arXiv:2512.19132v1 [math.QA] 22 Dec 2025

Kontsevich 不变量与Grothendieck–Teichmüller 群对2分支弦环的作用

HISATOSHI KODANI 和 YUTA NOZAKI

Abstract. 链环的 Kontsevich 不变量与结合子的选择无关，而对于缠结，通常情况并非如此。本文聚焦于 2 分支弦环，研究 Kontsevich 不变量在多大程度上取决于结合子的选择。作为应用，我们证明 Grothendieck–Teichm¨uller 群的幺幂部分作用于原代数二分量弦环代数是非平凡的，这为 Furusho 提出的一个问题提供了部分答案。

Contents

1. 引言 1 2. 预备知识 5 3. Grothendieck–Teichm¨uller 群对原代数弦环的作用 11 4. 代数 $\mathcal{A}(\downarrow\downarrow)$ 与定理 1.2 的证明 17 5. 代数 $\mathcal{A}(\downarrow\downarrow)$ 的李代数权系 22 附录 A. 关于 $\mathfrak{grt}_1$ 和 Drinfeld结合子的计算结果 30 参考文献 31

1. Introduction

Kontsevich 不变量是 q缠结的拓扑不变量，其取值于 Jacobi 图空间。其中， q缠结是指端点配有非结合字的缠结。这些不变量最初由 Kontsevich [21] 借助 Chen迭代积分引入，随后 Le 和 Murakami [23] 通过结合子给出了这些不变量的另一种组合构造。另见 [3], [22], [28], 和 [6]。一般来说，Kontsevich 不变量取决于结合子的选择，我们用Z_Φ 表示由结合子 Φ定义的 Kontsevich 不变量。

2020 *Mathematics Subject Classification.* 主分类号 57K16、14G32，次分类号 57K10、17B01。*Key words and phrases.* Kontsevich 不变量、结合子、Grothendieck–Teichm¨uller 群、原代数弦环。

现在考虑如图1所示的 n分支弦环 [16] ，它们也称为$\Sigma_{0,\ n+1}$上的同调圆柱；Σ_0是一个亏格0且有 $n+1$ 个边界分支的曲面。在这种情况下，已知当 $n=1$时，Kontsevich 不变量与结合子的选择无关；而当 $n\geq 3$时，它们则取决于结合子的选择。前一种情况本质上与纽结的情况相同。对于后一种情况，如例 2.6所示，我们可以很容易地观察到，存在一个 q三股 T 辫 $Z_{\Phi_{\mathrm{KZ}}}(T)_4 \neq Z_{\Phi_{\mathbb{Q}}^{\mathrm{even}}}(T)_4$。这里， $Z_{\Phi_{\mathrm{KZ}}}$ 和 $Z_{\Phi_{\mathbb{Q}}^{\mathrm{even}}}$分别表示与 Knizhnik–Zamolodchikov结合子 Φ_{KZ} 和偶有理水平结合子 $\Phi_{\mathbb{Q}}^{\mathrm{even}}$（见第 2.3 节）相关的 Kontsevich 不变量。此外，下标 4 表示它们的 4次部分。

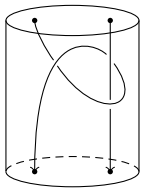


FIGURE 1. 一个 2 分支弦环的示例。

然而，当 $n=2$ 时，这种依赖关系颇为微妙，似乎尚未得到充分理解（参见 [15, 问题 3.17]）。正如引言后半部分所述，这种微妙之处与 Grothendieck–Teichm¨uller 群在两股原代数纯辫上的作用和其在原代数 2 分量弦环上的作用之间的差异密切相关（见第 3.1 节）。

下述命题指出，对于 2 分支弦环，Kontsevich 不变量在次数 6 以内不依赖于结合子的选择。

命题 1.1。设 T 是一个2 分支弦环，且 Φ、 Φ' 是结合子。那么， $Z_{\Phi}(T)_{\leq 6} = Z_{\Phi'}(T)_{\leq 6}$。

特别地， $Z_{\Phi_{\mathrm{KZ}}}(T)_{\leq 6} = Z_{\Phi_{\mathbb{Q}}^{\mathrm{even}}}(T)_{\leq 6}$。关于更高次数的项，我们得到以下主要结果。设 $\mathbb{K}$ 是一个特征为0的域。

定理 1.2. 存在满足以下条件的 2 分量弦环 $T_n\ (n\geq 2)$ ：对于任意一个系数属于 $\mathbb{K}$ 的结合子 Φ ，存在一个系数属于 $\mathbb{K}$ 的结合子 Φ' ，使得

$$Z_{\Phi}(T_n)_{\leq 2n+3} = Z_{\Phi'}(T_n)_{\leq 2n+3} \ and\ Z_{\Phi}(T_n)_{2n+4} \neq Z_{\Phi'}(T_n)_{2n+4}.$$

此外，如果 Φ 是水平的，那么 Φ' 也可以选为水平的。

这里，水平结合子是由 Drinfeld结合子得到的结合子；Drinfeld结合子是以 [9] 中引入的两个变量表示的非交换形式幂级数（见第 2.3 节）。命题 1.1 和定理 1.2 的证明将分别在第 4.1 节和第 4.2 节中给出。

备注 1.3。 例如，令 $\mathbb{K}=\mathbb{C}$，定理 1.2 使我们能够比较与偶有理水平结合子和 KZ 结合子相关的 Kontsevich 不变量。

如上所述，2 分支弦环的 Kontsevich 不变量取决于结合子 Φ 的选择。尽管如此，将 Kontsevich 不变量与权系复合，可以得到无穷多个与 Φ 无关的不变量。这里，权系是一种借助李代数从 Jacobi 图中得到取值的方法（见第 2.2 节）。

定理 1.4. *存在无穷多个定义在两股上的权系 W，使得复合 $W\circ Z_\Phi$ 不取决于结合子 Φ 的选择。*

更精确的表述见定理 5.11。值得强调的是，上述 $W\circ Z_\Phi$ 不仅是带有 q 结构的 2 分支弦环的不变量，也是 2 分支弦环本身的不变量，因为它们的 q 结构是唯一确定的。

这些结果也应用于 Furusho 在 [15] 中研究的原代数弦环上的（动机）伽罗瓦作用，具体如下。令 GT (𝕂) 和 GRT (𝕂) 分别为原代数 Grothendieck–Teichmüller 群和分次 Grothendieck–Teichmüller 群。由于 GT (𝕂) 和 GRT (𝕂) 在水平结合子的集合上自由且传递地作用，幺幂部分 $\mathrm{GT}_1(\mathbb{K})$ 和 $\mathrm{GRT}\,1(\mathbb{K})$ 也通过替换所选的水平结合子，作用于带有水平结合子 Φ 的 Kontsevich 不变量 Z_Φ。正如 Furusho 明确指出的，$\mathrm{GT}_1(\mathbb{K})$ 和 $\mathrm{GRT}\,1(\mathbb{K})$ 在 Z_Φ 上的这类作用，与结合子集合上的 (GRT (𝕂), GT (𝕂)) 双挠子结构相容。可以用典范方式定义 GT (𝕂) 在原代数缠结上的作用，以及 GRT (𝕂) 在相应 Jacobi 图上的作用。这里回顾一个事实：混合 Tate 动机 Spec(ℤ) 的动机伽罗瓦群嵌入 GT (𝕂)，这是由 Brown 的结果 [5] 推得的。因此，通过 GT (𝕂) 的作用，原代数缠结被赋予了混合 Tate 动机 Spec(ℤ) 的结构。

Furusho 进一步研究了缠结为 n 分支弦环的情形，并证明 $GT_1(\mathbb{K})$ 对原代数 n 分支弦环的作用由内共轭给出。因此可以看出，$GT_1(\mathbb{K})$ 对原代数 n 分支弦环的作用在 $n\geq 3$ 时是忠实的，而在 $n=1$ 时是平凡的。对于 $n=2$ 的情形，$GT_1(\mathbb{K})$ 对原代数 2 分支弦环的作用仍不清楚，不过我们知道，它对两股上的原代数纯辫的作用是平凡的。

作为定理 1.2 的一个应用，我们可以证明第 3.3 节中的定理 1.5，它对 [15, 问题 3.17] 作出了部分回答。该问题探讨 $GT_1(\mathbb{K})$ 的作用是否忠实。

定理 1.5。 *$GT_1(\mathbb{K})$ 的幺幂部分对 $GT(\mathbb{K})$ 中原代数2分支弦环的作用是非平凡的。*

定理 1.5 告诉我们，$GT_1(\mathbb{K})$ 对原代数 2 分支弦环的作用，与其对原代数 1 分支弦环（等价地说，原代数结）的作用截然不同。已知后者的作用是平凡的，因此原代数结可分解为 over $\mathbb{Z}$ 上（无穷多个）纯 Tate 动机的直和。关于 [15,问题 3.17] 的当前情况总结于表 1 中。

	$n=1$	$n=2$	$n\geq 3$
核 $\mathrm{Ker}\,\rho$	核 $\rho = GT_1(\mathbb{K})$ 核 ([15])	核 $\rho \subsetneq GT_1(\mathbb{K})$ (定理 1.5)	$=\{e\}$ ([15])
忠实性	远非忠实	?	忠实

TABLE 1. 原代数 n 分量弦环代数上$GT(\mathbb{K})$-作用的核与忠实性。

ρ

由定理 1.5，我们还可以预期，猜想中的有限生成 Grothendieck–Teichmuller 群 $\widehat{\ }$ 对有限生成二分量弦环的作用 $\widehat{\ }$ GT 不会经由 $\mathbb{Z}^\times$ 分解（参见 [14, 注 2.44] ，其中提到了有限生成结上的一个类似问题 $\widehat{\ }$ ）。相比之下， GT 对两股有限生成纯辫群的作用已知可以经由 $\widehat{\ }\mathbb{Z}^\times$ 分解（参见 [18], [14]）。近期，从运算子观点出发的相关研究也已出现（[29], [31]）。

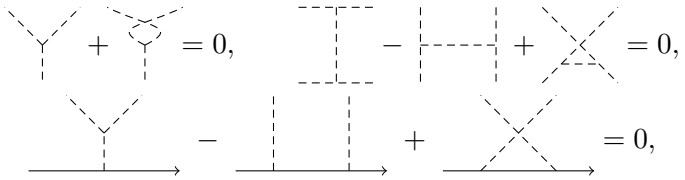
我们以一条关于 Furusho 提出的原始问题（[15, 问题 3.17]）的评论作为本引言的结尾。该问题可以改述如下：对于任意两个不同的水平结合子 Φ 和 Φ'，作为具有唯一 q结构的原代数 2-弦环上的映射， $Z_\Phi \neq Z_{\Phi'}$是否成立？这个问题仍未解决；然而，作为我们工作的一个副产品，我们发现该问题的一个推广版本并不成立，原因是第 4.2 节中证明了以下命题。

命题 1.6。 存在两个不同的结合子 Φ 和 Φ' ，其中至少有一个不是水平的，并且对于任意2分量弦链接 T， $Z_\Phi(T) = Z_{\Phi'}(T)$ 成立。

致谢。 作者感谢 Dror Bar-Natan 就命题 4.4 提出的建议，也感谢 Katsumi Ishikawa 对引理 4.1 的帮助。作者感谢 Hidekazu Furusho 仔细审阅稿件，并感谢 Adrien Brochier、Martin Gonzalez、Masanobu Kaneko、Yusuke Kuno、Masanori Morishita、Hiroaki Nakamura、Masatoshi Sato 和 Yuji Terashima 的宝贵讨论。本研究部分获得 JSPS KAKENHI 项目（编号 JP23K12974、JP25K06954）以及九州大学产业数学研究所共同利用・共同研究中心的资助。（FY2025 Workshop(II)“拓扑与计算机 2025”（2025a038）。）

2. Preliminaries

2.1. Jacobi 图。 设 X 是一个（可能不连通的）定向紧1-流形。基于 X 的 *Jacobi* 图 是一个（可能为空的）单三价图，其单价顶点附着于 X ，三价顶点带有循环次序。按照 [27]，我们用虚线表示单三价图，用实线表示 X 。在 Jacobi 图的图示中，假定每个三价顶点的循环次序均为逆时针方向。对于由基于 X 的 Jacobi 图生成、并满足 AS、IHX 和 STU 关系的$\mathbb{Q}$-向量空间，我们记作 $\mathcal{A}(X)$:



其中每个关系中的其余图都相同。请注意，我们讨论的是抽象图，而看起来像四价顶点的部分并非真正的顶点。Jacobi 图 J 的次数 $\deg J$ 定义为 J 的顶点数的一半。令 $\mathcal{A}_d(X)$ 表示由次数为 d 的 Jacobi 图生成的 $\mathcal{A}(X)$ 的子空间。完备化 $\widehat{\lim}_{\leftarrow d}\mathcal{A}(X)/\mathcal{A}_{\geq d}(X)$ 记作 $\widehat{\mathcal{A}}(X)$。对于 X 与 X' 的某些端点之间一个与其定向相容的双射 f，有一个线性映射 $\mathcal{A}(X)\times\mathcal{A}(X')\to\mathcal{A}(X\cup_f X')$。$(J,J')$ 的像记作 $J\cdot J'$。设 ϵ 是由字母 $+$ 和 $-$ 组成的一个词，令 $\downarrow^\epsilon$ 表示由 ϵ 中各字母索引的区间的不交并，例如 $\downarrow^{+-+}=\downarrow\uparrow\downarrow$。当 $\epsilon=+\,+\cdots+$ 的长度为 n 时，我们简记为 $\downarrow^{\otimes n}$。在 $X=X'=\downarrow^\epsilon$ 的情形下，将 X 堆叠在 X' 上，上述映射使 $\mathcal{A}(\downarrow^\epsilon)$ 和 $\mathcal{A}(\downarrow^\epsilon)$ 成为代数。请注意，$\downarrow^\epsilon$ 上的空 Jacobi 图是单位元 1。例如，我们将在第 4.1 节讨论 $\mathcal{A}(\downarrow\downarrow)$ 的代数结构。我们用 $J\otimes J'$ 表示 Jacobi 图 J 和 J' 的不交并。对于一个特征为 0 的域 $\mathbb{K}$ ，令 $\mathcal{A}(X)_{\mathbb{K}}=\mathcal{A}(X)\otimes_{\mathbb{Q}}\mathbb{K}$，且 $\widehat{\mathcal{A}}(X)_{\mathbb{K}}=\widehat{\mathcal{A}}(X)\,\hat{\otimes}_{\mathbb{Q}}\mathbb{K}$。

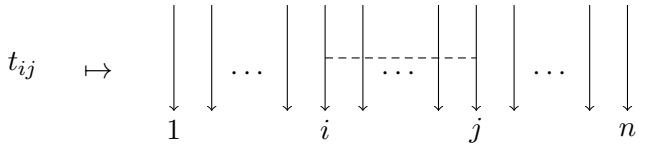
我们来回顾一下 Drinfeld–Kohno 李代数与 Jacobi 图代数 $\mathcal{A}(\downarrow^{\otimes n})$ 之间的关系。对于 $n\geq 2$，*Drinfeld–Kohno* 李代数 $\mathfrak{t}_n$ 定义为由次数为 1 的 t_{ij}($i\neq j\in\{1,\dots,n\}$) 在 $\mathbb{Q}$ 上生成、满足以下关系的（完备）分次李代数:

$$t_{ij}=t_{ji},\quad [t_{ij},t_{kl}]=0\,(\#\{i,j,k,l\}=4),\quad [t_{ij},t_{ik}+t_{jk}]=0\,(\#\{i,j,k\}=3).$$

我们将 $\mathfrak{t}_n$ 的泛包络代数记为 $U(\mathfrak{t}_n)$。于是，有如下单射代数同态

$$\iota\colon U(\mathfrak{t}_n)\to\mathcal{A}(\downarrow^{\otimes n})$$

该同态将生成元 t_{ij} 发送到如下由一条连接第 i 根和第 j 根弦的单条虚线边组成的 Jacobi 图（[2], [17]）：



令 $\mathcal{A}^{\mathrm{hor}}(\downarrow^{\otimes n}) := \iota(U(\mathfrak{t}_n)) \subset \mathcal{A}(\downarrow^{\otimes n})$。元素 $J \in \mathcal{A}^{\mathrm{hor}}(\downarrow^{\otimes n})$ 称为水平雅可比图。

