arXiv:2512.19112v1 [math.AG] 22 Dec 2025

几何 Merkurjev-Panin 猜想与 Cox 范畴 y

Daniel Erman、Andrew Hanlon、Gaku Liu 和 Hailun Zheng

摘要

我们证明，几何 Merkurjev-Panin 猜想的一个强版本适用于射影托里克簇的 Cox 范畴。具体而言，我们证明，Bondal-Thomsen 线丛构成的完备强例外集合在保持托里克簇扇中射线置换不变的格自同构群作用下保持不变。我们的结果旨在进一步说明，Cox 范畴是托里克簇上同调代数的天然载体。

1 引言

Merkurjev 和 Panin 的一个著名问题（见 [MP97, Corollary 7.8]之后紧接着的问题）询问：算术环面簇的可分闭包的 Grothendieck 群是否是伽罗瓦群作用下的置换模。Merkurjev 和 Panin 问题的一个几何推广最初以印刷形式出现在 Castravet 和 Tevelev 的 [CT20], 引言中，问题如下：设 X 是一个光滑的射影环面簇，且 G 是 X的托里克自同构群的一个有限子群。$K_0(X)$是否为一个置换 G-模？事实上，他们还提出了一个更强的可能性：

> *[W]e* 不知道是否存在这样的光滑射影环面簇 X ：其上有一个有限群 Γ 的作用，该作用正规化环面作用，但不存在一个具有最大可能长度的 Γ-等变例外集 $\{E_i\}$ 。 [CT20,Page 6]

换言之，在这一框架下，Castravet 和 Tevelev 询问 X 是否具有一个G-不变的完备例外集。回到算术背景，Merkurjev-Panin 问题的范畴化也在 [BDM19, Question 1.5]中被提出。

我们将证明，如果从有界导出范畴 $D(X)$ 转到 X 的 Cox 范畴（定义见[BBB+24]），那么该猜想便成立，而且是在最强的意义上成立。$D_{\mathrm{Cox}}(X)$ 的定义见第 2 节；这里我们回顾一下，它是由 X 的次级扇构造而成，并且附带一个自然的全忠实映射 $D(X) \to D_{\mathrm{Cox}}(X)$。

定理 A. *Bondal-Thomsen* 集合是 $D_{\mathrm{Cox}}(X)$ 的一个 G-不变的全强例外集。特别地，若将 $K_{\mathrm{Cox}}(X)$ 记作 $D_{\mathrm{Cox}}(X)$ 的 *Grothendieck* 群，那么 $K_{\mathrm{Cox}}(X)$ 是一个置换 G-模，其基由 *Bondal-Thomsen* 集合的类构成，并且该基在 G 作用下不变。

当然，在少数 Bondal-Thomsen 集合在 X 上为例外集的情形（关于几何条件，参见 [Bon06]），Bondal-Thomsen 集合是 $D(X)$ 的一个 G-不变全例外集。这可由定理 A 推得，但也可直接由以下事实得出：Bondal-Thomsen 集合是结构层在环面 Frobenius [Tho00] 下推前所得层的所有可能直和项组成的集合，因为环面 Frobenius 态射与所有托里克态射交换。在某些情形下，Bondal-Thomsen 集合的一个子集具有 G-不变性且是全的；例如，根据 [Ueh14], ，环面 Fano 三维簇具有这一性质；根据 [PN17], ，某些环面 Fano 四维簇也具有这一性质；此外， [BDM19] 中还记录了其他一些零星案例。 [CT20] 通过给出一个层的全 G-不变例外集，也对排列扇环面簇的几何 Merkurjev-Panin 问题作出了肯定回答。 [San23], 中，Sanchez 强化了 [CT20] 的结果，为排列扇簇、星形多面体簇以及 B_n 型 Coxeter 簇给出了一个由线丛构成的全强 G-不变例外集。请注意，正如注 6.1 所述，Sanchez 的例外集既不与 Bondal-Thomsen 集合相同，甚至也不是其子集。据我们所知，上述参考文献涵盖了所有已知存在全 G-不变例外集的 $D(X)$ 情形。

定理 A 为 [MP97] 的一项主要结果提供了新的证明。具体而言，在 [MP97，推论 7 中，8], Merkurjev 和 Panin 证明，算术环面簇的可分闭包的 Grothendieck 群是伽罗瓦群上的一个置换模的直和项。在我们的情形中，由于 $D(X)$ 作为一个容许子范畴全忠实嵌入 $D_{\mathrm{Cox}}(X)$，他们的定理的几何推广便可直接由定理 A 得出。

推论 B. *Grothendieck* 群 $K_0(X)$ 是一个置换 G-模的直和项，即 $K_{\mathrm{Cox}}(X)$。

定理 A 的主要意义或许在于，它进一步凸显了 [BBB$^+$24] 的理念。过去几十年来，研究簇上的层时，出于若干原因，从 $\mathrm{Coh}(X)$ 转向 $D(X)$ 已逐渐成为惯例： $D(X)$ 往往具有更好的性质，而由于 $\mathrm{Coh}(X)$ 全忠实嵌入 $D(X)$，因此几乎不会损失任何信息。在 [BBB$^+$24] 中，作者针对环面簇更进一步，将 $D(X)$ 替换为范畴 $D_{\mathrm{Cox}}(X)$，后者涵盖了来自 X 的次级扇的所有簇。核心观察是， $D_{\mathrm{Cox}}(X)$ 的性质甚至优于 $\mathrm{Coh}(X)$ 和 $D(X)$，而这两个范畴均全忠实嵌入 $D_{\mathrm{Cox}}(X)$。在 [BBB$^+$24] 中，重点是证明 Bondal-Thomsen 集合构成一个由线丛组成的满强例外集，从而实现 King 猜想（众所周知，该猜想对于一般的 $D(X)$ 并不成立）。

定理 A 也可以从类似的角度来看：它表明，Castravet 和 Tevelev 提出的问题不仅在 $D_{\mathrm{Cox}}(X)$ 的情形下有肯定答案，而且由此得到的例外集实际上是一组简单而自然的线丛。

注记 1.1。 迄今我们选择 X 为光滑且射影，仅仅是为了让阐述更简洁。经过适当修改后，定理 A 在 X 为正规且半射影时仍然成立（见定理 4.4），推论 B 在 X 为单纯的且半射影时仍然成立（见推论 4.5）。在处理单纯的 X时，唯一的修改是 $D(X)$不再全忠实地嵌入 $D_{\mathrm{Cox}}(X)$。不过，若 $\mathcal{X}$ 是相应的光滑

德利涅-芒福德叠，则 $D(\mathcal{X})$全忠实地嵌入 $D_{\mathrm{Cox}}(X)$。当 X 为半射影但非射影时，Bondal-Thomsen 集合并非例外集，而是由 $D_{\mathrm{Cox}}(X)$的一个倾斜对象的直和项构成。

事实上，Cox 范畴的构造只依赖于 X 的扇的射线，或者等价地，只依赖于其 Cox 环。因此，即使 X 不是单纯的，我们仍然可以将一个 Cox 范畴与一个具有 G-不变性的 Bondal-Thomsen 集合联系起来。在这种情况下， $D_{\mathrm{Cox}}(X)$ 是 X [BBB$^+$24 的非交换解消，见第 7 节。3]

此外，在本引言部分，我们还通过将 G 取为 X的环面自同构集合，简化了叙述。下文将证明，定理 A 对余特征格的更大自同构群同样成立，该自同构群只保持 X的扇的射线不变。$\diamond$

证明定理 A 的关键在于说明， G在 X 上的作用可以自然地扩展为 G在 $D_{\mathrm{Cox}}(X)$ 上的作用，并且该作用置换 Bondal-Thomsen 集合 Θ。这需要两个重要步骤。

1. 我们证明， G 自然地作用于 X的次级扇，从而在与该次级扇的极大腔室相对应的托里克叠集合 $\{\mathcal{X}_1, \ldots, \mathcal{X}_r\}$ 上诱导出一个作用。

