \cdot \tfrac{1}{1+\beta\mathfrak{G}_{t_{-1}}^{\mathsf{D}}(\mathbf{x};\mathbf{y};\mathbf{z})} \cdot \tfrac{1+\beta\mathfrak{G}_{t_2}^{\mathsf{D}}(\mathbf{x};\mathbf{y};\mathbf{z})}{1+\beta\mathfrak{G}_{t_1}^{\mathsf{D}}(\mathbf{x};\mathbf{y};\mathbf{z})}$$

而对于 $k \geq 3$，我们有

$$1 + \beta x_k = \tfrac{1}{1+\beta y_k} \cdot \tfrac{1+\beta\mathfrak{G}_{t_k}^{\mathsf{D}}(\mathbf{x};\mathbf{y};\mathbf{z})}{1+\beta\mathfrak{G}_{t_{k-1}}^{\mathsf{D}}(\mathbf{x};\mathbf{y};\mathbf{z})}.$$

对于 Grassmannian 带符号置换，存在显式的杨表公式 [21, 命题 5] 对于$\mathfrak{G}_w^X(\mathbf{x};\ \mathbf{y};\ \mathbf{z})$ 对 (1.6) 中关于 $G_w^X(\mathbf{z})$ 的恒等式作了细化；另见 [17]。Tamvakis 描述了某类斜带符号置换的相关杨表公式，见 [47, §3，并且 4], 推广了 Matsumura 的结果 [41] 在类型A中。

除这些情形外，计算幂级数 $\mathfrak{G}_w^X(\mathbf{x};\mathbf{y};\mathbf{z})$ 并不容易。下一节的结果将为这个问题提供一种归纳解法。

4.5 经典类型的转移

在本节余下部分，固定 $X \in \{\mathsf{B},\mathsf{C},\mathsf{D}\}$。定义 $\widehat{\mathbb{V}}^X$ 为由所有形式的 $\mathbb{A}_\beta$线性组合 $\sum_{w\in W_\infty^X} f_w(\mathbf{y})\cdot\mathfrak{G}_w^X(\mathbf{x};\mathbf{y};\mathbf{z})$ 组成的 $\mathbb{A}_\beta$-模，使得对每个 $k\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$，集合

$$\{w\in W_\infty^X : \ell^X(w)=k \text{ and } f_w(\mathbf{y})\neq 0\}$$

是有限的。若 $\mathbb{Z}[\beta]$-线性映射或 $\mathbb{A}_\beta$-线性映射 $\Phi\colon \widehat{\mathbb{V}}^X\to\widehat{\mathbb{V}}^X$ 满足连续，则称其为

$$\Phi\Big(\textstyle\sum_w f_w(\mathbf{y})\cdot\mathfrak{G}_w^X(\mathbf{x};\mathbf{y};\mathbf{z})\Big)=\sum_w\Phi\Big(f_w(\mathbf{y})\cdot\mathfrak{G}_w^X(\mathbf{x};\mathbf{y};\mathbf{z})\Big).$$

我们可以将 $\widehat{\mathbb{V}}^X$ 视为 $\mathbb{Z}[\beta][\![\mathbf{x};\mathbf{y};\mathbf{z}]\!]$ 的一个 $\mathbb{A}_\beta$-子模，因为 $\mathbb{A}_\beta\subset\mathbb{Z}[\beta][\![\mathbf{x};\mathbf{y}]\!]$，并且若将 β视为次数为零、其他所有变量视为次数为一，则 $\mathfrak{G}_w^X$ 中出现的最低次数单项式的次数都至少为 $\ell^X(w)$。

对于任意参数 a，令 $\ominus a=\frac{-a}{1+\beta a}$注意，$\ominus(\ominus a)=a$。对于 $i\in\mathbb{Z}_{>0}$，定义

$$y_{-i}=\ominus y_i=\tfrac{-y_i}{1+\beta y_i}\quad\text{so that}\quad\tfrac{1}{1+\beta y_{-i}}=1+\beta y_i. \tag{4.31}$$

采用这一约定，我们令 $w\in W_{\mathsf{B}\infty}=W_{\mathsf{C}\infty}$ 按照公式 (4.7) 作用于 $f(\mathbf{y})\in\mathbb{A}_\beta$，于是

$$w*f(\mathbf{y})=f(y_{w(1)},y_{w(2)},y_{w(3)},\dots). \tag{4.32}$$

现在我们定义若干个作用于 $\widehat{\mathbb{V}}^X$ 的连续 $\mathbb{Z}[\beta]$-线性算子，分别记为 $\mathfrak{t}_{ij}^X$、$\mathfrak{u}_{ij}^X$、$\mathfrak{v}_k^X$、$\mathfrak{o}_k^X$ 和 $\mathfrak{M}_k^X$。固定整数 $i<j$、k 和 $j,k\in\mathbb{Z}_{>0}$。回忆 (2.16)，当 $i=-j$ 时，$t_{ij}\in W_{\mathsf{B}_\infty}=W_\infty^{\mathsf{C}}$ 是单位元；否则它是一个反射。当且仅当 $0<i<j$ 时，$t_{ij}\in W_\infty^{\mathsf{A}}$；当且仅当 $i\neq 0$ 时，$t_{ij}\in W_\infty^{\mathsf{D}}$。令 $\mathfrak{t}_{ij}^X$ 为连续的 $\mathbb{A}_\beta$-线性算子，它将

$$\mathfrak{t}_{ij}^X:\mathfrak{G}_w^X(\mathbf{x};\mathbf{y};\mathbf{z})\mapsto\begin{cases}\mathfrak{G}_{wt_{ij}}^X(\mathbf{x};\mathbf{y};\mathbf{z}) & \text{if } t_{ij}\in W_\infty^X \text{ and } \ell^X(w)+1=\ell^X(wt_{ij})\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases} \tag{4.33}$$

对于每个 $w\in W_\infty^X$。注意，我们有

$$\mathfrak{t}_{0j}^{\mathsf{D}}=0\quad\text{and}\quad\mathfrak{t}_{-j,j}^{\mathsf{B}}=\mathfrak{t}_{-j,j}^{\mathsf{C}}=\mathfrak{t}_{-j,j}^{\mathsf{D}}=0.$$

然后令 $\mathfrak{u}_{ij}^X$ 为将.....映射为.....的连续 $\mathbb{Z}[\beta]$-线性算子

$$\mathfrak{u}_{ij}^X:f(\mathbf{y})\cdot\mathfrak{G}_w^X(\mathbf{x};\mathbf{y};\mathbf{z})\mapsto\big(wt_{ij}w^{-1}*f(\mathbf{y})\big)\cdot\mathfrak{t}_{ij}^X\mathfrak{G}_w^X(\mathbf{x};\mathbf{y};\mathbf{z}) \tag{4.34}$$

对于每个 $f(\mathbf{y})\in\mathbb{A}_\beta$和 $w\in W_\infty^X$。我们同样有

$$\mathfrak{u}_{0j}^{\mathsf{D}}=0\quad\text{and}\quad\mathfrak{u}_{-j,j}^{\mathsf{B}}=\mathfrak{u}_{-j,j}^{\mathsf{C}}=\mathfrak{u}_{-j,j}^{\mathsf{D}}=0.$$

