arXiv:2512.19128v1 [math.AT] 22 Dec 2025

自由群的 Rognes 连通性猜想的一个类比

BENJAMIN BRÜCK、JEREMY MILLER 和 KEVIN I. PITERMAN

摘要。我们证明，秩为 n 的自由群的公共基复形具有维数为 $2n-3$ 的球面的楔和的同伦型。这建立了一个 Aut(F_n) 版本的连通性猜想；Rognes 最初针对 GL$_n$(R) 提出了这一猜想。为证明这一点，我们给出了若干与公共基复形同伦等价的模型，既以自由群中的自由因子来描述，也以 3 维流形中的球面系统来描述。

1. 引言

1.1. Rognes 的连通性猜想与主定理。对于 R 足够良好的环（例如交换环），Rognes [Rog92] 为 R 的自由代数 K 理论谱定义了秩过滤。他证明了其伴随分次对象由一般线性群对 $\Sigma\mathrm{CB}(R^n)$ 的悬挂谱取同伦轨道得到，其中 CB(R^n) 是 R 的公共基复形。这个单纯复形的顶点是 R^n 的非零真直和项；若一组这样的直和项拥有公共基，即 R^n 的某个基使得每个直和项都由该基的某个子集张成，那么它们就构成一个单形。受其在计算 $K_*(\mathbb{Z})$ 方面潜在应用的启发，Rognes 猜想，若 R 是欧几里得环或局部环，则 $\mathrm{CB}(R^n) \simeq \bigvee S^{2n-3}$。根据第二作者与 Patzt 和 Wilson 的工作 [MPW25]，当 R 是域时，这一猜想已得到证明；对于有限域，结合第一作者、第三作者和 Welker 的工作 [BPW24] 以及 Hanlon–Hersh–Shareshian 的工作 [HHS09]，也可推出该结论。一般情形仍未解决，即便对于 $R=\mathbb{Z}$ 也是如此。

本文证明了 Rognes 连通性猜想在自由群情形下的一个类似版本。也就是说，我们考虑自由群上的复形$\mathrm{CB}(R^n)$，并证明它是高度连通的：自由群 $H \subseteq F_n$ 的子群 F_n（秩为 n）是一个自由因子，当且仅当存在子群 $K \subseteq F_n$，使得 $H * K = F_n$构成内部自由积。虽然 F_2 已经包含任意秩的自由子群，但 F_n 的所有自由因子的秩至多为 n。从这个意义上说，F_n 的自由因子可视为 R^n的直和项的类似物。对于 F_n，其公共基复形记作 $\mathrm{CB}(F_n)$，它是一个单纯复形，其顶点是 F_n 的非平凡真自由因子；若这些因子在自由群的意义下有公共基，则它们构成一个单形（见第 2.2 节）。我们的主要定理如下。

定理 1.1。对于所有 $n \geq 1$，$\mathrm{CB}(F_n) \simeq \bigvee S^{2n-3}$。

最直接的结果是定理 1.1 及其证明为我们提供了若干高度连通的$\mathrm{Aut}(F_n)$-复形（关于节 1.2和节 1.3 中对$\mathrm{CB}(F_n)$的其他描述，见）。具有群作用的单纯复形的高连通性结果对于研究群的同调性质和几何性质非常有用。特别地，高度连通的单纯复形族在研究同调稳定性时十分重要。具有斜率为1 的连通范围的单纯复形族有很多（见 Randal-Williams–Wahl [RW17]及其中的参考文献）。相比之下，具有类似于我们在2 中获得的斜率为定理 1.1 的连通范围的单纯复形则要罕见得多（例如见 [GKR25；HHS09；Har86；MPW25]）。这些更优的连通范围有时会揭示稳定范围之外的同调模式（见 Galatius–Kupers–Randal-Williams [GKR25，定理 E]）。

也许更重要的是，我们的结果为两个相关的开放问题带来了新的见解。第一个问题是 CB($\mathbb{Z}^n$) 是否与 ($2n-3$)-球面的楔和同伦等价；第二个问题是 Culler–Vogtmann 的 Outer 空间的单纯边界具有怎样的同伦型。

其中第一个问题是关于 $R=\mathbb{Z}$ 的 Rognes 连通性猜想。它与算术群的上同调和代数 K 理论有着深刻联系。例如，它蕴含了 Church–Farb– Putman 关于 SL$_n$($\mathbb{Z}$) 的消失猜想 [CFP14，猜想 2]；见 Charlton–Radchenko–Rudenko[CRR25，第 1.3] 节。它还蕴含 $K_{12}(\mathbb{Z}) \cong 0$；见 Dutour–Sikirić–Elbaz-Vincent–Kupers– Martinet [Dut+，注 6.6]。解决这一猜想似乎是一个极其困难的问题。以往的尝试侧重于代数方法 [GKR25；HHS09；MPW25；Rog92]。与之相反，我们的

2020 数学主题分类。20F65, 20E05, 55P48, 57M07。关键词与短语。自由群；球面系；公共基复形。

方法表明，研究相关单纯复形的、更具“几何性”的方法或许更容易处理。另一种运用建筑理论的方法见 [PSW25]。

关于 Outer 空间单纯边界的同伦型的第二个问题，由 Brück–Gupta 提出 [BG20，问题 1。1] Vogtmann 也提出了这一问题 [Vog24，见第 3 节中的第二个问题。2]这一问题受到与 $\mathrm{Out}(F_n)$ 的对偶化模相关问题的启发，尤其是与算术群和映射类群的相关情形进行比较时 [BF00；BSV18；Vog24；WW25]。为证明定理 1.1，我们证明 Auter 空间中的某些子复形具有高度连通性。Auter 空间是由带有基点的度量图构成的模空间 [HV98a，节 2]，（见第 1.3 节）。这些结果揭示了它们的 $\mathrm{Out}(F_n)$版本可能具有怎样的同伦型。

在接下来的三个小节中，我们将介绍证明定理 1.1的方法。我们将在第 1.5 节中回到这些类比和开放问题。

1.2. $\mathrm{CB}(F_n)$ 的代数替代模型。单纯复形 $\mathrm{CB}(F_n)$ 的维数为 2^n-3。然而，定理 1.1 表明，$\mathrm{CB}(F_n)$ 与一个（$2n-3$）维 CW-复形同伦等价。事实上，第一作者、第三作者和 Welker[BPW24]此前的工作已经得出了这一结论。他们证明，环和自由群的公共基复形都可以用部分分解的偏序集来描述。若一个非空集合由真且非平凡的自由因子$\{N_1,\dots,N_k\}$组成，且满足 $F_n = N_1 * \cdots * N_k * K$ 对某个 K 成立，则称其为部分分解。细化关系在部分分解集合上给出了一个自然的偏序，见第 2.2 节。我们将此偏序集记为 $\mathrm{PD}(F_n)$。其维数为 $2n-3$，且 [BPW24，推论 1.1] 表明 $\mathrm{PD}(F_n) \simeq \mathrm{CB}(F_n)$，因此定理 1.1 等价于证明 $\mathrm{PD}(F_n)$ 是（$2n-4$）-连通的。

我们将首先把 $\mathrm{PD}(F_n)$ 与另一个自由因子复形进行比较，从而证明 $\mathrm{PD}(F_n)$ 是 $(2n-4)$-连通的。令 $\mathrm{D}(F_n) \subset \mathrm{PD}(F_n)$ 表示由生成 $F_n = N_1 * \cdots * N_k$ 的完全分解和部分分解 $\{N_1,\dots,N_k\}$ 构成的子偏序集。令 FC_n 表示 F_n 的非平凡真自由因子的偏序集，其序由包含关系给出。FC_n 的序复形就是 Hatcher–Vogtmann [HV22]，的自由因子复形，他们也将其记为 FC_n。我们将 $\mathrm{D}(F_n)$ 和 FC_n 结合，构成一个称为 FCD_n 的新偏序集。它可以看作连接 $\mathrm{D}(F_n) * \mathrm{FC}_n$ 的子复形，由“基相容对”组成（精确定义见公式 (3)）。证明中的一个关键步骤是证明 FCD_n 与 $\mathrm{PD}(F_n)$ 同伦等价，因此也与 $\mathrm{CB}(F_n)$ 同伦等价。

1.3. $\mathrm{CB}(F_n)$ **的几何模型与球面系统**。我们证明 $\mathrm{CB}(F_n)$ 是 $(2n-4)$- 连通的证明，受 Hatcher–Vogtmann 证明 $\mathrm{D}(F_n)$ 是 $(n-3)$-连通的证明启发[HV98a，定理 6。1]。为得到他们的结果，他们首先给出一个以 $3\mathrm{D}_n^{\mathrm{g}} \simeq \mathrm{D}(F_n)$ 中的球面系统定义的“几何”模型 3维流形。

Hatcher [Hat95, 附录]描述了如何将 Auter 空间及其单纯闭包视为 3 维流形中的二维球面空间。令 $M_{n,m}$ 为 n 个 $S^1 \times S^2$ 的连通和，并去除 m 个开球。令 $\mathcal{S}(M_{n,m})$ 表示由$M_{n,m}$中的球面系统构成的单纯复形；也就是说，这些系统是集合 $\{[S_1],\dots,[S_r]\}$，其中包含互不相交嵌入的二维球面$S_i \hookrightarrow M_{n,m}$ 的同伦类，且这些球面既不同伦于边界分支，也不围成圆盘。Hatcher 证明了 $\mathcal{S}(M_{n,0})$ 是 Outer 空间的单纯闭包，而 $\mathcal{S}(M_{n,1})$ 是 Auter 空间的单纯闭包。Auter 空间的脊是球面系统的子偏序集 $K_n \subset \mathcal{S}(M_{n,1})$，其中 $\{[S_1],\dots,[S_r]\}$ 的所有路径分支都单连通。[1] 每个球面系统 $\sigma = \{[S_1],\dots,[S_r]\}$ 都有一个相应的对偶图 $\Gamma(\sigma)$。$\Gamma(\sigma)$的顶点是$M_{n,m} \setminus (S_1 \cup \ldots \cup S_r)$的路径分支。每个 S_i 对应一条边，连接与球面两侧（可能相同）的两个连通分支相对应的顶点。对于$M_{n,1}$中的球面系统，$M_{n,1} \setminus (S_1 \cup \ldots \cup S_r)$中有唯一一个连通分支 $M_0(\sigma)$ 包含$M_{n,1}$的边界。这个连通分支对应于 $\Gamma(\sigma)$的一个顶点。

Hatcher–Vogtmann 将 $\mathrm{D}_n^{\mathrm{g}} \subset K_n$ 定义为由球面系 σ 构成的子偏序集，其中 $|\Gamma(\sigma)| \setminus \{M_0(\sigma)\}$ 不连通（$M_0(\sigma)$ 是一个割点）。他们证明 $\mathrm{D}(F_n)$ 是球形的一个关键步骤，是证明 $\mathrm{D}_n^{\mathrm{g}} \simeq \mathrm{D}F_n$。

我们的 $\mathrm{FCD}_n \simeq \mathrm{CB}(F_n)$ 球面系统模型是 $\mathcal{S}(M_{n,1})$ 的一个子偏序集 $\mathrm{FCD}_n^{\mathrm{g}}$，它与脊 K_n 的交等于 Hatcher–Vogtmann 的 $\mathrm{D}_n^{\mathrm{g}}$。具体而言，我们将 $\mathrm{FCD}_n^{\mathrm{g}} \subset \mathcal{S}(M_{n,1})$ 定义为由球面系 σ 构成的子偏序集，满足以下任一条件：$M_0(\sigma)$ 是 $\Gamma(\sigma)$ 的割点，或者 $M_0(\sigma)$ 的基本群非平凡。我们证明如下结论。

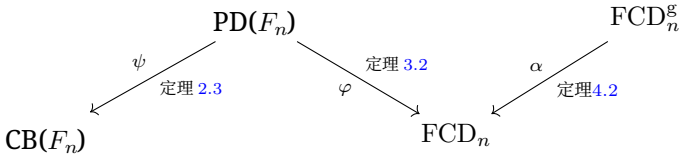
定理 1.2。存在一个同伦等价 $\mathrm{FCD}_n^{\mathrm{g}} \simeq \mathrm{CB}(F_n)$。

[1]注意，K_n 不是 $\mathcal{S}(M_{n,1})$ 的子复形（K_n 中单形的面不一定仍属于 K_n），这就是我们在此只讨论子偏序集的原因。不过，K_n 可以解释为 $\mathcal{S}(M_{n,1})$ 的重心细分的一个子复形。

定理 1.2 是本文中技术上最复杂的部分。我们通过研究偏序集的各种映射，并利用 Auter 空间及其变体的可缩性来证明 定理 1.2 。虽然可以直接构造从 $\mathrm{CB}(F_n)$ 和 $\mathrm{PD}(F_n)$ 到 $\mathrm{FCD}_n^{\mathrm{g}}$ 的映射，但从技术上说，比较 $\mathrm{FCD}_n^{\mathrm{g}}$ 与FCD_n要容易得多。

以下图表概述了我们所需的 $\mathrm{CB}(F_n)$ 的各种模型之间的同伦等价：

(1)



事实上，公式 (1) 中的所有映射都是 $\mathrm{Aut}(F_n)$-等变的。

1.4. **度定理**。 为证明 $\mathrm{D}_n^{\mathrm{g}}$ 是球形的，Hatcher–Vogtmann 按照具有不超过固定数值的“度”的球面系统子空间，对脊 K_n 进行滤过（见 定义 6.1）。他们证明了一个所谓的度定理 [HV98a，推论 3，2] 该定理表明，这一滤过中的子复形在一定范围内高度连通，并且该范围会随着度趋于无穷而增大。他们利用这一点证明 $\mathrm{D}_n^{\mathrm{g}}$ 是高度连通的。

Aygun 和第二作者 [AM24，定理 1，2]证明了 Auter 空间的单纯闭包的一个度定理，即对于 $\mathcal{S}(M_{n,\ 1})$而言。在本文中，我们利用这一结果证明 $\mathrm{FCD}_n^{\mathrm{g}}$ 是 $(2n-4)$-连通的（见定理 6.8），进而利用 定理 1.1和 公式 (1)证明该结论。

1.5. **类比与问题**。

1.5.1. 秩过滤与 $\mathrm{CB}(F_n)$。 Rognes 对公共基复形连通性的关注，源于该复形出现在代数 K-理论的秩过滤中。根据 Galatius 的工作 [Gal11], 可知

$$\Omega B\left(\bigoplus_n B\,\mathrm{Aut}(F_n)\right) \simeq \Omega^\infty \mathbb{S}.$$

因此， 球谱 $\mathbb{S}$可以看作自由群的代数 K-理论谱。

问题 1.3。 $\mathbb{S}$ 是否具有自然的“秩过滤”，其伴随分次对象由 $\mathrm{Aut}(F_n)$ $\Sigma^{\infty+1}\mathrm{CB}(F_n)$的同伦轨道?