注记 2.1. 众所周知， $\mathfrak{t}_3$ 是由两个生成元生成的自由李代数的中心扩张。更确切地说，我们有

$$\mathfrak{t}_3 \simeq \mathfrak{f}(t_{12}, t_{23}) \oplus \mathbb{Q} \cdot (t_{12} + t_{23} + t_{13}),$$

其中 $\mathfrak{f}(t_{12}, t_{23})$ 表示以 t_{12} 和 t_{23} 为生成元、定义在 $\mathbb{Q}$上的自由李代数。

除非另有说明，对于 $v \in U(\mathfrak{t}_n)$，每当将 v 视为 $U(\mathfrak{t}_m)$ $(m > n)$ 的元素时，我们总是假设 v 通过典范嵌入 $\iota\colon U(\mathfrak{t}_n) \to U(\mathfrak{t}_m)$ 给出的 $\iota(t_{ij}) = t_{ij}$ 嵌入到$U(\mathfrak{t}_m)$中。与 $\mathcal{A}(X)$ 类似， $U(\mathfrak{t}_n)$ 关于次数的完备化记作$\widehat{\ }\ U(\mathfrak{t}_n)$。

2.2. Jacobi 图的李代数权系。设 $(\mathfrak{g}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ 是 $\mathbb{K}$ 上的一个度量李代数，也就是说，是一个配备了对称非退化双线性型 $\langle\cdot,\cdot\rangle\colon \mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g} \to \mathbb{K}$ 的 $\mathbb{K}$ 上李代数 $\mathfrak{g}$, 该双线性型满足定义 A.1], 中的 ad-不变性，即 $\langle \mathrm{ad}_z(x)\ y\rangle + \langle x, \mathrm{ad}_z(y)\rangle = 0$, 对任意 $x, y, z \in \mathfrak{g}$ 均成立，其中 $\mathrm{ad}_z(x) = [z, x]$，对任意 $z, x \in \mathfrak{g}$ 均成立。本文中，在上下文明确时，我们常将度量李代数 $(\mathfrak{g}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ 简记为 $\mathfrak{g}$。存在与恒等映射对应的典范元素 $\mathbf{1}_{\mathfrak{g}} \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g}^*$。注意，由 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 诱导出一个同构 $\mathfrak{g}^* \cong \mathfrak{g}$。因此，元素 $\mathbf{1}_{\mathfrak{g}}$ 可视为 $\mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g}$ 的元素，并称为关于 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 的二次 Casimir 张量。对于 $\mathfrak{g}$ 的任意基 $\{\boldsymbol{v}_a\}$ 及关于 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 的对偶基 $\{\boldsymbol{v}_a^*\}$，它可表示为 $\mathbf{1}_{\mathfrak{g}} = \sum_{a=1}^{\dim\mathfrak{g}} \boldsymbol{v}_a \otimes \boldsymbol{v}_a^*$，即 $\langle \boldsymbol{v}_a, \boldsymbol{v}_b^*\rangle = \delta_{ab}$。特别地，若取关于 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 的 $\mathfrak{g}$ 的正交归一基 $\{\boldsymbol{e}_a\}$，则有如下表示$\mathbf{1}_{\mathfrak{g}} = \sum_{a=1}^{\dim\mathfrak{g}} \boldsymbol{e}_a \otimes \boldsymbol{e}_a$。李括号 $[\cdot,\cdot] \in \mathfrak{g}^*\otimes\mathfrak{g}^*\otimes\mathfrak{g}$ 也可视为元素 $\mathfrak{t}_{\mathfrak{g}} \in \mathfrak{g}^{\otimes 3}$，并可用结构常数 c_{ijk} 表示为 $\mathfrak{t}_{\mathfrak{g}} = \sum_{i,j,k} c_{ijk}\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j \otimes \boldsymbol{e}_k$，其中结构常数定义为 $[\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j] = \sum_k c_{ijk}\boldsymbol{e}_k$。众所周知，常数 c_{ijk} 是全反对称张量，因此 $\mathfrak{t}_{\mathfrak{g}} \in \bigwedge^3 \mathfrak{g}$([7, 引理 A.2，推论 A.3])。

例 2.2. 我们给出两个典型例子，将在第 5 节中使用。

(1) 对于 $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_N(\mathbb{K})$，我们可以取迹型 B_0 为 $\langle\cdot,\ \cdot\rangle$，其中 B_0 定义为 $B_0(x,\ y) = \mathrm{tr}(xy)$，其中 $x,\ y \in \mathfrak{g}$。 (2) 对于半单李代数 $\mathfrak{g}$，我们可以取 Killing 型 B 为$\langle\cdot,\ \cdot\rangle$ 其定义为 $B(x,\ y) = \mathrm{tr}(\mathrm{ad}_x \mathrm{ad}_y)$，其中 $x,\ y \in \mathfrak{g}$。它

已知 Killing 型 B 与迹型 B_0成比例（参见 [7, 第 A.2] 节）。

接下来，我们回顾在X 为 n 个区间的不交并，即 $X = \downarrow^{\otimes n}$时， $\mathcal{A}(X)$的通用 $\mathfrak{g}$ 权系。详情请参见 [23, 定理 10] 的证明或 [7, 第 6]节。令 $\mathcal{A}(X)$为以 X 为基底的 Jacobi 图代数，如第 2.1 节所述。假设 X的连通分支依次编号为 1、2、……、 n。令 $\mathfrak{g} = (\mathfrak{g}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$为$\mathbb{K}$ 上的一个度量李代数，其泛包络代数为 $U(\mathfrak{g})$。那么，称为$\mathcal{A}(X)$的通用 $\mathfrak{g}$ 权系的代数同态 $W_{\mathfrak{g}}\colon \mathcal{A}(X)_{\mathbb{K}} \to U(\mathfrak{g})^{\otimes n}$定义如下。对于 $i = 1$、2、……、 n，假设 J在第 i个区间上有$k_i (\geq 0)$个单价顶点，依照区间定向的顺序记为 v_1^i、 v_2^i、……、$v_{k_i}^i$。我们还假设 J 有 l (≥ 0)个三价顶点$v_{e_1^1 e_2^1 e_3^1}$、 $v_{e_1^2 e_2^2 e_3^2}$、……、 $v_{e_1^l e_2^l e_3^l}$，其中$v_{e_1^j e_2^j e_3^j}$表示

与三条边 e_1^j、 e_2^j、 e_3^j 相连的三价顶点，并附有表示顶点处循环顺序的次序。边集 E_J 上的一个状态 是一个映射 $\sigma\colon E_J \to \{1, 2, \ldots, $维 $\mathfrak{g}\}$。 E_J上的任意给定状态 σ，通过将数值 $\sigma(e)$赋给每个与边e相连的单价顶点 v ，在 J 的单价顶点集 $V_{\text{单价}J}$上诱导出映射 $V_{\text{单}_J} \to \{1, 2, \ldots, $维 $\mathfrak{g}\}$。滥用记号时，我们也用 σ 表示这个诱导映射。于是，我们定义 $W_{\mathfrak{g}}(J) \in U(\mathfrak{g})^{\otimes n}$为

$$W_{\mathfrak{g}}(J) = \sum_{\sigma\colon E_J \to \{1,2,\ldots,\dim \mathfrak{g}\}} \bigotimes_{i=1}^{n} \boldsymbol{e}_{\sigma(v_1^i)} \boldsymbol{e}_{\sigma(v_2^i)} \cdots \boldsymbol{e}_{\sigma(v_{k_i}^i)} \prod_{j=1}^{l} \left(-c_{\sigma(e_1^j)\sigma(e_2^j)\sigma(e_3^j)} \right),$$

其中， $\{\boldsymbol{e}_i\}$ 是相对于 $\langle\cdot,\ \cdot\rangle$ 而言的 $\mathfrak{g}$ 的正交归一基，而 c_{ijk} 是与该基相关联的结构常数。将其线性延拓后，我们得到所需映射 $W_{\mathfrak{g}}\colon \mathcal{A}(X)_{\mathbb{K}} \to U(\mathfrak{g})^{\otimes n}$。请注意，映射 $W_{\mathfrak{g}}$ 的良定义性可由与 [27, 第6.6节和第 290] 页，或 [7,第6节2] 中类似的论证推出。

注记 2.3。 定义 $W_{\mathfrak{g}}$时，我们按照 [7], 为 Jacobi 图的每个三价顶点赋予 $-\mathfrak{t}_{\mathfrak{g}}$ ，这与 [26, 第 6] 节不同；后者使用的是 $\mathfrak{t}_{\mathfrak{g}}$。

例 2.4。 众所周知，与度量李代数（$\mathfrak{sl}_2$， B_0）相关的泛$\mathfrak{sl}_2 = \mathfrak{sl}_2$（$\mathbb{K}$）权系（[8, 定理 6], [7, 定理 6.17]）满足如下 skein 关系，其中 B_0 表示其上的迹型：

$$W_{\mathfrak{sl}_2}\left(\right) = 2W_{\mathfrak{sl}_2}\left(\right) - 2W_{\mathfrak{sl}_2}\left(\right). \tag{2.1}$$

接下来，我们回顾与度量李代数 $\mathfrak{g}$ 的表示相关联的权系。我们沿用上文的记号。设 $\rho\colon \mathfrak{g} \to$End$(V)$ 是 $\mathfrak{g}$ 的有限维表示。张量积$\rho^{\otimes n}$扩张为代数同态 $U(\rho)^{\otimes n}\colon U(\mathfrak{g})^{\otimes n} \to$End$(V)^{\otimes n}$。与表示 $(\mathfrak{g},\ \rho)$ 相关联的权系是代数

同态 $W_{\mathfrak{g}}^{\rho}\colon \mathcal{A}(X)_{\mathbb{K}} \to \mathrm{End}(V)^{\otimes n}$，定义为以下复合

$$W_{\mathfrak{g}}^{\rho}\colon \mathcal{A}(X)_{\mathbb{K}} \xrightarrow{W_{\mathfrak{g}}} U(\mathfrak{g})^{\otimes n} \xrightarrow{U(\rho)^{\otimes n}} \mathrm{End}(V)^{\otimes n}.$$

最后，我们简要描述 X 是定向紧致一维流形的一般情形。对于以 X 为基的 Jacobi 图 J，我们首先在 X 各连通分支中的每个圆上选取一个基点，且该基点不在圆上的单价顶点处。然后，按照上述相同的步骤并复合迹映射，我们得到代数同态

$$W_{\mathfrak{g}}^{\rho}\colon \mathcal{A}(X)_{\mathbb{K}} \xrightarrow{W_{\mathfrak{g}}} U(\mathfrak{g})^{\otimes b_0(X)} \xrightarrow{U(\rho)^{\otimes b_0(X)}} \mathrm{End}(V)^{\otimes b_0(X)} \xrightarrow{\mathrm{tr}^{\otimes b_1(X)}} \mathrm{End}(V)^{\otimes \chi(X)}.$$

这里，$b_i(X)$ 和 $\chi(X)$ 分别表示 X 的第 i 个贝蒂数和欧拉示性数，而映射 $\mathrm{tr}^{\otimes b_1}(X)$ 定义为对 X 中每个圆所对应的 $\mathrm{End}(V)$ 上的迹 tr，以及对其他连通分支所对应的 $\mathrm{End}(V)$ 上的恒等映射，取它们的张量积。

2.3. **结合子**。设 Y 是一个连通定向紧致一维流形。我们回顾 [23, 第 1] 节中的三个线性映射

$$\varepsilon_Y\colon \mathcal{A}(X \sqcup Y) \to \mathcal{A}(X),\ \Delta_Y\colon \mathcal{A}(X \sqcup Y) \to \mathcal{A}(X \sqcup Y \sqcup Y),\ S_Y\colon \mathcal{A}(X \sqcup Y) \to \mathcal{A}(X \sqcup \overline{Y}),$$

其中，$\overline{Y}$ 是具有相反定向的 Y。首先，若 Y 上没有单价顶点，则将 $\varepsilon_i(J)$ 定义为 J；否则定义为 0。我们将 $\Delta_Y(J)$ 定义为所有重新连接 J 中与 Y 相连的腿、使其连到 Y 或其副本上的方式之和。最后，定义 $S_Y(J) = (-1)^k J$，其中 k 是位于 Y 上的 J 的单价顶点数。当连通分支以 1、.....、n 为指标，且 Y 是第 i 个分支时，我们分别简记为 ε_i、Δ_i、S_i。

令 $R = \exp\left(\frac{1}{2}\right) \in \widehat{\mathcal{A}}(\downarrow\downarrow)$，并令 $R^{ij} \in \widehat{\mathcal{A}}(\downarrow^{\otimes 3})_{\mathbb{K}}$ 表示沿第 i 条和第 j 条弦插入 R 后得到的元素。若元素 $\curlywedge\Phi \in \mathcal{A}(\downarrow\downarrow\downarrow)_{\mathbb{K}}$ 满足以下条件，则称其为结合子

(1) $(1 \otimes \Phi) \cdot (\Delta_2\Phi) \cdot (\Phi \otimes 1) = (\Delta_3\Phi) \cdot (\Delta_1\Phi)$;
(2) $\Phi^{231} \cdot (\Delta_2 R) \cdot \Phi = R^{13} \cdot \Phi^{213} \cdot R^{12}$;
(3) $\varepsilon_i(\Phi) = 1$ for $i = 1, 2, 3$;
(4) $\Phi^{-1} = \Phi^{321}$,

其中 Φ^{ijk} 表示将第一个分量移至第 i 个分量的位置，依此类推。详情请参见 [23, 第 4] 节和 [9]。

接下来，我们回顾水平结合子，它们提供了有趣的结合子实例，并由如下定义的 Drinfeld 结合子得到。我们定义代数同态 $\varepsilon\colon \mathbb{K}\langle\langle A, B\rangle\rangle \to \mathbb{K}$ 和 $\Delta\colon \mathbb{K}\langle\langle A, B\rangle\rangle \to \mathbb{K}\langle\langle A, B\rangle\rangle \hat{\otimes} \mathbb{K}\langle\langle A, B\rangle\rangle$，使其满足 $\varepsilon(A) = \varepsilon(B) = 0$ 和 $\Delta(A) = A \otimes 1 + 1 \otimes A, \Delta(B) = B \otimes 1 + 1 \otimes B$，分别成立。Drinfeld结合子是一个对 $(\mu, \varphi) \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}\langle\langle A, B\rangle\rangle$，满足

(1) $\mu \neq 0$;
(2) $\Delta\varphi = \varphi \otimes \varphi$, $\varepsilon(\varphi) = 1$;

^(3) $U(\mathfrak{t}_4)_{\mathbb{K}}$ 中的五边形关系(2.2)以及 $U(\mathfrak{t}_3)_{\mathbb{K}}$中的两个六边形关系
^(2.3)、(2.4)：

$$\varphi(t_{12},t_{23}+t_{24})\varphi(t_{13}+t_{23},t_{34})=\varphi(t_{23},t_{34})\varphi(t_{12}+t_{13},t_{24}+t_{34})\varphi(t_{12},t_{23}), \tag{2.2}$$

$$\exp\left(\frac{\mu}{2}(t_{13}+t_{23})\right)=\varphi(t_{31},t_{21})\exp\left(\frac{\mu}{2}t_{13}\right)\varphi(t_{13},t_{32})^{-1}\exp\left(\frac{\mu}{2}t_{23}\right)\varphi(t_{12},t_{23}), \tag{2.3}$$

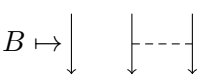
$$\exp\left(\frac{\mu}{2}(t_{12}+t_{13})\right)=\varphi(t_{23},t_{31})^{-1}\exp\left(\frac{\mu}{2}t_{13}\right)\varphi(t_{21},t_{13})\exp\left(\frac{\mu}{2}t_{12}\right)\varphi(t_{12},t_{23})^{-1}. \tag{2.4}$$