接下来令 $\mathfrak{v}_k\colon \widehat{\mathbb{V}}^X \to \widehat{\mathbb{V}}^X$ 为连续 $\mathbb{A}_\beta$-线性映射，其满足

$$\mathfrak{v}_k^X : \mathfrak{G}_w^X(\mathbf{x};\mathbf{y};\mathbf{z}) \mapsto \tfrac{1}{1+\beta y_{w(k)}} \cdot \mathfrak{G}_w^X(\mathbf{x};\mathbf{y};\mathbf{z}). \tag{4.35}$$

现在定义 $\mathfrak{o}_k^{\mathsf{B}}\colon\ \widehat{\mathbb{V}}^{\mathsf{B}} \to \widehat{\mathbb{V}}^{\mathsf{B}}$ 为如下映射的连续 $\mathbb{Z}[\beta]$-线性算子

$$\mathfrak{o}_k^{\mathsf{B}} : f(\mathbf{y}) \cdot \mathfrak{G}_w^{\mathsf{B}}(\mathbf{x};\mathbf{y};\mathbf{z}) \mapsto \begin{cases} f(0) \cdot \mathfrak{G}_{w(-k,k)}^{\mathsf{B}}(\mathbf{x};\mathbf{y};\mathbf{z}) & \text{if } \ell^{\mathsf{B}}(w(-k,k)) = \ell^{\mathsf{B}}(w)+1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \tag{4.36}$$

对每个 $f(\mathbf{y}) \in \mathbb{A}_\beta$和 $w \in W_{\mathsf{B}\infty}$。另外令 $\mathfrak{o}_k^{\mathsf{C}} = \mathfrak{o}_k^{\mathsf{D}} = 0$。最后，设

$$\mathfrak{M}_k^X = \prod_{k<l<\infty}^{[<]} (1+\beta \mathfrak{t}_{kl}^X) \cdot (1-\beta \mathfrak{o}_k^X) \cdot \prod_{-\infty<j<k}^{[<]} (1-\beta \mathfrak{u}_{jk}^X) \cdot \mathfrak{v}_k^X \tag{4.37}$$

这个无穷乘积是定义良好的连续 $\mathbb{Z}[\beta]$-算子 $\widehat{\mathbb{V}}^X \to \widehat{\mathbb{V}}^X$，因为当 $|j|$ 和 l 足够大时，$1+\beta\mathfrak{t}_{kl}^X$ 和 $1+\beta\mathfrak{u}_{jk}^X$在任意固定项 $f(\mathbf{y}) \cdot \mathfrak{G}_w^X(\mathbf{x};\mathbf{y};\mathbf{z})$ 上的作用都是恒等映射。然而，将$\mathfrak{M}_k^X$作用于 $\mathfrak{G}_w^X(\mathbf{x};\mathbf{y};\mathbf{z})$ 可能得到 Kirillov–Naruse 多项式的无穷和。

定理 4.29。 固定 $X \in \{\mathsf{B},\ \mathsf{C},\ \mathsf{D}\}$。若 $u \in W_\infty^X$且 $k \in \mathbb{Z}_{>0}$，则

$$(1+\beta x_k)\mathfrak{G}_u^X(\mathbf{x};\mathbf{y};\mathbf{z}) = \mathfrak{M}_k^X \mathfrak{G}_u^X(\mathbf{x};\mathbf{y};\mathbf{z}).$$

证明。比较命题 3.8 和例 4.28 中 $[\mathcal{L}_{\varepsilon_k}]$ 与 $1+\beta x_k$ 的公式后，由定理 3.12 和引理 4.27，按照定理 4.4 证明中的相同论证即可得出。事实上，此处的论证更简单，因为类型X中秩为 n 的环面的表示环 $\mathbb{Z}[T]$ 等于 Laurent 多项式环 $\mathbb{Z}[x^{\pm\varepsilon_1},\dots,x^{\pm\varepsilon_n}]$，而非其商环。 □

例 4.30。 当 $X=\mathsf{B}$、$k=1$和 $w \in \{1,1,2\overline{1}\}$时，可以使用定理 4.29 来验证 t

$$\begin{aligned}(1+\beta x_1)\mathfrak{G}_1^{\mathsf{B}} &= (1+\beta y_1)^{-1} \cdot \left(\mathfrak{G}_1^{\mathsf{B}} + \beta \cdot \mathfrak{G}_{21}^{\mathsf{B}}\right) - \beta \cdot (2+\beta y_1) \cdot \left(\mathfrak{G}_{\overline{1}}^{\mathsf{B}} + \beta \cdot \mathfrak{G}_{2\overline{1}}^{\mathsf{B}}\right) \\ &\quad + \beta^2 \cdot (1+\beta y_2) \cdot \left(\mathfrak{G}_{\overline{2}1}^{\mathsf{B}} + \beta \cdot \mathfrak{G}_{1\overline{2}}^{\mathsf{B}}\right) - \beta^3 \cdot \Psi,\end{aligned}$$

$$(1+\beta x_1)\mathfrak{G}_{\overline{1}}^{\mathsf{B}} = (1+\beta y_1) \cdot \left(\mathfrak{G}_{\overline{1}}^{\mathsf{B}} + \beta \cdot \mathfrak{G}_{2\overline{1}}^{\mathsf{B}}\right) - \beta \cdot (1+\beta y_2) \cdot \left(\mathfrak{G}_{\overline{2}1}^{\mathsf{B}} + \beta \cdot \mathfrak{G}_{1\overline{2}}^{\mathsf{B}}\right) + \beta^2 \cdot \Psi,$$

$$(1+\beta x_1)\mathfrak{G}_{\overline{2}1}^{\mathsf{B}} = (1+\beta y_2) \cdot \left(\mathfrak{G}_{\overline{2}1}^{\mathsf{B}} + \beta \cdot \mathfrak{G}_{1\overline{2}}^{\mathsf{B}}\right) - \beta \cdot \Psi,$$

其中

$$\Psi := \textstyle\sum_{n=3}^{\infty} (-\beta)^{n-3} \cdot (1+\beta y_n) \cdot \left(\mathfrak{G}_{\overline{n}12\cdots(n-1)}^{\mathsf{B}} + \beta \cdot \mathfrak{G}_{1\overline{n}2\cdots(n-1)}^{\mathsf{B}}\right).$$

由于 $\mathfrak{G}_1^{\mathsf{B}} = 1$，可以结合这些恒等式推导出

$$(1+\beta x_1) \cdot \left((1+\beta y_1) + \beta \cdot (2+\beta y_1) \cdot \mathfrak{G}_{\overline{1}}^{\mathsf{B}} + \beta^2 \cdot \mathfrak{G}_{\overline{2}1}^{\mathsf{B}}\right) = 1 + \beta \cdot \mathfrak{G}_{21}^{\mathsf{B}},$$