参见 Brown–Chan–Galatius–Payne 的工作 [Bro+24] 关于图谱序列 s.

1.5.2. 导出不可分解元。将我们的证明与第二作者和 Patzt、Wilson [MPW25] 的证明进行比较是很有意思的（后者密切遵循 Galatius–Kupers–Randal- Williams [GKR25] 所发展的一种策略，以在取同伦轨道后证明 Rognes 连通性猜想的一个版本）。为了证明对于 R 域，$\mathrm{CB}(R^n)$ 是高度连通的，他们首先证明 $\mathrm{CB}(R^n)$ 刻画了一个由 Steinberg~模构成的等变环的交换同调（也称为 Harrison同调）。Steinberg 模 $\mathrm{St}(R^n)$ 定义为 $H_{n-2}(T(R^n))$，其中 $T(R^n)$ 是与 $\mathrm{SL}_n(R)$ 相关联的 Tits建筑（即 R^n的真非零直和项所成偏序集的几何实现）。随后，他们通过将 Steinberg 环的结合同调与 join$T(R^n) * T(R^n)$ 进行比较，证明了其存在一条消失线。由于结合同调的消失线会给出交换~同调的消失线，因此可知 $H_*(\mathrm{CB}(R^n))$ 在一定范围内消失。

在此背景下，Tits建筑的替代物是 Hatcher–Vogtmann 的自由因子复形 FC_n。将自由因子复形的顶维同调群称为 $\mathrm{St}(F_n)$ （尽管这些表示通常并非 $\mathrm{Aut}(F_n)$ [Him+22] 的对偶化模）。

问题 1.4。 $\mathrm{CB}(F_n)$ 的约化同调是否刻画了由 $\mathrm{St}(F_n)$ 群构成的某个等变环的交换同调?

一种可能的方法是将定理 3.2 与 Campbell–Kupers–Zakharevich [CKZ25的 A 节进行比较。2]。

1.5.3. 解析。Auter 空间的单纯闭包的度定理给出了 St(F_n) 的部分解析，这与 [Brü+24；CFP19；CP 17] 的高度连通单纯复形以同样的方式给出 St($\mathbb{Z}^n$) 的部分解析。我们关于 CB(F_n) 是 $(2n-4)$-连通的证明，应与 [MPP 的定理 C] 进行比较；该定理推出 CB($\mathbb{Z}^n$) 是 n-连通的，对于 $n \geq 4$ 而言。由 St($\mathbb{Z}^n$) 的这些部分解析，可以读出其交换同调的消失线，从而可用于证明 CB($\mathbb{Z}^n$) 是高度连通的。由于 St($\mathbb{Z}$) 的这些部分解析目前只能计算 k 对于 $k \leq 2$ 的 syzygies，CB($\mathbb{Z}^n$) 的完整连通性猜想仍然悬而未决。相比之下，在 Aut(F_n) 情形中，这些部分解析为所有 k 的 k-syzygies 提供了信息，因此我们能够建立更大的连通范围。

CB(F_n) 似乎比 CB($\mathbb{Z}^n$) 更容易处理，其中一个原因是，与 $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$ 相关的对称空间的边界化所对应的 Voronoi 完美锥镶嵌，比 Auter 空间的单纯闭包上的单纯复形结构更为复杂。如果能够为 Voronoi 镶嵌建立一个“度定理”，那么 Rognes 针对 CB($\mathbb{Z}^n$) 的连通性猜想很可能就会成立。

1.5.4. 图同调与 Out(F_n)。存在一个 PD(F_n) 的自然变体，它适用于群 Out(F_n)，而非 Aut(F_n)。令 PD^{conj}(F_n) 表示由 F_n-共轭类$\{[N_1],\dots,[N_k]\}$组成的集合的偏序集，其中，$\{N_1,\dots,N_k\}$ 是 F_n 的一个部分分解。这个复形最早由 Handel–Mosher 定义，他们在 [HM14] 中将其记作 $\mathcal{FF}(F_n,\emptyset)$。第一作者与 Gupta [BG20, Theorem B] 证明了 PD^{conj}(F_n) 与 Outer 空间的边界同伦等价。他们利用这一点证明了 PD^{conj}(F_n) 是 $(n-2)$-连通的，并提出疑问：它是否实际上具有更高的连通性 [BG20, Question 1.1]。我们的结果表明

$$\mathrm{PD}(F_n) \simeq \bigvee S^{2n-3}$$

这为以下观点提供了依据：PD^{conj}(F_n) 实际上应当是 $(2n-4)$-连通的。第一作者和第三作者的研究也进一步支持了这一观点 [BP25]。若果真如此，这便会对第一作者 [Brü20第 4 个问题之后的一段50] 和 Vogtmann [Vog24在第 3 节提出的第二个问题2]作出否定回答。若使用本文的方法研究 PD^{conj}(F_n)，则需要大幅修改度的定义，因为我们考察的版本从根本上依赖于对偶图具有一个基点。

结合 Conant–Vogtmann 的研究 [CV03，命题 27]与第一作者和 Gupta 的研究[BG20，定理 B]，，我们得到一个同构

$$H_i(\mathrm{Out}(F_n);\widetilde{C}_*(\mathrm{PD}^{conj}(F_n))) \cong H_{i-2n-2}(GC_2^{(n)})$$

在这些等变超同调群与 Kontsevich 的交换图同调的第 n个分次部分[2] [Kon93]之间。结合 Willwacher 的研究 [Wil15，定理 1。1]，我们可知

$$H^{2n-2}\big(\mathrm{Out}(F_n);\widetilde{C}_*(\mathrm{PD}^{conj}(F_n))\big) \cong H^0(GC_2^{(n)}) \cong (\mathfrak{grt}_1)_n$$

是 Grothendieck-Teichmüller 李代数 $\mathfrak{grt}_1$ 的第 n 个分次分量。如果能证明 PD^{conj}(F_n) 是 $(2n-4)$-连通的，则将意味着存在一个同构

$$\bigoplus_n H^1\big(\mathrm{Out}(F_n);\widetilde{H}_{2n-3}(\mathrm{PD}^{conj}(F_n))\big) \cong \mathfrak{grt}_1.$$

由于 PD(F_n) 是球形的，

$$H^{2n-2}\big(\mathrm{Aut}(F_n);\widetilde{C}_*(\mathrm{PD}(F_n))\big) \cong H^1\big(\mathrm{Aut}(F_n);H_{2n-3}(\mathrm{PD}(F_n))\big).$$

Let

$$\mathcal{L} := \bigoplus_n H^1\big(\mathrm{Aut}(F_n);H_{2n-3}(\mathrm{PD}(F_n))\big).$$

映射 Aut(F_n) →Out(F_n) 给出一个映射

$$\mathfrak{grt}_1 \to \mathcal{L}. \tag{2}$$

问题 1.5。是否存在自然的李代数结构 $\mathcal{L}$，使得从式（2）给出的映射是李代数之间的映射?

[2]我们在此遵循如下约定：如果一个图的基本群的秩为 $GC_2^{(n)}$，则该图属于 n，并且其同调次数为 $k-(n+1)$，其中 k是其顶点的数量。这与 Willwacher [Wil15]所采用的约定一致，但不同于 Kontsevich 最初采用的约定。

如果表示序列$\mathrm{St}(F_n)$ 具有 [AMP24第 1 条注释所述的双幺半双代数结构，4], 那么 $\mathcal{L}$ 自然会具有李代数结构（另见 Brown–Chan–Galatius–Payne [Bro+24]）。

1.6. **概述**。 在第 2 节中，我们回顾偏序集和单纯复形的一般背景，以及与本文相关的内容。在第 3 节中，我们证明 $\mathrm{CB}(F_n) \simeq \mathrm{FCD}_n$。然后，在第 4 节中，我们描述一个映射 $\mathrm{FCD}_n^{\mathrm{g}} \to \mathrm{FCD}_n$，并在第 5 节中证明它是一个同伦等价。最后，在第 6 节中，我们证明球面系统模型$\mathrm{FCD}_n^{\mathrm{g}}$ 是高度连通的。

1.7. **致谢**。 我们感谢 JoséJoaquín Domínguez Sánchez、Radhika Gupta、Alexander Ku- pers、Peter Patzt、John Rognes、Robin J. Sroka 和 Jennifer Wilson 提供了有益的交流。

第一作者获得德国研究联合会通过德国卓越战略资助项目 EXC 2044/2–390685587 以及项目 427320536–SFB 1442 提供的资助。第二作者获得西蒙斯基金会数学家旅行资助项目以及美国国家科学基金会 DMS-2202943 和 DMS-2504473 项目的资助。第三作者获得 FWO 资助项目 12K1223N 的资助。

2. 设置与预备知识

本节首先回顾偏序集和单纯复形的一般知识。然后介绍一些自由因子偏序集。最后讨论某些 3 维流形中的球面系统。本节介绍的所有复形和偏序集都已在先前的研究中出现过。

2.1. **记号与偏序集术语**。 设 X 是一个偏序集。我们将 $\mathrm{sd}\, X$ 记为 X的有限非空链构成的偏序集。有时，为了简化记号，我们将单纯复形视为偏序集，其对应的面偏序集由非空单纯形组成。同样，我们将偏序集视为一个拓扑空间，并赋予由其序复形诱导的拓扑。若 $f, g\colon X \to Y$ 是偏序集之间的保序映射，且对所有 $x \in X$都有 $f(x) \leq g(x)$，则 f, g 诱导出几何实现之间的同伦映射。

设 Y 是 X 的一个子偏序集。对于 $y \in X$，下区间 $Y_{\leq y}$ 由满足 $x \leq y$ 的元素 $x \in Y$ 组成。若对于所有 $y \in Y$，都有 $Y_{\leq y} = X_{\leq y}$，则称 Y 向下封闭。类似地，我们可以定义 $Y_{<y}$、$Y_{\geq y}$、$Y_{>y}$ 以及向上封闭性质。

证明偏序集映射是同伦等价的主要工具，是著名的 Quillen 纤维定理（或称定理 A，参见 [Qui78]）：

定理 2.1 (Quillen)。 设 $f : X \to Y$ 是偏序集之间的一个保序映射。假设对于所有 $y \in Y$，下纤维 $f^{-1}(Y_{\leq y})$ 都是可缩的。那么 f 是一个同伦等价。

2.2. **代数复形**。 设 $\mathcal{P}$ 是 F_n 的所有非空、由非平凡真自由因子组成的集合。$\mathcal{P}$ 上有两种自然的偏序关系：一种由包含关系给出，即若 $c \subseteq d$ 则 $c \leq d$；另一种由细化关系给出，即若对于所有 $A \in c$，都存在 $B \in d$ 使得 $A \subseteq B$，则 $c \leq d$。我们考虑定义在 $\mathcal{P}$ 的元素上的三个偏序集：

- FC_n 是 F_n 的非平凡真自由因子所组成的偏序集。我们赋予它包含关系。该偏序集的序复形就是 [HV98b] 中定义的自由因子复形。注意，FC_n 通过 $\mathcal{P}$ 是 $A \mapsto \{A\}$ 的子偏序集，其中的序由后者中的细化关系给出。

- $\mathrm{CB}(F_n) = \mathrm{CB}_n \subset \mathcal{P}$ 由所有与基相容的 $d \in \mathcal{P}$ 组成。也就是说，存在一个 F_n 的基，使得每个 $A \in d$ 都由该基的某个子集生成。我们赋予它来自 $\mathcal{P}$的包含关系。注意，$\mathrm{CB}(F_n)$同构于某个单纯复形的面偏序集，因此我们也可以将 $\mathrm{CB}(F_n)$视为一个单纯复形。

- $\mathrm{PD}(F_n) = \mathrm{PD}_n \subset \mathcal{P}$ 由所有满足以下条件的 $d \in \mathcal{P}$ 组成：d 中的元素构成一个部分分解。回顾一下，自由因子集合 $d = \{A_1, \dots, A_k\}$ 是部分分解，当且仅当自然映射

$$A_1 * \cdots * A_k \to F_n$$

是单射，且其像是一个自由因子。我们为 PD_n 赋予来自 $\mathcal{P}$的细化关系。一般而言，PD_n 不是单纯复形。我们用 $\mathrm{D}(F_n) = \mathrm{D}_n \subset \mathrm{PD}(F_n)$ 表示由所有完全分解构成的子偏序集，也就是说，张成 F_n的部分分解。

FC_n 的序复形是 Hatcher–Vogtmann [HV98b] 定义的自由因子复形。偏序集 $\mathrm{CB}(F_n)$ 和 $\mathrm{PD}(F_n)$ 分别推广了 Rognes [Rog92] 以及 Hanlon– Hersh–Shareshian [HHS09]，为环定义的相关复形，并且它们已在 [BPW24; PW25] 中出现。注意，$\mathrm{CB}(F_n)$ 和 $\mathrm{PD}(F_n)$ 都只包含自由因子的有限集族。当 n 固定时，我们有时会在记号中省略下标 n 或 F_n，直接写作 FC、CB、PD 和 D。