如 Furusho 所示，五边形关系 (2.2) 对某个 $\mu\in\mathbb{K}$ 蕴含了两个六边形关系 (2.3) 和 (2.4)，其中 $\mu\in\mathbb{K}$ 在相差一个符号的意义下唯一。令 $M(\mathbb{K})$ 和 $M_1(\mathbb{K})$ 分别为 Drinfeld结合子集合 (μ,φ) 和 Drinfeld结合子集合 $(1,\varphi)$，且满足 $\mu=1$。注意， $M_1(\mathbb{K})\subset M(\mathbb{K})$。根据定义并经简单计算可知，对于一个 Drinfeld结合子 $(1,\varphi)\in M_1(\mathbb{K})$，元素 $\Phi=\varphi(t_{12},t_{23})\in\widehat{\mathcal{A}}^{\mathrm{hor}}(\downarrow\downarrow\downarrow)_{\mathbb{K}}$^满足 Jacobi 图代数 $\mathcal{A}(\downarrow\downarrow\downarrow)_{\mathbb{K}}$ 中结合子的四个条件。我们将这样由 Drinfeld结合子得到的结合子称为（*Drinfeld*）水平结合子。

我们回顾本文中出现的两个水平结合子 Φ_{KZ} 和 $\Phi_{\mathbb{Q}}^{\mathrm{even}}$的低次数项。令 $\Phi_{\mathrm{KZ}}\in\widehat{\mathcal{A}}^{\mathrm{hor}}(\downarrow\downarrow\downarrow)_{\mathbb{C}}$ 表示*Knizhnik– Zamolodchikov* 结合子。那么，$\log\Phi_{\mathrm{KZ}}$ 由以下级数的像给出

$$\frac{1}{24}[A,B]-\frac{\zeta(3)}{(2\pi i)^3}[A+B,[A,B]]-\frac{1}{1440}\left([A,[A,[A,B]]]]-[B,[B,[B,A]]]]\right)$$
$$-\frac{1}{11520}\left([A,[B,[A,B]]]]-[B,[A,[B,A]]]]\right)+(\deg\geq 5)$$

^在代数同态 $\mathbb{K}\langle\langle A,B\rangle\rangle\to\mathcal{A}(\downarrow\downarrow\downarrow)_{\mathbb{K}}$ 下的像，该同态定义如下

$$A\mapsto$$  $$,\quad B\mapsto$$  $$.$$

令 $\Phi_{\mathbb{Q}}^{\mathrm{even}}\in\widehat{\mathcal{A}}^{\mathrm{hor}}(\downarrow\downarrow\downarrow)$为一个偶有理水平结合子（Drinfeld 在 [9, 定理A″，命题 5.4]中证明了其存在性）。正如 Bar- Natan 所示 [3], ，$\log\Phi_{\mathbb{Q}}^{\mathrm{even}}$的低次数项由以下表达式得到

$$\frac{1}{24}[A,B]-\frac{1}{1440}\left([A,[A,[A,B]]]]-[B,[B,[B,A]]]]\right)$$
$$-\frac{1}{11520}\left([A,[B,[A,B]]]]-[B,[A,[B,A]]]]\right)+(\deg\geq 6)$$

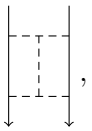
通过上述代数同态。另见 [7, 第 10.2.5 和 10.4 节3]或 [27, 第 370 页及 373]。已知，正如 Bar-Natan [3], 所示，$\log\Phi_{\mathbb{Q}}^{\mathrm{even}}$在次数不超过 7 时唯一确定；而正如 Brochier [4]所示，在次数 8 及以上时唯一性不再成立。根据 [7, 注 10.38]，，$\log\ \Phi_{\mathrm{KZ}}=\log\ \Phi_{\mathbb{Q}}^{\mathrm{even}}$ 在次数 0 、 1 、 2 、 4。

设 Φ 是一个结合子，并假设 $F \in \mathcal{A}(\downarrow\downarrow)_{\mathbb{K}}$ 是对称的（即$F^{21} = F$），且满足 $\varepsilon_1(F) = \varepsilon_2(F) = 1$。那么，

$$(1 \otimes F) \cdot (\Delta_2 F) \cdot \Phi \cdot (\Delta_1 F^{-1}) \cdot (F^{-1} \otimes 1)$$

再次是一个结合子，称为通过 F 对 Φ 进行扭曲而得到。参见[23, 第 7], [9,节定理A′]、 [7, 定理 1035],或 [27,第 368] 页。

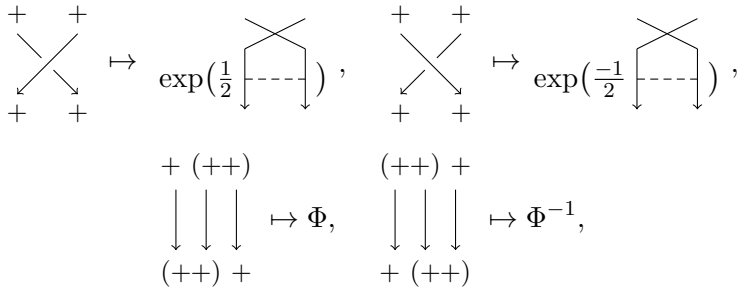
例 2.5。 如 [7, 例 1036]所述， Φ_{KZ} 和 $\Phi_{\mathbb{Q}}^{\mathrm{even}}$经过扭曲后，在 4 次以内相互关联。通过 $1 + \alpha J_3$ 进行扭曲会添加 3 次项$2\alpha[A + B, [A, B]]$，直至 4 次，其中 $J_3 \in \mathcal{A}(\downarrow\downarrow)$ 定义为

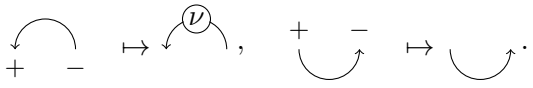
$J_3 =$  ,

以及 $\alpha \in \mathbb{K}$。因此，取 $\alpha = -\zeta(3)/2(2\pi i)^3$, ，再通过 $1 +$对其进行扭曲 $\Phi_{\mathbb{Q}}^{\mathrm{even}}\alpha J_3$ ，即可得到 Φ_{KZ} ，直至 4 次。若取 $\alpha = \zeta(3)/(2\pi i)^3$, ，相应的扭曲会将 $\Phi_{\mathrm{KZ}}(A, B)$ 变换为 $\Phi_{\mathrm{KZ}}(-A, -B)$，直至 4 次。这里请注意，$\Phi_{\mathrm{KZ}}(A, B) \neq \Phi_{\mathrm{KZ}}(-A, -B)$ [9, 第 851] 页的注记。任取一个 $\alpha \in \mathbb{Q}$，即可通过扭曲从 $\Phi_{\mathbb{Q}}^{\mathrm{even}}$ 得到另一个有理（水平的）结合子，直至 4 次。

2.4. **Kontsevich 不变量**。在 [21], Kontsevich 通过 KZ 方程为 $L \subset S^3$ 中的定向链环引入了一种积分。该积分给出了 L的不变量，其取值于向量空间 $\widehat{\mathcal{A}}\left(\bigsqcup^{b_0(L)} S^1\right)_{\mathbb{C}}$中。Le 和 Murakami [23] 利用结合子，以组合方式定义了（带框架、定向的） q-缠结的 Kontsevich 不变量。另见 [7, 第10.3 节。5]以及[27,第6节。4]

我们简要回顾依据 [23, 定理 2]给出的 q-缠结的 Kontsevich 不变量定义。A q-缠结 T是一个带框架的定向辫，并配有两个由字母 $+$, $-$构成的非结合字 $w_t(T)$、$w_b(T)$，其中 $w_t(T)$（分别为 $w_b(T)$）中的字母对应于顶部（分别为底部）的端点 $\partial_t T$ （ $\partial_b T$）。对于 q-缠结 T和 T'，令 $T \otimes T'$表示由 T和 T'水平并置得到的q-缠结。当 $w_b(T) = w_t(T')$时，复合 $T \circ T'$定义为将 T堆叠在 T'上。下面定义与结合子 Φ相关联的 ***Kontsevich*** 不变量 Z_Φ。我们先为基本的 q-缠结 T定义$Z_\Phi(T)$:





这里，$\nu \in \mathcal{A}(\downarrow)$定义为

$$\nu = \left(\boxed{S_2\Phi} \right)^{-1},$$

众所周知，它与 Φ 的选择无关。由于每个 q-缠结都可通过 $\otimes$ 和 $\circ$ 分解为基本的 q-缠结，因此我们可以定义 $Z_\Phi(T)$，使其满足 $Z_\Phi(T \otimes T') = Z_\Phi(T) \otimes Z_\Phi(T')$ 和 $Z_\Phi(T \circ T') = Z_\Phi(T) \cdot Z_\Phi(T')$。注意，[23] 中的归一化与 [7] 中的相同，但不同于 [27]。

例 2.6. 令 T 为如下所示的三股 q-辫：

$$T = \begin{array}{c} (++)+ \\ \big| \quad \diagdown\!\diagup \\ \downarrow \quad \diagup\!\diagdown \\ (++)+ \end{array}.$$

于是，我们直接观察到，$Z_{\Phi_{\mathrm{KZ}}}(T)$ 中各项的系数都是 $\zeta(3)$ 的倍数，如下所示

$$\begin{aligned} \log Z_{\Phi_{\mathrm{KZ}}}(T) &= \log\left(\Phi_{\mathrm{KZ}}(t_{12},t_{23})^{-1} \cdot \exp(t_{23}) \cdot \Phi_{\mathrm{KZ}}(t_{12},t_{23})\right) \\ &= t_{23} - \frac{1}{24}[[t_{12},t_{23}],t_{23}] \\ &\quad + \frac{\zeta(3)}{(2\pi i)^3}[[t_{12}+t_{23},[t_{12},t_{23}]],t_{23}] + (\deg \geq 5), \end{aligned}$$

因此我们得出结论：$Z_{\Phi_{\mathrm{KZ}}}(T) \neq Z_{\Phi_{\mathbb{Q}}^{\mathrm{even}}}(T)$。

这里我们回顾 [23, 定理 7] 中关于扭曲 Φ 下 Z_Φ 的性质，该性质在定理 1.2 的证明中起着关键作用。令 Φ、Φ' 为结合子，并假设 Φ 是通过 $F \in \mathcal{A}(\downarrow\downarrow)_{\mathbb{K}}$ 对 Φ' 扭曲得到的。对于一个 2 分支弦环 T，我们有

$$F \cdot Z_\Phi(T) \cdot F^{-1} = Z_{\Phi'}(T).$$

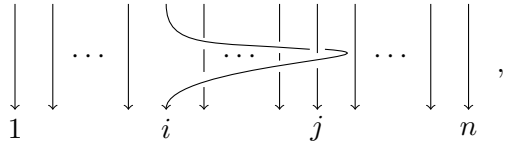
另请参见 [7, 定理 10。37]在 [15, 定理 3。14], 中，给出了与第 3.2 节中原代数弦环类似的公式。

3. The action of the Grothendieck–Teichmüller group on proalgebraic string links

本节首先回顾原代数弦环的概念以及 Grothendieck–Teichm¨uller 群在其上的作用，然后在定理 1.2 的假设下给出定理 1.5 的证明。

3.1. 原代数弦环。此处我们建立与原代数弦环相关的记号。精确定义见 [15]。

设 n 为正整数，$\epsilon=(\epsilon_1,\epsilon_2,\dots,\epsilon_n)$ 为由字母 $+$ 和 $-$ 组成的一个序列。对于这样的序列 ϵ，我们将弦环幺半群记为 $\mathcal{SL}_\epsilon$，其类型为 ϵ，也就是说，它由定向弦环 T 组成，且框架平凡，并满足端点 $\partial_t(T)$ 和 $\partial_b(T)$ 与序列 ϵ 相对应。在本文中，类型为 ϵ 的弦环 T 被视为 q-切环，并固定非结合词 $w_t(T)=w_b(T)=((\cdots(((\epsilon_1\epsilon_2)\epsilon_3)\epsilon_4)\cdots)\epsilon_n)$，从而使 q-弦环的 Kontsevich 不变量与弦环的态射 $\rho_\epsilon(p)$ 相容；该态射定义于 [15, 命题 3.25(3)]，如备注3.2所述。$\mathcal{SL}_\epsilon$ 的可逆元群等于类型为 ϵ 的纯辫群，记作 PB_ϵ。由于我们考虑的大多数结果经过少量修改即可由 $\epsilon=(+\,+\cdots+)$ 的情形推出，为求简便，我们主要考虑 $\mathcal{SL}_n=\mathcal{SL}_{(++\cdots+)}$。纯辫群 $\mathrm{PB}_n\subset\mathcal{SL}_n$ 由以下元素生成

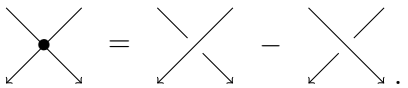
$x_{ij}=$ 

其中 $1\le i<j\le n$。关于它们满足的关系，参见 [20]。众所周知，存在半直积分解 $PB_3\cong F_2(x_{12},x_{23})\rtimes\langle x_{13}\rangle$，其中 $F_2(x_{12},x_{23})$ 表示由 x_{12} 和x_{23}生成的秩为 2 的自由群，而 $\langle x_{13}\rangle\cong\mathbb{Z}$是由 x_{13}生成的循环群。对于 $1\le a\le a+\alpha<b\le b+\beta\le n$，我们设

$$x_{a\cdots a+\alpha,b\cdots b+\beta}\coloneqq(x_{a,b}x_{a,b+1}\cdots x_{a,b+\beta})\cdot(x_{a+1,b}x_{a+1,b+1}\cdots x_{a+1,b+\beta})\cdots(x_{a+\alpha,b}x_{a+\alpha,b+1}\cdots x_{a+\alpha,b+\beta})\in PB_n,$$

这也可以通过对 $x_{a,b}\in PB_{n-\alpha-\beta}$ 中第 a 条和第b条弦分别加倍 α 次和 β 次得到（参见 [15,第 1.1] 节）。

令 $\mathbb{K}[\mathcal{SL}_\epsilon]$ 表示由类型为 ϵ 的弦环生成的 $\mathbb{K}$-代数。原代数弦环 的拓扑 $\mathbb{K}$-代数定义为其关于 Vassiliev 奇异滤过 `的完备化$\widehat{\mathbb{K}[\mathcal{SL}_\epsilon]}$。更确切地说，将奇异弦环的双重点按如下方式解开后，视为 $\mathbb{K}[\mathcal{SL}_\epsilon]$的元素：



对于每个 $k\ge0$，定义 $J_k\subset\mathbb{K}[\mathcal{SL}_\epsilon]$ 为由类型为 ϵ 且具有 k 个双重点的奇异弦环生成的子空间。于是得到滤过 $\mathbb{K}[\mathcal{SL}_\epsilon]=J_0\supset J_1\supset J_2\supset\cdots\supset J_k\supset\cdots$，称为 $\mathbb{K}[\mathcal{SL}_\epsilon]$ 上的 ***Vassiliev*** 滤过$\widehat{}$。现在定义 $\mathbb{K}[\mathcal{SL}_\epsilon]$ 为逆极限 $\varprojlim_k\mathbb{K}[\mathcal{SL}_\epsilon]/J_k$。众所周知，$\mathbb{K}[PB_\epsilon]$ 上的 Vassiliev 滤过 $\{J_k\}_k$ 与增广理想 I 的幂 I^k 所给出的滤过一致：$=\mathrm{Ker}(\mathbb{K}[PB_\epsilon]\to\mathbb{K})$（参见 [7, 第 12.2] 节）。

3.2. Grothendieck–Teichm¨uller 群在原代数弦环上的作用。这里，我们回顾 [15] 中受 Kassel–Turaev [19] 工作启发的原代数 Grothendieck–Teichm¨uller 群对原代数弦环的作用。本文仅回顾与我们的研究目的相关的事实。因此，感兴趣的读者可参阅 [9], [19], 和 [15] 以了解更多详情。

令 $F_2(\mathbb{K})\subset\widehat{\mathbb{K}[F_2]}$ 为由 x 和 y生成的自由群 $F_2=F_2(x,\ y)$的 Malcev 完备化。这里，我们认为 $\mathbb{K}[F_2]$ 带有由 $\mathbb{K}[F_2]$ 的 Hopf 代数结构所诱导的 Hopf 代数结构，其群类元素为 $g\in F_2$。令 $GT(\mathbb{K})$ 表示*proalgebraic Grothendieck–Teichm¨uller 群*，即，定义

$$GT(\mathbb{K})=\{(\lambda,f)\in\mathbb{K}^\times\times F_2(\mathbb{K})\mid(\lambda,f)\text{ satisfies the following (3.1)–(3.3)}\},$$

$$f(x,y)=f(y,x)^{-1},\tag{3.1}$$

$$f(z,x)z^mf(y,z)y^mf(x,y)x^m=1\quad\text{if } xyz=1\text{ and } m=\frac{\lambda-1}{2},\tag{3.2}$$

$$f(x_{12},x_{23}x_{24})f(x_{13}x_{23},x_{34})=f(x_{23},x_{34})f(x_{12}x_{13},x_{24}x_{34})f(x_{12},x_{23}),\tag{3.3}$$

