arXiv:2512.19197v1 [math.AC] 22 Dec 2025

关于某些局部环

MOHAMAD MAASSARANI

摘要。给定域 $\Bbbk$ 上的两个可分不可约多项式 P_1 和 P_2。我们证明，环 $\Bbbk[X]/(P_1^n)$ 和 $\Bbbk[X]/(P_2^n)$ 同构，当且仅当它们的剩余域$\Bbbk[X]/(P_1)$ 和 $\Bbbk[X]/(P_2)$ 同构。对于多项式不可分的情形，我们也得到了这方面的部分结果。我们指出，给定一个可分不可约多项式 P，我们证明 $\Bbbk[X]/(P^n)$ 与 $(\Bbbk[X](P))[Y]/(Y^n)$ 之间存在同构。

引言与主要结果

给定域 $\Bbbk$ 上的两个不可约多项式 P_1 和 P_2。环 $\Bbbk[X]/(P_1^n)$ 和$\Bbbk[X]/(P_2^n)$ 是局部环，因此若它们同构，则它们的剩余域 $\Bbbk[X]/(P_1)$ 和 $\Bbbk[X]/(P_2)$ 也同构。

人们可能会想知道，逆命题是否成立。若成立，则对所有 $n \geq 1$， $\Bbbk[X]/(P_1^n)$ 与 $\Bbbk[X]/(P_2^n)$ 同构。

我们证明，当 P_1 和 P_2 是可分（不可约）多项式时，逆命题成立。特别地，对于完美域上的任意两个多项式，以及特征为 0 的域上的任意两个多项式，或有限域的代数扩张上的任意两个多项式，逆命题都成立。这一点在第 1 节中得到证明。更确切地说，我们证明，对于可分不可约多项式 P， $\Bbbk[X]/(P^n)$ 与 $(\Bbbk[X]/(P))[Y]/(Y^n)$ 之间存在 $\Bbbk$-代数同构（定理 1.7），并由此推出逆命题（定理 1.8）。

在第 2 节中，我们提出一些判据（针对 P_1 和 P_2 不可约的情形），说明在何种条件下，某些同构 $f\colon \Bbbk[X]/(P_1) \to \Bbbk[X]/(P_2)$ 或 $f_m\colon \Bbbk[X]/(P_1^m) \to \Bbbk[X]/(P_2^m)$ 的存在，意味着对所有 $n \geq 1$， $\Bbbk[X]/(P_1^n)$ 与 $\Bbbk[X]/(P_2^n)$ 同构（推论 2.9 和定理 2.10）。这些判据适用于 P_1 和 P_2 不可分的情形；它们是通过将 $f\colon \Bbbk[X]/(P_1) \to \Bbbk[X]/(P_2)$ 提升为态射 $f_{X_n}\colon \Bbbk[X]/(P_1^n) \to \Bbbk[X]/(P_2^n)$ 而得到的。

1. 可分情形

设 $\Bbbk$ 是一个域， P 是 $\Bbbk$ 上的不可约多项式。在本节中，我们证明，如果 P 是可分的（$i.e.\ P' \neq 0$），那么 $\Bbbk[X]/(P^n)$ 作为一个 $\Bbbk$-代数与 $(\Bbbk[X]/(P))[Y]/(Y^n)$ 同构（定理 1.7）。由此我们推得，如果 P_1 和 P_2 是两个可分多项式，那么局部环 $\Bbbk[X]/(P_1^n)$ 和 $\Bbbk[X]/(P_2^n)$ 同构，当且仅当它们的剩余域 $\Bbbk[X]/(P_1)$ 和 $\Bbbk[X]/(P_2)$ 同构（定理 1.8）。

关键词与短语。代数、局部环、多项式。1

引理 1.1。 对于 $Q \in \Bbbk[X]$，我们有：

$$P(X+Q(X)) = P(X) + P'(X)Q(X) + R(X)Q(X)^2,$$

对于某个 $R \in \Bbbk[X]$。

证明。 令 $P(X) = \sum a_i X^i$。我们得到

$$P(X+Q(X)) = \sum a_i (X+Q(X))^i = \sum a_i (X^i + iX^{i-1}Q(X) + R_i(X)Q(X)^2),$$

对于某个 $R_i \in \Bbbk[X]$。但是 $\sum i a_i x^{i-1} = P'(X)$ 且 $\sum a_i X^i = P(X)$。这就证明了命题-$i>0$。