恢复公式 (4.28)。

例 4.31。 对于每种类型 $X \in \{\mathsf{B},\ \mathsf{C},\ \mathsf{D}\}$，我们可以使用定理 4.29 计算得出

$$\begin{aligned}(1+\beta x_3)\mathfrak{G}^X_{\overline{613425}} = (1+\beta y_3)^{-1}\cdot\mathfrak{G}^X_{\overline{61342}5} &+ \beta\cdot(1+\beta y_3)^{-1}\cdot\mathfrak{G}^X_{\overline{6154}23}\\ -\beta\cdot(1+\beta y_2)^{-1}\cdot\mathfrak{G}^X_{\overline{612435}} &- \beta^2\cdot(1+\beta y_2)^{-1}\cdot\mathfrak{G}^X_{\overline{6154}32}\\ -\beta\cdot(1+\beta y_1)^{-1}\cdot\mathfrak{G}^X_{\overline{631425}} &- \beta^2\cdot(1+\beta y_1)^{-1}\cdot\mathfrak{G}^X_{\overline{6354}21}\\ -\beta\cdot(1+\beta y_1)\cdot\mathfrak{G}^X_{\overline{63142}5} &- \beta^2\cdot(1+\beta y_1)\cdot\mathfrak{G}^X_{\overline{6354}21}\\ +\beta^2\cdot(1+\beta y_3)\cdot\mathfrak{G}^X_{\overline{61342}5} &+ \beta^3\cdot(1+\beta y_3)\cdot\mathfrak{G}^X_{\overline{6124}35}\\ -\beta^3\cdot(1+\beta y_5)\cdot\mathfrak{G}^X_{\overline{6154}23} &- \beta^4\cdot(1+\beta y_5)\cdot\mathfrak{G}^X_{\overline{6145}23}\\ +\beta^2\cdot(1+\beta y_6)\cdot\mathfrak{G}^X_{\overline{6364}25} &+ \beta^3\cdot(1+\beta y_6)\cdot\mathfrak{G}^X_{\overline{6346}25}\\ +\beta^2\cdot\Delta^X &- \beta^3\cdot\Sigma^X\end{aligned}$$

其中我们设

$$\Delta^X := \begin{cases}\mathfrak{G}^{\mathsf{B}}_{\overline{631425}} + \beta\cdot\mathfrak{G}^{\mathsf{B}}_{\overline{6354}21} & \text{if } X=\mathsf{B}\\ 0 & \text{if } X\in\{\mathsf{C},\mathsf{D}\}\end{cases}$$

and

$$\Sigma^X := \textstyle\sum_{n=7}^{\infty}(-\beta)^{n-7}\cdot(1+\beta y_n)\cdot\left(\mathfrak{G}^X_{u(n)}+\beta\cdot\mathfrak{G}^X_{v(n)}\right)$$

对于带符号置换 $u(n) := 13n4256\cdots(\overline{n-1})$ 和 $v(n) := 134n256\cdots(\overline{n-1})$。在 C 型中，这一计算推广了 [3,式 (1.1)]。

仅在 B 型中，我们还定义

$$\mathfrak{n}^{\mathsf{B}}_k = \mathfrak{t}^{\mathsf{B}}_{0k}\cdot\mathfrak{v}^{\mathsf{B}}_k \tag{4.38}$$

为连续的 $\mathbb{A}_\beta$-线性映射 $\widehat{\mathbb{V}}^{\mathsf{B}}\to\widehat{\mathbb{V}}^{\mathsf{B}}$，将

$$\mathfrak{n}^{\mathsf{B}}_k : \mathfrak{G}^{\mathsf{B}}_w(\mathbf{x};\mathbf{y};\mathbf{z}) \mapsto \begin{cases}\frac{1}{1+\beta y_{w(k)}}\mathfrak{G}^{\mathsf{B}}_{w(-k,k)}(\mathbf{x};\mathbf{y};\mathbf{z}) & \text{if } \ell^{\mathsf{B}}(w)+1=\ell^{\mathsf{B}}(w(-k,k))\\ 0 & \text{otherwise.}\end{cases}$$

注意，只有当 $w(k)>0$ 时，$\ell^{\mathsf{B}}(w)+1=\ell^{\mathsf{B}}(w(-k,k))$ 才可能成立。现在设

$$\begin{aligned}\mathfrak{R}^{\mathsf{B}}_k &= \prod_{k>j>-\infty}^{[>]}(1+\beta\mathfrak{t}^{\mathsf{B}}_{jk})\cdot(1+\beta\mathfrak{n}^{\mathsf{B}}_k),\\ \mathfrak{R}^{\mathsf{C}}_k &= \prod_{k>j>-\infty}^{[>]}(1+\beta\mathfrak{t}^{\mathsf{C}}_{jk}),\\ \mathfrak{R}^{\mathsf{D}}_k &= \prod_{\substack{k>j>-\infty\\ j\neq 0}}^{[>]}(1+\beta\mathfrak{t}^{\mathsf{D}}_{ik}).\end{aligned} \tag{4.39}$$

Re将其称为 $\mathfrak{t}^X_{-k,\ k}=0$ 适用于所有类型。或者，对于 $X\in\{\mathsf{B},\ \mathsf{C},\ \mathsf{D}\}$，我们可以定义

$$\mathfrak{R}^X_k = \prod_{k>j>-\infty}^{[>]}(1+\beta\mathfrak{t}^X_{jk})\cdot(1+\beta\mathfrak{n}^X_k) \tag{4.40}$$

约定 $\mathfrak{t}_{0k}^{\mathsf{D}} = \mathfrak{n}_k^{\mathsf{C}} = \mathfrak{n}_k^{\mathsf{D}} = 0$。与 $\mathfrak{M}_k^X$ 一样，这个无穷乘积是一个定义良好的连续 $\mathbb{Z}[\beta]$-线性算子 $\widehat{\mathbb{V}}^X \to \widehat{\mathbb{V}}^X$。定义

$$\mathbb{V}^X = \mathbb{A}_\beta\text{-span}\left\{\mathfrak{G}_w^X(\mathbf{x};\mathbf{y};\mathbf{z}) : w \in W_\infty^X\right\} \subset \widehat{\mathbb{V}}^X.$$

与 $\mathfrak{M}_k^X$不同，以下结论成立：

命题 4.32. 算子 $\mathfrak{R}_k^X$ 限制为一个 $\mathbb{A}_\beta$-线性映射 $\mathbb{V}^X \to \mathbb{V}^X$。

证明。对每个 $w \in W_\infty^X$，由引理 2.2 和 2.4 可知，对所有充分大的 $N > 0$，都有 $\mathfrak{R}_k^X\mathfrak{G}_w^X(\mathbf{x};\mathbf{y};\mathbf{z}) = \prod_{k>j>-N}^{[>]}(1+\beta\mathfrak{t}_{jk}^X)\cdot(1+\beta\mathfrak{n}_k^X)\cdot\mathfrak{G}_w^X(\mathbf{x};\mathbf{y};\mathbf{z})$，而后一个表达式显然属于 $\mathbb{V}^X$。 □

在以下引理中，令 $\mathbb{U}^X = \mathbb{Z}[\beta]$-张成 $\left\{\mathfrak{G}_w^X(\mathbf{x};\mathbf{y};\mathbf{z}) :\ w \in W_\infty^X\right\} \subset \mathbb{V}^X$。

引理 4.33. 取定 $X \in \{\mathsf{B},\ \mathsf{C},\ \mathsf{D}\}$ 和 $k \in \mathbb{Z}_{>0}$。假设 $F \in \mathbb{U}^X$。则

$$\left(\prod_{-\infty<j<k}^{[<]}(1-\beta\mathfrak{u}_{jk}^X)\cdot\mathfrak{v}_k^X\cdot\prod_{k>j>-\infty}^{[>]}(1+\beta\mathfrak{t}_{jk}^X)\right)F = \mathfrak{v}_k^X F. \tag{4.41}$$

证明。与引理 4.9 的证明一样，容易验证

$$((1-\beta\mathfrak{u}_{jk}^X)\cdot\mathfrak{v}_k\cdot(1+\beta\mathfrak{t}_{jk}^X))\mathfrak{G}_w^X(\mathbf{x};\mathbf{y};\mathbf{z}) = \mathfrak{v}_k^X\mathfrak{G}_w^X(\mathbf{x};\mathbf{y};\mathbf{z}) \tag{4.42}$$