2. 我们证明，可以为对应于 $\mathcal{X}_1, \ldots, \mathcal{X}_r$ 的所有叠扇找到一个 G-等变单纯细化。

~第二步使我们能够构造一个 G-等变的单纯环面覆盖 $\pi_i\colon \mathcal{X} \to \mathcal{X}_i$ ，适用于所有 $1 \leqslant i \leqslant r$；进而，我们可以通过限制，将次级扇上的 G-作用提升到 Cox ~范畴 $D_{\mathrm{Cox}}(X) \subseteq D(\mathcal{X})$。

作为一项附带推论，我们证明，来自 [HHL24] 的环面子簇 $Y \subseteq X$ 的解消继承了 Y 在 X 中的等变性质。精确表述见命题 5.8。为得到这一推论，我们从几何角度用 Bondal 分层描述 G-作用，这也让我们更容易理解示例中 Θ 上的 G 作用。

本文的组织结构如下。第 2 节总结一些必要的背景~材料。第 3 节着重介绍等变覆盖 $\mathcal{X}$的构造，我们将在第 4 节利用它证明主要结果。第 5 节将 Θ 上的 G-作用与 Bondal 分层联系起来。第 6 节将详细考察排列多面体簇的一个例子。

1.1 致谢

我们感谢 Jenia Tevelev 向我们介绍几何 Merkurjev-Panin 问题，并指出 [BBB$^+$24] 与之密切相关。我们也感谢 Chris Eur 和 Alex Fink 为我们讲解置换多面体簇的相关内容。这些交流都发生在 2025年4月 举办的奥伯沃尔法赫研讨会“环面几何”期间，我们感谢奥伯沃尔法赫提供热情周到的接待和富有启发性的研究环境。我们还感谢 Matthew R. Ballard,

Christine Berkesch、Michael K.Brown、Lauren Cranton Heller、David Favero、Sheel Ganatra、Jeff Hicks、Jesse Huang、Oleg Lazarev 和 Nicholas Proudfoot，感谢他们与我们进行了有益的交流。

D. E. 获得了美国国家科学基金会 DMS-2200469、DMS-2200469 和 DMS-2412044 项目的资助。A. H. 获得了美国国家科学基金会 DMS-2549013 项目（此前为 DMS-2412043）和 DMS-2549038 项目的资助。G. L. 获得了美国国家科学基金会 DMS-2348785 项目的资助。H. Z. 获得了美国国家科学基金会 DMS-2535689 项目的资助。

2 背景与设置

本节将更精确地设定我们的记号，并回顾托里克叠和 Cox 范畴的相关背景。对于这两方面我们都会相当简略；关于前者的更多细节请参见 [BCS04,GS15]，关于后者请参见 [BBB+24]。

我们在代数闭域 $\Bbbk$ 上工作。记 N 为一个格，M 为其对偶格，且 $N_{\mathbb{R}} := N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$。对于张量积，我们也将更一般地使用最后一个记号。给定一个扇 Σ，记 $\Sigma(k)$ 为 Σ 中 k 维锥的集合。对于 $\rho \in \Sigma(1)$，记 u_ρ 为 ρ 的本原生成元。记 $G \subset \mathrm{Aut}(N)$ 为保持 $\Sigma(1)$ 作为集合不变的自同构群。

我们将按照 [BCS04] 的定义研究光滑托里克德利涅-芒福德叠。一个光滑托里克德利涅-芒福德叠由一个定义在 $N_{\mathbb{R}}$ 上的单纯扇 Σ 以及一个同态 $\beta\colon \mathbb{Z}^{\Sigma(1)} \to N$ 确定，使得对于每个标准基向量 $e_\rho \in \mathbb{Z}^{\Sigma(1)}$，$\beta(e_\rho) = b_\rho u_\rho$ 对于某个 $b_\rho > 0$ [成立（参见 3]BCS04，第 3] 节）。数据 (Σ, β) 称为叠扇，并在 [GS15] 中得到推广。给定一个叠扇 (Σ, β)，记 $\mathcal{X}_{\Sigma,\beta}$ 为相应的光滑德利涅-芒福德叠。根据 [BCS04，注释 4.5] 以及 [GS15，第 3] 节，更一般地，一个交换图

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}^{\Sigma(1)} & \xrightarrow{\widehat{f}} & \mathbb{Z}^{\Sigma'(1)} \\ \downarrow{\scriptstyle \beta} & & \downarrow{\scriptstyle \beta'} \\ N & \xrightarrow{f} & N' \end{array}$$

其中 f 是映 p o射，将从 Σ 到 Σ' 的扇映为 $\phi_f\colon \mathcal{X}_\Sigma$，并由此唯一确定一个托里克态射 $_{,\beta} \to \mathcal{X}_{\Sigma',\beta'}$.

现在我们转向 Cox 范畴。固定一个半射影环面簇 X，其余字符格为 N，扇为 Σ。记 {Cl(X)} 为 X 的类群；对于任意 $\rho \in \Sigma(1)$，记 D_ρ 为相应的环面不变除子。不失一般性，为简便起见，我们可以假设 Σ 是单纯的。事实上，下面构造所需的输入数据实际上仅仅是 $\Sigma(1)$ 的射线，或等价地，是 X 的 Cl(X)-分次 Cox 环 S。

我们用 $\Sigma_{GKZ}(X)$ 表示 X 的次级扇；详尽综述请参见 [CLS11，第 14] 章。我们用 $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_r$ 表示 $\Sigma_{GKZ}(X)$ 的极大腔室。每个这样的极大腔室对应一个单纯扇 Σ_i，并对应一个环面簇 X_i。我们用 $\mathcal{X}_i$ 表示与 (Σ_i, β_i) 相对应的光滑环面 DM 叠，其中 $\beta_i\colon \mathbb{Z}^{\Sigma_i(1)} \to_{\sim} N$ 对所有 $\rho \in \Sigma_i$ 满足 $\beta_i(e_\rho) = u_\rho$。我们选取一个光滑环面 DM 叠 $\mathcal{X}$，其具有由叠扇细化给出的~适当双有理映射 $\pi_i\colon \mathcal{X} \to \mathcal{X}_i$。根据 [BBB+24，第 3 节，这样的 $\mathcal{X}$ 存在1]。Cox 范畴 $D_{\mathrm{Cox}}(X) = D_{\mathrm{Cox}}(S)$ 定义为

$\widetilde{\pi_i^* D(\mathcal{X}_i)}$ 在 $D(\mathcal{X})$ 中的三角剖分包。根据 [BBB+24，推论 3.9]，$D_{\mathrm{Cox}}(X)$ 不$\widetilde{\text{依赖于}}$ $\mathcal{X}$ 的选择。我们注意到，对于所有 i，函子 $\pi_i^*\colon D(\mathcal{X}_i) \to D_{\mathrm{Cox}}(X)$ 是完全忠实的，而它们的伴随函子 $\pi_{i*}\colon D_{\mathrm{Cox}}(X) \to D(\mathcal{X}_i)$ 是局部化。

Bondal-Thomsen 集合 $\Theta \subset \mathrm{Cl}(X)$ 是与下式线性等价（在 M 上）的次数集合：

$$\sum_{\rho\in\Sigma(1)} \lfloor -\langle \theta, u_\rho\rangle \rfloor D_\rho$$

对某个 $\theta \in M_{\mathbb{R}}$ 成立。我们将与 θ 相关联的 Bondal-Thomsen 元素记为 $-d_\theta$。若 $-d \in \Theta$，则 d 的像至少落在 $\Sigma_{GKZ}(X)$ 的一个腔室 Γ_i 中，并定义

$$\mathcal{O}_{\mathrm{Cox}}(-d) = \pi_i^* \mathcal{O}_{\mathcal{X}_i}(-d) \tag{2.1}$$

如 [BBB+24，定义 4.1]，中所述；根据 [BBB+24，命题 4.2]，该定义与所选取的使 d 成为 $\mathcal{X}_i$ 上 nef 的 $\mathcal{X}_i$ 无关。