□

引理 1.2。 若 $P' \neq 0$，则存在无穷序列的多项式对 $(Q_0, R_0), (Q_1, R_1) \cdots$，使得对于 $k \geq 0$，有：

$$P(X + \sum_{i=1}^{k} Q_i(X)P(X)^i) = R_k(X)P(X)^{k+1}.$$

证明。 对于 $k = 0$，方程为 $P(X) = R_0(X)P(X)$。我们可以任取 Q_0，并取 $R_0(X) = 1$。我们将通过归纳法证明该命题。假设已经构造出这些对 $(Q_0, R_0) \cdots, (Q_n, R_n)$，我们将构造 (Q_{n+1}, R_{n+1})。应用前一个引理可得，对于 U 和 S，它们属于 $\Bbbk[X]$，有：

$$P(U(X) + S(X)P(X)^{n+1}) = P(U(X)) + P'(U(X))S(X)P(X)^{n+1} + T(X)P(X)^{2n+2}.$$

$_n$对于 $U(X) = X + \sum Q_i(X)P(X)^i$，根据归纳假设，该方程可化为：$_{i=1}$

$$P(U(X) + S(X)P(X)^{n+1}) = (R_n(X) + P'(U(X))S(X))P(X)^{n+1} + T(X)P(X)^{2n+2},$$

如果我们能找到满足条件 $R_n(X) + P'(U(X))S(X)$ 模 $P(X)$ 为零（即为 $P(X)$ 的倍数）的 $S(X)$，就能得到一对 (Q_{n+1}, S_{n+1})。但是 P 是不可约的。因此 $\Bbbk[X]/(P)$ 是一个域，且 $P' \circ U$ 在该域中的等价类等于 P' 的等价类；后者可逆，因为 $P' \neq 0$。所以 $P' \circ U$ 模 P 可逆，因此我们可以找到一个 $S(X)$，使得 $R_n(X) + P'(U(X))S(X)$ 模 P 为零。这就证明了该命题。□

命题 1.3。 如果 $P' \neq 0$，那么我们有一个从域$\Bbbk[X]/$（P）到 $\Bbbk[X]/$（P^k）的单射 $\Bbbk$-代数态射，其中 $k \geq 1$。

证明。 令 $Q_0, Q_1, \cdots, Q_{k-1}$ 如前一个命题所述，并令 ϕ_k：$\Bbbk[X] \to \Bbbk[X]/(P^k)$ 为由下式给出的 $\Bbbk$-代数态射

$$X \mapsto X + \sum_{i=1}^{k-1} Q_i(X)P(X)^i.$$

¯由前一个命题可知，ϕ_k 将 P 映为 0，因此诱导出一个代数态射 ϕ_k :$\Bbbk[X]/(P) \to \Bbbk[X]/(P^k)$。为证明 $\bar{\phi}_k$ 是单射，注意到 $\pi_k \circ \bar{\phi}_k(X) = X$，其中 π_k是投影 $\Bbbk[X]/(P^k) \mapsto \Bbbk[X]/(P)$ $X \mapsto X$。□

推论 1.4。 若 $P' \neq 0$，则局部环 $\Bbbk[X]/(P^k)$ 将其剩余域 $\Bbbk[X]/(P)$包含为一个 $\Bbbk$-子代数。

推论 1.5。 如果 $P' \neq 0$，那么局部环 $\Bbbk[X]/(P^k)$ 是一个 $\Bbbk[X]/(P)$ 代数。2

引理 1.6。 如果 $P' \neq 0$，那么 $K[X]/(P^k)$ 的族 $1, P, P^2, \cdots, P^{k-1}$ 在 $\Bbbk[X]/(P)$ 上是自由的。

证明。 假设对于给定的 $a_i \in \Bbbk[X]/（P）$，有 $a_0 1 + a_1 P + \cdots a_{k-1} P^{k-1} = 0$。我们要证明 $a_0 = \cdots = a_{k-1} = 0$。为此，将方程 P^{k-1} 相乘，得到 $a_0 P^{k-1} = 0$。因此 $a_0 = 0$。由于 $a_0 = 0$，将证明中的第一个方程乘以 P^{k-2}，得到$a_1 P^{k-1} = 0$，于是像前面一样，我们可推出 $a_1 = 0$。我们通过依次乘以 P^{k-3}，P^{k-4}，.....，证明所有其余的 i' 都满足 $a_i = 0$。□

定理 1.7。 若 $P' \neq 0$，则 $\Bbbk[X]/（P^k）$ 作为一个 $\Bbbk[X]/（P）$-代数以及一个$\Bbbk$-代数同构于

$$(\Bbbk[X]/(P))[Y]/(Y^k).$$

该同构由 $Y \mapsto P$ 给出。

证明。 存在唯一的 $\Bbbk[X]/(P)$-代数态射 $\psi_k : (\Bbbk[X]/(P))[Y]/(Y^k) \to \Bbbk[X]/(P^k)$，由 $Y \mapsto P$ 给出。根据前面的引理，该态射是单射。态射 ψ_k 也是一个 $\Bbbk$- 代数态射。$\Bbbk[X]/(P^k)$ 在 $\Bbbk$ 上的维数等于 P^k 的次数，因此等于 $k \cdot deg(P)$（$deg(P)$ 是 P 的次数）。代数 $(\Bbbk[X]/(P))[Y]/(Y^k)$ 在 $\Bbbk$ 上的维数也为 $k \cdot deg(P)$。因此，ψ_k 是两个在 $\Bbbk$ 上维数相同的向量空间之间的单射 $\Bbbk$-线性映射。这证明了 ψ_k 是一个同构。□