其中 (3.3) 是 $\mathbb{K}[PB_4]$中的等式。这里，a^m 定义为 $a\in\{x,y,z\}$ 时的 $a^m=\exp(m\log\ a)$，并注意它在 $\mathbb{K}[F_2]$中定义良好。$GT(\mathbb{K})$的群结构为

$$(\lambda_1,f_1)\bullet(\lambda_2,f_2)=(\lambda_1\lambda_2,f_2\cdot(f_1(x^{\lambda_2},f_2^{-1}y^{\lambda_2}f_2))).$$

注意，正如 Furusho [13], 所证明的，对于某个 $\lambda\in\mathbb{K}$，五边形关系 (3.3) 蕴含六边形关系 (3.1) 和 (3.2)，且该 $\lambda\in\mathbb{K}$ 在相差一个符号的意义下唯一。令 $GT_1(\mathbb{K})$表示其幺幂部分，即$GT(\mathbb{K})$中由满足 $\lambda=1$的元素构成的子群。

接下来，回顾$GT(\mathbb{K})$的分次变体，称为分次 *Grothendieck– Teichm¨uller 群*，记作 $GRT(\mathbb{K})$。作为一个集合，$GRT(\mathbb{K})$由满足以下条件的数对组成：$(c,g)\in\mathbb{K}^\times\times\mathbb{K}\langle\langle A,B\rangle\rangle$

(1) $\Delta(g)=g\otimes g$, $\varepsilon(g)=1$; (2) g 满足五边形关系 (2.2) 以及两个六边形关系 (2.3) 和 (2.4)，其中 $\mu=0$。

对于任意的 $(c_1,g_1),(c_2,g_2)\in GRT(\mathbb{K})$，乘积 $(c_1,g_1)\bullet(c_2,g_2)$ 定义为

$$(c_1,g_1)\bullet(c_2,g_2)=\left(c_1c_2,g_2\cdot g_1\left(\frac{X}{c_2},g_2^{-1}\frac{Y}{c_2}g_2\right)\right).$$

注意，由 Furusho 的结果 [13], 可知，两个六边形关系 (2.3) 和 (2.4) 是冗余的，因为它们可由五边形关系 (2.2) 推出。于是，满同态 $GRT(\mathbb{K})\to\mathbb{K}^\times$ 将 (c,g) 映射到 c，从而导出短正合列

$$0\to GRT_1(\mathbb{K})\to GRT(\mathbb{K})\to\mathbb{K}^\times\to 0,$$

并且，选取一个截面 $\mathbb{K}^\times \to GRT(\mathbb{K})$，其形式为 $c \mapsto (c, 1)$，便得到半直积分解 $GRT(\mathbb{K}) \cong \mathbb{K}^\times \ltimes GRT_1(\mathbb{K})$。这里，$GRT_1(\mathbb{K})$ 表示由满足 $c = 1$ 的元素构成的 $GRT(\mathbb{K})$ 子群。正如 [11, 第 2], 节所解释的，由 $\mathbb{K}^\times$ 给出的作用 $(1, g(A, B)) \mapsto (1, g(A/c, B/c))$ 赋予（正则函数环上的）$GRT_1(\mathbb{K})$ 一个分次结构。

如 [9], 所示，结合子的集合 $M(\mathbb{K})$ 构成一个（$GRT(\mathbb{K})$，$GT(\mathbb{K})$）-双挠子，即 $GRT(\mathbb{K})$ 从左侧自由且传递地作用于 $M(\mathbb{K})$，同时 $GT(\mathbb{K})$ 从右侧自由且传递地作用于 $M(\mathbb{K})$，且这两个作用彼此交换[1]。这些作用定义如下：对于 $(c, g) \in GRT(\mathbb{K})$ 和 $(\mu, \varphi) \in M(\mathbb{K})$,

$$(c, g) \bullet (\mu, \varphi) = \left(\frac{\mu}{c}, g \cdot \varphi\left(\frac{A}{c}, g^{-1}\frac{B}{c}g\right)\right) \in M(\mathbb{K})$$

以及，对于 $(\mu, \varphi) \in M(\mathbb{K})$ 和 $(\lambda, f) \in GT(\mathbb{K})$,

$$(\mu, \varphi) \bullet (\lambda, f) = (\lambda\mu, \varphi \cdot f(e^{\mu A}, \varphi^{-1} e^{\mu B}\varphi)) \in M(\mathbb{K}).$$

Drinfeld ([9]) 将 $GT(\mathbb{K})$-作用从原代数（纯）辫群扩展到原代数缠结，这一点由 Kassel–Turaev ([19]) 提出，并由 Furusho ([15]) 严格构造。这里，我们回顾这一扩展在原代数弦环情形中的形式。我们有一个 $GT(\mathbb{K})$-作用

$$\rho_\epsilon \colon GT(\mathbb{K}) \to \mathrm{Aut}(\widehat{\mathbb{K}[\mathcal{SL}_\epsilon]})$$

以及一个$GRT(\mathbb{K})$-作用

$$\rho_\epsilon \colon GRT(\mathbb{K}) \to \mathrm{Aut}(\widehat{\mathcal{A}}(\downarrow^\epsilon)_{\mathbb{K}}),$$

这些二者分别限制为对 $\mathbb{K}[PB_n]$ 和 $U(\mathfrak{t}_n)_{\mathbb{K}}$ 中给出的作用。此外，存在一个双挠子态射

$$\rho_\epsilon \colon M(\mathbb{K}) \to \mathrm{Isom}(\widehat{\mathbb{K}[\mathcal{SL}_\epsilon]}, \widehat{\mathcal{A}}(\downarrow^\epsilon)_{\mathbb{K}}).$$

上述作用由算子 S、ABC 构造的 A 部分、B 部分和 C 部分组合而成，该构造定义于 [15, 第 2] 节。参见图 2 和图 3。

注 3.1. 我们注意到，在 [19] 和 [15], 中，上述 $GT(\mathbb{K})$-作用更一般地定义于原代数缠结上。

注记 3.2。对于 $p = (1, \varphi) \in M_1(\mathbb{K})$，同构 $\rho_\epsilon(p)$ 与 Z_Φ 的 Kontsevich 不变量一致，后者对应于 $\Phi = \varphi(t_{12}, t_{23})$，简要说明如下。我们有一个同构 $\mathbb{K}[\mathcal{SL}_\epsilon] \cong \varprojlim_n \mathbb{K}[\mathcal{SL}_\epsilon^{\mathrm{pre}}]/\mathcal{T}_{\mathrm{pre}n}$[15, 命题 3.7(2)]。令 $\mathbb{K}[\mathcal{ISL}_\epsilon^{\mathrm{pre}}]$ 表示由类型为 ϵ 的“无穷小预弦辫”生成、满足关系[15, (IT1)–(IT6)] 的 $\mathbb{K}$-向量空间，其完备化 $\mathbb{K}[\mathcal{ISL}_\epsilon]$ 是类型为 ϵ 的“无穷小弦环” $\mathbb{K}$-代数。对于 $p = (\mu, \varphi) \in M(\mathbb{K})$，一个同构

[1]按照 [15], ，我们将 [9]中给出的乘积顺序反转。

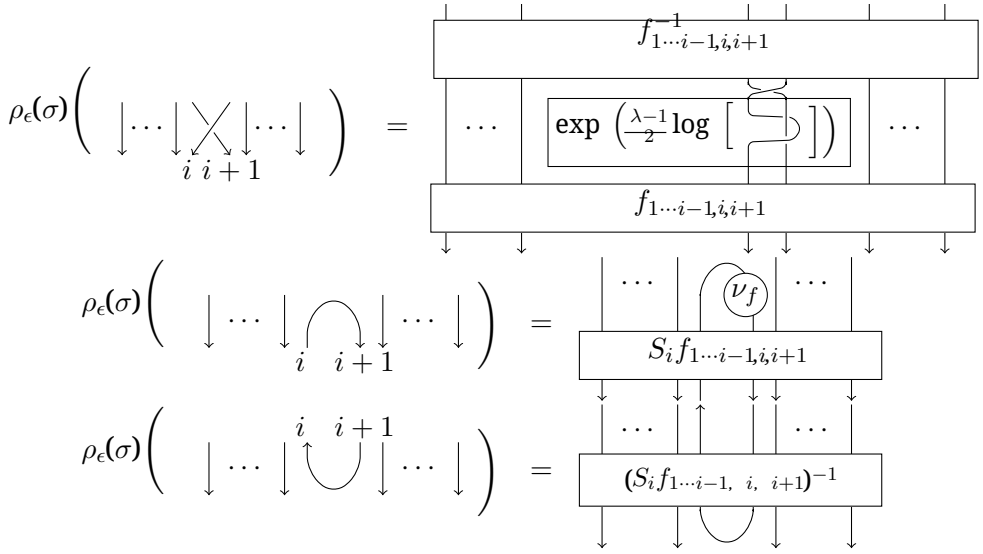


FIGURE 2. GT（$\mathbb{K}$）对基本缠结的作用。这里，$\sigma = (\lambda, f) \in$ GT（$\mathbb{K}$），并且我们令$f_{1\cdots i-1,i,i+1} := f(x_{1\cdots i-1,i,x_{ii+1}}) = f($ $x_{1i}x_{2i}\cdots x_{i-1i}, x_{ii+1})$，当 $i \geq 2$ 且$f_{1\cdots i-1,i,i+1} = 1$，当 $i = 1$。注意，exp（$\frac{\lambda-1}{2}\log(x_{i,i+1})$）在 $\mathbb{K}$[PB$_n$]中是良定义的。元素 $\nu_f \in \mathbb{K}[\mathcal{SL}_1]$ 的定义方式与第 2.4 节中的 ν 相同，只需将 Φ 替换为 f。

$\rho_\epsilon(p)$: $\mathbb{K}[\mathcal{SL}_\epsilon] \to \mathbb{K}[\mathcal{ISL}_\epsilon]$ 在 [15, 命题3.25(3)]中定义。存在一个自然同构 $\mathbb{K}[\mathcal{ISL}_\epsilon] \to \mathcal{A}(\downarrow^c)_\mathbb{K}$，定义于 [15, 命题3.28]。当 $p = (1, \varphi)$ 与 $\Phi = \varphi(t_{12}, t_{23})$ 时，它们的复合与$\rho_\epsilon(p)$诱导同构 Z_Φ: $\mathbb{K}[\mathcal{SL}_\epsilon] \to \mathcal{A}(\downarrow^c)_\mathbb{K}$一致。参见 [15, 记号2.7(2)、命题2.19和注记3.29]。

在 [15], 中，Furusho 更详细地研究了弦环的情形，并给出了以下定理。

定理3.3 ([15, 定理A]). 令 $GT_1(\mathbb{K})$ 表示 $GT(\mathbb{K})$的幺幂部分。则有以下结论。

(1) $GT_1(\mathbb{K})$对 $\mathbb{K}[\mathcal{SL}_\epsilon]$ 的作用由内共轭给出。(2) $GT_1(\mathbb{K})$ 对原代数结的作用是平凡的。

由定理 3.3(2)可知，GT ($\mathbb{K}$) 对 proalgebraic$n$-component 弦环的作用对 $n = 1$ 并不忠实，这与其对 $n \geq 3$ 的忠实性形成对比。定理 3.3(1)中 GT$_1$($\mathbb{K}$) 的内共轭作用可如下理解 [15, 定理 4.14]: 根据 $M(\mathbb{K})$ 的 (GRT ($\mathbb{K}$), GT ($\mathbb{K}$))-双挠子结构，存在同构r_p: GT 1($\mathbb{K}$) $\xrightarrow{\sim}$ GRT 1($\mathbb{K}$)，使得 $p = (1, \varphi) \in M_1(\mathbb{K})$。对于 $\sigma = (1, f) \in$ GT 1($\mathbb{K}$)，我们通过 $p \bullet \sigma = r_p(\sigma) \bullet p$ 得到相应的元素 $r_p(\sigma) \in GRT_1(\mathbb{K})$

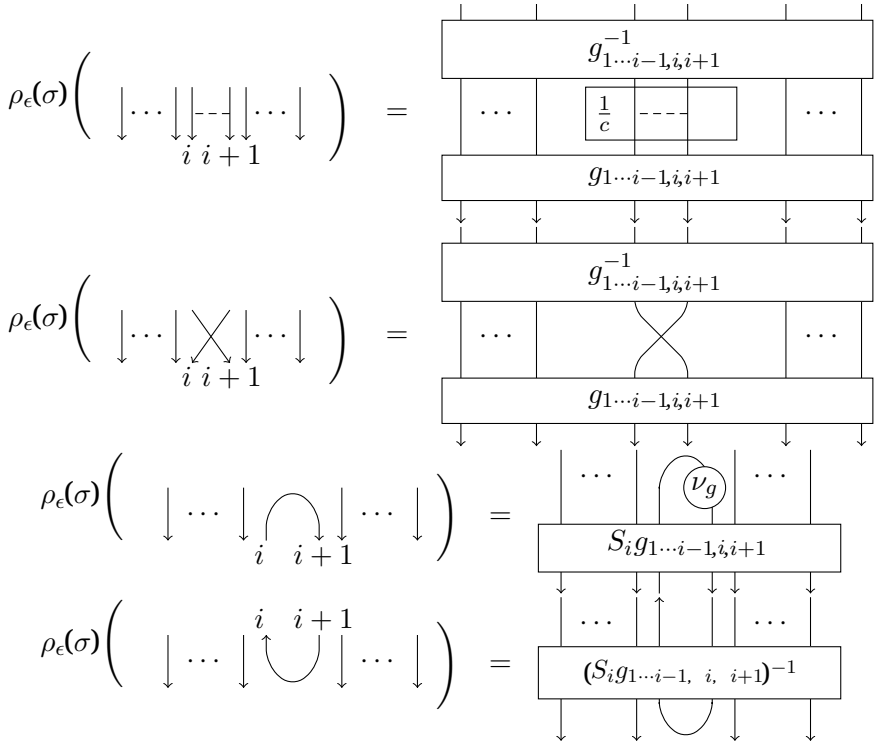


FIGURE 3. 基本无穷小缠结上的 $GRT(\mathbb{K})$-作用。在此，$\sigma = (c, g) \in GRT(\mathbb{K})$，并且当 $i \geq 2$ 时我们令$g_{1\cdots i-1,\ i,\ i+1} = \Delta_1^{i-2} g$；当$i = 1$时，则令$g_{1\cdots i-1,\ i,\ i+1} = 1$。元素 $\nu_g \in \mathcal{A}(\downarrow)_{\mathbb{K}}$ 的定义方式与第 2.4 节中的ν 相同，只需将 Φ替换为 g。

对于 $p = (1, \varphi) \in M_1(\mathbb{K})$。那么，对于 $\Gamma \in \mathbb{K}[\mathcal{SL}_\epsilon]$，我们有

$$\begin{aligned} Z_\Phi(\rho_\epsilon(\sigma)(\Gamma)) &= Z_{\Phi \bullet \sigma}(\Gamma) = Z_{r_p(\sigma)\bullet\Phi}(\Gamma) = \rho_\epsilon(r_p(\sigma))(Z_\Phi(\Gamma)) \\ &= F(r_p(\sigma), \epsilon) \cdot Z_\Phi(\Gamma) \cdot F(r_p(\sigma), \epsilon)^{-1}. \end{aligned}$$

在此，$F(r_p(\sigma)\ \epsilon)$ 是 $\mathcal{A}(\downarrow^\epsilon)_{\mathbb{K}}$ 的一个元素，它通过使用扭子 $F(r_p(\sigma)) \in \mathcal{A}(\downarrow\downarrow)_{\mathbb{K}}$ 定义；该扭子是 $GRT_1(\mathbb{K})$-扭子引理 [15, 引理 4.2] 的类似物。对等式两边应用 Z_Φ^{-1}，即可得到所需的共轭作用

$$\rho_\epsilon(\sigma)(\Gamma) = \varpi(\sigma, \epsilon) \cdot \Gamma \cdot \varpi(\sigma, \epsilon)^{-1}, \tag{3.4}$$