3 将等变结构扩展到 Cox 范畴

如第 2 节所述，Cox 范畴的定义涉及选取一个光滑的 $\widetilde{}$ $\widetilde{}$
托里 DM 叠 $\mathcal{X}$，以及适当双有理映射 $\pi_i\colon \mathcal{X} \to \mathcal{X}_i$；对所有 $1 \leqslant i \leqslant r$，这些映射均由叠扇的细化给出。为了定义 G 对 Cox 范畴的作用，构造次级扇 Σ_{GKZ} 上的等变结构，并构造一个与之相容的 $\widetilde{}$ 覆盖 $\mathcal{X}$，将会很有帮助。本节将证明这可以实现。为方便起见，下面概述主要结果，尽管证明将包含若干不同步骤。

命题 3.1。 我们有如下结论：

1. G 作用于 $\Sigma_{GKZ}(X)$。特别地，每个 $g \in G$ 都会置换 $\Sigma_{GKZ}(X)$ 的极大腔室 $\{\Gamma_1, \ldots, \Gamma_r\}$。因此，对于每一对 $(g, \mathcal{X}_i)$，元素 g 诱导出一个环面同构 $\phi_g\colon \mathcal{X}_i \to \mathcal{X}_{g(i)}$。

$\widetilde{}$ $\widetilde{}$ *2.* 存在一个光滑环面 *DM* 叠 $\mathcal{X}$，以及适当双有理映射 $\pi_i\colon \mathcal{X} \to \mathcal{X}_i$；对于所有 $1 \leqslant i \leqslant r$，这些映射均由叠扇的细化给出，并且 $\sim G$ 在 N 上的作用会诱导出 $\mathcal{X}$的叠扇的自同构。

$\widetilde{}$ $\widetilde{}$ $\widetilde{}$ *3.* 这些 G 作用以如下意义相容。对于每个 $g \in G$，令 $\phi_g\colon \mathcal{X} \to \mathcal{X}$为诱导映射。我们有交换图

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{\mathcal{X}} & \xrightarrow{\tilde{\phi}_g} & \widetilde{\mathcal{X}} \\ \downarrow{\scriptstyle \pi_i} & & \downarrow{\scriptstyle \pi_{g(i)}} \\ \mathcal{X}_i & \xrightarrow{\phi_g} & \mathcal{X}_{g(i)} \end{array} \tag{3.2}$$

对所有 $1 \leqslant i \leqslant r$ 均成立。

我们将分几步证明这一点。第一部分的证明是直接计算，其中用到了关于 $\Sigma_{GKZ}(X)$ 的一些事实。

命题 *3.1(1)* 的证明。回顾 [CLS11，定义 14.4.2]， $\Sigma_{GKZ}(X)$ 的锥是由如下形式的集合在 $\mathrm{Cl}(X)_{\mathbb{R}}$ 中的像得到的：

$$\widetilde{\Gamma}_{\overline{\Sigma},I_\emptyset} = \left\{ a \in \mathbb{R}^{\Sigma(1)} \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{there is a concave}^1 \text{ support function } F \text{ on } \overline{\Sigma} \text{ such that} \\ F(u_\rho) = -a_\rho \text{ for all } \rho \notin I_\emptyset \text{ and } F(u_\rho) \geqslant -a_\rho \text{ for all } \rho \in \Sigma(1) \end{array} \right\}$$

其中 $I_\emptyset \subset \Sigma(1)$，且 Σ 是 $N_{\mathbb{R}}$ 中的一个广义扇，其锥均由满足 $\rho \in \Sigma(1) \setminus I_\emptyset$ 的 u_ρ 生成。

我们的首要目标是证明 g 在这些锥上作用。注意， G 通过 $(g \cdot a)_\rho = a_{g^{-1}(\rho)}$ 作用于 $\mathbb{R}^{\Sigma(1)}$。作为 N 的一个自同构， G 也作用于广义扇，其中 $g \cdot \Sigma$ 的锥为 $g(\sigma)$，其中 $\sigma \in \Sigma$。特别地， $g \cdot \Sigma$ 的射线由 $g(\Sigma(1))$ 生成。此外，若 F 是 Σ 上的凹支撑函数，满足对所有 $\rho \notin I_\emptyset$， $F(u_\rho) = -a_\rho$，且 $F(u_p) \geqslant -a_\rho$，则 $F \circ g^{-1}$ 是 Σ 上的凹支撑函数，且

$$F \circ g^{-1}(u_\rho) = F \circ g^{-1}(g(u_{g^{-1}(\rho)})) \begin{cases} = -a_{g^{-1}(\rho)} & \text{for all } \rho \notin g(I_\emptyset) \\ \geqslant -a_{g^{-1}(\rho)} & \text{for all } \rho \in \Sigma(1) \end{cases}.$$

也就是说，我们已经证明了 $g(\widetilde{\Gamma}_{\Sigma,\, I_\emptyset}) = \widetilde{\Gamma}_{g\cdot\Sigma,\, g(I_\emptyset)}$

现在，我们将证明此作用与到 $\mathrm{Cl}(X)_{\mathbb{R}}$ 的商相容，因此在 $\Sigma_{GKZ}(X)$ 上诱导出一个作用。若存在一个 $m \in M_{\mathbb{R}}$，使得 $a_\rho = \langle m,\ u_\rho \rangle$ 对所有 $\rho \in \Sigma(1)$ 都成立，那么

$$(g \cdot a)_\rho = a_{g^{-1}(\rho)} = \langle m, u_{g^{-1}(\rho)} \rangle = \langle m, g^{-1}(u_\rho) \rangle = \langle g_* m, u_\rho \rangle$$

对所有满足 g_* 的 $\rho \in \Sigma(1)$： $M_{\mathbb{R}} \to M_{\mathbb{R}}$ 是 g^{-1} 的对偶。

最后，还需验证此作用将腔室映射为腔室。不过，根据 [CLS11, Proposition 14.4.9(b)] 中对腔室的刻画以及我们对该作用的定义，这一点显然成立。显然，由 $g \in G$ 给出的扇映射是叠扇映射，因为它在 $\Sigma_{\Gamma_i}(1)$ 与 $\Sigma_{g\cdot\Gamma_i}(1)$ 之间诱导出一个双射。 □

注记 3.3。 在本文余下部分中，我们将用 $g \cdot i = g\ (i)$ 表示由命题 3.1(1) 在 $\Sigma_{GKZ}\ (X)$ 的腔室上的作用所诱导的 G 对 $\{1, \ldots, r\}$ 的作用。⋄

我们将命题 3.1(2) 的证明分为两步：首先，在引理 3.4 中，我们使用组合方法构造出 Σ_i 的一个等变单纯细化（非叠扇）；然后，在引理 3.5 中，我们证明这一细化也可以提升为叠扇的细化。

引理 3.4。 存在一个单纯扇 Σ，具有以下性质：

1. 它是所有 Σ_i 的公共细分。

2. G 对 N 的作用诱导出扇 Σ 的一个自同构。

[1] 我们采用 [CLS11] 的相反约定，并称函数 $-x^2$ 为凹的 .