定理 1.8。 设 P_1 和 P_2 是 $\Bbbk$ 上的两个不可约多项式，k 是一个正整数。若 P_1 和 P_2 是可分的（$i.e.\ P_i' \neq 0$），则局部环 $\Bbbk[X]/（P_1^k）$ 与 $\Bbbk[X]/（P_2^k）$ 同构，当且仅当它们的剩余域 $\Bbbk[X]/（P_1）$ 与 $\Bbbk[X]/（P_2）$ 同构。

证明。如果这些局部环同构，那么它们的剩余域也同构。由于我们假设 $P_i' \neq 0$，根据前述定理，$\Bbbk[X]/(P_i^k)$ 与 $(\Bbbk[X]/(P_i))[Y]/(Y^n)$ 同构。命题的“仅当”部分得证。□

注记 1.9。 如果 $\Bbbk$ 是特征0 的完美域，或是有限域的代数扩张，那么条件 $P' \neq 0$ 总是成立。因此，后两个定理在这些域上总是成立。

命题 1.10。 设 P_1 和 P_2 是 $\Bbbk$ 上的两个不可约多项式，k 是一个正整数。如果 P_1 和 P_2 是可分的$(i.e.\ P_i' \neq 0)$，那么局部环 $\Bbbk[X]/(P_1^k)$ 和 $\Bbbk[X]/(P_2^k)$ 作为 $\Bbbk$-代数同构，当且仅当它们的剩余域 $\Bbbk[X]/(P_1)$ 和 $\Bbbk[X]/(P_2)$ 作为 $\Bbbk$-代数同构。

证明。 前述定理的证明可以加以改编，从而得到该命题。 □

2. 同构的提升

在本节中，$\Bbbk$ 是一个域，P_1，P_2 是 $\Bbbk[X]$中的不可约多项式。我们将建立一些判据，在这些判据下，某些同构的存在性 $f : \Bbbk[X]/(P_1) \to \Bbbk[X]/(P_2)$ 或$f_m : \Bbbk[X]/(P_1^m) \to \Bbbk[X]/(P_2^m)$ 可以推出，对于所有$n \geq 1$，$\Bbbk[X]/(P_1^n)$和 $\Bbbk[X]/(P_2^n)$同构（推论 2.9 和定理 2.10）。这些判据适用于 P_1 和 P_2不可分的情形。

定义 2.1. 对于两个 $\Bbbk$-代数 A 和 B，若存在一个域自同构 $\sigma_f : \Bbbk \to \Bbbk$，使得对于 $a \in \Bbbk$ 有 $f(a) = \sigma_f(a)$，则称环同态：$A \to B$ 稳定 $\Bbbk$。

命题 2.2. 设 A 和 B 是定义在 $\Bbbk$ 上的两个有限维代数，且 $f\colon A \to B$ 是一个稳定 $\Bbbk$ 的环同态。

1) $Im(f)$ 是 B 的向量子空间。*2)* 若 f 是单射，则 $dim(Im(f)) = dim(A)$。*3)* 若 f 是单射且 $dim(A) = dim(B)$，则 f 是同构。*4)* 若 f 是同构，则 f^{-1} 稳定 $\Bbbk$ 和 $\sigma_{f^{-1}} = \sigma_f^{-1}$。*5)* 若 f 是同构，则 $dim(A) = dim(B)$。*6)* 设 I 是 B 的真理想，且令 $\pi\colon B \mapsto B/I$ 为投影。环同态 $\pi \circ f$ 稳定 $\Bbbk$ 和 $\sigma_{\pi\circ f} = \sigma_f$。*7)* 设 J 是 A 的一个理想，且包含于 f 的核中。将 f 因式分解的态射 $f\colon A/J \to B$ 稳定 $\Bbbk$ 和 $\sigma_{\bar{f}} = \sigma_f$。

证明。这可以像对 $\Bbbk$-代数态射那样证明，只需使用 σ_f 和 σ_f^{-1}。 □

我们将使 用前一个命题中的事实，而不提及该命题 .