对于任意固定的 $w \in W_\infty^X$ 和 $j \in \mathbb{Z}$，满足 $j < k$。由于 $\mathfrak{t}_{jk}^X$、$\mathfrak{u}_{jk}^X$和 $\mathfrak{v}_k^X$都是 $\mathbb{Z}[\beta]$-线性算子，且当 $|j|$ 充分大时，$1+\beta\mathfrak{t}_{jk}^X$ 在 F 上充当恒等映射，因此由 (4.42) 和归纳法可得，(4.41) 右侧等于

$$\left(\prod_{-\infty<j<k-N}^{[<]}(1-\beta\mathfrak{u}_{jk}^X)\cdot\mathfrak{v}_k^X\cdot\prod_{k-N>j>-\infty}^{[>]}(1+\beta\mathfrak{t}_{jk}^X)\right)F \tag{4.43}$$

对所有 $N \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$均成立。如果 N充分大，那么每个满足 $j < k-N$的算子 $1+\beta\mathfrak{t}_{jk}^X$ 都固定 F，每个满足 $j < k-N$的算子 $1-\beta\mathfrak{u}_{jk}^X$ 都固定 $\mathfrak{v}_k^X F$，于是 (4.43) 给出所需的 $\mathfrak{v}_k^X F$。 □

引理 4.34。固定 $X \in \{\mathsf{B}、\mathsf{C}、\mathsf{D}\}$和 $k \in \mathbb{Z}_{>0}$。假设 $F \in \mathbb{U}^X$。那么

$$(1+\beta x_k)\mathfrak{R}_k^X F = \left(\prod_{k<l<\infty}^{[<]}(1+\beta\mathfrak{t}_{kl}^X)\cdot\mathfrak{v}_k^X\right)F. \tag{4.44}$$

证明。首先假设 $X \in \{\mathsf{C},\ \mathsf{D}\}$。那么 $\mathfrak{R}_k^X$保持 $\mathbb{U}^X$，因此由定理 4.29 可得

$$(1+\beta x_k)\mathfrak{R}_k^X F = \mathfrak{M}_k^X\mathfrak{R}_k^X F = \left(\prod_{k<l<\infty}^{[<]}(1+\beta\mathfrak{t}_{kl}^X)\cdot\prod_{-\infty<j<k}^{[<]}(1-\beta\mathfrak{u}_{jk}^X)\cdot\mathfrak{v}_k^X\cdot\prod_{k>j>-\infty}^{[>]}(1+\beta\mathfrak{t}_{jk}^X)\right)F$$

因为 $\mathfrak{M}_k^X$是一个 $\mathbb{Z}[\beta]$-线性映射，所需的恒等式由引理 4.33 得出。

处理类型 $X = \mathsf{B}$ 时必须更加谨慎，因为算子 $\mathfrak{R}_k^{\mathsf{B}}$ 不保持 $\mathbb{U}^{\mathsf{B}}$。定义 $\widetilde{\mathfrak{R}}_k^{\mathsf{B}} = \prod_{k>j>-\infty}^{[>]}(1+\beta\mathfrak{t}_{jk}^X)$，使得 $\mathfrak{R}_k^{\mathsf{B}} = \widetilde{\mathfrak{R}}_k^{\mathsf{B}}\cdot(1+\beta\mathfrak{n}_k^{\mathsf{B}})$。注意到 $\widetilde{\mathfrak{R}}_k^{\mathsf{B}}$ 确实保持 $\mathbb{U}^{\mathsf{B}}$。

现在假设 $F=\mathfrak{G}^{\mathsf{B}}_{w}(\mathbf{x};\ \mathbf{y};\ \mathbf{z})$，其中 $w\in W^{\mathsf{B}}_{\infty}$。根据线性性，只需在此特殊情形下证明该引理。如果 $\ell(w(-k,\ k))\neq\ell(w)+1$，那么 $1+\beta\mathfrak{n}^{\mathsf{B}}_{k}$ 固定 F，因此定理 4.29 意味着

$$\begin{aligned}(1+\beta x_k)\mathfrak{R}^{\mathsf{B}}_{k}F&=(1+\beta x_k)\widetilde{\mathfrak{R}}^{\mathsf{B}}_{k}F=\mathfrak{M}^{\mathsf{B}}_{k}\widetilde{\mathfrak{R}}^{\mathsf{B}}_{k}F\\&=\left(\prod_{k<l<\infty}^{[<]}(1+\beta\mathfrak{t}^{\mathsf{B}}_{kl})\cdot(1-\beta\mathfrak{o}^{\mathsf{B}}_{k})\cdot\prod_{-\infty<j<k}^{[<]}(1-\beta\mathfrak{u}^{\mathsf{B}}_{jk})\cdot\mathfrak{v}^{\mathsf{B}}_{k}\cdot\prod_{k>j>-\infty}^{[>]}(1+\beta\mathfrak{t}^{\mathsf{B}}_{jk})\right)F.\end{aligned}$$

利用引理 4.33，最后一个表达式可化简为 $\left(\prod_{k<l<\infty}^{[<]}(1+\beta\mathfrak{t}^{\mathsf{B}}_{kl})\cdot(1-\beta\mathfrak{o}^{\mathsf{B}}_{k})\cdot\mathfrak{v}^{\mathsf{B}}_{k}\right)F$。由于 $(1-\beta\mathfrak{o}^{\mathsf{B}}_{k})\cdot\mathfrak{v}^{\mathsf{B}}_{k}F=\mathfrak{v}^{\mathsf{B}}_{k}F$ if $\ell(w(-k,\ k))\neq\ell(w)+1$，该式等于 (4.44) 的左边。

现在反过来假设 $\ell(w(-k,\ k))=\ell(w)+1$。令 $G=\mathfrak{G}^{\mathsf{B}}_{w(-k,k)}(\mathbf{x};\mathbf{y};\mathbf{z})$。于是，由于 $\widetilde{\mathfrak{R}}^{\mathsf{B}}_{k}$ 是$\mathbb{A}_{\beta}$-线性的，定理 4.29 表明

$$(1+\beta x_k)\mathfrak{R}^{\mathsf{B}}_{k}F=(1+\beta x_k)\widetilde{\mathfrak{R}}^{\mathsf{B}}_{k}\left(F+\tfrac{\beta}{1+\beta y_{w(k)}}G\right)=\mathfrak{M}^{\mathsf{B}}_{k}\widetilde{\mathfrak{R}}^{\mathsf{B}}_{k}F+\tfrac{\beta}{1+\beta y_{w(k)}}\mathfrak{M}^{\mathsf{B}}_{k}\widetilde{\mathfrak{R}}^{\mathsf{B}}_{k}G.\tag{4.45}$$

在这种设定下，我们有

$$\begin{aligned}(1-\beta\mathfrak{o}^{\mathsf{B}}_{k})\mathfrak{v}^{\mathsf{B}}_{k}F&=\mathfrak{v}^{\mathsf{B}}_{k}F-\beta\mathfrak{o}^{\mathsf{B}}_{k}\left(\tfrac{1}{1+\beta y_{w(k)}}\mathfrak{G}^{\mathsf{B}}_{w}(\mathbf{x};\mathbf{y};\mathbf{z})\right)=\mathfrak{v}^{\mathsf{B}}_{k}F-\beta G\quad\text{and}\\(1-\beta\mathfrak{o}^{\mathsf{B}}_{k})\mathfrak{v}^{\mathsf{B}}_{k}G&=\tfrac{1}{1+\beta y_{w(-k)}}G=\tfrac{1}{1+\beta y_{-w(k)}}G=(1+\beta y_{w(k)})G,\end{aligned}$$