证明。我们分两步构造这个扇。首先，我们取 Σ_i 的最小公共细分Σ_{ref}。这是一个扇，其锥 $\sigma \in \Sigma_{ref}$ 具有如下形式： $\sigma = \sigma_1 \cap \sigma_2 \cap \cdots \cap \sigma_r$，其中 σ_i 是 Σ_i 的一个锥；有关这一构造的详情，请参见 [Zie95，第 7 条定义6] ，或 [CLS11，第 742] 页。由于 $g \in G$ 诱导了一个扇映射 $g\colon \Sigma_i \to \Sigma_{g(i)}$，因此 g 将 Σ_i 的每个锥 σ_i 映射到 $\Sigma_{g(i)}$ 中的一个锥 $g(\sigma_i)$。因此，我们在 Σ_{ref} 的锥上有一个自然的 G 作用，其中

$$g(\sigma) = g(\sigma_1) \cap \cdots \cap g(\sigma_r).$$

然而， Σ_{ref} 可能不是单纯的。因此，在第二步中，我们令 Σ 为 Σ_{ref}的重心细分，并将重心选为原始生成元之和。具体而言，对于每个锥 $\sigma \in \Sigma_{ref}$，令 ρ_σ 为由 $\sum_{\rho\in\sigma} u_\rho$生成的射线（系数取自非负有理数）。那么

$$\widetilde{\Sigma} = \{\{\rho_{\sigma_1}, \rho_{\sigma_2}, \ldots, \rho_{\sigma_k}\} : \{0\} \subsetneq \sigma_1 \subsetneq \sigma_2 \subsetneq \cdots \subsetneq \sigma_k \in \Sigma_{ref}\}.$$

最后，由于 G 自然作用于 Σ_{ref} 的锥上且保持包含关系， G 也自然地作用于锥链上。这便诱导出所需的 G 在 Σ上的作用。 □

接下来我们转向叠结构。我们不再仅考虑扇 Σ_i，而是考虑如下配对（Σ_i， β_i）：其中每个 β_i 都是映射 $\mathbb{Z}^{\Sigma_i(1)} \to N$，它将每个基元素$e_\rho$ 映射到对应射线 ρ上的原始点 u_ρ。

引理 3.5。采用上述记号，我们可以将单纯扇 Σ 扩展为叠扇 $(\widetilde{\Sigma}, \beta)$，并满足以下性质。

1. 恒等 $\widetilde{\Sigma}$性在 N上提升为叠扇之间的映射$(\widetilde{\Sigma}, \beta) \to (\Sigma_i, \beta_i)$，对所有 $1 \leqslant i \leqslant r$均成立。
2. G-作用 $\widetilde{\Sigma}$在 N 上的作用包含于叠扇$(\widetilde{\Sigma}, \beta)$的自同构群中。

证明。我们将定义 $\widetilde{\beta}$，通过确定满足以下条件的 $b_\rho \in \mathbb{Z}_{>0}$ $\widetilde{\beta}(e_\rho) = b_\rho u_\rho$ 对所有 $\rho \in \widetilde{\Sigma}(1)$。

满足第一条性质的 β 的构造见 [BBB+24第 3]节。现在我们将回顾这一构造，并在讨论 G 作用之前，给出对 b_ρ 的一般约束。对于每个 i 和 $\rho \in \Sigma(1)$，都存在唯一一个包含ρ 的极小锥$\sigma_{\rho,\,i} \in \Sigma_i$。由于 Σ_i 是单纯的，我们可以写作

$$u_\rho = \sum_{\tau\in\sigma_{\rho,i}(1)} c_\tau u_\tau$$

其中 $c_\tau \in \mathbb{Q}_{>0}$。清除分母后，我们得到

$$a_{\rho,i} u_\rho = \sum_{\tau\in\sigma_{\rho,i}(1)} a_\tau u_\tau$$

其中 $a_{\rho,i}, a_\tau \in \mathbb{Z}_{>0}$，且对于所有 τ，$a_{\rho,i}, a_\tau$ 的最大公约数 $= 1$。由此可知，只要对于所有 $\rho \in \Sigma(1)$， b_ρ 是 $a_{\rho,i}$ 的倍数，就存在一个从叠 $\widetilde{\Sigma}$ $\widetilde{\Sigma}$扇 $(\widetilde{\Sigma}, \beta) \to$ 到 (Σ_i, β_i) 的映射。因此，当且仅当对于所有 $\rho \in \Sigma(1)$， b_ρ 是 $\operatorname{lcm}_{1\leqslant i\leqslant r}(a_{\rho,i})$ 的倍数时，我们满足第一个性质。

~现在，我们转而讨论 G-作用。由于每个 $g \in G$ 都是 Σ 的自同构，因此 $\sim g$ 会将每条射线 $\rho \in \Sigma(1)$ 映射到另一条射线 $g(\rho)$。因此，当且仅当对于所有 $g \in G$， b_ρ 是 $b_{g(\rho)}$ 的倍数时， g 才会诱导出一个叠扇映射。

由于 G是 有限的，因此可以满足所有这些条件。例如，我们可以令

$$b_\rho = \prod_{g \in G} \operatorname*{lcm}_{1 \leqslant i \leqslant r} (a_{g(\rho),i})$$

~对所有 $\rho \in \Sigma(1)$ 都成立（或者，如果希望使 b_ρ 最小，也可以再次对 G 取最小公倍数）。 □

命题 *3.1(2)* 的证明。 这由引理 3.4 和 3.5 立即得出。 □

最后，我们注意到这些等变结构是相容的。

命题 *3.1(3)* 的证明。 参见 (3.2)：格之间的底层映射交换，因为竖直箭头对应于恒等映射，而两条水平箭头都对应于 g。因此，相应的托里克态射也相同。

□

4 定理 A 的证明

~本节在介绍一些准备性引理后证明定理 A。当 $\mathcal{X}$ 满足命题 3.1 的~结论时，我们将稍微滥用记号，记 $G \subseteq \mathrm{Aut}(\mathcal{X})$。

~**引理 4.1**。 若 $G \subseteq \mathrm{Aut}(\mathcal{X})$，则 $D_{\mathrm{Cox}}(X)$ 在 G 在 ~$\sim D(\mathcal{X})$上的诱导作用下封闭。此外，[2] 在 $D_{\mathrm{Cox}}(X)$ 上的诱导作用与满足$\sim G \subseteq \mathrm{Aut}(\mathcal{X})$ 的 $\mathcal{X}$ 的选择无关，且由下式给出

$$g \cdot \pi_i^* \mathcal{E} = \pi_{g(i)}^* \phi_{g*} \mathcal{E}. \tag{4.2}$$

对于 $\mathcal{E} \in D(\mathcal{X}_i)$。

~证明。 由命题 3.1(3)，可得 $\phi_{g*} \pi_i^* D(\mathcal{X}_i) \subseteq \pi_{g(i)}^* D(\mathcal{X}_{g(i)})$。特别地，这~意味着，由所有 $\pi_i^* D(\mathcal{X}_i)$ 构成的 $D(\mathcal{X})$ 子范畴在 G-~作用下封闭。由于这些 ϕ_{g*} 是三角函子，三角剖分包 $D_{\mathrm{Cox}}(X)$ 也在 G-作用下封闭。关于拉回的作用公式 (4.2) 也可由 (3.2) 的交换性立即推出。

□

引理 4.3。 Θ在 $D_{\mathrm{Cox}}(X)$上的 G-作用下保持不变。

证明。 我们将证明，对于任意 $\theta \in M_{\mathbb{R}}$， $g \cdot \mathcal{O}_{\mathrm{Cox}}(-d_\theta) = \mathcal{O}_{\mathrm{Cox}}(-d_{g_*\theta})$，其中 $g_* \in \mathrm{Aut}(M)$ 是 g^{-1} 的对偶。根据引理 4.1，我们有 $g \cdot \mathcal{O}_{\mathrm{Cox}}(-d_\theta) = \pi_{g(i)}^* \phi_{g*} \mathcal{O}_{\mathcal{X}_i}(-d_\theta)$，其中 d_θ的像包含于 Γ_i中。现在，我们注意到

$$\phi_{g*} \mathcal{O}_{\mathcal{X}_i}(-d_\theta) = (\phi_g^{-1})^* \mathcal{O}_{\mathcal{X}_i}(-d_\theta).$$

[2]这是一个严格的 按 [Shi18] 的意义，t 作用是指自同构严格作用于导出范畴。

因此， $\phi_{g*}\mathcal{O}_{\mathcal{X}_i}(-d_\theta)$ 是 $\mathcal{X}_{g(i)}$ 上对应于环面除子 $\sum e_\rho D_\rho$ 的线丛，其中

$$e_\rho = (-d_\theta)_{g^{-1}(\rho)} = \lfloor -\langle \theta, g^{-1}(u_\rho)\rangle \rfloor = \lfloor -\langle g_*\theta, u_\rho\rangle \rfloor$$