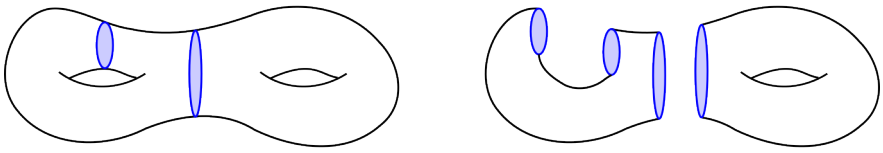


图1。左：带有以蓝色表示的嵌入球面系的 $M_{2,\ 0}$ 流形。右：流形 $M_{2,\ 0}-\sigma$ 有两个连通分支，分别与 $M_{0,\ 3}$和 $M_{1,\ 1}$微分同胚。

例 2.2。 PD(F_2) 中的每条极大链都具有如下形式

$$\{\langle e_1\rangle\} \leq \{\langle e_1\rangle, \langle e_2\rangle\},$$

其中 $\{e_1, e_2\}$ 是 F_2的一个基。特别地，细化序就是包含序。

另一方面，与 $\{e_1, e_2\}$ 对应的 CB(F_2) 的极大单形为

$$\{\langle e_1\rangle, \langle e_2\rangle\}.$$

在此情形下，我们看到 $\mathrm{CB}(F_2)$ =PD(F_2)，并且它们具有由 1-球面的楔和给出的同伦型，因为它们是 1-维且连通（参见命题 6.7 之前的讨论，见 [PW25]；另见 [Sad20]）。

以下是 [BPW24，定理 29] 的一个特例。

定理 2.3。 设 $n \geq 1$。存在一个 $\mathrm{Aut}(F_n)$-等变映射 $\psi : \mathrm{sdPD}(F_n) \to \mathrm{CB}(F_n)$，它是一个同伦等价。

2.3. **几何复形**。 我们还将研究球面系统复形，它最早出现在怀特海德的工作中 [Whi36a; Whi36b]，后来由 Hatcher 推广 [Hat95]。令 $M_{n,k}$ 表示从 $S^2 \times S^1$ 中去掉 k 个圆盘的内部后，再取 n 重连通和所得的流形（即有 k 个边界分支）。$M_{n,k}$ 中的一个球面系统是由有限个互不相交嵌入的2维球面的同伦类组成的集合，这些球面不同伦于边界球面，且不围成3维圆盘。我们用 $\mathcal{S}(M_{n,1})$ 表示这样的单纯复形：其 p-单纯形是 $M_{n,k}$ 中大小为 $p+1$ 的球面系统（即由 $p+1$ 个不同的嵌入2维球面同伦类组成），面关系由包含关系给出。

如果 $\sigma = \{[S_1], \ldots, [S_r]\} \in \mathcal{S}(M_{n,k})$ 是一个球面系，我们可以选取代表元 S_i 以及 M_n 的内部中的开管状邻域 $S_i \subset T_i$，使得对于 $i \neq j$ 有 $T_i \cap T_j = \emptyset$。我们将用 $M_{n,k} - \sigma$ 表示 $M_{n,k} \setminus \bigcup_i T_i$。事实上，$M_{n,k} - \sigma$ 是一个（可能不连通的）带边界 3-流形，其微分同胚类型仅取决于 σ，而与代表元 S_i 和开管状邻域 T_i 的选取无关。$M_{n,k} - \sigma$ 的每个连通分支 N 都微分同胚于某个 $M_{n',k'}$，其中 $n', k' \in \mathbb{N}$。见图1。可以证明，存在一个嵌入 $\mathcal{S}(N) \hookrightarrow \mathrm{lk}_{\mathcal{S}(M_{n,k})}(\sigma)$，其像由所有这样的球面系的同伦类构成：它们有代表元包含于 N 中，且与 σ 不相交。

球面系统 σ 有一个对偶图，定义如下（参见 [Hat95，附录]）。$\Gamma(\sigma)$ 的顶点是 $M_{n,k} - \sigma$ 的连通分支。每个 $[S] \in \sigma$ 在 $\Gamma(\sigma)$ 中确定一条边，该边连接球面 S两侧的连通分支。注意，此图可能有重边和环。

现在我们回顾 Aut(F_n) 自然作用于 $\mathcal{S}(M_{n,1})$ 的一种方式。对于带边界的可定向流形 M，记 Diff(M) 为逐点固定边界某个邻域的保定向微分同胚群，并记 MCG(M) 为相应的映射类群，即 Diff(M) 对同伦关系取商所得的群。Laudenbach [Lau74] 的工作表明，Diff($M_{n,1}$) 在 $\pi_1(M_{n,1})$ 上的作用诱导出一个满射

$$\mathrm{MCG}(M_{n,1}) \to \mathrm{Aut}(F_n),$$

并且 MCG($M_{n,1}$) 在 $\mathcal{S}(M_{n,1})$ 上的作用可经由 Aut(F_n) 分解。特别地，Aut(F_n) 作用于$\mathcal{S}(M_{n,1})$。

3. The poset FCD and the equivalence φ

从现在起，我们省略下标-n 记号，并假设我们的偏序集和单纯复形均针对一个秩为 n 的固定自由群 F_n 定义。

令 $\mathsf{FC}^+ = \mathsf{FC} \cup \{F_n\}$，并将 $(\mathsf{FC}^+)^{\mathrm{op}}$ 记为 F_n 的非平凡（但可能不真）自由因子所构成的偏序集，其序关系由反向包含给出，即若 $A \supseteq B$，则 $A \leq B$。令 $\mathsf{D}^- = \mathsf{D} \cup \{\emptyset\}$ 为偏序集

D，其元素为 F_n 的（真）自由因子分解，并添加了唯一的极小元 $\emptyset$。我们取 $\big((\mathrm{FC}^+)^{\mathrm{op}} \times \mathrm{D}^-\big) \setminus (F_n, \emptyset)$ 中由“基相容”元素构成的子偏序集，其定义如下：

$$\mathrm{FCD} := \{(A,d) \in \mathrm{FC} \times \mathrm{D} \,:\, \{A\} \cup d \in \mathrm{CB}\} \cup \{(A,\emptyset) \,:\, A \in \mathrm{FC}\} \cup \{(F_n,d) \,:\, d \in \mathrm{D}\}. \tag{3}$$

我们将使用以下刻画来描述自由因子与分解之间的基兼容性。

引理 3.1。设 $d \in \mathrm{D} = \mathrm{D}(F_n)$。对于自由因子 $A < F_n$，定义 $I_{A,d} = \{A \cap D \colon D \in d\} \setminus \{\{1\}\}$ 为 d 与 A中元素的所有非平凡交的集合。则有以下结论：

(1) 我们有 $\langle I_{A,d}\rangle \cong *_{B \in I_{A,d}} B$ 以及 $I_{A,d} \in \mathrm{PD}(A) \cup \{\{A\}, \emptyset\}$。*(2)* 若 $s = (A_1 < \cdots < A_k)$ 是 F_n的自由因子链，则 $s \cup d \in \mathrm{CB}(F_n)$ 当且仅当对所有$A \in s$，都有 $I_{A,d} \in \mathrm{D}(A) \cup \{\{A\}\}$。

证明。（1）显然，因为自由因子 $A \cap D$ 的交既是 A 的自由因子，也是 D的自由因子，而d是 F_n的完全自由因子分解。

对于（2），注意，若 $s \cup d$有一个公共基 $\mathcal{B}$，则交集 $A \cap D$与 $A \in s$和 $D \in d$的交由 $A \cap D \cap \mathcal{B}$张成。当 D 遍历 d中的元素时，我们得到

$$A = \langle A \cap \mathcal{B}\rangle = \left\langle A \cap \Big(\bigcup_{D \in d} D \cap \mathcal{B}\Big)\right\rangle = \left\langle \bigcup_{D \in d} A \cap D \cap \mathcal{B}\right\rangle = \langle I_{A,d}\rangle\,.$$

因此 $I_{A,\ d} \in \mathrm{D}(A) \cup \{\{A\}\}$。

反过来，注意

$$I_{A_1,d} < \cdots < I_{A_k,d} < d$$

是 $\mathrm{PD}(F_n)$中的一条链。因此，根据 的引理 2.7 BPW，这条链有一个公共基。由于，$_d\rangle = A_i$，我们得出 $s \cup d \in \mathrm{CB}(F_n)$。□

利用上述结果，我们证明如下命题。

定理 3.2。存在一个 $\mathrm{Aut}(F_n)$-等变的保序映射 $\varphi : \mathrm{sdPD} \to \mathrm{FCD}$，且它是一个同伦等价。

证明。对于元素 $x \in \mathrm{sd\ PD}$，记 $x_f = \{s \in x \colon s \notin \mathrm{D}\}$，以及 $x_d = x \setminus x_f = \{d \in x \colon d \in \mathrm{D}\}$。因此 $x = x_f \cup x_d$。我们定义：

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} \min_{s \in x_f} \langle s\rangle & x_f \neq \emptyset, \\ F_n & x_f = \emptyset. \end{cases}$$

and

$$\varphi_2(x) = \begin{cases} \max x_d & x_d \neq \emptyset, \\ \emptyset & x_d = \emptyset. \end{cases}$$

令 $\varphi(x) = (\varphi_1(x)\ \varphi_2(x))$。映射 φ是良定义的，因为 $\varphi(x) \neq (F_n, \emptyset)$，并且 $\varphi_1(x)\ \varphi_2(x)$ 具有一个公共基。注意，如果 $x \subseteq y$，那么 $x_f \subseteq y_f$，因此 $\varphi_1(x) \supseteq \varphi_1(y)$。另一方面，$x_d \subseteq y_d$ 意味着 $\varphi_2(x) \leq \varphi_2(y)$。因此，$\varphi$ 是一个保序偏序集映射。还要注意，φ 是 $\mathrm{Aut}(F_n)$-等变的。

接下来，我们通过应用 Quillen纤维定理证明 φ 是同伦等价。设 $(A,d) \in$FCD。我们证明 $\varphi^{-1}(\mathrm{FCD}_{\leq (A,d)})$ 是可缩的。注意，$x \in \varphi^{-1}(\mathrm{FCD}_{\leq (A,d)})$ 当且仅当$\varphi_1(x) = \varphi_1(x_f) \supseteq A$ 并且 $\varphi_2(x) = \varphi_2(x_d) \leq d$。因此，$\varphi^{-1}(\mathrm{FCD}_{\leq (A,d)}) = \mathrm{sd}(P_1 \cup P_2)$，其中

$$P_1 = \mathrm{D}_{\leq d}, \text{ and}$$
$$P_2 = \{s \in \mathrm{PD} \setminus \mathrm{D} \,:\, \langle s\rangle \supseteq A\}.$$

设 $P := P_1 \cup P_2$。注意，若 $d \neq \emptyset$，则 P_1 和 $P_{\leq d}$ 都是可缩的。

$P = P_{\leq d} \cup P_2$ 是若干向下封闭子偏序集的并。若 $A = F_n$，则 $P_2 = \emptyset$，因此 $P = P_1$ 是可缩的。于是我们可以假设 $A \neq F_n$。在这种情况下，偏序集 P_2 可通过以下偏序集映射的之字形不等式证明为可缩：

$$s \leq \{\langle s\rangle\} \geq \{A\}.$$

注意到所有这些项都位于 P_2 中。若 $d = \emptyset$，则 $P_1 = \emptyset$，因此 $P = P_2$ 是可缩的。接下来，我们证明若 $d \neq \emptyset$ 且 $A \neq F_n$，则 $P_{\leq d} \cap P_2$ 也可缩。这里

$$P_{\leq d} \cap P_2 = \{s \in \mathrm{PD} \setminus \mathrm{D} \,:\, \langle s\rangle \supseteq A \text{ and } s \leq d\}.$$

写出 $a_d = \{A \cap D : \quad D \in d\}$。由于 A，d 是基相容的，根据 引理 3.1 我们得出 $\langle a_d \rangle = A$ 和 $a_d \leq d$，因此 $a_d \in P_{\leq d} \cap P_2$。对于 $s \in P_{\leq d} \cap P_2$，令

$$f(s) = \{\langle S \in s \, : \, S \leq D \rangle : D \in d\} = \{\langle s \rangle \cap D \, : \, D \in d\}.$$

再次，由于 引理 3.1，我们有 $s \leq f(s) \leq d$ 以及 $f(s) \in P_{\leq d} \cap P_2$ 对于 $s \in P_{\leq d} \cap P_2$。因此我们有 ve
一个序保持映射 保留映射 $f : \; P_{\leq d} \cap P_2 \to P_{\leq d} \cap P_2$。此外，由于 $\langle s \rangle \supseteq A$，我们有

$$s \leq f(s) \geq a_d.$$

因此， $P_{\leq d} \cap P_2$ 是可缩的。

我们已经证明，对于 $A \neq F_n$ 和 $d \neq \emptyset$， P 也是可缩的，因为它是两个可缩的向下封闭子偏序集的并集，且二者的交集也是可缩的。因此，对于 FCD 中的任意一对 $(A, d) \in$ ， $\varphi^{-1}(\mathrm{FCD}_{\leq (A,d)}) = \mathrm{sd}\, P$ 是可缩的。由 Quillen纤维定理，φ 是一个同伦等价。□

注 3.3。可以很容易地为环定义 FCD，并且上述论证对足够良好的环（例如局部环或 Dedekind整环）同样成立。事实上， [BPW24] 定义了一个一般框架，其中包括自由群、足够良好的环上的模，以及拟阵等其他例子。在这一一般性下，他们证明了 CB $\simeq$ PD。我们的等价 PD $\simeq$ FCD 可以推广到这一一般性框架。

4. The geometric complex $\mathrm{FCD}^{\mathrm{g}}$ and the map $\alpha\colon \mathrm{FCD}^{\mathrm{g}} \to \mathrm{FCD}$

在本节中，我们定义一个偏序集 $\mathrm{FCD}^{\mathrm{g}}$，将其视为 FCD 的几何版本，并给出一个映射 $\alpha\colon \mathrm{FCD}^{\mathrm{g}} \to \mathrm{FCD}$。