因此，由引理 4.33 可得

$$\mathfrak{M}^{\mathsf{B}}_{k}\widetilde{\mathfrak{R}}^{\mathsf{B}}_{k}F=\left(\prod_{k<l<\infty}^{[<]}(1+\beta\mathfrak{t}^{\mathsf{B}}_{kl})\cdot(1-\beta\mathfrak{o}^{\mathsf{B}}_{k})\cdot\mathfrak{v}^{\mathsf{B}}_{k}\right)F=\left(\prod_{k<l<\infty}^{[<]}(1+\beta\mathfrak{t}^{\mathsf{B}}_{kl})\right)\left(\mathfrak{v}^{\mathsf{B}}_{k}F-\beta G\right)$$

and

$$\mathfrak{M}^{\mathsf{B}}_{k}\widetilde{\mathfrak{R}}^{\mathsf{B}}_{k}G=\left(\prod_{k<l<\infty}^{[<]}(1+\beta\mathfrak{t}^{\mathsf{B}}_{kl})\cdot(1-\beta\mathfrak{o}^{\mathsf{B}}_{k})\cdot\mathfrak{v}^{\mathsf{B}}_{k}\right)G=\left(\prod_{k<l<\infty}^{[<]}(1+\beta\mathfrak{t}^{\mathsf{B}}_{kl})\right)\left((1+\beta y_{w(k)})G\right).$$

由于每个 op 算子 $1+\beta\mathfrak{t}^{\mathsf{B}}_{kl}$ 是 $\mathbb{A}_{\beta}$-线性的，将这些恒等式代入 (4.45) 得到 (4.44). □

回想一下 一个 带符号排列的下降 w 是正整数 i 满足 $w(i)>w(i+1)$.

定理 4.35. 固定 $X\in\{\mathsf{B},\mathsf{C},\mathsf{D}\}$. 假设 $w\in W^{X}_{\infty}$至少有一个下降。令 $a\in[1,\infty)$ 为满足 $w(a)>w(a+1)$ 的最大值，定义 $b\in[a+1,\infty)$ 为满足 $w(a)>w(b)$ 的最大值，并设$v=wt_{ab}$ 和 $c=v(a)=w(b)$。那么

$$\mathfrak{G}^{X}_{w}(\mathbf{x};\mathbf{y};\mathbf{z})=\beta^{-1}\Big((1+\beta y_c)(1+\beta x_a)\mathfrak{R}^{X}_{a}\mathfrak{G}^{X}_{v}(\mathbf{x};\mathbf{y};\mathbf{z})-\mathfrak{G}^{X}_{v}(\mathbf{x};\mathbf{y};\mathbf{z})\Big)$$

其中，对于正整数 $c<0$，我们设 $y_c:=\ominus y_{-c}=\frac{-y_{-c}}{1+\beta y_{-c}}$

证明。 证明的结构与定理 4.10 的相同。 a和 b的极大性意味着，若 $a<i<\infty$，则 $\ell^{X}(v(a,i))=\ell^{X}(v)+1$ 当且仅当 $i=b$；并且对于所有 $a<i<b$，都有 $\ell^{X}(w(a,i))\neq\ell^{X}(w)+1$。因此，由引理 4.34 可得

$$\begin{aligned}(1+\beta x_a)\mathfrak{R}^{X}_{a}\mathfrak{G}^{X}_{v}(\mathbf{x};\mathbf{y};\mathbf{z})&=\left(\prod_{a<i<\infty}^{[<]}(1+\beta\mathfrak{t}_{ai})\cdot\mathfrak{v}_{a}\right)\mathfrak{G}^{X}_{v}(\mathbf{x};\mathbf{y};\mathbf{z})\\&=\tfrac{1}{1+\beta y_c}\left(\mathfrak{G}^{X}_{v}(\mathbf{x};\mathbf{y};\mathbf{z})+\beta\mathfrak{G}_{w}(\mathbf{x};\mathbf{y};\mathbf{z})\right).\end{aligned}$$

将此恒等式代入所需公式的右侧，得到 $\mathfrak{G}^{X}_{w}(\mathbf{x};\mathbf{y};\mathbf{x})$。 □

定理 4.35 是 K理论上的 [19, 命题 6.12], 的扩展，而后者本身是 [3, 定理 4]的等变推广。我们可以递归地运用此定理，将 $\mathfrak{G}_w^X(\mathbf{x};\mathbf{y};\mathbf{z})$ 展开为以 Grassmannian 带符号置换为指标的 Kirillov–Naruse 多项式的 $\mathbb{A}_\beta$-线性组合（其显式公式见 [21, 命题 5]）。下一节中定理 4.39 的证明将表明，这一递推总能在有限次迭代后终止。

4.6 K-Stanley 正性应用

固定满足 $k>0$ 的整数 $j<k$。给定一个带符号排列 $w\in W_\infty^X$，我们令

$$T_{jk}^X G_w^X(\mathbf{z}) = \begin{cases} G_{wt_{jk}}^X(\mathbf{z}) & \text{if } t_{ij}\in W_\infty^X \text{ and } \ell^X(w)+1=\ell^X(wt_{jk}) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

并通过 $\mathbb{Z}[\beta]$-线性延拓。不同于 $\mathfrak{t}_{jk}^X$，在此语境下，我们对 T_{jk}^X 的定义只能视为形式符号算子，因为 K-Stanley 对称函数 $G_w^X(\mathbf{z})$并非线性无关。我们复合这些算子来定义

$$\begin{aligned} R_k^{\mathsf{B}} &= \prod_{k>j>-\infty}^{[>]} (1+\beta T_{jk}^{\mathsf{B}})\cdot(1+\beta T_{0k}^{\mathsf{B}}), \\ R_k^{\mathsf{C}} &= \prod_{k>j>-\infty}^{[>]} (1+\beta T_{jk}^{\mathsf{C}}), \\ R_k^{\mathsf{D}} &= \prod_{\substack{k>j>-\infty \\ j\neq 0}}^{[>]} (1+\beta T_{ik}^{\mathsf{D}}). \end{aligned} \tag{4.46}$$

我们将 R_k^X 视为作用在由有限个 $\mathbb{Z}[\beta]$-线性组合构成的模上的形式符号算子，其中元素是 K-Stanley 对称函数。

推论 4.36. 固定 $X\in\{\mathsf{B},\mathsf{C},\mathsf{D}\}$。假设 $w\in W_\infty^X$ 至少有一个下降。令 $a\in[1,\infty)$ 为满足 $w(a)>w(a+1)$ 的最大值，并定义 $b\in[a+1,\infty)$ 为满足 $w(a)>w(b)$ 的最大值。于是

$$G_w^X(\mathbf{z}) = \beta^{-1}(R_a^X-1)G_{wt_{ab}}^X(\mathbf{z}) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}[\beta]\text{-span}\left\{G_u^X(\mathbf{z}) : u\in W_\infty^X\right\}.$$

证明。 将 $\mathbf{x}=\mathbf{y}=0$ 代入定理 4.35 即可立即得到此结论。 □

例 4.37。 将推论 4.36 应用于 $w=34152\in W_{\mathsf{B}_\infty}=W_\infty^{\mathsf{C}}$ 可得

$$G_{\overline{3}4\overline{1}52}^X(\mathbf{z}) = G_{\overline{3}42\overline{1}}^X(\mathbf{z}) + G_{\overline{3}4\overline{2}1}^X(\mathbf{z}) + \beta\cdot G_{\overline{3}42\overline{1}}^X(\mathbf{z}) + \beta\cdot G_{\overline{3}41\overline{2}}^X(\mathbf{z}) + \beta^2\cdot G_{\overline{3}41\overline{2}}^X(\mathbf{z})$$