对所有 $\rho \in \Sigma_{g(i)}(1)$。也就是说， $\phi_{g*}\mathcal{O}_{\mathcal{X}_i}(-d_\theta) = \mathcal{O}_{\mathcal{X}_{g(i)}}(-d_{g_*\theta})$。

只需证明 $\mathcal{O}_{\mathrm{Cox}}(-d_{g_*\theta}) = \pi^*_{g(i)}\mathcal{O}_{\mathcal{X}_{g(i)}}(-d_{g_*\theta})$，也就是说， $d_{g_*\theta}$ 在 $\mathcal{X}_{g(i)}$上是 nef 的。为此，注意到 $d_{g_*\theta}$ 的支撑函数由 $F \circ g^{-1}$ 给出，其中 F 是 d_θ的支撑函数。特别地， $F \circ g^{-1}$ 是 $\Sigma_{g(i)}$ 上的凹支撑函数，因为 F 是 Σ_i 上的凹支撑函数，且 g^{-1} 是线性的。 □

现在我们可以证明定理 A 的以下推广：

定理 4.4。 设 X 是一个半射影正规环面簇。 X 的 *Cox* 范畴 $D_{\mathrm{Cox}}(X)$具有一个 G-不变倾斜丛 $\oplus_{-d\in\Theta}\mathcal{O}_{\mathrm{Cox}}(-d)$。

若 X 是射影的，则 Θ 构成一个关于任意精化有效偏序的 G-不变完备强例外集合。

证明。 在半射影情形下， [BBB$^+$24，定理 A]表明 $\oplus_{-d\in\Theta}\mathcal{O}_{\mathrm{Cox}}(-d)$ 是 $D_{\mathrm{Cox}}(X)$ 的倾斜丛，而引理 4.3 表明它是 G-不变的。在射影情形下，该结论同样由 [BBB$^+$24、定理 A]和引理 4.3 得出。 □

以下结论蕴含推论 B。

推论 4.5。 设 X 是一个具有关联的叠 $\mathcal{X}$ 的半射影单纯的环面簇。*Grothendieck* 群 $K_0(\mathcal{X})$ 是置换 G-模 $K_{\mathrm{Cox}}(X)$ 的一个直和项。

证明。 记 $\pi^*\colon D(\mathcal{X}) \to D_{\mathrm{Cox}}(X)$ 以及 $\pi_*\colon D_{\mathrm{Cox}}(X) \to D(\mathcal{X})$。我们有 π^* 是一个全忠实嵌入，其伴随函子为 π_*。特别地，在 K_0 上诱导的映射将 $K_0(\mathcal{X})$ 实现为 $K_0(D_{Cox}(X))$ 的一个分裂直和项。 □

5 更多不变结构

在本节中，我们将考察一些由 G-作用保持的其他结构；这些结构源于将 Bondal-Thomsen 元素视为环面 $M_\mathbb{R}/M$ 的子集。具体而言，我们在引理 4.3 的证明中看到， $g \in G$ 通过将 $\mathcal{O}_{\mathrm{Cox}}(-d_\theta)$ 取为 $\mathcal{O}_{\mathrm{Cox}}(-d_{g_*\theta})$ 作用于 Cox 范畴，其中 $g_* \in \mathrm{Aut}(M)$ 是 g^{-1} 的对偶。我们可以将其推广如下。假设我们有 $-d \in \Theta$ ，并选择 $\theta \in M_\mathbb{R}$ 使得 $-d = -d_\theta$。那么，根据 (2.1)，我们得到 $-d_\theta$ 到 $\mathbb{Z}^{\Sigma(1)}$ 的一个提升。于是得到集合

$$S_\theta = \{k \in M_\mathbb{R} \mid \lceil\langle \theta, u_\rho\rangle\rceil - 1 < \langle k, u_\rho\rangle \leqslant \lceil\langle \theta, u_\rho\rangle\rceil \text{ for all } \rho \in \Sigma(1)\}$$

其在 $M_\mathbb{R}/M$ 上的投影是 $-d_\theta$的 Bondal-Thomsen 分层，也就是 $M_\mathbb{R}/M$ 中在赋值 (2.1) 下对应于 $-d_\theta$ 的点集。Bondal-Thomsen 分层是由Σ(1)的对偶超平面给出的定向 Bondal 分层的各层。我们还考虑多面体

$$P_\theta = \{k \in M_\mathbb{R} \mid \langle k, u_\rho\rangle \leqslant \lceil\langle \theta, u_\rho\rangle\rceil \text{ for all } \rho \in \Sigma(1)\}\,.$$

注意， $P_\theta = -P_{d_\theta}$ ，其中 d_θ 是有效除子 d_θ的截面多胞体。此外，注意到 $S_\theta \subseteq P_\theta$ 是相对开的。根据 [BBB+24，推论 4.25]，形如 P_θ 的多面体控制着 $D_{\mathrm{Cox}}(X)$中的态射。

显然， g_* 作用于 S_θ 和 P_θ的集合，这有助于理解和可视化 G 作用在 Θ上的轨道。事实上，由于 $g_* \in \mathrm{Aut}(M)$， g_* 作用于这些层和多面体在平移 M 意义下的等价类，并下降为环面 $M_{\mathbb{R}}/M$上的作用。

我们进一步定义

$$J_\theta = \{\rho \in \Sigma(1) \mid \langle k, u_\rho\rangle = \lceil\langle\theta, u_\rho\rangle\rceil \text{ for all } k \in S_\theta\}$$

注意， J_θ 仅取决于 S_θ 在平移 M 意义下的等价类；如果需要，也可以在 J_θ 的定义中用P_θ 替换 S_θ ，因为 P_θ 是连通的。

例 5.1. 假设 $\Sigma(1) = \{e_1, e_2, -e_1 - e_2\}$，因此我们研究的是 $D_{\mathrm{Cox}}(\mathbb{P}^2) = D(\mathbb{P}^2)$。在这种情况下， G 同构于 S_3 ，其作用由置换 $\mathbb{P}^2$上齐次坐标的环面自同构给出。Bondal-Thomsen 集合与 Beilinson集合 $\mathcal{O}(-2)$ $\mathcal{O}(-1)$ $\mathcal{O}$重合。在这个例子中， G 作用在Θ 上时固定了这三个线丛。尽管如此，我们仍将借助这个例子来说明本节迄今为止给出的定义。

也就是说， $\mathcal{O}$ 对应于 $\theta_0 = (0,0)$。我们有$S_{\theta_0} = P_{\theta_0} = \{(0,0)\}$ 和$J_{\theta_0} = \Sigma(1)$。此外，在许多其他可能的选择中， $\mathcal{O}(-1)$对应于 $\theta_1 = (-1/3, -1/3)$。于是我们有 $S_{\theta_1} = P_{\theta_1} = \{(k_1, k_2) \mid k_1、\ k_2 \leqslant 0$ 和 $k_1 + k_2 \geqslant -1\}$ 以及 $J_\theta = \emptyset$。类似地，例如，$\mathcal{O}(-2)$对应于 $\theta_2 = (-2/3, -2/3)$。在这种情况下，我们再次有 $J_\theta = \emptyset$，而$S_{\theta_2} = \{(k_1, k_2) \mid k_1、\ k_2 > -1$ ，并且 $k_1 + k_2 < -1\}$ 与$P_{\theta_2} = \{(k_1, k_2) \mid k_1、\ k_2 \leqslant 0$和 $k_1 + k_2 \geqslant -2\}$不同。见图 5.1。$\diamond$

以下命题在 [BHP+25] 中有所暗示，其中 S_θ （或等价地， P_θ）的维数与包含 d_θ 的像的 X 的闭包 Cl 中 zonotope 的最小面的维数，以及 J_θ 的大小有关。