其中我们设 $\varpi(\sigma,\ \epsilon) := Z_\Phi^{-1}(F(r_p(\sigma)\ \epsilon)) \in \widehat{\mathbb{K}[\mathcal{SL}_\epsilon]}^\times$。

由于阐明第 2.4 节中回顾的结合子扭曲与 $GRT_1(\mathbb{K})$ 中元素的扭子之间的关系很有用，我们准备了以下引理。

引理 3.4. 对于任意 $\sigma = (1, g) \in GRT_1(\mathbb{K})$ 以及 $p = (1, \varphi) \in M_1(\mathbb{K})$，我们定义 $\Phi' = \varphi'(t_{12}, t_{23})$ 和 $\Phi = \varphi(t_{12}, t_{23})$，其中 $p' = (1, \varphi') = \sigma \bullet (1, \varphi) \in$

$\sim M_1(\mathbb{K})$。然后，通过扭子 $F(\sigma) \in \mathcal{A}(\downarrow\downarrow)_{\mathbb{K}}$ 对 Φ 进行扭曲，得到结合子 Φ'。

证明。这在 [15] 中是隐含的。设 $\epsilon_3 = +++$。根据 [15, 引理 4.2], 中给出的扭子定义 $F(\sigma)$，有 $g = F(\sigma, \epsilon_3)^{321} \cdot F(\sigma, \epsilon_3)^{-1}$，其中我们令

$$F(\sigma, \epsilon_3) = (F(\sigma) \otimes 1) \cdot \Delta_1(F(\sigma)),$$
$$F(\sigma, \epsilon_3)^{321} = (1 \otimes F(\sigma)) \cdot \Delta_2(F(\sigma)).$$

如 [15, 命题 4.7], 所示，有 $g^{-1} t_{23} g = F(\sigma, \epsilon_3) \cdot t_{23} \cdot F(\sigma, \epsilon_3)^{-1}$，且 $t_{12} = F(\sigma, \epsilon_3) \cdot t_{12} \cdot F(\sigma, \epsilon_3)^{-1} \in \mathcal{A}(\downarrow\downarrow\downarrow)_{\mathbb{K}}$，因为 $F(\sigma, \epsilon_3)^{321} \cdot t_{23} = t_{23} \cdot F(\sigma, \epsilon_3)^{321}$ 以及 $t_{12} \cdot F(\sigma, \epsilon_3) = F(\sigma, \epsilon_3) \cdot t_{12}$ 均成立。因此，根据 $\mathsf{GRT}_1(\mathbb{K})$ 在 $M_1(\mathbb{K})$ 上的作用定义，有

$$\begin{aligned}\Phi' &= g \cdot \Phi(t_{12}, g^{-1} t_{23} g) \\ &= (F(\sigma, \epsilon_3)^{321} \cdot F(\sigma, \epsilon_3)^{-1}) \cdot (F(\sigma, \epsilon_3) \cdot \Phi(t_{12}, t_{23}) \cdot F(\sigma, \epsilon_3)^{-1}) \\ &= F(\sigma, \epsilon_3)^{321} \cdot \Phi(t_{12}, t_{23}) \cdot F(\sigma, \epsilon_3)^{-1}\end{aligned}$$

因此我们得出结论：通过 $F(\sigma)$ 对 Φ 进行扭曲，会得到 Φ'，正如所需。 □

3.3. **Grothendieck–Teichm¨uller 群对2分量原代数弦环的作用**。本小节中，假设定理 1.2 成立，我们给出定理 1.5 的证明。

定理 *1.5* 的证明。我们先给出序列 $\epsilon = ++$ 的证明。根据 (3.4)，只需证明

$$F(r_p(\sigma)) \cdot Z_\Phi(\Gamma) \cdot F(r_p(\sigma))^{-1} \neq Z_\Phi(\Gamma)$$

$\frown$对某个 $\sigma \in GT_1(\mathbb{K})$、$\Gamma \in \mathbb{K}[\mathcal{SL}_\epsilon]$、$p = (1, \varphi) \in M_1(\mathbb{K})$ 以及 $\Phi = \varphi(t_{12}, t_{23})$ 成立。$\widehat{}$这里，$F(r_p(\sigma)) \in \mathcal{A}(\downarrow\downarrow)_{\mathbb{K}}$ 是 $r_p(\sigma) \in GRT_1(\mathbb{K})$ 的一个扭子。根据 $F(r_p(\sigma))$ 的构造和引理 3.4，只需证明

$$Z_{\Phi'}(\Gamma) \neq Z_\Phi(\Gamma), \tag{3.5}$$

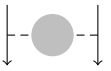
其中，$\Phi' = \varphi'(t_{12}, t_{23})$由 $p' = (1, \varphi') = r_p(\sigma) \bullet p = p \bullet \sigma$ 对于某个$\frown$ $\sigma \in \mathsf{GT}_1(\mathbb{K})$，$\Gamma \in \mathbb{K}[\mathcal{SL}_\epsilon]$以及 $p = (1, \varphi) \in M_1(\mathbb{K})$给出。根据定理 1.2，我们可以取一对水平结合子 Φ, Φ' 和一个满足 (3.5) 的 2 分支弦环$T \in \mathcal{SL}_2$。因此，选择一个 $\sigma \in \mathsf{GT}_1(\mathbb{K})$，使其$\frown$将 Φ 映到 Φ'和 $\Gamma = \iota(T)$，其中 ι: $\mathcal{SL}_2 \to \mathbb{K}[\mathcal{SL}_2]$ 是由典范包含映射 ι: $\mathcal{SL}_2 \to \mathbb{K}[\mathcal{SL}_2]$ 诱导的映射，我们得出结论：$\sigma \in \mathsf{GT}\ 1(\mathbb{K})$$\frown$在 $\Gamma = \iota(T) \in \mathbb{K}[\mathcal{SL}_2]$上的作用是非平凡的。对于其他序列 ϵ，证明几乎完全相同，因此省略细节。证明至此完成。□

4. The algebra $\mathcal{A}(\downarrow\downarrow)$ and the proof of Theorem 1.2

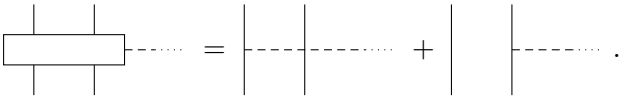
在本节中，我们将精确研究以两个区间为基底的 Jacobi 图代数 $\mathcal{A}(\downarrow\downarrow)$，并证明定理 1.2。

4.1. **() 的代数结构**。 下一个引理的证明基于 Katsumi Ishikawa 友好地向我们讲解的思路。

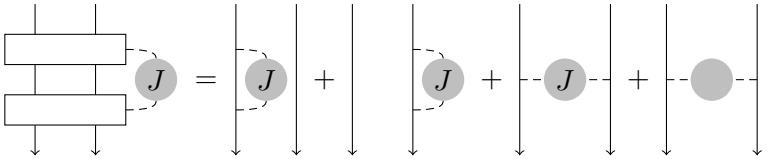
引理 4.1。 和 J + 包含 $\mathcal{A}(\downarrow\downarrow)$ 的 心中，其中第二项由第一项旋转 $J180$ 度得到。特别地，如果这两项相同，则 J 位于中心中。



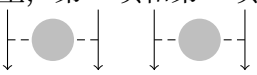
证明。 在此证明中，我们使用“方框”来表示图的和：



由 IHX 关系可知，方框与任意 Jacobi 图交换。特别地，



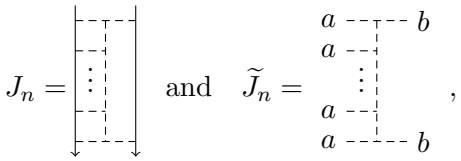
位于中心中。这里，第一项和第二项显然都位于中心中，因此 J + 位于中心中。□



推论 4.2 （[7, 第 5.11 节中的练习。2]）。 $\mathcal{A}_{\leq 2}(\downarrow\downarrow)$ 包含于 $\mathcal{A}(\downarrow\downarrow)$ 的中心中。

证明。根据 AS 关系和 STU 关系，只需证明 and 位于中心，这由引理 4.1 得出。□

对于有限集 C，令 $\mathcal{A}(C)$ 表示由 Jacobi 图生成的 $\mathbb{Q}$-向量空间，其中单价顶点由 C 中的元素着色，并满足 AS 关系和 IHX 关系。对于 $n \geq 3$，定义 $J_n \in \mathcal{A}(\downarrow\downarrow)$ 和 $J_n \in \mathcal{A}(\{a, b\})$ 如下：

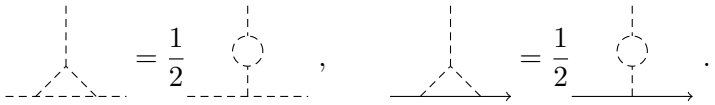


其中每个 Jacobi 图都有 $n+1$ 个单价顶点。

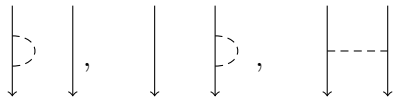
命题 4.3。 $\mathcal{A}_{\leq 3}(\downarrow\downarrow)$ 中的每个元素都彼此交换。

证明。 设 J 是 $\mathcal{A}_3(\downarrow\downarrow)$ 中的一个 Jacobi 图。当 J（虚线部分）不连通时，根据 STU 关系， J 可表示为次数为 3 的连通 Jacobi 图与次数为 ≤ 2 的图的乘积之和。因此，根据推论 4.2，只需证明每个次数为

3 的连通图彼此交换。这里回顾一下，AS、IHX 和 STU 关系给出了一些有用的恒等式



利用这些关系，我们证明任何次数为 3 的连通图都可以表示为 J_3 与由下述对象插入两次气泡（ J_3 ）所得到的 Jacobi 图的线性组合



因此，推论 4.2 完成了证明。□

作为命题 4.3 的推论，我们证明命题 1.1。

^命题 *1.1* 的证明。存在 $F \in \mathcal{A}(\downarrow\downarrow)$，使得 Φ' 可由 Φ 经由 F扭曲得到。由 [23, 定理 7] 可知， $F \cdot Z_\Phi(T) \cdot F^{-1} = Z_{\Phi'}(T)$，因此只需证明 $(F \cdot Z_\Phi(T) \cdot F^{-1})_{\leq 6} = Z_\Phi(T)_{\leq 6}$。令 z_d 和 F_d 分别为 $Z_\Phi(T)$ 与 F的次数 d 项。于是，推论 4.2 表明

$$\begin{aligned} F \cdot Z_\Phi(T) \cdot F^{-1} &\equiv 1 + z_1 + z_2 + F \cdot z_3 \cdot F^{-1} + z_4 + z_5 + z_6 \\ &\equiv 1 + z_1 + z_2 + z_3 + F_3 \cdot z_3 - z_3 \cdot F_3 + z_4 + z_5 + z_6 \end{aligned}$$

模去次数 ≥ 7。由于根据命题 4.3 有 $F_3 \cdot z_3 = z_3 \cdot F_3$，故证明完成。□

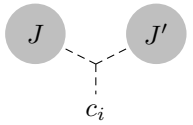
4.2. 定理 1.2 和命题 1.6 的证明。 本小节的目标是证明定理 1.2，主要任务是确立以下关键命题。

命题 4.4。 J_3 不与 *Jacobi* 图 J_{2n+1} 交换（对于$n \geq 2$）。

设 $\mathcal{A}$ 为 $\mathcal{A}(X)$ 或 $\mathcal{A}(C)$，其中 X 是一个定向紧致一维流形。我们将 $\mathcal{A}^c$ 记作由连通图生成的 $\mathcal{A}$ 的子空间，并将 $\mathcal{A}^t$ 记作 $\mathcal{A}$ 的商空间，其中规定：如果（ J 的虚线部分的）第一贝蒂数为正，则 $J = 0$。我们还定义 $\mathcal{A}^{c,t}$ 为 $\mathcal{A}^c$ 在投影 $\mathcal{A} \to \mathcal{A}^t$下的像。注意， $\mathcal{A}^t(C)$被视为 $\mathcal{A}(C)$的子空间。

令 $\downarrow^C$ 表示由 C 中元素所标记的区间的不交并。定义线性映射 τ: $\mathcal{A}^c(\downarrow^C) \to \mathcal{A}^{c,t}(C)$ 如下：若 $\tau(J) = 0$if $b_1(J) > 0$，则为此值；否则， $\tau(J)$ 是通过消去区间，并在单价顶点连接到标记为 c_i 的区间时将 $c_i \in C$ 赋给该顶点而从 J 得到的图。根据定义，它诱导出 τ: $\mathcal{A}^{c,t}(\downarrow^C) \to \mathcal{A}^{c,t}(C)$。此外，Poincar´e–Birkhoff–Witt 同构 χ: $\mathcal{A}(C) \to \mathcal{A}(\downarrow^C)$ 诱导出 $\mathcal{A}^{c,t}(C) \to \mathcal{A}^{c,t}(\downarrow^C)$，后者是 τ 的逆映射（参见 [7, 第 5 节 7。1]）。

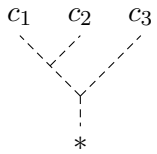
对于 J, $J' \in \mathcal{A}^{c,\,t}(C)$，定义 $[J, J']_1 \in \mathcal{A}^{c,\,t}(C)$ 如下：

$$[J, J']_1 = \sum$$ 

其中，求和遍历所有将 J中由 c_i 着色的单价顶点与 J' 中对每个 $c_i \in C$对应的单价顶点相连接的方式。根据定义，我们得到下面的引理。

引理 4.5。对于 $J, J' \in \mathcal{A}^{c,\,t}(\downarrow^C)$，差值 $J \cdot J' - J' \cdot J$属于 $\mathcal{A}^{c,\,t}(\downarrow^C)$且 $\tau(J \cdot J' - J' \cdot J) = [\tau(J)\ \tau(J')]_1$成立。

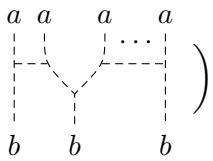
对于 Jacobi 图 $J \in \mathcal{A}(C)$，令 $U(J)$ 表示 J的单价顶点集合，并令 $\ell(u)$ 表示 $u \in U(J)$的颜色（标签）。回顾 [24, 第 3] 节，映射 $\eta\colon \mathcal{A}^{c,\,t}(C) \to \mathbb{Q}C \otimes L(C)$ 定义为$\sum_{u \in U(J)} \ell(u) \otimes J_u$，其中 J_u是由 J通过指定u为根而得到的二叉树。这里，J_u 被视为由 C 生成的自由李代数 $L(C)$ 上的一个元素，定义如下：



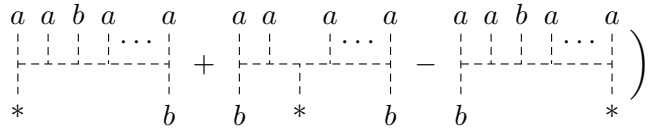
$$\leftrightarrow \quad [[c_1, c_2], c_3].$$

命题 *4.4* 的证明。令 $C = \{a, b\}$，并令 $\mathrm{pr}_b \otimes \mathrm{pr}_{2n+2,\,2}$ 表示从 $\mathbb{Q}C \otimes L(C)$ 到由形如 $b \otimes x$ 的元素生成的直和项的投影，其中李单项式 $x \in L(C)$ 恰由 $2n+2$ 个 a 和两个 b 组成。利用引理 4.5，我们证明

$$(\mathrm{pr}_b \otimes \mathrm{pr}_{2n+2,2}) \circ \eta(\tau(J_3 \cdot J_{2n+1} - J_{2n+1} \cdot J_3))$$

$$= (\mathrm{pr}_b \otimes \mathrm{pr}_{2n+2,2}) \circ \eta\Bigg(4 \cdot$$ 

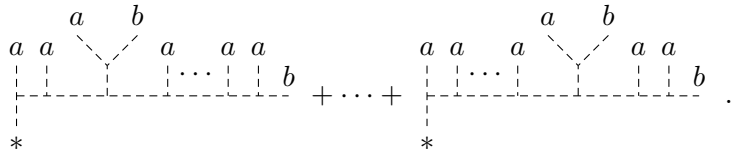
$$\Bigg)$$

$$= 4b \otimes \Bigg(-$$ 

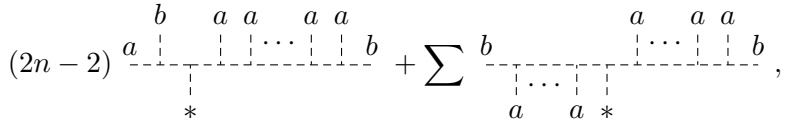
$$\Bigg).$$

让我们用 Hall 基 $\{b, a, [b, a], [b, [b, a]], [a, [b, a]], \ldots\}$ 来表示它。第二项除了符号之外，已经是这种形式。利用 IHX 关系，我们