对于两种类型 $X\in\{$B、C$\}$，我们可以递归地使用推论 4.36 展开右侧的每一项，直到得到一个由不含下降的带符号置换所标记的 Kirillov–Naruse 多项式的线性组合。这给出了以下不同的公式

$$\begin{aligned} G_{\overline{3}4\overline{1}52}^{\mathsf{B}}(\mathbf{z}) &= 4\cdot G_{\overline{4}2\overline{1}3}^{\mathsf{B}}(\mathbf{z}) + 2\cdot G_{\overline{4}3\overline{1}2}^{\mathsf{B}}(\mathbf{z}) + 2\cdot G_{\overline{5}\overline{2}134}^{\mathsf{B}}(\mathbf{z}) \\ &\quad + 5\beta\cdot G_{\overline{4}3\overline{1}2}^{\mathsf{B}}(\mathbf{z}) + 5\beta\cdot G_{\overline{5}2\overline{1}34}^{\mathsf{B}}(\mathbf{z}) + 3\beta\cdot G_{\overline{5}3\overline{1}24}^{\mathsf{B}}(\mathbf{z}) + 6\beta^2\cdot G_{\overline{5}3\overline{1}24}^{\mathsf{B}}(\mathbf{z}) \end{aligned}$$

and

$$G^{\mathsf{C}}_{\overline{34152}}(\mathbf{z}) = 2\cdot G^{\mathsf{C}}_{\overline{42132}}(\mathbf{z}) + 2\cdot G^{\mathsf{C}}_{\overline{43}12}(\mathbf{z}) + 2\cdot G^{\mathsf{C}}_{\overline{52}134}(\mathbf{z}) \\ + 3\beta\cdot G^{\mathsf{C}}_{\overline{4312}}(\mathbf{z}) + 3\beta\cdot G^{\mathsf{C}}_{\overline{52}134}(\mathbf{z}) + 3\beta\cdot G^{\mathsf{C}}_{\overline{53}124}(\mathbf{z}) + 4\beta^2\cdot G^{\mathsf{C}}_{\overline{53}124}(\mathbf{z}).$$

回顾例 4.22，对于 $\lambda=(5,3,1)$和 $\mu=(2)$，有 $34152 = w_B(\lambda/\mu) = w_C(\lambda/\mu)$。因此，通过 (1.6) 和定理 4.23，上述恒等式给出了 $GP_{(5,3,1)/(2)}(\mathbf{z})$ 的一个 $\mathbb{Z}_{\geq 0}[\beta]$-线性 GP-展开，以及 $GQ_{(5,3,1)/(2)}(\mathbf{z})$ 的一个 $\mathbb{Z}_{\geq 0}[\beta]$-线性 GQ-展开。

回顾 (2.18) 中我们对下降集 $\mathsf{Des}(w)$ 和最小下降 $\mathsf{LD}(w)\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$for $w\in W^{\mathsf{B}}_{\infty}$ 的定义。按照 [3, §4]，令 $\prec_{\mathsf{LD}}$ 为 $W_{\mathsf{B}\infty}$ 上的偏序，当且仅当 $v\prec_{\mathsf{LD}} w$

$$\mathsf{LD}(v)<\mathsf{LD}(w) \quad \text{or} \quad 0<\mathsf{LD}(v)=\mathsf{LD}(w) \text{ and } v(\mathsf{LD}(v))<w(\mathsf{LD}(w)). \tag{4.47}$$

在此偏序下的极小元素，以及在没有下降的意义下为 *Grassmannian* 的带符号置换。下面的技术性引理略微推广了 [3,定理 4] 的证明中的主要结论。

引理 4.38。固定 $X\in\{\mathsf{B},\mathsf{C},\mathsf{D}\}$ 和 $n\in\mathbb{Z}_{>0}$。选取 $v\in W^X_n$ 和 $j_1,\ j_2,\ \ldots\ldots,\ j_l,\ k\in\mathbb{Z}$，使得 $0<k=\mathsf{LD}(v)$，且 $t_{j_ak}\in W^X_\infty$ 和 $\ell^X(vt_{j_1k}t_{j_2k}\cdots t_{j_ak})=\ell^X(v)+a$ 对所有 $a\in[l]$ 都成立。假设

$$j_1<j_2<\cdots<j_l<k \quad \text{or} \quad j_1=0 \text{ and } j_2<\cdots<j_l<k \text{ when } X=\mathsf{B},$$

其中我们固定 $l\geq 1$。那么元素 $u:=vt_{j_1k}t_{j_2k}\cdots t_{j_ak}\in W^X_\infty$ 满足以下情况之一 r

(a) $u\in W^X_n$ 和 $u\prec_{\mathsf{LD}} v$，或 (

b) $u\in W^X_{n+1}$ 和 $\mathsf{LD}(u)<\mathsf{LD}(v)$。

证明。引理 2.5 的前三部分表明，$u\in W^X_{n+1}$ 与 $u(k)<v(k)$ 及 $\mathsf{Des}(u)\subseteq\mathsf{Des}(v)\cup\{k-1\}$ 一同成立，因此 $u\prec_{\mathsf{LD}} v$。若 $u\notin W^X_n$，则引理 2.5 的最后两部分表明，对所有 $a\in[l-1]$，必有 $vt_{j_1k}t_{j_2k}\cdots t_{j_ak}\in W^X_n$，且 $\mathsf{LD}(u)\leq k-1<\mathsf{LD}(v)$。 □

这引出了定理 4.36 的主要应用。考虑加法半群

$$\mathbf{GP}^+:=\mathbb{Z}_{\geq 0}[\beta]\text{-span}\{GP_\lambda(\mathbf{z}):\lambda \text{ strict}\} \quad \text{and} \quad \mathbf{GQ}^+:=\mathbb{Z}_{\geq 0}[\beta]\text{-span}\{GQ_\lambda(\mathbf{z}):\lambda \text{ strict}\}$$

这两个集合互不包含；关于哪些 GQ-函数属于$\mathbf{GP}^+$，请参见 [9, 推论 1.2]。以下定理曾在 [21, 注 3] 和 [2, 猜想 7.2]中提出。

定理 4.39. 设 $X\in\{\mathsf{B},\mathsf{C},\mathsf{D}\}$, $n\in\mathbb{Z}_{>0}$，以及 $w\in W^X_n$满足 $k=\mathsf{LD}(w)$。则

$$G^X_w(\mathbf{z})\in\mathbb{Z}_{\geq 0}\text{-span}\Big\{\beta^{\ell^X(u)-\ell^X(w)}G^X_u(\mathbf{z}):u\in W^X_{n+k} \text{ is Grassmannian}\Big\}. \tag{4.48}$$

特别地，若 $X\in\{\mathsf{B},\mathsf{D}\}$，则有 $G^X_w(\mathbf{z})\in\mathbf{GP}^+$；若 $X=\mathsf{C}$，则有 $G^X_w(\mathbf{z})\in\mathbf{GQ}^+$。