引理 5.2. 若

$$\mathrm{Hom}_{D_{\mathrm{Cox}}(X)}(\mathcal{O}_{Cox}(-d_\theta), \mathcal{O}_{Cox}(-d_{\theta'})) \neq 0, \tag{5.3}$$

则 $J_\theta \subseteq J_{\theta'}$。

证明。由 [BBB+24、推论 4.25] （并乘以 -1）可知，(5.3) 蕴含存在一个格点 $m \in M$，使得 $m + \theta' \in P_\theta$。现在，假设 $\rho \in J_\theta$，使得对于所有 $k \in P_\theta$，都有 $\langle k,\ u_\rho\rangle = \lceil\langle\theta,\ u_\rho\rangle\rceil$。特别地，我们得到

$$\langle\theta', u_\rho\rangle = \lceil\langle\theta, u_\rho\rangle\rceil + \langle m, u_\rho\rangle \in \mathbb{Z}.$$

由于我们可以用任意 $k \in S_{\theta'}$ 替换 θ'，因此对于所有 $k \in S_{\theta'}$，都有 $\langle k,\ u_\rho\rangle \in \mathbb{Z}$，从而 $\rho \in J_{\theta'}$，因为 S_θ 是连通的。 □

现在，我们可以使用引理 5.2，进一步对 Cox 范畴作出一些观察。

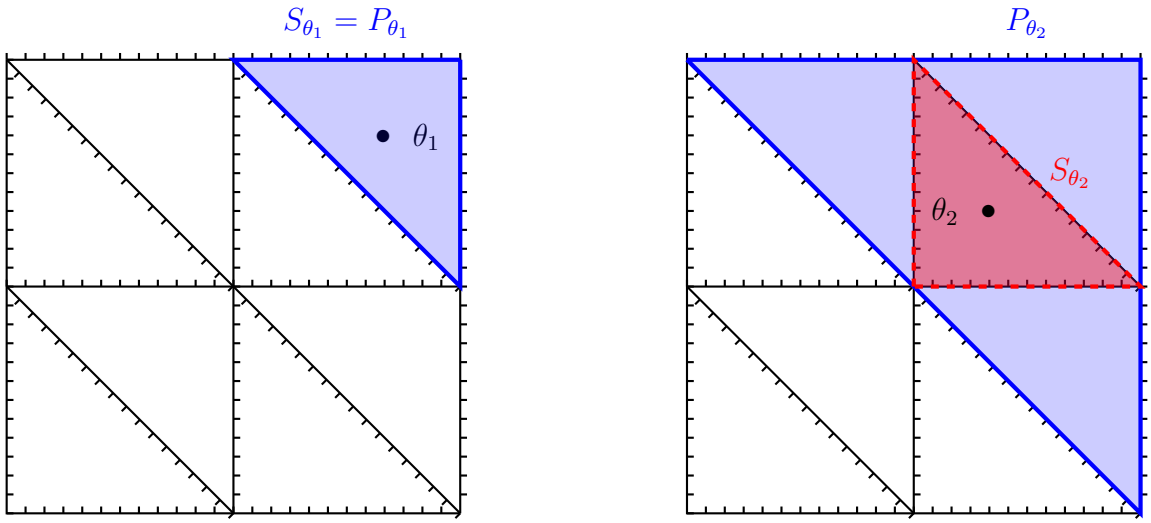


图 5.1。在周期超平面排列 $M_{\mathbb{R}}$ 上绘制的 S_θ 和 P_θ 示例，该排列提升了 $\mathbb{P}^2$ 的 Bondal 分层，其中 θ_1 和 θ_2 分别对应于 $\mathcal{O}(-1)$ 和 $\mathcal{O}(-2)$。

命题 5.4。 假设 X 是射影的。对于 $0 \leqslant \delta \leqslant n =$ 维数(X)，令 $\mathcal{A}_\delta$ 为由满足 维数$(S_\theta) = \delta$的 $D_{\mathrm{Cox}}(X)$ 生成的 D_{Cox}的子范畴。类似地，对于 $0 \leqslant j \leqslant N = |\Sigma(1)|$，令 $\mathcal{B}_j$ 为由满足$|J_\theta| = j$的 $D_{\mathrm{Cox}}(X)$ 生成的 D_{Cox}的子范畴。那么，存在一个层的维数半正交分解

$$D_{Cox}(X) = \langle \mathcal{A}_n, \ldots, \mathcal{A}_0 \rangle \tag{5.5}$$

以及层的深度半正交分解

$$D_{Cox}(X) = \langle \mathcal{B}_0, \ldots, \mathcal{B}_N \rangle. \tag{5.6}$$

证明。 由于 $\mathcal{O}_{Cox}(-d_\theta)$ 都是例外对象， $\mathcal{A}_\delta$ 和 $\mathcal{B}_j$ 都是可容许子范畴。因此，只需证明：当 $\delta < \delta'$ 时， $\mathcal{A}_\delta$ 属于 $\mathcal{A}_{\delta'}$ 的左正交；以及当 $j' < j$ 时， $\mathcal{B}_j$ 属于 $\mathcal{B}_{j'}$ 的左正交。后者由引理 5.2 立即得出，因为 $|J_{\theta'}| < |J_\theta|$ 蕴含 $J_\theta \not\subseteq J_{\theta'}$。对于前者，我们同样应用引理 5.2，并注意到 $J_\theta \subseteq J_{\theta'}$ 蕴含 $\dim(S_\theta) \geqslant \dim(S_{\theta'})$。 □

由于 G 的作用由其在 $M_{\mathbb{R}}/M$ 上的作用体现，因此我们得到它保持这些半正交分解。

命题 5.7。 如果 X 是射影托里克簇，则 G 在 $D_{Cox}(X)$ 上的作用保持层的维数和深度半正交分解。

证明。 对于半正交分解 (5.5) 和 (5.6)，我们注意到它们由 S_θ 决定。由 $g_* S_\theta = S_{g_*\theta}$ 这一事实，以及引理 4.3 的证明表明 $g\mathcal{O}_{\mathrm{Cox}}(-d_\theta) = \mathcal{O}_{\mathrm{Cox}}(-d_{g_*\theta})$，即可得出结论。 □

特别地， G 在 Θ 上的每个轨道都包含于某个 $\mathcal{A}_\delta$ 和某个 $\mathcal{B}_j$ 中。在例 5.1 中，两个半正交分解重合，但 G 的轨道更小。通常，两个半正交分解和轨道都各不相同。我们将在第 6 节看到更多这种现象的例子，该节将考察排列扇簇。

我们将以另一个方向的一个观察结束本节，该观察同样利用了用 $M_{\mathbb{R}}/M$ 来理解 G 在 Θ 上的作用。Cox 范畴的一项用途，是收纳由 Θ 中的线丛构成、适用于所有 $\mathcal{X}_i$ 的一致解消。例如， [HHL24] 中构造的解消自然适合置于此处。我们简要回顾 [HHL24] 中的这些 HHL 解消的构造（另见 [BCHSY25、BE24、BH25]）。事实上，我们将描述这些解消在 Cox 范畴中的提升（根据 [BCHSY25、BH25], ，HHL 解消实际上是同伦范畴中的解消，其对象是支撑在 Θ 中的自由 S-模；该范畴等价于 $D_{\mathrm{Cox}}(X)$）。每个格包含 $\phi\colon N' \hookrightarrow N$ 都对应一个 HHL 解消。我们令 T_ϕ 为 $\widetilde{\text{}}$ 诱导的映射 $M_{\mathbb{R}}/M \to M'_{\mathbb{R}}/M'$ 的核，并令 T_ϕ 为其在 $M_{\mathbb{R}}$ 中的原像。每个 $S_\theta \cap T_\phi$ 的闭包$\widetilde{\text{}}$都是 T_ϕ 中的一个多面体。HHL 解消的 j 次部分，是对 $M_{\mathbb{R}}/M$ 中那些由维数为 j 的 S_θ 的面映出的像所取的 $\mathcal{O}_X(-d_\theta)$ 的直和。若 $-\theta'$ （可能等于 $-\theta$）位于 S_θ 的闭包的某个面上，则存在一个对应于 $-\theta' \in P_\theta$ 的态射 $\mathcal{O}_X(-d_\theta) \to \mathcal{O}_X(-d_{\theta'})$。为 S_θ 的所有面在 $M_{\mathbb{R}}/M$ 上的像选定定向后，这些态射便是 HHL 解消中的映射，其符号取决于诱导定向是否与该面上选定的定向一致。注意，不同的定向选择会给出同构的复形。 [HHL24] 的主要结果表明，将此构造推前到 $\mathcal{X}_i$ 后，对于所有 i，它都给出 $\mathcal{X}_i$ 中 $N' \otimes \mathbb{G}_m$ 的闭包之正规化的结构层的一个解消。根据本文中的观察，我们可以推导出这一构造的某些对称性。