在本节中，我们固定 n ，并记 $M = M_n$、1 和 $\mathcal{S} = \mathcal{S}$（$M_n$、1）。我们固定 v_0 为 M的边界上的一点，并取一个同一化 $F_n \cong \pi_1$（M， v_0）。如果 δ是 M中的一个球面系统，我们将包含 v_0 的 $M - \delta$ 的连通分支称为基点分支，并记作 M_0（δ）（或简称为 M_0）。回顾一下， Γ（δ）表示球面系统 $\delta \in \mathcal{S}$的对偶图，其定义见第 2.3 节。根据定义，M_0（δ）是 Γ（δ）的一个顶点。

图的一个顶点 v G 称为 割点，如果 $|G| \setminus \{v\}$ 是不连通的，其中 $|G|$ 表示该图的几何实现。我们称球面系统 δ 是切割的，如果 M_0（δ） 是单连通的，并且 M_0（δ）是 Γ（δ）的割点。例如，位于 τ 这个流形中、 M 左上方的 图 2中的系统就是切割的。

定义 **4.1.** 令 $\mathrm{FCD}^{\mathrm{g}}$ =$\mathrm{FCD}^{\mathrm{g}}_n$ 为 $\mathcal{S}$ 的子偏序集，其中包含非空球面系，
它们要么是切割的，
要么具有非单连通的基点分支。

在上述定义中，我们将 $\mathcal{S}$ 视为通过其面偏序集给出的偏序集，因此 $\mathrm{FCD}^{\mathrm{g}}$ 是 $\mathcal{S}$ 的一个特定子偏序集（其中不包含空单形）。事实上，我们将在 命题 6.6 中看到 $\mathrm{FCD}^{\mathrm{g}}$是 $\mathcal{S}$的一个子复形，但目前暂不需要这一点。在下文中，我们通常用 $\mathrm{FCD}^{\mathrm{g}}$ 中的一般元素表示为 δ，用 τ 表示被切割的系统，用 σ 表示其基点分支非单连通的系统。

我们的目标是证明以下定理：

定理 4.2. 存在一个 $\mathrm{Aut}(F_n)$-等变的保序映射 $\alpha : \mathrm{sdFCD}^{\mathrm{g}} \to \mathrm{FCD}$ ， 它是一个同伦等价。

回忆一下，Aut(F_n) 在 $\mathrm{FCD}^{\mathrm{g}}$ 上的作用来自映射类群的作用。为了定义映射 $\alpha : \mathrm{sdFCD}^{\mathrm{g}} \to \mathrm{FCD}$，我们需要说明如何将 F_n 的自由因子和分解与 $\mathrm{FCD}^{\mathrm{g}}$中的球面系统关联起来。下面的引理将使我们能够把基点连通分支不是单连通的球面系统映射到基点连通分支的基本群中。

引理 4.3. 设 $\sigma \in \mathcal{S}$ 是一个非空球面系统。那么

$$\pi_1(M_0(\sigma), v_0) \to \pi_1(M, v_0)$$

是单射。此外，

$$\pi_1(\sigma) := \operatorname{im} \pi_1(M_0(\sigma), v_0) \subseteq \pi_1(M, v_0) = F_n$$

是一个真自由因子。此外，若 $\sigma \subseteq \sigma' \in \mathcal{S}$，则 $\pi_1(\sigma) \supseteq \pi_1(\sigma')$。

证明。 这是范坎彭定理的一个直接推论。 □

下一个引理表明，我们可以为每个切割了非平凡分解的 $\tau \in \mathrm{FCD}^{\mathrm{g}}$ 建立关联，也就是为其关联 D 中的一个元素。

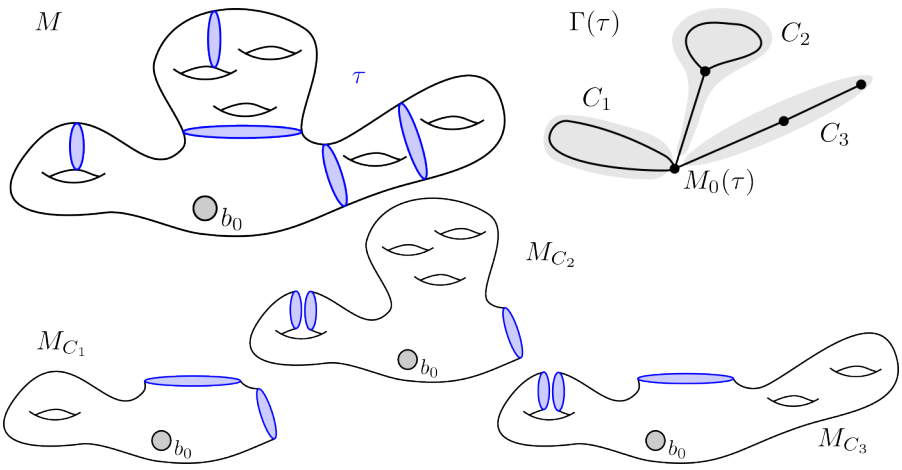


图 2。 左上与右上：被切割的球面系统 $\tau \in \mathrm{FCD}^{\mathrm{g}}$ （蓝色）以及图 $\Gamma(\tau)$，其中 C_1, C_2, C_3 是 $|\Gamma(\tau)| \setminus \{M_0(\tau)\}$的连通分支。下方：证明 $\{M_{C_1}, M_{C_2}, M_{C_3}\}$ 时所用的开覆盖，见引理 4.4。

引理 4.4。 设 $\tau \in \mathrm{FCD}^{\mathrm{g}}$被切割。若 C是 $|\Gamma(\tau)| \setminus \{M_0(\tau)\}$的一个连通分支，记 τ_C为 τ中构成 $|\Gamma(\tau)| \setminus C$的边的球面的子集。那么

$$\mathbf{d}(\tau) := \{\, \pi_1(\tau_C) \colon C\text{是 } |\Gamma(\tau)| \setminus \{M_0(\tau)\} \,\}\text{的一个连通分支} \tag{4}$$

是 F_n的一个非平凡自由因子分解。

证明。令 C为 $|\Gamma(\tau)| \setminus \{M_0(\tau)\}$的一个连通分支，并令 $M_C = M_0(\tau_C)$ 为 $M - \tau_C$的基点分支。对于 $C \neq C'$，注意到 $M_C \cap M_{C'} = M_0(\tau)$。 M_C给出了 M的一个覆盖（通过移除每个不含基点的 M_C 的边界分支，可以使该覆盖成为开覆盖）；每个 M_C 都包含基点 v_0，且它们两两交于一个单连通子空间。因此，由范坎彭定理可得，$\mathbf{d}(\tau)$ 是 F_n的一个非平凡自由因子分解。见图 2。□

推论 4.5. 设 τ、τ' 是两个具有 $\tau \subseteq \tau'$ 的切割球面系统。那么 $\mathbf{d}(\tau) \leq \mathbf{d}(\tau')$。此外，若它们与基点分支相邻的球面相同，则 $\mathbf{d}(\tau) = \mathbf{d}(\tau')$。

证明。我们说明，向 τ 添加球面可以合并相应对偶图中的连通分支，因此根据引理 4.4，这会映射到一个更粗的完整分解：设 $[S] \in \tau' \setminus \tau$，则 $[S] \in \mathrm{lk}_{\mathcal{S}}(\tau)$。如第 2.3 节末尾所述，我们可以将 $\mathcal{S}(M_0(\tau))$ 视为 $\mathrm{lk}_{\mathcal{S}}(\tau)$ 的子复形。首先，假设 $\{[S]\} \in \mathrm{lk}_{\mathcal{S}}(\tau)$ 不包含于 $\mathcal{S}(M_0(\tau))$ 中。在这种情况下，从几何实现中移除基点分支后，$\tau \cup \{[S]\}$ 的对偶图与 $\Gamma(\tau)$ 具有相同数量的连通分支。另一方面，若 $\{[S]\} \in \mathcal{S}(M_0(\tau)) \subseteq \mathrm{lk}_{\mathcal{S}}(\tau)$，那么 $M_0(\tau) - \{[S]\}$ 有两个连通分支，且每个分支都包含至少两个边界分支。（这是因为 τ 是切割的，所以对某个 $k \geq 2$，有 $M_0(\tau) \cong M_{0,k}$，见图 3。）在这种情况下，$\mathbf{d}(\tau \cup \{[S]\})$ 是由 $\mathbf{d}(\tau)$ 合并那些位于 $S \subseteq M_0(\tau)$ 不包含 M 的边界分支一侧的自由因子得到的。这种合并可能是平凡的，见图 3 中的橙色球面，但它总会得到一个等于 $\mathbf{d}(\tau)$ 或比其更粗的分解。

关于 Furthermore 部分，令 $\tau_0 \subseteq \tau$为与基点分支相邻的球面集合。那么 $\Gamma(\tau_0)$ 是通过收缩 $\Gamma(\tau)$ 中所有不与基点顶点$M_0(\tau)$相邻的边得到的。这意味着 $C(\,|\Gamma)\tau)| \setminus \{M_0(\tau)\}$中的每个连通分支都唯一对应于 $|\Gamma(\tau_0)| \setminus \{M_0(\tau_0)\}$ 中的一个连通分支C_0，使得 $(\tau_0)_{C_0} = \tau_C \cap \tau_0$。此外，不难看出 $\pi_1(\tau_C \cap \tau_0) = \pi_1(\tau_C)$，因为 $\tau_C \cap \tau_0$ 是与基点分支相邻的 τ_C 的球面。综合以上，我们得到 $\mathbf{d}(\tau) = \mathbf{d}(\tau_0)$。因此，如果 $\tau_0 = \tau_0'$，那么 $\mathbf{d}(\tau) = \mathbf{d}(\tau')$ 也成立。□

现在我们可以定义 α 从定理 4.2得到的映射 $x \in \mathrm{sdFCD}^{\mathrm{g}}$，记 $x_s = \{\sigma \in x : \pi_1(\sigma) \neq 1\}$ 且 $x_t = \{\tau \in x : \ \tau$为切割$\}$。我们定义映射 α 如下

$$\begin{aligned} \alpha : \mathrm{sd}\,\mathrm{FCD}^{\mathrm{g}} &\longrightarrow \mathrm{FCD} \\ x &\longmapsto \big(\pi_1(\max x_s),\, \mathbf{d}(\max x_t)\big). \end{aligned} \tag{5}$$

这里，如果 $x_t = \emptyset$，我们令 $\mathbf{d}(\max x_t) = \emptyset$；对于 $x_s = \emptyset$，我们令 $\pi_1(x_s) = F_n$。

引理 4.6. 映射 α 是偏序集之间的良定义保序映射，并且是$\mathrm{Aut}(F_n)$-等变的 .

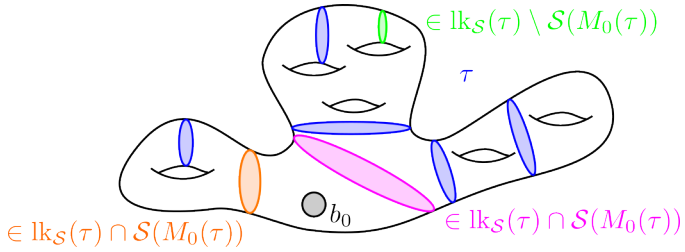


图 3. 球面系统 τ（蓝色）来自 图 2，以及位于 τ的链接中的其他球面（绿色、橙色和粉色）。将绿色或橙色球面加入 τ 会得到相同的分解，而加入粉色球面则会得到更粗的分解。

证明。由 引理 4.3 和 推论 4.5 可知，对所有 $\alpha(x) \in (\mathrm{FC} \cup \{F_n\})^{\mathrm{op}} \times (\mathrm{D} \cup \{\emptyset\})$ 满足 $x \in \mathrm{sdFCD}^{\mathrm{g}}$，并且 α 是保序的。

现在我们将证明，α 的像实际上属于 FCD。也就是说，对于 $x \in \mathrm{sd\ FCD}^{\mathrm{g}}$, $\pi_1(\max x_s)$ 和 $\mathrm{d}(\max x_t)$ 有公共基，并且 $\alpha(x) \neq (F_n, \emptyset)$。确实，由于 $x \neq \emptyset$，x_s 或 x_t 必定非空，因此 $\alpha(x) \neq (F_n, \emptyset)$。根据引理3.1(2)，我们只需证明：若 $\sigma \subseteq \tau \in \mathrm{FCD}^{\mathrm{g}}$，其中 σ 的基点分支不是单连通的，且 τ 是切割，则有 $A = \langle I_{A,d} \rangle$，其中 $A := \pi_1(\sigma)$ 且$d := \mathrm{d}(\tau)$。对于 $D \in d$，令 C_D为 $|\Gamma(\tau)| \setminus \{M_0(\tau)\}$的连通分支，使得 $\pi_1(\tau_{C_D}) = D$（见引理 4.4），并令 $\sigma_D = \tau_{C_D} \cup \sigma$。那么 $A \cap D = \pi_1(\sigma_D)$。由于 $M_0(\sigma)$ 被子流形$M_0(\sigma_D)$ $D \in d$覆盖，且其中任意两个不同的子流形交于一个单连通子流形，因此我们得出 $A = \langle A \cap D : D \in d \rangle$，也就是说，$A = \langle I_{A,d} \rangle$。

最后，显然，α 是 $\mathrm{Aut}(F_n)$-等变的。 □

证明 α 是同伦等价还需要一些额外工作，将在下一节完成。

5. The map α is a homotopy equivalence

与上一节一样，我们固定 $n \geq 1$，记 $M = M_{n,1}$ 和 $\mathcal{S} = \mathcal{S}(M)$。我们还固定一个同一化$\pi_1(M, v_0) \cong F_n$，并省略 $\mathrm{FCD}^{\mathrm{g}} = \mathrm{FCD}^{\mathrm{g}}_n$、$\mathrm{FC} = \mathrm{FC}_n$ 和 $\mathrm{D} = \mathrm{D}_n$ 的下标。