关于推论 4.36 和定理 4.39 的 A 型版本，请参见 [30,定理 4]。

证明。根据 (1.6)，只需证明 (4.48)。若 $k=0$，则所需的包含关系显然成立，因此设 $k>0$。考虑偏序 $\prec_{\mathsf{LD}}$ 在集合 $U:=\bigcup_{i=0}^k\{u\in W^X_{n+i}:\mathsf{LD}(u)\leq k-i\}$上的限制。由于该限制偏序中的每个极小元都是 Grassmannian，我们可以利用归纳法，假设当以任意满足 $u\prec_{\mathsf{LD}} w$的 $u\in U$ 替换 w 时，(4.48) 成立。

令 $l\in[k+1,\infty)$ 在满足 $w(l)>w(k)$ 的条件下取极大值，并设 $v=wt_{kl}$。那么 $\mathsf{LD}(v)=\mathsf{LD}(w)=k$，$v\prec_{\mathsf{LD}} w$，且 $\ell^X(w)=\ell^X(v)+1$。因此，定理 4.36 将 $G^X_w(\mathbf{z})$ 展开为若干项之和$_\beta{}^{\ell^X(u)-\ell^X(w)}G^X_u(\mathbf{z})$，其中 u 相对于 v 定义，如引理 4.38 所述，这意味着 $u\prec_{\mathsf{LD}} v\prec_{\mathsf{LD}} w$和 $u\in U$。因此，由归纳法可得性质 (4.48) 成立。 □

注记 4.40. 本研究中所有命名函数在设 $\deg(\beta) = -1$ 且 $\deg(x_i) = \deg(y_i) = \deg(z_i) = 1$ 时都是齐次的。例如，$\mathfrak{G}_w^X(\mathbf{x};\mathbf{y};\mathbf{z})$ 和 $G_w^X(\mathbf{z})$ 都是 $\ell^X(w)$ 次齐次的。由于 $GP_\lambda(\mathbf{z})$ 和 $GQ_\lambda(\mathbf{z})$ 是 $|\lambda|$ 次齐次的，因此断言齐次幂级数 $f \in \mathbb{Z}[\beta][\![\mathbf{z}]\!]$ 属于 $\mathbf{GP}^+$ 或 $\mathbf{GQ}^+$，等价于声称我们可以将其写为

$$f = \sum_\lambda a_\lambda \cdot \beta^{|\lambda|-\deg(f)} \cdot GP_\lambda(\mathbf{z}) \quad \text{or} \quad f = \sum_\lambda a_\lambda \cdot \beta^{|\lambda|-\deg(f)} \cdot GQ_\lambda(\mathbf{z}) \tag{4.49}$$

对于非负整数 $a_\lambda \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$，只有有限多个严格分拆 λ对应的值非零。当 $w \in W_\infty^X$ 是 Grassmannian 时，$\ell^X(w) = |\lambda_X(w)|$，这与 (4.48) 一致。

当 $f = \mathfrak{G}_w^X(\mathbf{x};\ \mathbf{y};\ \mathbf{z})$ 时，如何为整数 a_λ 找到组合公式仍是一个未解决的问题。Arroyo–Hamaker–Hawkes–Pan [2, 的猜想性结果（推论 1.3]）为 A 型情形下的这一问题提供了一个猜想性解答；可与 A 型中的 [7, 定理 1] 比较。

我们以定理 4.39 的几个推论结束这段讨论。由于对于 $u \in W_n^X$，我们只能有$\sigma^{-1} \circ u \circ \tau \in W_n^X$，并且仅当 σ 和 τ 属于 $S_n \hookrightarrow W_\infty^A$ 的像时，才有 $\sigma,\ \tau \in W_\infty^A$，因此我们根据 (4.2) 和定义 4.24 推出下面的推论。这推广了 [19, 定理 8.13]。

推论 4.41. 若 $v \in W_{\mathsf{B}n} = W_{\mathsf{C}n}$ 且 $w \in W_n^{\mathsf{D}}$，则

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{G}_v^{\mathsf{B}}(\mathbf{x};\mathbf{y};\mathbf{z}) \in R\text{-span}\,\{GP_\lambda(\mathbf{z}) : \lambda \text{ strict}\}\\
&\mathfrak{G}_v^{\mathsf{C}}(\mathbf{x};\mathbf{y};\mathbf{z}) \in R\text{-span}\,\{GQ_\lambda(\mathbf{z}) : \lambda \text{ strict}\} \quad \text{for } R := \mathbb{Z}_{\geq 0}[\beta][x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}].\\
&\mathfrak{G}_w^{\mathsf{D}}(\mathbf{x};\mathbf{y};\mathbf{z}) \in R\text{-span}\,\{GP_\lambda(\mathbf{z}) : \lambda \text{ strict}\}
\end{aligned}$$

定理 4.23 和 4.39 合起来推出以下定理 6.9] 的移位类比：[6, [36, 猜想 5.14], 预言了这一结果，它等价于引言中的推论 1.3。

推论 4. **42.** 若 $\lambda \subseteq \nu$ 是严格分拆，则 $GP_{\nu/\lambda}(\mathbf{z}) \in \mathbf{GP}^+$ 且 $GQ_{\nu/\lambda}(\mathbf{z}) \in \mathbf{GQ}^+$.

注记 4.43. 正如 [39, 问题 4.37], 后的注记中所解释的，[39, 猜想 4.35 和 4.36]。这些猜想断言，Δ 对于（线性紧）*Hopf* 代数QSym^β（参见 [36, §2]），余乘法运算 Δ所定义的映射

$$\Delta : \mathbf{GP}^+ \to \mathbf{GP}^+ \otimes_{\mathbb{Z}[\beta]} \mathbf{GP}^+ \quad \text{and} \quad \Delta : \mathbf{GQ}^+ \to \mathbf{GQ}^+ \otimes_{\mathbb{Z}[\beta]} \mathbf{GQ}^+.$$

类比 性质由 [37, 定理 1.6]保证，适用于 ∇ 上的$\mathbf{QSym}^\beta$。

设 λ是一个含有 n 个非零部分的分拆。令 $\delta = (n, n-1, \ldots, 3, 2, 1)$，并定义

$$GS_\lambda(\mathbf{z}) = GP_{(\lambda+\delta)/\delta}(\mathbf{z}) = GQ_{(\lambda+\delta)/\delta}(\mathbf{z}) \quad \text{where } \lambda + \delta = (\lambda_1 + n, \lambda_2 + n - 1, \ldots, \lambda_n + 1). \tag{4.50}$$

这些函数很有意义，因为由 [36, §4.6]可知，(4.21) 中的映射 Θ对所有分拆 λ都将 $\Theta(G_\lambda(\mathbf{z}))$ 映为 $= GS_\lambda(\mathbf{z})$；另见 [36, 推论 5.17]。以下是推论 4.42 的一个特例：

推论 4.44。若 λ 是任意分拆，则 $GS_\lambda(\mathbf{z}) \in \mathbf{GP}^+ \cap \mathbf{GQ}^+$。