命题 5.8。 设 X 是一个半射影环面簇。若 ϕ 的像在子群 $\Gamma \subseteq G$的作用下保持 Γ-不变，则与 ϕ 相关联的 *HHL* 解消在同构意义下保持 Γ-不变。

$\widetilde{\text{}}$证明。 若 ϕ 的像保持 Γ-不变，则在对偶作用下， T^ϕ 和 T^ϕ 也保持 Γ-不变。引理 4.3 的证明表明， $g \cdot \mathcal{O}_{\mathrm{Cox}}(-d_\theta)$与 G 在集合 S_θ 上的作用相容，正如命题 5.7 的证明所示。此外，$(\phi_g)_*$ 在态射上的作用由其在格上的底层作用决定，该作用将 $-\theta' \in P_\theta$ 映到 $-g_*\theta' \in P_{g_*\theta}$。由于每个 $g \in G$ 都不一定保持我们选定的定向，因此我们得出结论： Γ在相差一个符号的意义下保持与 ϕ 相关联的 HHL 解消，因而在同构意义下也保持不变。 □

注意， $0 \in N$ 始终是 G-不变的，因此单位点的结构层的 HHL 解消在同构意义下始终关于 G 作用不变。类似地， $N \times N$ 中的对角线始终在 $G \times G$的对角子群作用下不变，因此命题 5.8 意味着，对角线的 HHL 解消在同构意义下关于 $G \times G$的对角子群作用不变。

6 示例：置换多面体簇

现在，我们借助第 5 节的一些观察，探讨 G对置换多面体簇的 Cox 范畴的作用。首先回顾一下，带有$n \geqslant 2$ 的置换多面体簇 X_{n+1} 是其动量多面体为置换多面体的环面簇。 X_{n+1} 的扇有时称为编织扇；最对称的表示方式是将其置于 $\mathbb{R}^{n+1}/\langle(1, \ldots\ldots, 1)\rangle$中，其射线由向量 e_S的像生成，其中 $\emptyset \neq S \subsetneq \{1, \ldots, n+1\}$ 且$e_S = \sum_{i \in S} e_i$。 这些向量的对称群 G 同构于 $S_{n+1} \times S_2$，而后者也是 X_{n+1}的托里克自同构群。 $G \cong S_{n+1} \times S_2$ 的第一个因子通过置换 S的元素起作用，第二个因子则通过将 S 取补集起作用。

不那么优雅地， X_{n+1} 可通过按爆破中心维数递增的顺序，爆破 $\mathbb{P}^n$ 的所有托里克轨道闭包而得到；我们还可以从 $\mathbb{P}^n$ 在 $\mathbb{R}^n$中的通常扇得到一个扇。这相当于令 $e_{n+1} = -e_1 - \ldots - e_n$，从而将我们对编织扇的首次描述中的商$\mathbb{R}^{n+1}/\langle(1, \ldots, 1)\rangle$ 与 $\mathbb{R}^n$对应起来。

我们先讨论 $n = 2$ 的情形，此时考虑的是 X_3，它是通过在 $\mathbb{P}^2$ 的三个环面不动点处进行爆破而得到的德尔佩佐曲面。我们可以选择一个基，使得射线 Σ_3(1) 的生成元为

$$\{\pm e_1, \pm e_2, \pm(e_1 + e_2)\}.$$

G 的 S_3 因子置换 e_1、 e_2和 $-e_1 - e_2$，而 S_2 因子由 –id 生成。在此情形下， D_{Cox}(X_3) $= D(X_3)$，完备强例外集合中有六个 Bondal-Thomsen 元素。图 6.1 在 Bondal 分层上描绘了这些元素；其中以除子 $H, E_{12}, E_{10}, E_{20}$ 为皮卡群的基， H 是从 $\mathbb{P}^2$ 拉回的超平面类，而 E_{ij} 是齐次坐标中环面不动点$z_i = z_j = 0$ 上方的例外除子。区域 S_θ 是图 6.1 中正方形三角剖分各层的相对内部，多面体 P_θ 则是它们的闭包。本例中，命题 5.4 给出的维数半正交分解与深度半正交分解一致，而且很容易验证它们也是 $S_3 \times S_2$作用的轨道。例如， S_2 因子仅置换 $\mathcal{O}(-H)$ 和 $\mathcal{O}(-2H + E_{01} + E_{02} + E_{12})$，而 S_3 因子只置换位于图 6.1 三角剖分边上的三个 Bondal-Thomsen 元素。

现在让我们把注意力转向 $n = 3$。和前一个维数的情况一样，每个 S_θ 都等于其相对内部；不难验证，对于任何在乘以 -1后仍封闭的射线生成元集合，情况都是如此。现在，基本域上的 Bondal 分层通过超平面$x_1 + x_2 + x_3 = 1$ 和 $x_1 + x_2 + x_3 = 2$将立方体 $[0, 1]^3$ 分割为两个标准单形和一个八面体。超平面 $x_i + x_j = 1$ 进一步将八面体细分为八个体积为 $1/12$的单形。见图 6.2。由此可见，环面的 Bondal 分层中有 2 个顶点、12 条边、20 个面和 10 个单形，因此 Bondal-Thomsen 集合总共有 44 个元素。

注记 6.1。从上面的计算可以看出， $D(X_4) \ncong D_{\mathrm{Cox}}(X_4)$ 是 $44 = |\Theta| > 4!$ =rank($K_0(X_4)$)。然而，在$D(X_4)$上的 G-不变线丛完备强例外集合由 [San23] 给出，其特征与 Θ相似；进一步探究它们之间的关系（以及更大 n的情形）将很有意思。另请注意，Sanchez 的集合并非