本节的目标是证明映射 α 在等式 (5) 中定义，是一个同伦等价。为此，我们证明其纤维是可缩的：

命题 5.1. 对于所有 $(A, d) \in \mathrm{FCD}$，纤维 $\alpha^{-1}\left(\mathrm{FCD}_{\leq (A,d)}\right)$ 是可缩的。

从现在起，我们固定 $(A, d) \in \mathrm{FCD}$，并记 $d = \{D_1, \ldots, D_k\}$。下面的引理是证明命题 5.1的一项重要技术要素。

引理 5.2. 若 $d \neq \emptyset$，则存在唯一的 $\tau_d \in \mathrm{FCD}^{\mathrm{g}}$，使得

(1) $|\tau_d| = |d| = k$；*(2)* τ_d 中的每个球面都是分离的；*(3)* $M - \tau_d$ 有 $k+1$ 个连通分支。基点分支是一个具有 $k+1$ 个边界分支的 *3*维球（其中一个包含基点）。其他每个连通分支都恰有一个边界分支，它对应于 τ_d 中与其及基点分支相邻的球面；在同一化 $\pi_1(M) \cong F_n$ 下，它们的基本群分别为 D_1、……、D_k。特别地，$\mathbf{d}(\tau_d) = d$。

证明。令 n_i 表示 D_i 的秩。将 $M = M_{n,1}$ 看作由 $M_{n_1,1}$、……、$M_{n_k,1}$ 沿着 k 粘合而成的 $M_{0,k+1}$，这些球面来自 $k+1$ 个边界球面（剩下的一个含有基点）。将这些边界球面记为 S_1、……、S_k。对于 $i = 1$、……、k，令 B_i 表示去掉 S_1、……、S_i、……、S_k 后所得空间的基本群。那么 Hepworth 的工作 [Hep20，命题 3.5] 表明，将 F_n 分解为秩分别为 n_1、……、n_k 的自由因子的有序分解集合，与集合等变同构

$$\mathrm{Aut}(F_n)/(\mathrm{Aut}(F_{n_1}) \times \cdots \times \mathrm{Aut}(F_{n_k})).$$

这是一个传递的 $\mathrm{Aut}(F_n)$-集合，因此存在 $f \in \mathrm{Aut}(F_n)$ 使得 $f(B_i) = D_i$ 对所有 i均成立。回忆一下，$\mathrm{Aut}(F_n)$在 $\mathcal{S}$上的作用来自 $\mathrm{Diff}(M)$在 $\pi_1(M) \cong F_n$上的作用，并且 Laudenbach[Lau74]证明了

$$\mathrm{Diff}(M) \to \mathrm{Aut}(F_n)$$

是满射（见 第 2.3 节）。将 f 提升为 M上的一个微分同胚，可得 $\tau_d = \{f([S_1]) \dots, f([S_d])\}$ 具有所需性质，因为 $\{[S_1], \dots, [S_k]\}$ 在将 D_i 替换为 B_i后也具有这些性质。

现在我们将论证 τ_d 是唯一的。我们不妨假设 $\tau_d = \{[S_1], \dots, [S_k]\}$，且 M 是通过沿 S_i 将 M_{n_i} 附加到 $M_{0,k+1}$ 上得到的，其中 $i = 1$, ..., k。设 $\theta_d = \{[T_1], \dots, [T_k]\}$ 是另一个具有所需性质的球面系统。由于 $M - \tau_d$ 和 $M - \theta_d$ 是边界为 ˜ ˜ 的同胚 3 维流形，存在一个微分同胚 $f\colon M \to M$，使得对所有 i，都有 $f(S_i) = T_i$。设 $f \in \mathrm{Aut}(F_n)$ 是诱导的基本群映射。令 $\tau_d^i = \tau_d \setminus \{[S_i]\}$，并令 $\theta_d^i = \theta_d \setminus \{[T_i]\}$。由于

$$D_i = \pi_1(M - \tau_d^i) = \pi_1(M - \theta_d^i)$$

(cf. 引理 4.4)，我们有 $f(D_i) = D_i$ 对所有 i。根据 [Hep20，命题 3。5]，f 属于其像

$$\mathrm{Aut}(D_1) \times \cdots \times \mathrm{Aut}(D_k) \to \mathrm{Aut}(F_n).$$

将 $M_{n_i,\,1}$ 视为 $M \setminus S_i$ 的非基点连通分支。包含关系

$$\mathrm{Aut}(D_i) \to \mathrm{Aut}(F_n)$$

由分解

$$F_n = D_1 * \cdots * D_k$$

提升为由恒等映射给出的扩张

$$\mathrm{Diff}(M_{n_i,1}) \to \mathrm{Diff}(M).$$

根据定义，这些微分同胚群中的元素固定边界。由于$M_{n_i,\,1}$的边界是 S_i，$\mathrm{Aut}(D_i)$ 在 $\mathcal{S}$ 上的作用固定 S_i。因此 f 固定 τ_d。于是 $\tau_d = \theta_d$。□

我们定 义以下 $\mathrm{FCD}^{\mathrm{g}}$ 的子偏序集，它们将用于证明 α 的所有纤维都是可缩的 e.

$$\begin{aligned} F_{\mathrm{cut}} &\coloneqq \{\tau \in \mathcal{S} \,:\, \tau \text{ is cut and } \mathbf{d}(\tau) \le d\}, \\ \mathcal{S}_A &\coloneqq \{\sigma \in \mathcal{S} \,:\, \pi_1(\sigma) \supseteq A\}, \quad \text{and} \\ \mathcal{S}'_A &\coloneqq \mathcal{S}_A \cap \mathrm{st}_{\mathcal{S}}(\tau_d), \end{aligned} \tag{6}$$

其中 $\mathrm{st}_{\mathcal{S}}(\tau_d)$ 表示单形 τ_d 在球面系统复形 $\mathcal{S}$中的星形。这里 $\mathcal{S}_A$ 和 $\mathcal{S}'_A$ 是 $\mathcal{S}$ 的子复形，我们通常将其视为 $\mathrm{FCD}^{\mathrm{g}}$的子偏序集。在接下来的两个小节中，我们将研究这些偏序集的性质，并在之后利用这些性质完成 命题 5.1 的证明。

5.1. 偏序集 F_{cut}。我们从下面这个引理开始，它说明在 $\mathcal{S}$中，具有切割性质是一个向上封闭性质。

引理 5.3。若 $\tau \in \mathcal{S}$是可切割的，且 $\tau' \supseteq \tau$是包含 τ的一个球面系统，则 τ'是可切割的。

证明。首先注意，根据引理 4.3，τ' 的基点分支的基本群是平凡的。为了说明它是 $\Gamma(\tau')$的一个割点，我们利用 $\Gamma(\tau)$可由 $\Gamma(\tau')$经过一系列边塌缩得到这一事实。因此，只需注意以下几点：设 (G', v')、(G, v)是带有标记顶点v'、v' 的有限图，并假设 G 由 G' 通过塌缩一条边 $e \in G'$得到，且塌缩映射$f : G' \to G$ 将 v' 映到 v。那么，如果 v' 不是 G'的割点，v 也不是 G的割点。换句话说：如果 $|G'| - v'$ 是连通的，那么 $|G| - v$也是连通的。这是因为在连通图中塌缩一条边后，所得图仍然连通。□

回顾第 2.3 节，如果 $\delta \in \mathcal{S}$ 且 N 是 $M - \delta$的一个连通分支，那么 $\mathcal{S}(N) \subseteq \mathcal{S}$。

引理 5.4。若 $d \neq \emptyset$，则对所有 $\tau \in F_{\mathrm{cut}}$ 和 $\tau' \subseteq \tau_d$，有 $\tau \cup \tau' \in F_{\mathrm{cut}}$。

证明。我们先考虑 $\tau' = \tau_d$ 的情形。 这里， $M_0(\tau)$ 是一个 3维球面，具有一个边界分支 b_0 其中包含基点和一组 B 个额外的边界分支，它们对应于 τ 的球面。

对于每个非基点边界分支 $b \in B$，我们可以如下为其关联一个唯一的 $D \in d$：连通分支 b 对应于对偶图 τ 的边集 $E(\Gamma(\tau))$ 中的一条唯一边；每条这样的边都位于 $|\Gamma(\tau)| \setminus \{M_0(\tau)\}$ 的一个唯一连通分支中；每个这样的连通分支对应于一个唯一的 $D' \in d' \coloneqq \mathbf{d}(\tau)$（见引理 4.4）；由于 $d' \le d$，每个 $D' \in d'$ 都包含在 d 的一个唯一元素中。总之，这给出了一列映射

$$B \to E(\Gamma(\tau)) \to \{\text{components of } |\Gamma(\tau)| \setminus \{M_0(\tau)\}\} \to d' \to d.$$

我们利用这个映射将集合 B划分为 $B = B_1 \sqcup \dots \sqcup B_k$，其中 $d = \{D_1, \dots, D_k\}$和 B_i是 p像 g在 B 中的 D_i 在 p上述映 ps (见 图 g4).

在 $M_0(\tau)$ 中，我们可以找到一个由 k 个两两不相交的 3-球面组成的系统 $\tilde{\tau}_d$，它具有以下性质：所有球面均为分离球面；$M_0(\tau) - \tilde{\tau}_d$有 $k+1$ 个连通分支 M_0^0，M_0^1，.....，M_0^k；该连通分支

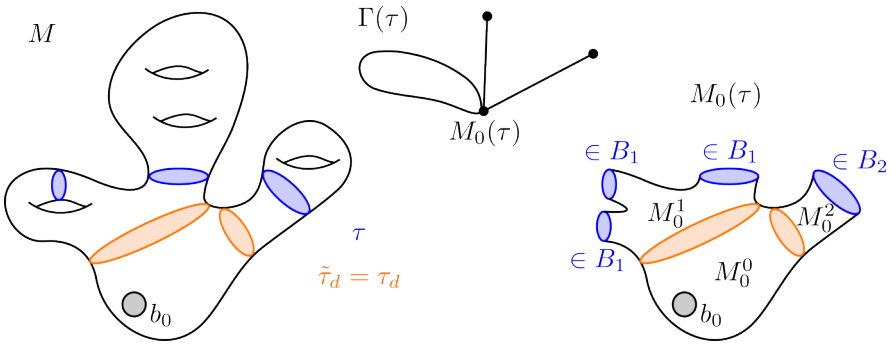


图4。 左图：流形 $M \cong M_{4,\ 1}$、球面系统 $\tau \in F_{\text{cut}}$ 以及系统 τ_d 对应于形如 d 的分解 $\{D_1 \cong F_3, D_2 \cong F_1\}$。右图：从 $M_0(\tau)$ 的分解，对应于 引理 5.4的证明。

M_0^0包含 $M_0(\tau)$ 的边界分支 b_0；对于 $i > 0$，连通分支 M_0^i恰好包含 B_i 中的边界分支，以及由 $\tilde{\tau}_d$ 的唯一分离球面产生的连通分支。

利用包含关系 $\mathcal{S}(M_0(\tau)) \hookrightarrow \mathcal{S}$，我们将 $\tilde{\tau}_d$ 视为 $\mathcal{S}$ 中的一个元素（参见第 2.3 节末尾的讨论）。容易看出，$\pi_1(\tilde{\tau}_d) = 1$，且其基点分支被切割，因此 $\tilde{\tau}_d \in \text{FCD}^{\text{g}}$。由于上面的每个 B_i 都对应于 $|\Gamma(\tau)| \setminus \{M_0(\tau)\}$的若干连通分支的并集，因此 $\tilde{\tau}_d$中的每个球面不仅在 $M_0(\tau)$中是分离的，而且在 M中也是分离的。利用范坎彭定理以及引理 4.4 中将 d' 与 $\mathbf{d}(\tau)$ 同一化的结果，我们有 $\mathbf{d}(\tilde{\tau}_d) = d$。因此，$\tilde{\tau}_d$ 满足引理 5.2 中 τ_d的所有性质，根据引理 5.2 中的唯一性结论，我们得到 $\tilde{\tau}_d = \tau_d$。

现在，由于 $\tilde{\tau}_d = \tau_d$ 中的每个球面要么包含在 $M - \tau$ 的基点分支中，要么位于τ中，因此我们有 $\tau \cup \tau_d \in \mathcal{S}$。根据引理 5.3，系统 $\tau \cup \tau_d$ 是切割的。此外，τ 中与基点相邻的球面恰好由 τ_d给出，因此根据推论 4.5，我们有 $\mathbf{d}(\tau \cup \tau_d) = \mathbf{d}(\tau_d) = d$。这意味着 $\tau \cup \tau_d \in F_{\text{cut}}$。

对于一般情形，设 $\tau' \subseteq \tau_d$ 是任意子集。那么，根据前面的情形，我们有$\tau \cup \tau' \subseteq \tau \cup \tau_d \in F_{\text{cut}}$。由于 $\mathcal{S}$ 是一个单纯复形，因此 $\tau \cup \tau' \in \mathcal{S}$也成立，并且 $\tau \cup \tau'$是切割的，因为它包含 τ，而根据引理 5.3，切割性具有向上封闭性。最后，根据推论 4.5，我们有 $\mathbf{d}(\tau \cup \tau') \leq \mathbf{d}(\tau \cup \tau_d) = d$。因此，$\tau \cup \tau' \in F_{\text{cut}}$。 □

5.2. $\mathcal{S}_A$一个 d $\mathcal{S}'_A$。 接下来，我们汇总 $\mathcal{S}_A$ 和 $\mathcal{S}'_A$的性质。复形 $\mathcal{S}_A$ 由 Hatcher- Vogtmann [HV98b] 证明了它是可缩的（另见修正版 [HV22]）。

定理 5.5 ([Hat95，定理 2。1]以及 [HV98b，定理 2。1])。 复形 $\mathcal{S}_A$ 和 $\mathcal{S}$ 是可缩的 *e.*