可以将第一项和第三项之和表示为若干个 $2n-2$ 项之和：



再次利用 IHX 关系，可得



其中第二项是由左下方至少有两个 a 的图之和。[2] 由于所有项都属于 Hall 基，且 $2n-2\neq 0$，我们得出 $(\mathrm{pr}_b\otimes \mathrm{pr}^{2n+2,\ 2})\circ\eta(\tau(J_3\cdot J_{2n+1}-J_{2n+1}\cdot J_3))\neq 0$。□

定理 *1.2* 的证明。我们首先回顾 [17, 命题 13。1] 或 [27,命题 E。24]：对于任意结合子 $\Phi\in\mathcal{A}(\downarrow\downarrow\downarrow)_{\mathbb{K}}$，存在一个满足 $\sim Z_\Phi(T_n)_{\leq 2n+1}=1+J_{2n+1}$ 的 2 分支弦环 T_n。

对于 $\alpha\in\mathbb{K}\setminus\{0\}$，令 Φ' 为通过元素 $F=1+\alpha J_3+(\text{次数 }\geq 4)\in\mathcal{A}(\downarrow\downarrow)_{\mathbb{K}}$ 对 Φ 进行扭曲$\widehat{\ }$后得到的结合子。于是，$F\cdot Z_\Phi(T_n)=Z_{\Phi'}(T_n)\cdot F$。通过比较两边在次数 $2n+3$ 上的项，我们有 $Z_\Phi(T_n)_{2n+3}=Z_{\Phi'}(T_n)^{2n+3}$。另一方面，通过比较它们在次数 $2n+4$ 上的项，我们有

$$Z_\Phi(T_n)_{2n+4}+\alpha J_3\cdot J_{2n+1}=Z_{\Phi'}(T_n)_{2n+4}+\alpha J_{2n+1}\cdot J_3.$$

由于 $J_3\cdot J_{2n+1}-J_{2n+1}\cdot J_3\neq 0$ 根据命题 4.4，我们得出$Z_\Phi(T_n)_{2n+4}\neq Z_{\Phi'}(T_n)^{2n+4}$。

当 Φ 为水平的时，我们可以如下选择 Φ' 使其为水平的。假设存在一个元素 $\sigma\in GRT_1(\mathbb{K})$，使得

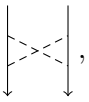
$$\Phi'=\sigma\bullet\Phi\equiv\Phi+2\alpha[A+B,[A,B]]\bmod(\deg\geq 4). \tag{4.1}$$

$\widehat{\ }$然后，根据引理 3.4，Φ' 可通过扭子 $F(\sigma)\in\mathcal{A}(\downarrow\downarrow)_{\mathbb{K}}$ 对 Φ 进行扭曲而得到，且满足 $F(\sigma)=1+\alpha J_3+(\text{次数 }\geq 4)$；上述论证在此情形下同样适用。因此，要证明该断言，只需证明存在这样的 $\sigma\in\mathrm{GRT}_1(\mathbb{K})$。事实上，这样的 σ 有很多。例如，可以取 $\sigma=\mathrm{Exp}(2\alpha\sigma_3)$，其中 $\mathrm{Exp}:\ \mathfrak{grt}_1(\mathbb{K})\to\mathrm{GRT}_1(\mathbb{K})$ 是指数态射（参见 [25, 第 14]章），$\mathfrak{grt}_1(\mathbb{K})$ 表示 $\mathrm{GRT}_1(\mathbb{K})$ 的李代数，而 $\sigma_3:=[A+B,[A,B]]$。回忆命题 [9, Proposi- tion 6.3 及第 859] 页注释 (2) 可知，σ_3 属于 $\mathfrak{grt}_1(\mathbb{K})$，并张成其 3 次部分。还要注意，$\sigma=\mathrm{Exp}(2\alpha\sigma_3)\equiv 1+2\alpha\sigma_3$ 模 (次数 ≥ 4)（见[9, 第 5]节）。因此，我们得到了所需的 (4.1)，证明完成。□

[2] 对于较小的 n，可以借助 Sage（[30]）提供的自由李代数模块，得到关于 Hall 基的精确展开。

如注 1.3 所述，当我们将定理 1.2 应用于偶有理水平结合子时， Φ' 可以取为 KZ 结合子，因为二者通过扭曲相关，正如定理 1.2 的证明中所示（回顾例 2.5）。类似地，从定理 1.2 的证明可以看出，由 Furusho 在 [10, 12]中引入的 p-进 KZ 结合子 $\Phi^p{}_{\mathrm{KZ}} \in GRT_1(\mathbb{Q}_p)$ 对 $\mathcal{A}(\downarrow\downarrow)^{\mathbb{Q}_p}$ 具有非平凡作用，因此，当 p-进 ζ 值 $\zeta_p(3)$ 不为零时， $GT_1(\mathbb{Q}_p)$ 中某个⏜元素的相应作用对 $\mathbb{Q}_p[\mathcal{SL}_2]$ 也同样非平凡。关于 p 满足条件 $\zeta_p(3) \neq 0$ 的情形，参见 [10,例 2.19、注 2.20]及其中的参考文献。

命题 *1.6* 的证明。如同 [7, 第 10.4 节的练习所述，2], 我们考虑扭曲

$$F = 1 + $$ 

它将 $2([t_{12}, t_{23}] + t_{12}t_{13} - t_{23}t_{13})$ 加到结合子的 2 次项中。注意，通过 F 进行的扭曲不会保持水平结合子，因为它们的 2 次项由 $\frac{1}{24}[t_{12}, t_{23}]$ ([13, 定理 1]) 唯一确定。令 Φ' 为结合子 Φ 经由 F得到的结合子，则根据推论 4.2，有等式 $Z_{\Phi'}(T) = F \cdot Z_\Phi(T) \cdot F^{-1} = Z_\Phi(T)$。□

5. Lie algebra weight systems for the algebra $\mathcal{A}(\downarrow\downarrow)$

本节给出定理 1.4 的证明。设 $\mathbb{K}$为一个特征为 0 的域。

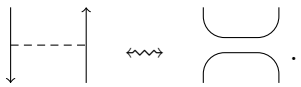
5.1.经典李代数标准表示所对应的权系 $\mathcal{A}(\downarrow\downarrow)$。 Bar-Natan提出了一种优雅的方法，用于计算某个李代数的标准表示所对应的弦图权系（关于圆上的弦图，参见 [1], [7, 第6节。1] S^1）。本节专门研究 $\mathcal{A}(\downarrow\downarrow)$ 的权系，并证明它们的像构成交换子代数。

设 N 为正整数。令 $e_{i,\ j}$表示这样一个矩阵：其第（i， j）个元素为 1，其余元素均为 0（i， $j = 1$， ……， N）。回顾一下，矩阵 $e_{i,\ j}$构成 $\mathfrak{gl}_N = \mathfrak{gl}_N(\mathbb{K})$ 的一组基。与第 2.2 节中一样，迹型 $B_0(x,\ y) = \mathrm{tr}(xy)$ 是 $\mathfrak{gl}_N$ 上的对称非退化的伴随不变双线性型。我们有$B_0(e_{i,\ j},\ e_{k,\ l}) = \delta_{il}\delta_{jk}$，因此相对于 B_0， $e_{i,\ j}^* = e_{j,\ i}$。

命题 5.1. 设 B_0 为 $\mathfrak{gl}_N$ 上的迹型，且 $\mathrm{St}\colon \mathfrak{gl}_N \to \mathrm{End}(\mathbb{K}^N)$ 为 $\mathfrak{gl}_N$ 的标准表示。令 $W_{\mathrm{St}\mathfrak{gl}_N}\colon \mathcal{A}(\downarrow\downarrow)_{\mathbb{K}} \to \mathrm{End}(\mathbb{K}^N)^{\otimes 2}$ 表示与三元组 $(\mathfrak{gl}_N, B_0, \mathrm{St})$ 相关联的权系。那么，对于作为弦图的雅可比图 $J \in \mathcal{A}(\downarrow\downarrow)_{\mathbb{K}}$，有如下结论。

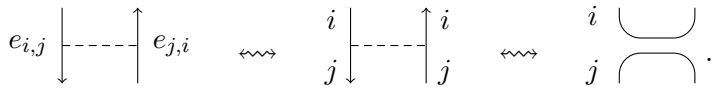
$$W^{\mathrm{St}}_{\mathfrak{gl}_N}(J) = \begin{cases} N^{s(J)-2}\,\mathrm{id}_{\mathbb{K}^N} \otimes \mathrm{id}_{\mathbb{K}^N} & (\textit{if } J \textit{ is of type II}), \\ N^{s(J)-2}\,\sum_{i,j=1}^{N} e_{i,j} \otimes e_{j,i} & (\textit{if } J \textit{ is of type X}), \end{cases}$$

其中 $s(J)$ 表示将 J 的所有弦按如下方式加倍后所得曲线的连通分支数：

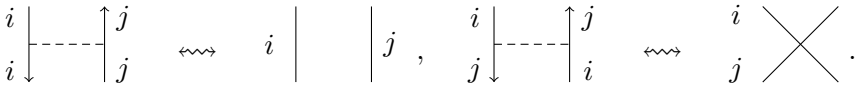


这里，J 若经加倍得到的非闭曲线呈 *II* 形，则称其为 *II* 型；若呈 *X* 形，则称其为 *X* 型。

证明。 证明与 [7, 定理 6.7], 类似，其中考虑的是 $\mathcal{A}(S^1)$ 的权系 $W_{\mathfrak{gl}_N}^{\mathrm{St}}$ 。因此，我们只给出证明概要。根据 $W_{\mathfrak{gl}_N}^{\mathrm{St}}$ 的定义，我们将二次 Casimir 张量$\mathbf{1}_{\mathfrak{gl}_N} = \sum_{i,j=1}^{N} e_{i,j} \otimes e_{i,j}^* = \sum_{i,j=1}^{N} e_{i,j} \otimes e_{j,i}$ 赋给 J的每条边，然后按照区间的定向，将与各边端点相关联的矩阵相乘。此外，标准基 $\{e_{i,j}\}$满足条件 $e_{i,j}e_{k,l} = \delta_{jk}e_{il}$，这对沿区间相乘的矩阵乘积中的指标施加了很强的约束。因此，我们可以如下表示将 $e_{i,j} \otimes e_{j,i}$ 赋给一条边的方式：



从这个图示表达式可以看出，对于 J 的边集上的每个状态（回顾第 2.2 节），沿区间的矩阵乘积会得到以下形式之一的算子：$e_{i,i} \otimes e_{j,j}$ 或 $e_{i,j} \otimes e_{j,i}$，分别对应于以下图：



为了得到 $W_{\mathrm{St}\mathfrak{gl}_N}(J)$，我们必须对所有可能指标对应的这类算子求和。指标的数量对应于上述消解过程得到的曲线的连通分支上，赋给指标 $i, j, k, \ldots$ 的数值个数。每个连通分支恰有 N 种选择，因此，除去对应于两个区间的求和项，总数为 $N^{s(J)-2}$。计算对应于两个区间的求和后，我们得到以下两种形式之一的元素：

$$\sum_{i,j} e_{i,i} \otimes e_{j,j} = \mathrm{id}_{\mathbb{K}^N} \otimes \mathrm{id}_{\mathbb{K}^N}, \quad \sum_{i,j} e_{i,j} \otimes e_{j,i} = \mathbf{1}_{\mathfrak{gl}_N}.$$

因此，断言得证。 □

注记 5.2。 图 4 中描绘的 - 形曲线并不是通过命题 5.1 中所述的消解得到的。然而，当我们考虑 $\mathcal{A}(\downarrow\uparrow)$ 或 $\mathcal{A}(\uparrow\downarrow)$ 时，与前一种情况不同， X-形曲线不会出现，而 - 形曲线会出现。 ⊃⊂

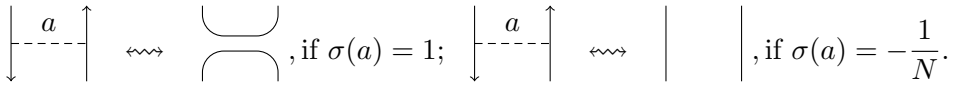


FIGURE 4. Jacobi 图在 $\mathcal{A}(\downarrow\downarrow)$ 中消解后得到的三种可能的非闭曲线。

推论5.3。像 $\operatorname{Im} W_{\mathrm{St}\mathfrak{gl}_N} \subset \operatorname{End}(\mathbb{K}^N)^{\otimes 2}$ 是交换的。

证明。对 $\downarrow\downarrow$ 和 $t_{12} \in U(\mathfrak{t}_2)_{\mathbb{K}} \subset \mathcal{A}(\downarrow\downarrow)_{\mathbb{K}}$ 应用 $W_{\mathrm{St}\mathfrak{gl}_N}$，分别得到 $W_{\mathrm{St}\mathfrak{gl}_N}(\downarrow\downarrow) = \mathrm{id}_{\mathbb{K}^N} \otimes \mathrm{id}_{\mathbb{K}^N}$ 和 $W^{\mathrm{St}}_{\mathfrak{gl}_N}(t_{12}) = \sum e_{i,\,j} \otimes e_{j,\,i}$。因此，由命题 5.1 可知，$\operatorname{Im} W_{\mathrm{St}\mathfrak{gl}_N}$ 由 $W_{\mathrm{St}\mathfrak{gl}_N}(\downarrow\downarrow)$ 和 $W^{\mathrm{St}}_{\mathfrak{gl}_N}(t_{12})$ 张成，因此 $\operatorname{Im} W_{\mathrm{St}\mathfrak{gl}_N}$ 构成 $\operatorname{End}(\mathbb{K}^N)^{\otimes 2}$ 的一个交换子代数。□

接下来，我们考虑与 $\mathfrak{sl}_N = \mathfrak{sl}_N(\mathbb{K})$ 相关联的权系以及标准表示 $\mathrm{St}\colon \mathfrak{sl}_N \to \operatorname{End}(\mathbb{K}^N)$。与 [7, 第6.1节7],一样，我们回顾弦图的状态这一概念。对于任意 Jacobi 图 $J \in \mathcal{A}(\downarrow\downarrow)_{\mathbb{K}}$，我们取其一个弦图代表元。于是，与 $\mathfrak{sl}_N$ 和 St 相关联的状态 $\sigma = \sigma^{\mathrm{St}}_{\mathfrak{sl}_N}$ 是一个映射 $\sigma\colon E_J \to \{1, -\frac{1}{N}\}$，其中 E_J 表示 J（所选代表元）的弦集。对于每个状态 σ，我们对其所有弦应用以下消解过程，从 J 得到一条浸入曲线：



, if $\sigma(a) = 1$; , if $\sigma(a) = -\dfrac{1}{N}$.