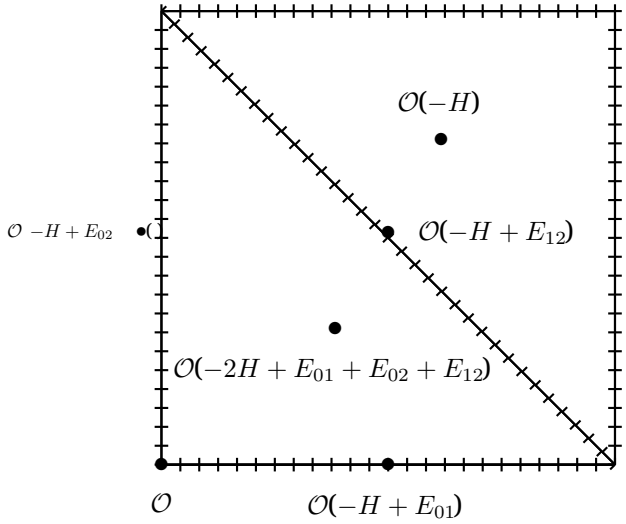


图 6.1. 置换多面体簇的 Bondal 分层的一个基本域X_3，其中各层标注了相应的 Bondal-Thomsen 元素。

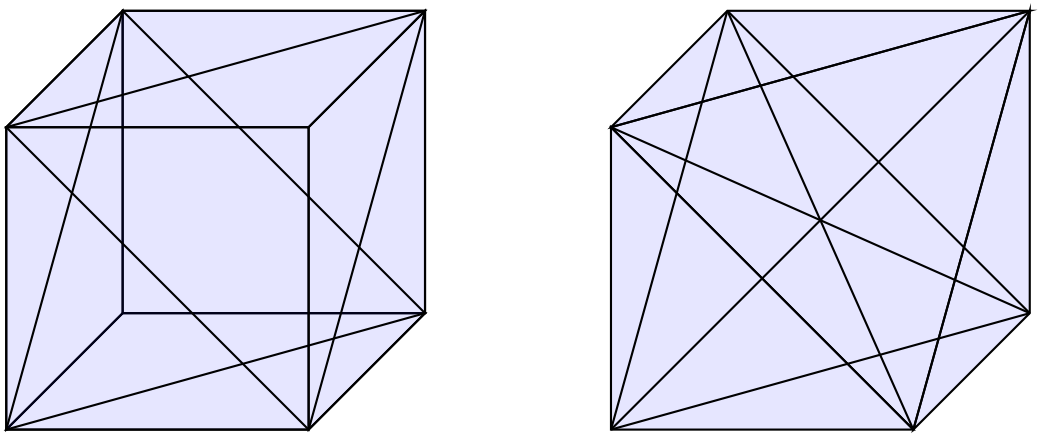


图 6.2. 左图中，我们先将立方体切分为两个单形和一个八面体，以此作为理解 X_4 的 Bondal 分层的第一步。右图中，我们将八面体切分为八个单形，完成分层的绘制。

只是 Θ 的一个子集。例如，Sanchez 的集合中，与线丛对应的一些截面多胞体不是单形，而所有 P_θ 都是单形。$\diamond$

最后，让我们研究 $G \cong S_4 \times S_2$ 在 $\Theta(X_4)$ 中的 D_{Cox} 作用。我们先做几个简单的观察，以说明这个例子与 X_3 的不同之处。首先，两个零维层具有不同的深度，因此二者都由 G 固定，且深度半正交分解与维数半正交分解并不重合。此外，深度半正交分解和维数半正交分解都不与 G 轨道重合，因为在顶维层中（它们的深度都为 0），有两个体积为 $1/6$ 的标准单形，而它们无法映射到八面体内体积为 $1/12$ 的单形上。回到我们的任务，整个作用都可以从图 6.2 中以几何方式理解。S_2 因子通过关于八面体中心点层的反射作用于图 6.2。S_4 因子中的换位 (ij) 只是在 $i,j \leqslant 3$ 时交换 x_i 和 x_j 坐标。其余换位通过反射与剪切的复合来作用。例如，(34) 通过 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ 作用于图 6.2。

正如这些例子所示，X_{n+1} 的 Bondal-Thomsen 集合和 Cox 范畴在组合结构上十分丰富。事实上，X_{n+1} 的 Bondal-Thomsen 元素对应于周期性共振超平面排列的层。由于枚举（未周期化的）共振超平面的区域是一项困难的开放问题（参见例如 [K¨uh23]），显式描述 X_{n+1} 的 Θ 或许也很困难。尽管如此，从上述视角研究这些组合结构，并或许进一步研究其他特别对称的环面簇，仍会很有意义。

参考文献

[BBB+24] M. R Ballard, C. Berkesch, M. K Brown, L. Cranton Heller, D. Erman, D. Favero, S. Ganatra, A. Hanlon, 和 J. Huang, 《King 猜想与 Cox 范畴》, arXiv:2501.00130（2024）。↑1, 2, 3, 4, 5, 7, 9, 10[BCHSY25] C. Berkesch, L. Cranton Heller, G. G. Smith, 和 J. Yang, 《环面理想正规化的胞腔自由分解》, 2025。arXiv:2512.17871。↑12[BCS04] L. A. Borisov, L. Chen, 和 G. G. Smith, 《环面德利涅-芒福德叠的轨形Chow环》, 《美国数学会杂志》**18** （2004）, 第1期, 193–215页。↑4[BDM19] M. Ballard, A. Duncan, 和 P. McFaddin, 《算术环面簇的导出范畴》, 《K理论年刊》**4** （2019）, 第2期, 211–242页。MR3990785 ↑1, 2[BE24] M. K. Brown 和 D. Erman, 《Hanlon-Hicks-Lazarev定理的一个简短证明》, 《数学论坛：Sigma》**12** （2024）, e56。↑12[BH25] L. Borisov 和 Z. Han, 《Hanlon-Hicks-Lazarev分解再探》, arXiv:2509.11077（2025）。↑12[BHP+25] F. Bauermeister, A. Hanlon, D. Painter, S. Shaikh, 和 B. Singer, 《环面超平面排列的层、带状体格点与 Bondal-Thomsen 集合》, arXiv:2507.14356（2025）。↑10[Bon06] A. Bondal, 《凸几何与代数几何》, 2006年, 第253–316页。本文为2006年1月29日至2月4日举行的研讨会摘要，研讨会由 Klaus Altmann、Victor Batyrev 和 Bernard Teissier 组织，刊于《Oberwolfach报告》第3卷第1期。↑2

[CLS11] D. A. Cox, J. B. Little, 和 H. K. Schenck, 《环面簇》, Graduate Studies in Mathematics, 第124卷, 美国数学会, 普罗维登斯, 罗得岛, 2011年。 ↑4, 6, 7[CT20] A.-M. Castravet 和 J. Tevelev, 《带标记曲线模空间的导出范畴 I》, Algebr. Geom. 7（2020）, 第6期, 722–757页。MR4156424 ↑1, 2[GS15] A. Geraschenko 和 M. Satriano, 《环面叠 I：叠扇理论》, Trans. Amer. Math. Soc. 367（2015）, 第2期, 1033–1071页。 ↑4[HHL24] A. Hanlon, J. Hicks, 和 O. Lazarev, 《用线丛解消托里克子簇及其应用》, Forum Math. Pi 12（2024）, e24。 ↑3, 12[K¨uh23] L. K¨uhne, 《共振超平面排列的普适性及其贝蒂数》, Combinatorica 43（2023）, 第2期, 277–298页。 ↑15[MP97] A. S. Merkurjev 和 I. A. Panin, 《代数环面与环面簇的 K 理论》, K-Theory 12（1997）, 第2期, 101–143页。MR1469139 ↑1, 2[PN17] N. Prabhu-Naik, 《托里克 Fano 四维簇上的倾斜丛》, J. Algebra 471（2017）, 348–398页。 ↑2[San23]M. Sanchez, 《置换多面体簇与星形多面体簇的导出范畴》, 2023年。arXiv:2311.04203。 ↑2, 13[Shi18] E. Shinder, 《范畴上的群作用与 Elagin 定理再探》, Eur. J. Math. 4（2018）, 第1期, 413–422页。MR3782231 ↑8[Tho00] J. F. Thomsen, 《环面簇上线丛的 Frobenius 直像》, J. Algebra 226（2000）, 第2期, 865–874页。 ↑2[Ueh14] H. Uehara, 《托里克 Fano 三维簇上的例外集与双有理几何》, Internat. J. Math. 25（2014）, 第7期, 1450072, 32页。 ↑2[Zie95] G. M. Ziegler, 《多胞体讲义》, Graduate Texts in Mathematics, 第152卷, Springer-Verlag, 纽约, 1995年。 ↑7

D.Erman, Department of Mathematics,
University of Hawai‘i at Mānoa电子邮箱地址: erman@hawaii.edu
A.Hanlon, Department of Mathematics, University of Oregon电子邮箱地址: ahanlon@uoregon.edu G. Liu, Department of Mathematics,
University of Washington电子邮箱地址: gakuliu@uw.edu H.Zheng,
Department of Mathematics, University of Hawai‘i at Mānoa电子邮箱地址: hailunz@hawaii.edu