回忆一下，单纯复形 K 的子复形 L 是满的，如果对于任意一个顶点位于 L 中的单形 $\sigma \in K$，那么 $\sigma \in L$。

引理 5.6。 $\mathcal{S}_A$ 和 $\mathcal{S}'_A$ 都是 $\mathcal{S}$ 的满子复形。

证明。 要证明 $\mathcal{S}_A$ 是满子复形，我们需要说明：如果 σ、$\sigma' \in \mathcal{S}_A$ 满足 $\sigma \cup \sigma' \in \mathcal{S}$，那么 $\sigma \cup \sigma' \in \mathcal{S}_A$。换言之，如果 $\pi_1(\sigma)$ 和 $\pi_1(\sigma')$ 包含 A，那么 $\pi_1(\sigma \cup \sigma') \supseteq A$ 也包含它。这由 [HV22 的引理 2 得出。2]。

子复形 $\mathcal{S}'_A$ 定义为 $\mathcal{S}_A$ 与 $\text{st}_{\mathcal{S}}(\tau_d)$ 的交。后者也是 $\mathcal{S}$ 的满子复形，因为它是一个旗复形（见 [GP09] 的定理 3.3）。由于满子复形的交仍然是满子复形，故结论成立。□

上述引理意味着，球面系统 $\sigma \in \mathcal{S}$ 位于 $\mathcal{S}_A$（分别为 $\mathcal{S}'_A$）中，当且仅当对于所有 $[S] \in \sigma$，顶点 $\{[S]\}$ 位于 $\mathcal{S}_A$（分别为 $\mathcal{S}'_A$）中。因此，我们得到：

引理 5.7。 面 $\tau_{d,\ A} = \{[S] \in \tau_d : \{[S]\} \in \mathcal{S}_A\}$ 是 τ_d 的唯一极大子系统，使得$\pi_1(\tau_{d,\ A}) \supseteq A$。

证明。 这由 引理 5.6得到。 □

引理 5.8。 设 $\tau_{d,\ A} = \emptyset$。那么对于每个 $\sigma \in \mathcal{S}'_A$，都有 $\sigma \cup \tau_d \in F_{\text{cut}}$。

证明。 令 $\sigma \in \mathcal{S}'_A$。由于 $\sigma \in$ 的第$_{\mathcal{S}}$（τ_d），我们有 $\sigma \cup \tau_d \in \mathcal{S}$并且由于 τ_d 被切割，根据引理 5.3，$\sigma \cup \tau_d$ 也被切割。为证明 $\sigma \cup \tau_d \in F_{\text{cut}}$，我们证明 $\sigma \cup \tau_d$ 中与基点分支相邻的球面恰好是 τ_d中的那些球面，然后应用推论 4.5。

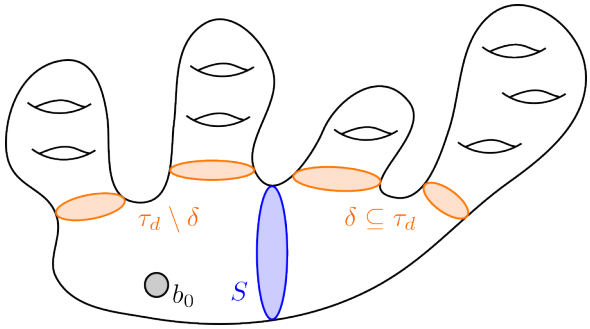


图5. 来自 M 的流形，见引理 5.8的证明。四个橙色圆圈表示τ_d，橙色圆圈下方的部分是 $M_0(\tau_d)$。蓝色圆圈表示一个球面 S，满足 $[S] \in \mathcal{S}(M_0(\tau_d)) \subset \mathcal{S}$。

假设存在一个元素 $[S] \in \sigma$，使得 $\{[S]\} \in \mathcal{S}(M_0(\tau_d)) \subseteq \mathrm{lk}_{\mathcal{S}}(\tau_d)$（见第 2.3 节）。回忆一下，$M_0(\tau_d) \cong M_{0,k+1}$ 是一个具有 $k+1$ 个边界分支的 3维球，其中一个包含基点，其余 k 个与 τ_d 的元素一一对应（见引理 5.2）。流形 $M_0(\tau_d) - \{[S]\}$ 有两个连通分支（每个分支均为单连通）。不包含基点的连通分支至少包含 $M_0(\tau_d)$ 的一个边界分支，因为 S 不围成圆盘（见图5）。令 $\emptyset \neq \delta \subseteq \tau_d$ 为 τ_d 中与位于 $M_0(\tau_d) - \{[S]\}$ 这一连通分支内的边界分支相对应的球面集合。显然，$\delta \cup \{[S]\} \in \mathcal{S}$，并且在基本群层面上我们得到包含关系

$$\pi_1(\{[S]\}) = \pi_1(\delta \cup \{[S]\}) \subseteq \pi_1(\delta).$$

由于 $\{[S]\} \in \mathcal{S}_A$，也就是说，$\pi_1(\{[S]\}) \supseteq A$，我们推得 $\pi_1(\delta) \supseteq A$，因此 $\delta \subseteq \tau_{d,\ A}$，而根据假设该集合为空。这与我们对 $[S]$ 的选择矛盾，说明不存在这样的球面。

这意味着，$\sigma \cup \tau_d$ 中与其基点分支相邻的球面恰好就是τ_d中的那些球面。因此，$\sigma \cup \tau_d$ 被切割，并且根据推论 4.5，我们有$\mathbf{d}(\sigma \cup \tau_d) = \mathbf{d}(\tau_d) = d$，所以 $\sigma \cup \tau_d \in F_{\mathrm{cut}}$。□

引理 5.9。 若 $A \neq F_n$ 和 $d \neq \emptyset$，则偏序集 $\mathcal{S}'_A$ 可缩。

证明。令 $\tau_d = \{[S_1], \dots, [S_k]\}$，并记 $M_0 \cong M_{0,\ k+1}$ 为 $M - \tau_d$ 的基点分支和M_1，……，M_k 为其余连通分支，其中 M_i 的基本群与 D_i 同一化，M_i 同胚于 $M_{\mathrm{rk}(D_i)}$，1，且其边界分支由S_i 的一侧给出（我们能够作出这些同一化，是引理5.2的第3项）。回顾第 2.3 节，$\mathcal{S}(M_i)$嵌入到 $\mathcal{S}(M)$中，甚至嵌入到 $\mathrm{lk}_{\mathcal{S}}(\tau_d)$中。由此可知，$\mathcal{S}$中 τ_d的星形由以下连接给出

$$\mathrm{st}_{\mathcal{S}}(\tau_d) = \tau_d * \mathcal{S}(M_0) * \mathcal{S}(M_1) * \cdots * \mathcal{S}(M_k),$$

其中我们将 τ_d 视为由单个极大单形 τ_d构成的单纯复形。

根据 引理 5.6，偏序集 $\mathcal{S}'_A$ 是 $\mathcal{S}$的满子复形，因此我们有

$$\mathcal{S}'_A = \mathcal{S}_A \cap \mathrm{st}_{\mathcal{S}}(\tau_d) = \mathcal{S}_A \cap \tau_d * \mathcal{S}_A \cap \mathcal{S}(M_0) * \mathcal{S}_A \cap \mathcal{S}(M_1) * \cdots * \mathcal{S}_A \cap \mathcal{S}(M_k). \tag{7}$$

回想一下 引理 3.1，由于 $(A,d) \in \mathrm{FCD}$，因子 A 是 $A_1, \dots, A_k$ 的自由积，其中 $A_i := A \cap D_i$。我们声称，对于 $i \geq 1$，有

$$\mathcal{S}_A \cap \mathcal{S}(M_i) = \mathcal{S}(M_i)_{A_i}. \tag{8}$$

根据 定理 5.5，偏序集 $\mathcal{S}(M_i)_{A_i}$ 是可缩的。因此，等式 (8) 结合 等式 (7)可推出 $\mathcal{S}'_A$ 包含一个可缩的偏序集作为连接因子（回想 $k \geq 1$ 作为 $d \neq \emptyset$），因此其本身也是可缩的。

为了证明方程（8），注意，如果 $\delta \in \mathcal{S}(M_i)$，那么包含关系 $\mathcal{S}(M_i) \hookrightarrow \mathcal{S}$ 使我们可以将 δ 视为一个 n 的元素 $\mathcal{S} = \mathcal{S}(M)$，并将其基本群视为 M 的这样一个球面系统

$$\pi_1^M(\delta) = \pi_1(M_0 \cup M_i - \delta, v_0) * \langle D_j \ : \ j \neq i \rangle .$$

因此，当且仅当 $A \subseteq \pi_1^M(\delta)$ 时，

$$\pi_1(M_0 \cup M_i - \delta, v_0) \supseteq A \cap D_i = A_i.$$

范坎彭定理给出了 $\pi_1(M_0 \cup M_i - \delta, v_0)$ 与 $\pi_1(M_i - \delta, v_i)$ 的同一化，其中 v_i是 M_i 边界上的一点。后者与 $\pi_1^{M_i}(\delta)$相同，即将 δ 视为 M_i 的一个球面系统时的基本群。因此，当且仅当 $A_i \subseteq \pi_1^{M_i}(\delta)$（即 $\delta \in \mathcal{S}(M_i)_{A_i}$）时，$A \subseteq \pi^M(\delta)$（即 $\delta \in \mathcal{S}_A \cap \mathcal{S}(M_i)$）。这就完成了方程（8）的证明，也完成了引理的证明。□

5.3. **纤维的可缩性** α。 现在我们可以证明命题 5.1，即证明 α 的纤维是可缩的。

命题 5.1 的证明。证明中，我们将 $\mathcal{S}_A$ 和 $\mathcal{S}'_A$ 视为其面偏序集所对应的偏序集。令 τ_d 如引理 5.2 所述，并令 F_{cut} 和 $\mathcal{S}_A$ 如公式 (6) 所述。纤维 $\alpha^{-1}(\mathrm{FCD}_{\leq(A,d)})$ 等于 $\mathrm{sd}(\mathcal{S}_A \cup F_{\mathrm{cut}})$，即 $\mathcal{S}_A \cup F_{\mathrm{cut}}$ 中链所构成的偏序集，因此只需证明偏序集 $\mathcal{S}_A \cup F_{\mathrm{cut}}$ 可缩。作为预备，我们先考虑 $A = F_n$ 或 $d = \emptyset$ 的情形。在前一种情形下，$(A,d) = (F_n,d)$ 且 $d \neq \emptyset$，我们有 $\mathcal{S}_A = \emptyset$，因此 $\alpha^{-1}(\mathrm{FCD}_{\leq(A,d)}) = \mathrm{sd}\, F_{\mathrm{cut}}$。由引理 5.4，赋值 $\tau \mapsto \tau \cup \tau_d$ 在 F_{cut} 上给出一个单调偏序集映射，从而构成从 F_{cut} 到其子偏序集的变形收缩；该子偏序集由所有包含 τ_d 的 $\tau \in F_{\mathrm{cut}}$ 组成。由于 τ_d 是其中唯一的极小元，这个子偏序集可缩。因此，偏序集 F_{cut} 也可缩。在第二种情形下，即当 $(A,d) = (A,\emptyset)$ 且 $A \neq F_n$ 时，偏序集 F_{cut} 为空，因此 $\alpha^{-1}(\mathrm{FCD}_{\leq(A,d)}) = \mathrm{sd}\, \mathcal{S}_A$，由定理 5.5 可知它是可缩的。

现在假设 $A \neq F_n$ 和 $d \neq \emptyset$，并定义一个由两次变形收缩组成的序列，从 $\mathcal{S}_A \cup F_{\mathrm{cut}}$ 开始，终止于一个可缩的子偏序集。

我们首先证明存在一个变形收缩

$$\phi_1 \colon |\mathcal{S}_A \cup F_{\mathrm{cut}}| \to |\mathcal{S}'_A \cup F_{\mathrm{cut}}|.$$

根据 定理 5.5 和引理5.9，偏序集 $\mathcal{S}_A$ 和 $\mathcal{S}'_A$ 都是可缩的。利用怀特海德定理 [Hat02，第 4 章，定理 4。4], 由此可得一个变形收缩 ϕ: $|\mathcal{S}_A| \to |\mathcal{S}'_A|$。根据引理 4.3， F_{cut} 中的元素不可能小于 $\mathcal{S}_A$中的元素。因此我们可以写成

$$|\mathcal{S}_A \cup F_{\mathrm{cut}}| = |\mathcal{S}_A| \cup |F_{\leq \mathrm{cut}}|, \text{ where } F_{\leq \mathrm{cut}} = \{\delta \in \mathcal{S}_A \cup F_{\mathrm{cut}} \,:\, \delta \leq \tau \text{ for some } \tau \in F_{\mathrm{cut}}\}.$$

我们将 ϕ 扩展到 $|\mathcal{S}_A \cup F_{\mathrm{cut}}|$，令其在 $|F_{\leq \mathrm{cut}}|$上为恒等映射。为证明这给出了到 $|\mathcal{S}'_A \cup F_{\mathrm{cut}}|$的良定义变形收缩，我们需要验证 $|F_{\leq \mathrm{cut}}| \subseteq |\mathcal{S}'_A \cup F_{\mathrm{cut}}|$ （这尤其意味着 ϕ 在 $|\mathcal{S}_A| \cap |F_{\leq \mathrm{cut}}|$上限制为恒等映射）。事实上，在偏序集层面有 $F_{\leq \mathrm{cut}} \subseteq \mathcal{S}'_A \cup F_{\mathrm{cut}}$：显然 $F_{\leq \mathrm{cut}} \cap F_{\mathrm{cut}} \subseteq F_{\mathrm{cut}}$。另一方面，若 $\sigma \in F_{\leq \mathrm{cut}} \cap \mathcal{S}_A$，则根据定义， $\sigma \leq \tau$存在某个 $\tau \in F_{\mathrm{cut}}$。根据 引理 5.4， τ 包含于 星形$_{\mathcal{S}}(\tau_d)$中，因此其面 $\sigma \subseteq \tau$也包含于其中。这意味着 $\sigma \in \mathcal{S}'_A$。