令 $|\sigma|$ 表示所得曲线的连通分支数。则，与 $\mathfrak{sl}_N$ 和 St 相关联的权系可用图示方式计算如下。

命题5.4。令 B_0 为 $\mathfrak{sl}_N$ 上的迹型，且 $\mathrm{St}\colon \mathfrak{sl}_N \to \operatorname{End}(\mathbb{K}^N)$ 为 $\mathfrak{sl}_N$ 的标准表示。令 $W_{\mathrm{St}\mathfrak{sl}_N}\colon \mathcal{A}(\downarrow\downarrow)_{\mathbb{K}} \to \operatorname{End}(\mathbb{K}^N)^{\otimes 2}$ 表示与三元组 $(\mathfrak{sl}_N, B_0, \mathrm{St})$ 相关联的权系。那么，对于任意一个视为弦图的 ***Jacobi*** 图 $J \in \mathcal{A}(\downarrow\downarrow)_{\mathbb{K}}$，有

$$W^{\mathrm{St}}_{\mathfrak{sl}_N}(J) = \sum_{\sigma} \left(\prod_{a} \sigma(a) \right) N^{|\sigma|-2} W_{J_\sigma},$$

其中，乘积遍历 J 的所有弦，而求和遍历 J 的所有状态 $\sigma = \sigma^{\mathrm{St}}_{\mathfrak{sl}_N}$。这里我们定义

$$W_{J_\sigma} = \begin{cases} \mathrm{id}_{\mathbb{K}^N} \otimes \mathrm{id}_{\mathbb{K}^N} & (\textit{if } J_\sigma \textit{ is of type II}), \\ \sum_{i,j=1}^{N} e_{i,j} \otimes e_{j,i} & (\textit{if } J_\sigma \textit{ is of type X}), \end{cases}$$

且 J_σ 表示通过与 σ 相关的消解过程得到的曲线的连通分支，这些分支是非闭曲线。

证明。只需证明以下恒等式

$$\begin{aligned}\mathbf{1}_{\mathfrak{sl}_N} &= \sum_{i,j=1}^{N} e_{i,j}\otimes e_{j,i} - \frac{1}{N}\mathrm{id}_{\mathbb{K}^N}\otimes\mathrm{id}_{\mathbb{K}^N}\\ &= \mathbf{1}_{\mathfrak{gl}_N} - \frac{1}{N}\mathrm{id}_{\mathbb{K}^N}\otimes\mathrm{id}_{\mathbb{K}^N}\in \mathrm{End}(\mathbb{K}^N)^{\otimes 2}\end{aligned}$$

关于相对于 B_0 的二次 Casimir 张量，因为一旦接受命题 5.1，便可应用与其相同的论证。尽管这一点可能已为人所知，但为方便读者起见，我们对上述恒等式的证明作一简述。我们取由 $e_{i、j}$ 的矩阵（其中 $i\neq j$）以及如下矩阵 $h_i:=e_{i、i}-e_{i+1、i+1}$ （$i=1、2、\ldots\ldots、N-1$）组成的 $\mathfrak{sl}_N$ 的基，正如第 6] 节中的[7,习题所述。令

$$\begin{aligned}e_k &:= (h_1+2h_2+\cdots+kh_k)\\ &= (e_{1,1}+e_{2,2}+\cdots+e_{k,k}-ke_{k+1,k+1})\end{aligned}$$

对于 $k=1、2、\ldots\ldots、N-1$。于是，我们有 $B_0(e_k、e_l)=k(1+k)\delta_{kl}$，其中 $k、l$，以及$B_0(e_{i、j}、e_k)=0$，对于任意 $i\neq j$ 和 k 均成立。因此，相对于 B_0，e_k 的对偶 e_k^* 为$e_k^*=\frac{1}{(1+k)}e_k$。注意，$e_{i、j}(i\neq j)$ 和 e_k 构成 $\mathfrak{sl}_N$ 的一个基。因此，Casimir张量可写为

$$\mathbf{1}_{\mathfrak{sl}_N}=\sum_{i\neq j=1}^{N} e_{i,j}\otimes e_{j,i}+\sum_{k=1}^{N-1} e_k\otimes e_k^*.$$

那么，只要证明

$$\sum_{k=1}^{N-1} e_k\otimes e_k^* = \sum_{i=1}^{N} e_{i,i}\otimes e_{i,i} - \frac{1}{N}\mathrm{id}_{\mathbb{K}^N}\otimes\mathrm{id}_{\mathbb{K}^N},$$

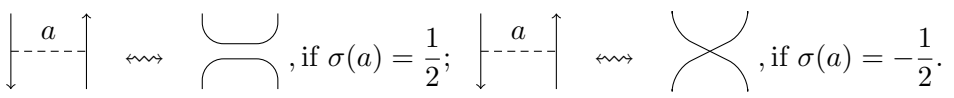
这一点可通过直接计算验证。 □

推论5.5. 像 $W_{\mathrm{St}\mathfrak{sl}_N}\subset \mathrm{End}(\mathbb{K}^N)^{\otimes 2}$ 是交换的。

证明. 与 Im $W_{\mathrm{St}\mathfrak{gl}_N}$的情形一样，像 Im $W_{\mathfrak{sl}_N}^{\mathrm{St}}$ 也由$W_{\mathrm{St}\mathfrak{gl}_N}(\downarrow\downarrow)$ 和 $W_{\mathfrak{gl}_N}^{\mathrm{St}}(t_{12})$ 张成。因此，断言得证。□

注 5.6. 由于 $W_{\mathrm{St}\mathfrak{gl}_N}(t_{12})^2=\mathrm{id}_{\mathbb{K}^N}\otimes\mathrm{id}_{\mathbb{K}^N}$，像 Im $W_{\mathfrak{gl}_N}^{\mathrm{St}}$ 和 Im $W_{\mathrm{St}\mathfrak{sl}_N}$与 $\mathrm{End}(\mathbb{K}^N)^{\otimes 2}$ 中同构于 $\mathbb{K}[\mathfrak{S}_2]$阶为 2 的对称群 $\mathfrak{S}_2$ 的群环的子代数重合。

接下来，我们考虑与 $\mathfrak{so}_N=\mathfrak{so}_N(\mathbb{K})$ 及标准表示 St: $\mathfrak{so}_N\to\mathrm{End}(\mathbb{K}^N)$ 相关联的权系。与 $\mathfrak{sl}_N$ 的情形一样，对于任意作为弦图的 $J\in\mathcal{A}(\downarrow\downarrow)_{\mathbb{K}}$，我们将状态 $\sigma=\sigma_{\mathfrak{so}_N}^{\mathrm{St}}$ 定义为映射$\sigma\colon E_J\to\{\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\}$，并将 J 的相应消解定义如下:



与 $\mathfrak{sl}_N$ 的情形一样，我们用 $|\sigma|$ 表示以这种方式得到的曲线的连通分支数。与 $\mathfrak{so}_N$ 及 St 相关联的权系的图示计算如下所述。

命题 5.7。设 B_0 是 $\mathfrak{so}_N$ 上的迹型，且 St: $\mathfrak{so}_N \to \mathrm{End}(\mathbb{K}^N)$ 是 $\mathfrak{so}_N$ 的标准表示。令 $W_{\mathrm{St}^{\mathfrak{so}_N}}$: $\mathcal{A}(\downarrow\downarrow)_{\mathbb{K}} \to \mathrm{End}(\mathbb{K}^N)^{\otimes 2}$ 表示与三元组 ($\mathfrak{so}_N$、B_0、St) 相关联的权系。于是，对于任意 ***Jacobi*** 图 $J \in \mathcal{A}(\downarrow\downarrow)_{\mathbb{K}}$，将其视为弦图时，有

$$W^{\mathrm{St}}_{\mathfrak{so}_N}(J) = \sum_{\sigma} \left(\prod_{a} \sigma(a) \right) N^{|\sigma|-2} W_{J_\sigma},$$

其中，乘积遍历 J 的所有弦，求和遍历 J 的所有状态$\sigma = \sigma^{\mathrm{St}}_{\mathfrak{so}_N}$，记

$$W_{J_\sigma} = \begin{cases} \mathrm{id}_{\mathbb{K}^N} \otimes \mathrm{id}_{\mathbb{K}^N} & (\textit{if } J_\sigma \textit{ is of type II}), \\ \sum_{i,j=1}^{N} e_{i,j} \otimes e_{j,i} & (\textit{if } J_\sigma \textit{ is of type X}), \\ \sum_{i,j=1}^{N} e_{i,j} \otimes e_{i,j} & (\textit{otherwise}), \end{cases}$$

而 J_σ 表示通过与 σ 相关的消解过程得到的曲线中属于非闭曲线的连通分支。

证明。取 $\mathfrak{so}_N$ 的基为 $e_{i,\,j} - e_{j,\,i}$ $(i < j)$，则关于迹型 B_0 的二次 Casimir 张量可表示为

$$\begin{aligned} \mathbf{1}_{\mathfrak{so}_N} &= \sum_{i<j} \frac{1}{2}(e_{i,j} - e_{j,i}) \otimes (e_{j,i} - e_{i,j}) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{N} e_{i,j} \otimes e_{j,i} - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{N} e_{i,j} \otimes e_{i,j}. \end{aligned}$$

利用这个二次 Casimir 张量，通过与命题 5.1 类似的论证即可得出该结论。□

推论 5.8. 像 $\mathrm{Im}\ W_{\mathrm{St}^{\mathfrak{so}_N}} \subset \mathrm{End}(\mathbb{K}^N)^{\otimes 2}$ 是交换的。

证明. 根据命题 5.7，像 Im $W^{\mathrm{St}}_{\mathfrak{so}_N}$ 由 $\mathrm{id}_{\mathbb{K}^N} \otimes \mathrm{id}_{\mathbb{K}^N}$,$\sum_{i\ ,j=1}^{N} e_{i,j} \otimes e_{j,i}$ 以及 $\sum_{i\ ,j=1}^{N} e_{i,j} \otimes e_{i,j}$张成。由于 $\sum_{i\ ,j=1}^{N} e_{i,j} \otimes e_{j,i}$ 和 $\sum_{i\ ,j=1}^{N} e_{i,j} \otimes e_{i,j}$ 可交换，因此我们得出像 Im $W^{\mathrm{St}}_{\mathfrak{so}_N}$ 是交换的，正如所需。□

命题 5.9. 令 $\mathfrak{sp}_{2N} = \mathfrak{sp}_{2N}(\mathbb{K})$表示 $\mathfrak{sp}_{2N}$ 上的迹型，St: $\mathfrak{sp}_{2N} \to \mathrm{End}(\mathbb{K}^{2N})$ 表示 $\mathfrak{sp}_{2N}$ 的标准表示。令$W_{\mathrm{St}^{\mathfrak{sp}_{2N}}}$: $\mathcal{A}(\downarrow\downarrow)_{\mathbb{K}} \to \mathrm{End}(\mathbb{K}^{2N})^{\otimes 2}$ 为与三元组 ($\mathfrak{sp}_{2N}, B_0,$ St)相关联的权系。那么，像 $\mathrm{Im}\ W_{\mathrm{St}^{\mathfrak{sp}_{2N}}} \subset \mathrm{End}(\mathbb{K}^{2N})^{\otimes 2}$ 是交换的。

证明。我们取 $\mathfrak{sp}_{2N}$ 的基，它由以下元素组成

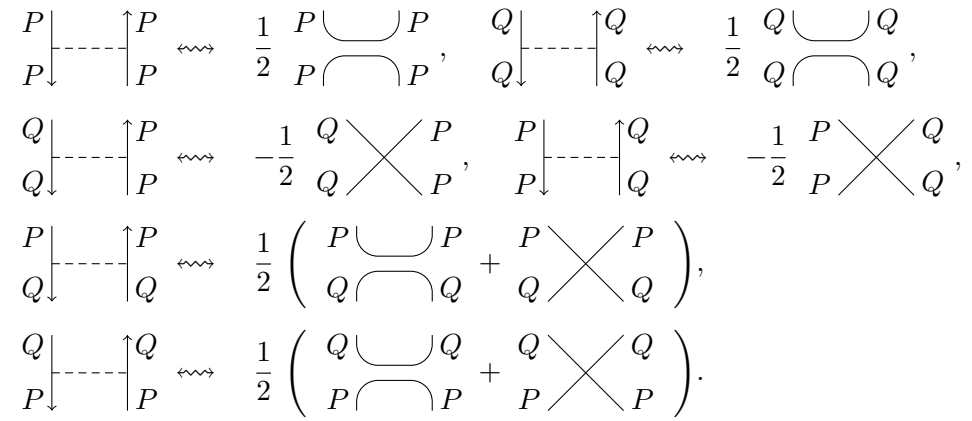
$$e_{i+N,j} + e_{j+N,i} \quad (1 \le i < j \le N),$$

$$
\begin{aligned}
&e_{i+N,j}-e_{j-N,i} \quad (1\le i\le N, N+1\le j\le 2N),\\
&e_{i-N,j}+e_{j-N,i} \quad (N+1\le i<j\le 2N),\\
&e_{i+N,i},\quad e_{i,i+N} \quad (1\le i\le N).
\end{aligned}
$$

那么，经过简单计算，关于迹型 B_0 的 $\mathfrak{sp}_{2N}$的二次 Casimir 张量 $\mathbf{1}_{\mathfrak{sp}_{2N}}$ 可表示为

$$
\begin{aligned}
\mathbf{1}_{\mathfrak{sp}_{2N}} = &\frac{1}{2}\sum_{1\le i,j\le N}(e_{i+N,j}\otimes e_{j,i+N}+e_{i+N,j}\otimes e_{i,j+N})\\
&+\frac{1}{2}\sum_{1\le i,j\le N}(e_{i,j+N}\otimes e_{j+N,i}+e_{i,j+N}\otimes e_{i+N,j})\\
&+\frac{1}{2}\sum_{1\le i,j\le N}(e_{i+N,j+N}\otimes e_{j+N,i+N}+e_{i,j}\otimes e_{j,i})\\
&-\frac{1}{2}\sum_{1\le i,j\le N}(e_{i+N,j+N}\otimes e_{i,j}+e_{i,j}\otimes e_{i+N,j+N}).
\end{aligned}
$$

那么，根据 $\mathbf{1}_{\mathfrak{sp}_{2N}}$ 的这一表达式， $W^{\mathrm{St}}_{\mathfrak{sp}_{2N}}$ 的计算可归结为如下图示计算，如 [1, 第 17]页所示。我们将弦图 J 在 $\mathcal{A}(\downarrow\downarrow)_{\mathbb{K}}$ 中的状态 $\sigma=\sigma^{\mathrm{St}}_{\mathfrak{sp}_{2N}}$ 定义为一个映射：它将由单价顶点分割的区间上的所有弧构成的集合映射到由符号 P 和 Q 组成的集合 $\{P,Q\}$ 。然后，对于每个状态 σ，我们考虑 J 的相应消解，如下所示：



在这里，我们可以将标记为 P 的弧理解为以 1、.....、 N 为指标，将标记为 Q 的弧理解为以 $N+1$、.....、 $2N$ 为指标。请注意，不同于 [1, 第 17]，页， J 的消解所得到的曲线也继承了符号 P 和 Q 的标记信息，但在统计闭曲线的贡献时，如 [1, 第 17] 页所示，标签是否存在并无影响。因此，作为这一图示计算的结果，我们最终得到以下形式的算子线性组合

算子

$$\mathrm{id}_{\mathbb{K}^{2N}} \otimes \mathrm{id}_{\mathbb{K}^{2N}}, \quad \sum_{i,j=1}^{N} e_{i,j} \otimes e_{j,i}, \quad \sum_{i,j=1}^{N} e_{i+N,j+N} \otimes e_{j+N,i+N},$$
$$\sum_{i,j=1}^{N} e_{i,j+N} \otimes e_{j+N,i}, \quad \sum_{i,j=1}^{N} e_{i+N,j} \otimes e_{j,i+N}, \quad \sum_{i,j=1}^{N} e_{i,j} \otimes e_{i+N,j+N},$$
$$\sum_{i,j=1}^{N} e_{i+N,j+N} \otimes e_{i,j}, \quad \sum_{i,j=1}^{N} e_{i+N,j} \otimes e_{i,j+N}, \quad \sum_{i,j=1}^{N} e_{i,j+N} \otimes e_{i+N,j}$$

并且它们彼此交换。这意味着像 Im $W_{\mathfrak{sp}_{2N}}^{\mathrm{St}}$ 是交换的，正如所要求的那样。□

5.2. **通用 $\mathfrak{sl}_2$ 权系 $\mathcal{A}(\downarrow\downarrow)$**。在本小节中，我们进一步探讨 $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{K})$ 情形下的权系。下面将证明，所关联的权系在通用层面上具有交换像。

命题 5.10。设 $\mathfrak{sl}_2 = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{K})$，并设 B_0 为其上的迹型。令$W_{\mathfrak{sl}_2}$： $\mathcal{A}(\downarrow\downarrow)_{\mathbb{K}} \to U(\mathfrak{sl}_2)^{\otimes 2}$ 表示与度量李代数 $(\mathfrak{sl}_2, B_0)$相关联的通用 $\mathfrak{sl}_2$ 权系。则， $W_{\mathfrak{sl}_2}$ 的像是交换的。