参考文献

[1] Dave Anderson、Stephen Griffeth 和 Ezra Miller，齐性空间的等变 K 理论中的正性与 Kleiman 横截性，《欧洲数学学会杂志》13 (2011)，第 1 期，第 57–84 页。[2] Joshua Arroyo、Zachary Hamaker、Graham Hawkes 和 Jianping Pan，C 型 K-Stanley 对称函数与 Kra´skiewicz-Hecke 插入，预印本（2025），arXiv:2503.16641。[3] Sara Billey，各向同性旗流形的过渡方程，《离散数学》193 (1998)，69–84。[4] Sara Billey 和 Mark Haiman，经典群的舒伯特多项式，《美国数学会杂志》8 (1995)，443–482。[5] Sara Billey 和 Tao Kai Lam Lam，超八面体群中的 Vexillary 元，《代数组合杂志》8 (1998)，第 2 期，139–152。[6] Anders Skovsted Buch，Grassmannian 的 K理论的 Littlewood-Richardson 规则，《数学学报》189 (2002)，第 1 期，37–78。[7] Anders Skovsted Buch、Andrew Kresch、Mark Shimozono、Harry Tamvakis 和 Alexander Yong，稳定 Grothendieck 多项式与 K理论因子序列，《数学年刊》340 (2) (2008)，359–382。[8] Valentin Buciumas 和 Travis Scrimshaw，双 Grothendieck 多项式与彩色格点模型，《国际数学研究通知》（2020）。[9] Yu-Cheng Chiu 和 Eric Marberg，展开 K理论 Schur Q函数，《代数组合》6 (2023)，第 6 期，1419–1445。[10]Edward Clifford、Hugh Thomas 和 Alexander Yong，OG($n, 2n+1$) 的 K理论舒伯特演算与移位递增杨表的滑移，《纯粹与应用数学杂志》690 (2014)，51–63。[11] Sergey Fomin 和 Anatol N. Kirillov，Grothendieck 多项式与 Yang-Baxter 方程，《第六届形式幂级数与代数组合学会议论文集》，DIMACS (1994)，183–190。[12]Sergey Fomin 和 Anatol Kirillov，舒伯特多项式的组合 B_n类比，《美国数学会汇刊》348 (1996)，第 9 期，3591–3620。[13] William Fulton 和 Alain Lascoux，旗丛的 Grothendieck 环中的 Pieri 公式，《杜克数学杂志》76 (1994)，711–729。[14] William Graham 和 Shrawan Kumar，旗簇的 T等变 K理论中的正性，IMRN (2008)，rnn093。[15] Stephen Griffeth 和 Arun Ram，仿射 Hecke 代数与舒伯特演算，《European J. Combin.》25 (2004)，第 8 期，1263–1283。[16] Thomas Hudson，利用代数配边研究联结 K 理论的 Thom-Porteous 公式，《K理论杂志》14 (2014)，第 2 期，343–369。

[17] Thomas Hudson、Takeshi Ikeda、Tomoo Matsumura 和 Hiroshi Naruse，辛格拉斯曼流形与奇数正交格拉斯曼流形的双 Grothendieck 多项式，J. Algebra 546 (2020)，294–314。[18] Takeshi Ikeda 和 Hiroshi Naruse，阶乘 Schur P-与 Q-函数的 K理论类比，Adv. Math. 243 (2013)，22–66。[19] Takeshi Ikeda、Leonardo C. Mihalcea 和 Hiroshi Naruse，经典群的双施ubert多项式，Adv. Math. 226 (2011)，840–886。[20] Anatol N. Kirillov，关于经典群的双舒伯特多项式与 Grothendieck 多项式，预印本（2015），arXiv:1504.01469。[21] Anatol N. Kirillov 和 Hiroshi Naruse，使用 IdCoxeter代数构造经典类型的双 Grothendieck 多项式，Tokyo J. Math. 39 (2017)，第 3 期，695–728。[22] Allen Knutson 和 Ezra Miller，Coxeter 群中的子词复形，Adv. Math. 184 (2004)，161–176。[23] Allen Knutson、Ezra Miller 和 Alexander Yong，顶点分解与旗标杨表的 Gr¨obner 几何，J. Reine Angew. Math. 630 (2009)，1–31。[24] Axel Kohnert 和 S´ebastien Veigneau，使用舒伯特基计算多元多项式，Adv. Appl. Math. 19 (1997)，第 1 期，45–60。[25] Bertram Kostant 和 Shrawan Kumar，广义旗簇的 T等变 K理论，J. Diff. Geom. 32 (1990)，549–603。[26] Tao Kai Lam，稳定舒伯特多项式的 B 与 D 类比及相关插入算法，博士论文，麻省理工学院，1995。[27] Tao Kai Lam，B_n Stanley 对称函数，Discrete Math. 157 (1996)，241–270。[28] Thomas Lam、Seung Jin Lee 和 Mark Shimozono，反稳定 K理论舒伯特演算，IMRN 第 2023 卷，第 24 期，21381–21466。[29] Thomas Lam 和 Pavlo Pylyavskyy，组合霍普夫代数与格拉斯曼流形的 K同调，IMRN (2007)，rnm125。[30] Alain Lascoux，格罗滕迪克多项式上的转移，Physics and combinatorics，2000（名古屋），World Sci. Publishing，River Edge，NJ，2001，164–179。[31] Alain Lascoux，陈类与杨类通过冰，预印本，2002。[32] Alain Lascoux 和 Marcel-Paul Sch¨utzenberger，对称性与旗流形，载于：不变量理论，Lect. Notes in Math. 996 (1983)，118–144。[33] Alain Lascoux 和 Marcel-Paul Sch¨utzenberger，舒伯特多项式与 Littlewood-Richardson 法则，Lett. Math. Phys. 10 (1985)，第 2 期，111–124。[34] Cristian Lenart，Monk公式的 K理论版本及一些相关乘法公式，J. Pure Appl. Alg. 179 (2003)，137–158。

[35] Cristian Lenart 和 Alexander Postnikov， K理论与表示论中的仿射魏尔群，IMRN (2007)，rnm038。[36] Joel B. Lewis 和 Eric Marberg，富集的集合值 P分拆与移位稳定格罗滕迪克多项式，Math. Z. 299 (2021)，1929–1972。[37] Joel B. Lewis 和 Eric Marberg，移位对偶稳定格罗滕迪克多项式的组合公式，Forum Math. Sigma 12 (2024)，论文 e22。[38] Laurent Manivel，对称函数、舒伯特多项式与退化轨迹，美国数学学会，2001。[39] Eric Marberg，源自 K理论的移位组合霍普夫代数，代数组合 7 (2024)，第 4 期，1123–1156。[40] Eric Marberg 和 Travis Scrimshaw，关于对称轨道闭包的 Key 多项式与拉斯库多项式，预印本（2023），arXiv:2302.04226。[41] Tomoo Matsumura，321-避免置换的双 Grothendieck 多项式的杨表公式，Ann. Comb. 24 (2020)，55–67。[42] Leonardo C. Mihalcea、Hiroshi Naruse 和 Changjian Su，等变（量子）上同调上的左德马祖尔–卢斯蒂格算子与 K理论，IMRN 第 2022 卷，第 16 期，12096–12147。[43] Oliver Pechenik 和 Alexander Yong，基因组杨表，J. Algebr. Comb. 45 (2017)，649–685。[44] Richard P. Stanley，关于考克斯特群元素的约化分解数，European J. Combin. 5 (1984)，359–372。[45] John R. Stembridge，富集的 P 分拆，Trans. Amer. Math. Soc. 349 (1997)，第 2 期，763–788。[46] John R. Stembridge，有限考克斯特群中约化词的若干组合方面，Trans. Amer. Math. Soc.，349 (1997)，第 4 期，1285–1332。[47] Harry Tamvakis，斜格罗滕迪克多项式的杨表公式，J. Math. Soc. Jpn. 76 (2024)，第 1 期，147–172。[48] Anna Weigandt，无碰撞管道梦与交错符号矩阵，J. Comb. Theory, Ser. A 182 (2021)，105470。[49] Matthieu Willems，等变 K理论中的切瓦利公式，J. Algebra 308 (2007)，764–779。