接下来，我们定义一个保序映射 ϕ_2： $\mathcal{S}'_A \cup F_{\mathrm{cut}} \to \mathcal{S}'_A \cup F_{\mathrm{cut}}$，它是单调的，且其像包含唯一的极小元——因此它是可缩的。由于这样的映射在 $\mathcal{S}'_A \cup F_{\mathrm{cut}}$ 与其像之间定义了一个同伦等价， $\mathcal{S}'_A \cup F_{\mathrm{cut}}$ 是可缩的。

为定义 ϕ_2，我们使用引理 5.7 中的面 $\tau_{d,\ A}$，并先考虑 $\tau_{d,\ A}$ 非空的情形。在这种情况下，我们定义一个偏序集映射

$$\phi_2 \colon \mathcal{S}'_A \cup F_{\mathrm{cut}} \to \mathcal{S}'_A \cup F_{\mathrm{cut}}$$

将每个 δ 映到$\delta \cup \tau_{d,A}$。我们需要证明这个赋值确实映入 $\mathcal{S}'_A \cup F_{\mathrm{cut}}$。若 $\tau \in F_{\mathrm{cut}}$，则由引理 5.4 得 $\tau \cup \tau_{d,\ A} = \phi_2(\tau) \in F_{\mathrm{cut}}$。另一方面，若 $\sigma \in \mathcal{S}'_A$，则同样有 $\sigma \cup \tau_{d,A} = \phi_2(\tau) \in \mathcal{S}'_A$。事实上，因为 $\sigma \in \mathrm{st}_{\mathcal{S}}(\tau_d) \subseteq \mathrm{st}_{\mathcal{S}}(\tau_{d,A})$，所以有 $\sigma \cup \tau_{d,A} \in \mathcal{S}$。但是 σ 和 $\tau_{d,A}$ 也都包含在 $\mathcal{S}'_A$ 中；又由引理 5.6， $\mathcal{S}'_A$ 是 $\mathcal{S}$ 的满子复形，因此 $\sigma \cup \tau_{d,A} \in \mathcal{S}'_A$。这表明映射 ϕ_2 是良定义的。它显然是保序且单调的，并且其像包含 $\tau_{d,A} \in \mathcal{S}'_A$ 作为唯一的极小元。因此，在这种情况下， $\mathcal{S}'_A \cup F_{\mathrm{cut}}$ 是可缩的。

现在假设 $\tau_{d,A}$ 为空。这里，我们定义一个映射

$$\phi_2 \colon \mathcal{S}'_A \cup F_{\mathrm{cut}} \to \mathcal{S}'_A \cup F_{\mathrm{cut}}$$

通过将 δ 映射到 $\delta \cup \tau_d$。同样，我们需要验证这一定义良好。若 $\tau \in F_{\mathrm{cut}}$，则与之前一样，引理 5.4 推出 $\tau \cup \tau_d = \phi_2(\tau) \in F_{\mathrm{cut}}$。对于 $\sigma \in \mathcal{S}'_A$，由 $\sigma \cup \tau_d = \phi_2(\sigma) \in F_{\mathrm{cut}}$可知引理 5.8。这表明 ϕ_2 定义良好。它显然保序且单调，其像包含$\tau_d \in F_{\mathrm{cut}}$，且后者是唯一的极小元。因此， $\mathcal{S}'_A \cup F_{\mathrm{cut}}$ 是可缩的。

无论如何，我们已经证明

$$\alpha^{-1}(\,\mathrm{FCD}_{\leq(A,d)}\,) = \mathrm{sd}(\mathcal{S}_A \cup F_{\mathrm{cut}}) \simeq \mathcal{S}'_A \cup F_{\mathrm{cut}}$$

是可缩的，由此完成命题的证明。 □

定理 4.2 现在由 等式 (5)、引理 4.6、命题 5.1和 Quillen纤维定理 .

6. $\mathrm{FCD}^{\mathrm{g}}$ 的连通性

和之前一样，我们固定 $n \geq 1$，记 $M = M_n$,1, $\mathcal{S} = \mathcal{S}(M)$ 和 $\mathrm{FCD}^{\mathrm{g}} = \mathrm{FCD}^{\mathrm{g}}_n$。现在我们不再沿用这一约定：由 σ 表示的球面系满足 $\pi_1(\sigma) \neq 1$。本节将证明 $\mathrm{FCD}^{\mathrm{g}}$ 是 $(2n-4)$-连通的，由此可推出定理 1.1。我们将沿用 Hatcher–Vogtmann[HV98a 命题 6.2]，的证明策略，并以 [AM24 定理 4.6] 取代 [HV98a 定理 3.1]。

回忆一下， $\Gamma(\sigma)$表示球面系统 $\sigma \in \mathcal{S}$的对偶图，其中每个顶点 $x \in \Gamma(\sigma)$对应于 $M - \sigma$ 的一个连通分支（见第 2.3 节）。在本节中，我们将 $\Gamma(\sigma)$ 视为顶点带标签的图，并将顶点 x 标记为 $g(x)$，即该连通分支的基本群的秩。和之前一样，我们用 $M_0(\sigma)$表示 $\Gamma(\sigma)$ 中对应于基点分支的顶点。我们有

$$\sigma \in \mathrm{FCD}^{\mathrm{g}} \text{ if and only if } g(M_0(\sigma)) > 0 \text{ or } M_0(\sigma) \text{ is a cut vertex of } \Gamma(\sigma). \tag{9}$$

接下来，我们回顾度的概念，该概念来自 [AM24]，它将给出 $\mathcal{S}$的一个滤过。

定义 6.1。单形 $\sigma \in \mathcal{S}$ 的度定义为

$$\deg(\sigma) = \sum_{x \neq M_0(\sigma)} v(x) - 2 + 2g(x),$$

其中求和遍及 $\Gamma(\sigma)$ 的所有顶点 x； $v(x)$ 表示一个顶点的价数， $g(x)$ 表示其标签。我们将 $\mathcal{S}^{\leq l}$ 定义为由满足 $\deg(\sigma) \leq l$ 的球面系统 σ 构成的 $\mathcal{S}$ 的子偏序集。

以下是 [AM24 中证明的“度定理”，定理 3。5]。

定理 6.2. $\mathcal{S}^{\leq l}$ 是$(n+l-2)$-连通的。

定义 6.3. 设 σ 是 $\mathcal{S}$的一个单形。 σ 的支柱 是 σ 的一个（可能为空的）面，由与 $M_0(\sigma)$相邻的 $\Gamma(\sigma)$的非环边所对应的球面组成。若一个单形等于其支柱，我们就称它为支柱。

以下结论由 [AM24 的推论 2 得出。3]。

引理 6.4. 如果 σ 和 τ 具有相同的支柱，那么$\deg(\sigma) = \deg(\tau)$。

引理 6 .5. 设 σ 和 τ 是 $\mathcal{S}$ 的单形。若它们具有相同的支柱，且 $\sigma \in \mathrm{FCD}^{\mathrm{g}}$，则 $\tau \in \mathrm{FCD}^{\mathrm{g}}$.

证明。 由于 σ 和 τ 具有相同的支柱，图 $\Gamma(\sigma)$ 可由 $\Gamma(\tau)$ 通过依次进行以下两种操作及其逆操作得到：

- 收缩任意顶点 v 处的一个环，并将该顶点的标签加一；
- 收缩一条端点不同于基点顶点 $M_0(\sigma)$ 且彼此不同的边 $v \neq w$ ，得到一个标签为 $g(v) + g(w)$ 的新顶点。

我们假设 $\Gamma(\tau)$ 由 $\Gamma(\sigma)$ 通过其中一种操作得到，并检验 σ 是$\mathrm{FCD}^{\mathrm{g}}$ 的单形当且仅当 τ 是。为此，我们使用 公式（9）。

首先考虑通过收缩一个环将 $\Gamma(\sigma)$ 变为 $\Gamma(\tau)$ 的情形。若该环不与基点顶点 $M_0(\sigma)$ 相邻，则显然 $\sigma \in \mathrm{FCD}^{\mathrm{g}}$ 当且仅当 $\tau \in \mathrm{FCD}^{\mathrm{g}}$。若该环与 $M_0(\sigma)$ 相邻，则 $\sigma \in \mathrm{FCD}^{\mathrm{g}}$，因为 $M_0(\sigma)$ 是一个割点（有一个环与之相邻）；同时 $\tau \in \mathrm{FCD}^{\mathrm{g}}$，因为 $g(M_0(\tau)) = g(M_0(\sigma)) + 1 > 0$。

现在假设 $\Gamma(\tau)$ 是通过收缩一条不与 $M_0(\sigma)$ 相交的边，从 $\Gamma(\sigma)$ 得到的。那么 $g(M_0(\sigma)) = g(M_0(\tau))$，且 $|\Gamma(\tau)| \setminus \{M_0(\tau)\}$ 是通过收缩一条边从 $|\Gamma(\sigma)| \setminus \{M_0(\sigma)\}$ 得到的。这不会改变路径分支的集合，因此 $M_0(\sigma)$ 是 $\Gamma(\sigma)$ 中的割点，当且仅当 $M_0(\tau)$ 是 $\Gamma(\tau)$ 中的割点。利用公式（9），这表明 $\sigma \in \mathrm{FCD}^{\mathrm{g}}$ 当且仅当 $\tau \in \mathrm{FCD}^{\mathrm{g}}$。□

命题 6.6。 若 σ 是 $\mathrm{FCD}^{\mathrm{g}}$ 中的一个球面系统，且 $\tau \subseteq \sigma$，则 τ 属于 $\mathrm{FCD}^{\mathrm{g}}$。换言之，$\mathrm{FCD}^{\mathrm{g}}$ 是一个单纯复形。

证明。 首先假设 $g(M_0(\sigma)) > 0$。 引理 4.3 蕴含

$$g(M_0(\tau)) \geq g(M_0(\sigma)) > 0,$$

因此 $\tau \in \mathrm{FCD}^{\mathrm{g}}$。

现在假设 $M_0(\sigma)$ 是一个切割。因此， $\Gamma(\sigma)$ 分解为一个楔和

$$\Gamma(\sigma) = \bigvee_{i=1}^{k} \Gamma_k$$

一族非平凡连通基图 Γ_1、……、Γ_k。只需考虑 τ 是从中移除一个球面后的情形。注意， $\Gamma(\tau)$ 是将 $\Gamma(\sigma)$ 中的一条边压缩后得到的，我们将这条边称为 e。假设 e 是 Γ_j 的一条边。于是

$$\Gamma(\tau) = \bigvee_{i=1}^{k} \Gamma_i'$$

其中 $\Gamma_i' = \Gamma_i$ 是由 $i \neq j$ 和 Γ_j' 通过收缩 e 从 Γ_j 得到的。如果切割 τ 中的 M_0，那么 $\tau \in \mathrm{FCD}^{\mathrm{g}}$，因此不妨假设情况并非如此。由于 τ 中的 M_0 未被切割，我们必有 $k = 2$，且 Γ_j' 必须是单个顶点。因此， e 是 Γ_j 中唯一的边，而 e 是 M_0（σ）上的一个环。这意味着

$$g(M_0(\tau)) = 1$$

因此 $\tau \in \mathrm{FCD}^{\mathrm{g}}$。 □

注意到，Aygun 和第二作者 [AM24，推论 33]验证了 $\mathcal{S}^{\leq l}$ 是一个子复形$\mathcal{S}$。以下内容与 Hatcher–Vogtmann [HV98a，引理 5.2 (iii)]密切相关。注意，他们的球系复形不包含分离球面，因此我们不能直接引用他们的结果。

命题 6.7. 我们有单纯复形 $\mathcal{S}^{\leq n-2} \subseteq \mathrm{FCD}^{\mathrm{g}}$ 的包含关系。

证明。令 $\sigma \in \mathcal{S}$ 的度为 $\sigma \leq n-2$，并令 τ 为 σ 的支柱。由引理 6.4 可得，τ 的度为 $\leq n-2$。由引理 6.5，只需证明 τ 属于 $\mathrm{FCD}^{\mathrm{g}}$。假设情况并非如此，即$g(M_0(\tau)) = 0$，且 $M_0(\tau)$ 不是 $\Gamma(\tau)$ 的割点。由于 $M_0(\tau)$ 不是割点，且 τ 是支柱，图 $\Gamma(\tau)$ 必定恰有两个顶点，并且每条边都连接 $M_0(\tau)$ 与另一个顶点 x。特别地，我们有

$$\deg(\tau) = v(x) + 2g(x) - 2 = e + 2g(x) - 2,$$

where e 是 $\Gamma(\tau)$ 的边数。由于 $g(M_0(\tau)) = 0$，且 $\pi_1(M)$ 的秩为 n，我们还可得

$$n = e + g(x) - 1.$$

结合这些等式，我们得到

$$\deg(\tau) = n + g(x) - 1.$$

由于后者大于或等于 $n-1$，我们得到矛盾。因此， $g(M_0(\tau)) = 0$或 $M_0(\tau)$ 是一个割点，所以 $\tau \in \mathrm{FCD}^{\mathrm{g}}$。□

定理 6.8. $\mathrm{FCD}^{\mathrm{g}}$ 是 $(2n-4)$-连通。

证明。设 $l \leq 2n-4$，并考虑一个映射 $f\colon S^l \to \mathrm{FCD}^{\mathrm{g}}$，它将一个 l-球面映入 $\mathrm{FCD}^{\mathrm{g}}$。我们的目标是证明 f 是零伦的。根据单纯逼近，我们可以假设，相对于 S^l 上的某种组合单纯复形结构， f 是单纯的，我们将该结构记为 X。我们将证明，f 同伦于一个经过 $\mathcal{S}^{\leq n-2} \subset \mathrm{FCD}^{\mathrm{g}}$的映射。由于 $\mathcal{S}^{\leq n-2}$ 是 $(2n-4)$-连通的，这就证明了 f 是零伦的。