证明。设 $\mathcal{A} = \mathcal{A}(\downarrow\downarrow)_{\mathbb{K}}$ 和 $W = W_{\mathfrak{sl}_2}$。只需证明，对于任意 $d \geq 1$， $W(\mathcal{A}_{\leq d}) \subset Z(\mathrm{Im}\ W)$，其中 $Z(\mathrm{Im}\ W)$ 表示像 Im W的中心。我们对 d进行归纳证明。对于 $d = 2$，由于 $\mathcal{A}_{\leq 2} \subset Z(\mathcal{A})$，由推论 4.2可知结论成立。假设对于 $d-1$结论成立。对于 $J \in \mathcal{A}_d$，有以下三种可能性（见图 5）：

(a) J 至少包含一个 H形子图。(b) J 不包含 H形子图，但至少包含一个Y形子图。(c) J既不包含 H形子图，也不包含 Y形子图，即 J 仅由弦组成。

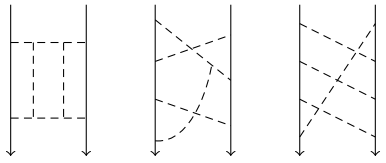
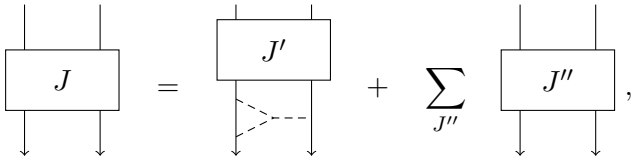


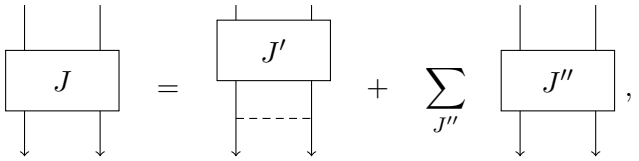
FIGURE 5. 情形 (a)、(b) 和 (c) 的典型示例。

对于情形 (a)，skein 关系 (2.1) 蕴含 $J \in \mathcal{A}_{d-1}(\downarrow\downarrow)$，因此根据归纳假设，$W(J) \in Z(\mathrm{Im}\ W)$ 成立。对于情形 (b),

反复对 Y 形子图的单价顶点及其相邻的单价顶点应用 STU 关系，可得



其中 $J' \in \mathcal{A}_{d-2}$ 以及和式中的所有图 J'' 都至少包含一个 H 形子图。注意，在这个等式中，我们默认 Y 形子图位于两条弦上。不过，如果 Y 形子图仅位于两条弦中的一条上，也有类似的等式。因此，归纳假设和情形 (a) 的论证表明 $W(J) \in Z(\mathrm{Im}\ W)$。对于情形 (c)，与情形 (b) 一样，对 J 中的一条弦反复应用 STU 关系，可得以下等式：



其中 $J' \in \mathcal{A}_{d-1}$ 以及和式中的图 J'' 由情形 (b) 的 Jacobi 图组成。因此，根据归纳假设和情形 (b) 的推论，我们得出 $W(J) \in Z(\mathrm{Im}\ W)$。再次注意，在上面的等式中，我们展示的是对 J 中位于两条弦上的一条弦应用 STU 关系的结果；但如果选择 J 中位于两条弦之一上的另一条弦，也能得到类似的等式。因此，该断言得证。□

5.3. **定理 1.4 的证明**。 定理 1.4 是下述定理的推论。

定理 5.11。 设 N 为正整数。对于任意结合子 Φ 以及两股上的权系 $W \in \{W_{\mathfrak{sl}_2}, W^{\mathrm{St}}_{\mathfrak{gl}_N}, W^{\mathrm{St}}_{\mathfrak{sl}_N}, W_{\mathrm{St}_{\mathfrak{so}_N}}, W_{\mathrm{St}_{\mathfrak{sp}_{2N}}}\}$，复合映射 $W \circ Z_\Phi$ 与结合子 Φ的选取无关。

证明。 如第 2.4 节所述，对于结合子 Φ, Φ' 和任意 2 分支弦环 T，有 $Z_{\Phi'}(T) = F \cdot Z_\Phi(T) \cdot F^{-1}$，其中 $F \in \mathcal{A}(\downarrow\downarrow)_{\mathbb{K}}$。由于 W 是代数同态，因此有 $W \circ Z_{\Phi'}(T) = W(F)(W \circ Z_\Phi(T))W(F)^{-1}$。由此恒等式以及推论 5.3、5.5、5.8 和命题 5.9、5.10 即得所述结论。□

注记 5.12。 定理 5.11 对于 $\mathcal{A}(\downarrow^\epsilon)$ 同样成立，其中 $\epsilon = +-,\ -+,\ --$只需对前几小节中给出的论证稍作修改。更准确地说，唯一的区别在于，将对偶表示赋予带有字母 $-$ 的区间，其余部分与 $\mathcal{A}(\downarrow\downarrow)$ 的情形基本相同。

Appendix A. Computational results on $\mathfrak{grt}_1$ and Drinfeld associators

本附录给出了李代数 $\mathfrak{grt}_1(\mathbb{K})$ 在低次数下的一个基的显式形式，这些形式由 SageMath 程序得到。计算结果主要归功于 Adrien Brochier [4]。

Grothendieck–Teichmüller 李代数 $\mathfrak{grt}_1(\mathbb{K})$ 是$GRT_1(\mathbb{K})$ 的李代数，由满足以下条件的 $\psi \in \mathfrak{f}(A,B)_{\mathbb{K}}$ 构成：

$$\begin{aligned}
&\psi(B,A) = -\psi(A,B),\\
&\psi(C,A)+\psi(B,C)+\psi(A,B) = 0 \quad \text{for } A+B+C=0,\\
&\psi(t_{12},t_{23}+t_{24})+\psi(t_{13}+t_{23},t_{34})\\
&\qquad = \psi(t_{23},t_{34})+\psi(t_{12}+t_{13},t_{24}+t_{34})+\psi(t_{12},t_{23}) \quad \text{in } U(\mathfrak{t}_4)_{\mathbb{K}}.
\end{aligned}$$

$\mathfrak{grt}_1(\mathbb{K})$ 的李代数结构由称为 *Ihara*括号 的括号运算给出，定义如下：对于 ψ_1, $\psi_2 \in \mathfrak{grt}_1(\mathbb{K})$,

$$\{\psi_1,\psi_2\} = D_{\psi_1}(\psi_2) - D_{\psi_2}(\psi_1) - [\psi_1,\psi_2],$$

其中 $D_{\psi_i}(i=1,2)$ 是 $\mathfrak{f}(A,B)_{\mathbb{K}}$ 上由 $D_{\psi_i}(A) = 0$和 $D_{\psi_i}(B) = [\psi_i, B]$确定的导子。与 [7, 第 10.2 节7], 中一样，为了简化记号，我们设

$$C_{kl} = \mathrm{ad}_B^{k-1}\,\mathrm{ad}_A^{l-1}[A,B] \quad (k,l \geq 1).$$

然后，可以验证， $\mathfrak{grt}_1(\mathbb{K})$的 ≤ 8 次部分由$\mathfrak{grt}_1(\mathbb{K})$
$_{\leq 8} = \mathbb{K}\sigma_3 \oplus \mathbb{K}\sigma_5 \oplus \sigma_7 \oplus \mathbb{K}\{\sigma_3,\sigma_5\}$给出，其中

$$\begin{aligned}
\sigma_3 &= C_{12}+C_{21},\\
\sigma_5 &= C_{14}+C_{41}+2(C_{23}+C_{32})+\frac{1}{2}[C_{11},C_{12}]+\frac{3}{2}[C_{11},C_{21}],\\
\sigma_7 &= C_{16}+C_{61}+3(C_{25}+C_{52})+5(C_{34}+C_{43})+4[C_{11},C_{14}]+13[C_{11},C_{23}]\\
&\quad +12[C_{11},C_{32}]+5[C_{11},C_{41}]+3[C_{12},C_{13}]+\frac{61}{16}[C_{12},C_{22}]\\
&\quad -\frac{19}{16}[C_{12},C_{31}]+\frac{99}{16}[C_{21},C_{13}]+\frac{179}{16}[C_{21},C_{22}]+3[C_{21},C_{31}]\\
&\quad +\frac{65}{16}[C_{11},[C_{11},C_{12}]]+\frac{17}{16}[C_{11},[C_{11},C_{21}]],\\
\{\sigma_3,\sigma_5\} &= D_{\sigma_3}(\sigma_5)-D_{\sigma_5}(\sigma_3)-[\sigma_3,\sigma_5]\\
&= -2[C_{11},C_{15}]-5[C_{11},C_{24}]+5[C_{11},C_{42}]+2[C_{11},C_{51}]-4[C_{11},[C_{11},C_{13}]\\
&\quad +9[C_{11},[C_{11},C_{22}]]+6[C_{11},[C_{11},C_{31}]]-5[C_{12},C_{14}]-9[C_{12},C_{23}]\\
&\quad +\frac{3}{2}[C_{12},C_{32}]+\frac{7}{2}[C_{12},C_{41}]-\frac{11}{2}[C_{12},[C_{11},C_{12}]]+\frac{3}{2}[C_{12},[C_{11},C_{21}]]\\
&\quad -\frac{7}{2}[C_{21},C_{14}]-\frac{3}{2}[C_{21},C_{23}]+9[C_{21},C_{32}]+5[C_{21},C_{41}]\\
&\quad +\frac{7}{2}[C_{21},[C_{11},C_{21}]]+\frac{3}{2}[C_{13},C_{22}]+3[C_{13},C_{31}]+\frac{3}{2}[C_{22},C_{31}].
\end{aligned}$$

一般有理 Drinfeld 结合子 $\Phi_{\mathbb{Q}} \in M_1(\mathbb{Q})$的对数在次数不超过 5 时可描述如下:

$$\log \Phi_{\mathbb{Q}} = \frac{1}{24}C_{11} + \lambda_1\sigma_3 - \frac{1}{1440}(C_{13}+C_{31}) - \frac{1}{5760}C_{22} + \lambda_2\sigma_5 + \frac{\lambda_1}{24}\left(C_{23}+C_{32}+\frac{1}{2}[C_{11},C_{12}]+\frac{1}{2}[C_{11},C_{21}]\right) + (\text{terms of degree} \geq 6).$$

这里, λ_1, $\lambda_2 \in \mathbb{Q}$ 是任意常数。

References

[1] D. Bar-Natan. 费曼图的权与 Vassiliev 结不变量。预印本，1991年。[2] D. Bar-Natan. Vassiliev 同伦弦环不变量。 *J. Knot Theory Ramifica-* , ( ): – . *tions* 4 1 13 32, 1995

[3] D. Bar-Natan. 非结合缠结。载于 *Geometric topology (Athens, GA, 1993)*, *AMS/IP Stud. Adv. Math.*第2卷，第139–183页。美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，1997年。[4] A. Brochier. KD.py。https://plmlab.math.cnrs.fr/brochier/kd.py，2025年。PLM-Lab 存储库（访问于2025-12-14），提交版本 8e6c1fab。[5] F. Brown. 关于 $\mathbb{Z}$的混合 Tate 动机。 *Ann. of Math. (2)*, 175(2):949–976，2012年。[6] P. Cartier. 结的 Vassiliev-Kontsevich 不变量的组合构造。 *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*，316(11):1205–1210，1993年。[7] S. Chmutov、S. Duzhin 和 J. Mostovoy. *Introduction to Vassiliev knot invariants*。剑桥大学出版社，剑桥，2012年。[8] S. V. Chmutov 和 A. N. Varchenko. 关于来自 sl_2 的 Vassiliev 结不变量的评注。 *Topology*，36(1):153–178，1997年。[9] V. G. Drinfel′d. 关于拟三角拟 Hopf 代数以及一个与 Gal($\mathbb{Q}/\mathbb{Q}$) 密切相关的群。 *Leningr. Math. J.*，2(4):829–860，1991年。[10] H. Furusho. p-进多重ζ值。I. p-进多重对数与p-进 KZ 方程。 *Invent. Math.*，155(2):253–286，2004年。[11] H. Furusho. 多重ζ值与 Grothendieck-Teichm ¨ uller 群。 *Primes and knots* 416 *Contemp. Math.* 49 82 载于 , 第 卷 , 第 – 页。美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，2006年。[12] H. Furusho. p -进多重ζ *Amer. J. Math.* 129 4 1105 1144, 2007 值。II. Tannakian 诠释。 , ( ): – . [13] H. Furusho. 五边形方程与六边形方程。 *Ann. of Math. (2)*, 171 556，2010 1 545( ): – .[14] H. Furusho. 结上的伽罗瓦作用 I：绝对 Galois 群的作用。 *Quantum Topol.* 8 2 295 360, 2017 , ( ): – .

[15] H. Furusho. 结上的伽罗瓦作用 II：原代数弦环与纽结。载于 *Periods in quantum field theory and arithmetic* 314 *Springer Proc. Math. Stat.* , 第 卷 , 第541–591页。Springer，尚，2020年。[16] N. Habegger 和 X.-S. Lin. 链环在链环同伦意义下的分类。 *J. Amer.* , *Math. Soc.* 3 2 389 419, 1990 ( ): – . [17] N. Habegger 和 G. Masbaum. Kontsevich 积分与 Milnor 不变量。*Topology*, 39(6):1253–1289，2000年。[18] Y. Ihara. 辫子、Galois 群与一些算术函数。载于 *Proceedings of the International Congress of Mathematicians Vol. I II (Kyoto, 1990)* 99 120 , , , 第 – 页。日本数学会，东京，1991 年。[19] C. Kassel 和 V. Turaev. 缠结与图的弦图不变量。 *Duke Math.* , ( ): – . *J.* 92 3 497 552, 1998

[20] C. Kassel 和 V. Turaev. *Braid groups*, *Graduate Texts in Mathematics*第247卷。Springer，纽约，2008年。图示由 Olivier Dodane 协助完成。[21] M. Kontsevich. Vassiliev 结不变量。载于 *I. M. Gel′fand Seminar*，*Adv. Soviet Math.*第16卷，第137–150页。美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，1993年。[22] T. Q. T. Le 和 J. Murakami. 用于 Homfly 多项式的 Kontsevich 积分及多重ζ函数值之间的关系。 *Topology Appl.*，62 206，1995 2 193( ): – .[23] T. Q. T. Le 和 J. Murakami. 带框架定向链环的普适Vassiliev-Kontsevich不变量。 *Compositio Math.*，102(1):41–64，1996年。[24] J. Levine. 对“同调圆柱：映射类群的扩展”的补遗与更正 [《代数与几何拓扑》1 (2001)，243–270；MR1823501 (2002m:57020)]。 *Algebr. Geom. Topol.*，2:1197–1204，2002年。[25] J. S. Milne. *Algebraic groups* 170 *Cambridge Studies in Advanced Mathe-* ，第 卷 。 *matics* 2017 剑桥大学出版社，剑桥，。域上的有限型群概形理论。[26] Y. Nozaki、M. Sato 和 M. Suzuki. 限制在1-环部分上的手术映射的核。 *J. Topol.*，15(2):587–619，2022年。[27] T. Ohtsuki. *Quantum invariants*, *Series on Knots and Everything*第29卷。世界科学出版公司，新泽西州里弗埃奇，2002年。关于纽结、3维流形及其集合的研究。[28] S. Piunikhin. 普适 Vassiliev 链环不变量的组合表达式。 *Comm.* , ( ): – . *Math. Phys.* 168 1 1 22, 1995 [29] M. Robertson 和 C. Singh. 循环歌剧集与缠结的 Grothendieck–Teichm¨uller 对称性。arXiv:2511.05911v1，2025年。[30] Sage开发团队。 *SageMath the Sage Mathematics Software System (Ver-* , , 。 *sion 9.6)* 2022 https://www.sagemath.org。[31] T. Willwacher. 通过模研究循环歌剧集。arXiv:2403.18399v1，2024年。

Institute of Mathematics for Industry, Kyushu University, 744, Motooka, Nishi-ku, Fukuoka, 819-0395, Japan*Email address*: kodani@imi.kyushu-u.ac.jp
Faculty of Environment and Information Sciences, Yokohama National University, 79-7 Tokiwadai, Hodogaya-ku, Yokohama, 240-8501, JapanWPI-SKCM^2, Hiroshima University, 1-3-1 Kagamiyama, Higashi-Hiroshima,Hiroshima, 739-8526, Japan*Email address*: nozakiy@广岛-u.ac.jp