令 $L = \max_{\Sigma \in X} \deg(f(\Sigma))$，并假设 $L > n-2$。令 Σ 为 X的一个最大维单形，其中 $f(\Sigma)$ 是支柱，且 $\deg(f(\Sigma)) = L$。令 M_0表示 $M - f(\Sigma)$ 的基点分支，并令$M_1, \ldots, M_k$ 表示其他连通分支。令 $Y(M_0)$ 表示 $\mathcal{S}(M_0)$ 中由非分离球面系统构成的子复形。 [AM24, Theorem 3.5] 的证明验证了链接 $\mathrm{lk}_X(\Sigma)$ 映射到

$$Y(M_0) * \mathcal{S}(M_1) * \cdots * \mathcal{S}(M_k).$$

此外，在 [AM24，引理 3.3] 的证明中指出，这个连接是$(n + L - \dim(f(\Sigma)) - 3)$ $>(2n - 5 - \dim(\Sigma))$-连通的。由于 $\mathrm{lk}_X(\Sigma)$ 是一个 $(2n - 5 - \dim(\Sigma))$-球面，这意味着它的像是零伦的。因此，在$\mathrm{Cone}(\mathrm{lk}_X(\Sigma))$ 上存在一种组合单纯复形结构以及一个延拓

$$h : \mathrm{Cone}(\mathrm{lk}_X(\Sigma)) \to Y(M_0) * \mathcal{S}(M_1) * \cdots * \mathcal{S}(M_k).$$

令 Z 为 X 上通过将 $\mathrm{st}(\Sigma)$ 替换为……而得到的 S^l 的单纯复形结构

$$\partial\Sigma * \mathrm{Cone}(\mathrm{lk}_X(\Sigma))$$

并令 $g\colon Z \to \mathcal{S}(M)$ 为如下映射：在 Z 中同时也是 X 的顶点上取值为 f，在新顶点上取值为 h。

我们声称， g 映射到 $\mathrm{FCD}^{\mathrm{g}}$，并且 f 与 g 作为到 $\mathrm{FCD}^{\mathrm{g}}$ 的映射彼此同伦。我们可以通过验证：如果 θ 是一个单形

$$Y(M_0) * \mathcal{S}(M_1) * \cdots * \mathcal{S}(M_k),$$

那么 $\theta * f(\Sigma)$ 是一个单形，属于 $\mathrm{FCD}^{\mathrm{g}}$。根据 引理 6.5，这是因为 $f(\Sigma)$ 和 $\theta * f(\Sigma)$ 具有相同的支柱。

AM24 [AM24，定理 35] 意味着 Z 比 L 少一个映射到度为 X 的支柱上的最大维单形。注意，引理 6.4 意味着，如果映射到 $\mathcal{S}$ 的像包含一个度为 L 的单形，那么它也包含一个度为 L 的支柱。因此，反复进行这一过程，就能通过 $\mathrm{FCD}^{\mathrm{g}}$ 将映射同伦至 $\mathcal{S}^{\leq n-2} \subseteq \mathrm{FCD}^{\mathrm{g}}$ 上的一个映射。如前所述，复形 $\mathcal{S}^{\leq n-2}$ 是 $(2n-4)$-连通的，因此我们得出 f 是零伦的。□

现在我们证明定理 1.1，它断言 $\mathrm{CB} \simeq \bigvee S^{2n-3}$。

定理 *1.1* 的证明。 由于 $\mathrm{CB} \simeq \mathrm{PD}$ (定理 2.3) 且 PD 是 $(2n-3)$ 维的，只需证明 CB 是 $(2n-4)$-连通的。由于 $\mathrm{CB} \simeq \mathrm{FCD}^{\mathrm{g}}$ (见公式 (1))，且 $\mathrm{FCD}^{\mathrm{g}}$ 是 $(2n-4)$-连通的（定理 6.8），结论得证。□

参考文献

[AMP24] Avner Ash、Jeremy Miller 和 Peter Patzt。霍普夫代数、斯坦伯格模，以及 $SL_n(\mathbb{Z})$ 和 $GL_n(\mathbb{Z})$ 的不稳定上同调。预印本。2024年。doi: 10.48550/arXiv.2404.13776. [AM24] Juliet Aygun 和 Jeremy Miller。“Auter 空间单纯闭包的度定理”。载于：《同调、同伦与应用》26.1（2024），第189–199页。doi: 10.4310/HHA.2024.v26.n1.a13. [BF00] Mladen Bestvina 和 Mark Feighn。“Out(F_n) 无穷远处的拓扑”。载于：《数学发明》140.3（2000），第651–692页。doi: 10.1007/s002220000068. [Bro+24] F. Brown、M. Chan、S. Galatius 和 S. Payne。 $\mathcal{A}_g$、$\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ 和 $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$ 上同调中的霍普夫代数。预印本。https://arxiv.org/abs/2405.11528. 2024年。[Brü20] Benjamin Brück。“建筑与自由因子复形之间”。博士论文。比勒费尔德大学，2020年。网址：https://pub.uni-bielefeld.de/record/2940020. [BG20] Benjamin Brück 和 Radhika Gupta。“自由群自由因子复形的同伦型”。载于：《伦敦数学会会刊》第三辑 121.6（2020），第1737–1765页。doi: 10.1112/plms.12381. [Brü+24] Benjamin Brück、Jeremy Miller、Peter Patzt、Robin J. Sroka 和 Jennifer C. H. Wilson。“关于 $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$ 的余维二上同调”。载于：《数学进展》451（2024），论文编号109795。doi: 10.1016/j.aim.2024.109795. [BP25] Benjamin Brück 和 Kevin I. Piterman。“可自由分解群的部分基复形的连通性”。载于：《伦敦数学会通报》（2025）。doi: 10.1112/blms.70197. [BPW24] Benjamin Brück、Kevin I. Piterman 和 Volkmar Welker。“公共基复形与部分分解偏序集”。载于：《国际数学研究通知》。IMRN 18（2024），第12746–12760页。doi: 10.1093/imrn/rnae177.[BSV18] Kai-Uwe Bux、Peter Smillie 和 Karen Vogtmann。“关于 Outer 空间的边界化”。载于：《伦敦数学会杂志》第二辑 98.1（2018），第12–34页。doi: 10.1112/jlms.12124. [CKZ25] Jonathan Campbell、Alexander Kupers 和 Inna Zakharevich。直和K理论上的稳定秩过滤。预印本。2025年。doi: 10.48550/arXiv.2501.01609.[CRR25] Steven Charlton、Danylo Radchenko 和 Daniil Rudenko。多重多对数与斯坦伯格模。预印本。2025年。doi: 10.48550/arXiv.2505.02202.[CFP19] T. Church、B. Farb 和 A. Putman。“斯坦伯格模的整性与 $\mathrm{SL}_n\mathcal{O}_K$ 的最高维上同调”。载于：《美国数学杂志》141.5（2019），第1375–1419页。doi: 10.1353/ajm.2019.0036. [CP17] T. Church 和 A. Putman。“$\mathrm{SL}_n\mathbb{Z}$ 的余维一上同调”。载于：《几何与拓扑》21.2（2017），第999–1032页。doi: 10.2140/gt.2017.21.999. [CFP14] Thomas Church、Benson Farb 和 Andrew Putman。“关于 $\mathrm{SL}_n\mathbb{Z}$、映射类群和 Aut(F_n) 不稳定上同调的稳定性猜想”。载于：《代数拓扑：应用与新方向》。第620卷。《当代数学》。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛，2014年，第55–70页。doi: 10.1090/conm/620/12366.[CV03] James Conant 和 Karen Vogtmann。“关于 Kontsevich 定理”。载于：Algebr. Geom. Topol. 3（2003），第1167–1224页。doi: 10.2140/agt.2003.3.1167. [Dut+] Mathieu Dutour–Sikirić、Philippe Elbaz-Vincent、Alexander Kupers 和 Jacques Martinet。“高维 Voronoi 复形、 $GL_N(Z)$ 的上同调以及 $N \geq 8$ 和 $K_8(Z)$ 的平凡性 ”。载于：预印本（）。doi: https://arxiv.org/abs/1910.11598. [GP09] Siddhartha Gadgil 和 Suhas Pandit。“自由群的代数与几何交数”。载于：《拓扑学应用》156.9（2009），第1615–1619页。doi: 10.1016/j.topol.2008.12.039. [Gal11] Søren Galatius。“自由群自同构群的稳定同调”。载于：《数学年刊》（第二辑）173.2（2011），第705–768页。doi: 10.4007/annals.2011.173.2.3.[GKR25] Søren Galatius、Alexander Kupers 和 Oscar Randal-Williams。“E∞-胞腔与无限域上的一般线性群”。载于：Duke Math. J. 174.14（2025），第2927–3046页。doi: 10.1215/00127094-2025-0005. [HM14] Michael Handel 和 Lee Mosher。相对自由分裂与自由因子复形 I：双曲性。2014年7月13日 10 48550 1407 3508。doi: . /arXiv. . .[HHS09] Phil Hanlon、Patricia Hersh 和 John Shareshian。$\mathrm{GL}_n(q)$ 类比于分划格。2009年。网址：https://pages.uoregon.edu/plhersh/hhs09.pdf. [Har86] John L. Harer。“可定向曲面的映射类群的虚上同调维数”。载于：《数学发明》84.1（1986），第157–176页。doi: 10.1007/BF01388737. [Hat95] Allen Hatcher。“自由群自同构群的同调稳定性”。载于：Comment. Math. Helv. 70.1（1995），第39–62页。doi: 10.1007/BF02565999. [Hat02] Allen Hatcher。《代数拓扑》。剑桥大学出版社，剑桥，2002年，第xii+544页。

[HV98a] Allen Hatcher 和 Karen Vogtmann。“图的塞尔夫理论”。载于：《伦敦数学会杂志》（第二辑）58.3（1998），第633–655页。doi: 10.1112/S0024610798006644.[HV98b] Allen Hatcher 和 Karen Vogtmann。“自由群自由因子复形”。载于：《牛津数学季刊》（第二辑）49.196（1998），第459–468页。doi: 10.1093/qjmath/49.196.459. [HV22] Allen Hatcher 和 Karen Vogtmann。自由群自由因子复形。预印本。2022年。doi: 10. 48550/arXiv.2203.15602.[Hep20] Richard Hepworth。“稳定范围的边缘”。载于：《数学年刊》377.1-2（2020），第123–181页。doi: 10. 1007/s00208-020-01955-0.[Him+22] Zachary Himes、Jeremy Miller、Sam Nariman 和 Andrew Putman。“自由群自同构群的自由因子复形与对偶化模”。载于：《国际数学研究通知》2023.22（2022年12月），第19020–19068页。doi: 10.1093/imrn/rnac330. [Kon93] Maxim Kontsevich。“形式（非）交换辛几何”。载于：《Gelfand数学研讨会，1990–1992》。Israel M. Gelfand、Lawrence Corwin 和 James Lepowsky 编。马萨诸塞州波士顿：Birkhäuser Boston，1993年，第173–187页。doi: 10.1007/978-1-4612-0345-2_11. [Lau74] François Laudenbach。《三维拓扑：同伦与同痕》。第12卷。《Astérisque》。附英文摘要和目录。法国数学会，巴黎，1974年，第i+152页。[MPP] Jeremy Miller、Peter Patzt 和 Andrew Putman。斯坦伯格表示的同调消失 II：约化群与整系数猜想。预印本。doi: 10.48550/arXiv.2509.01559.[MPW25] Jeremy Miller、Peter Patzt 和 Jennifer C. H. Wilson。“代数K理论与斯坦伯格模的秩过滤”。载于：《欧洲数学会杂志》在线先行发表（2025），第35页。doi: 10.4171/jems/1628. [PSW25] Kevin Ivan Piterman、John Shareshian 和 Volkmar Welker。球形建筑中的分解偏序集。2025年。doi: 10.48550/arXiv.2511.22531.[PW25] Kevin Ivan Piterman 和 Volkmar Welker。“由幺半范畴中对象的分解产生的偏序集”。载于：《数学论坛：西格玛》13（2025），论文编号e123，共51页。doi: 10.1017/fms.2025.10060. [Qui78] Daniel Quillen。“群的非平凡 p-子群偏序集的同伦性质”。载于：《数学进展》28.2（1978），第101–128页。doi: 10.1016/0001-8708(78)90058-0. [RW17] Oscar Randal-Williams 和 Nathalie Wahl。“自同构群的同调稳定性”。载于：《数学进展》318（2017），第534–626页。doi: 10.1016/j.aim.2017.07.022. [Rog92] John Rognes。“代数K理论中的谱层级的秩过滤”。载于：《拓扑学》31.4（1992），第813–845页。doi: https://doi.org/10.1016/0040-9383(92)90012-7. [Sad20] Iván Sadofschi Costa。“自由群的部分基复形”。载于：《伦敦数学会通报》52.1（2020），第109–120页。doi: 10.1112/blms.12311.[Vog24] Karen Vogtmann。紧化外空间的边界。即将发表于《塔塔基础研究院随机性、几何与动力学国际研讨会论文集》，2024年1月1日至12日。2024年。doi: 10.48550/ARXIV.2404. 11371.[WW25] Richard D. Wade 和 Thomas A. Wasserman。“科恩–麦考利复形、对偶群与 Out(F_N) 的对偶化模”。载于：《国际数学研究通知》。IMRN 6（2025）。doi: 10.1093/imrn/ rnaf059.[Whi36a] J. H. C. Whitehead。“自由群中的某些元素集”。载于：《伦敦数学会会刊》第二辑 41.1（1936），第48–56页。doi: 10.1112/plms/s2-41.1.48. [Whi36b] J. H. C. Whitehead。“自由群中等价元素集”。载于：《数学年刊》第二辑 37（1936），第782–800页。doi: 10.2307/1968618. [Wil15] Thomas Willwacher。“M. Kontsevich的图复形与Grothendieck-Teichmüller 李代数”。载于：《数学发明》200.3（2015），第671–760页。doi: 10.1007/s00222-014-0528-x.

明斯特大学 ，数学逻辑与基础研究研究所 ，48149 明斯特 ，德国
电子邮件地址：benjamin.brueck@uni-muenster.de

普渡大学 ，数学系 ，47907 西拉斐特 ，美国
电子邮件地址：jeremykmiller@purdue.edu

布鲁塞尔自由大学，数学与数据科学系，1050 布鲁塞尔，比利时电子邮件地址：kevin.piterman@vub.be