命题 2.3. 设 $\sigma\colon \Bbbk \to \Bbbk$ 是一个域自同构。存在唯一良定义的环自同构 $\sigma^X\colon \Bbbk[X] \to \Bbbk[X]$，它稳定 $\Bbbk$，由数据 $\sigma^X(X) = X$ 和 $\sigma_{\sigma^X} = \sigma$ 给出。

证明。这可以很容易地验证。 □

命题 2.4. 若 $f\colon \Bbbk[X]/(P_1) \to \Bbbk[X]/(P_2)$ 是一个稳定 $\Bbbk$ 的环同构，则：

1) P_1 的次数等于 P_2 的次数。*2)* 存在唯一的多项式 $Q_f \in \Bbbk[X]$，其次数小于 P_1 的次数（即 P_2 的次数）且大于等于 *1*，使得 f 由稳定 $\Bbbk$ f_X 的环态射诱导：$\Bbbk[X] \to \Bbbk[X]$，该态射由 $X \mapsto Q_f$ 和 $\sigma_{f_X} = \sigma_f$ 定义，即 $P \mapsto \sigma_f^X(P) \circ Q_f$，其中 σ_f^X 如前一个命题所述。*3)* 对于给定的 $S_f \in \Bbbk[X]$，有 $\sigma_f^X(P_1) \circ Q_f = S_f P_2$。*4)* 对于 $P \in K[X]$，若对某个 $S \in \Bbbk[X]$ 有 $\sigma_f^X(P) \circ Q_f = SP_2$，则对某个 $R \in \Bbbk[X]$ 有 $P = RP_1$。*5)* 态射 f_X 将 (P_1^n) 映入 (P_2^n)，因此诱导出一个稳定 $\Bbbk$ 的环态射：$f_{X,n}\colon \Bbbk[X]/(P_1^n) \to \Bbbk[X]/(P_2^n)$，它由 $P \mapsto \sigma_f^X(P) \circ Q_f$ 诱导。

证明。第 1) 点由以下事实得出：$\Bbbk[X]/(P_1)$ 和 $\Bbbk[X]/(P_2)$ 作为 $\Bbbk$-向量空间的维数分别是 P_1 的次数和 P_2 的次数。现在，存在唯一的 $\Bbbk[X]$ 的多项式 Q_f，其次数小于 P_2 的次数（ P_1 的次数），使得 $f(X_1) = Q_f(X_2)$，其中 X_1 是 $\Bbbk[X]/(P_1)$ 中 X 的类，而 X_2 是 $\Bbbk[X]/(P_2)$ 中 X 的类。该多项式的次数大于或等于 1，否则 f 的像将落在 $\Bbbk$(f 稳定 $\Bbbk$) 中。对于 $P \in K[X]$，我们有 $f(P(X_1)) = \sigma_f^X(P) \circ Q_f(X_2)$。这证明了 2)。由于 $P_1(X_1) = 0$，$f(P_1(X_1)) = \sigma_f^X(P) \circ Q_f(X_2) = 0$。因此，$\sigma_f^X(P) \circ Q_f$ 属于理想 (P_2)。这证明了 3)。4) 中的陈述等价于 f 的单射性。最后，3) 意味着 $\sigma_f^X(P_1^n) \circ Q_f = S_f^n P_2^n$。这证明了 5)。我们已经证明了该命题。□

命题 2.5. 设 $f\colon \Bbbk[X]/(P_1) \to \Bbbk[X]/(P_2)$ 是一个保持 $\Bbbk$ 的环同构，并令 S_f 和 $f_{X,n}$ 如前一个命题所述。对于 $n > 1$，S_f 与 P_2 互素，当且仅当 $f_{X,n}\colon \Bbbk[X]/(P_1^n) \to \Bbbk[X]/(P_2^n)$ 是一个同构。

证明。我们首先证明，若 S_f 与 P_2 互素，则映射 $f_{X,n}$ 是一个同构。假设 S_f 与 P_2 互素，并取 $P \in K[X]$，使其在 $\Bbbk[X]/(P_1^n)$ 中的等价类 P 属于4

$f_{X,n}$的核，即 $\sigma_f^X(P)\circ Q_f = SP_2^n$，其中某个 $S\in K[X]$(Q_f来自前一个命题)。令 m为使 P_1^m整除 P的最大整数。对某个 $T\in\Bbbk[X]$，有 $P=TP_1^m$。结合前两个等式，并应用前一个命题的 3)，我们得到:

$$\sigma_f^X(P)\circ Q_f=\sigma_f^X(TP_1^m)\circ Q_f=(\sigma_f^X(T)\circ Q_f)S_f^mP_2^m=SP_2^n.$$

假设 $m<n$。由于我们假设 S_f 与 P_2 互素，因此可得 $\sigma_f^X(T)\circ Q_f=S'P_2^{n-m}$ 与 $n-m\geq 1$，于是由前一个命题的 4) 可知，对某个 $R\in\Bbbk[X]$，有 $T=RP_1$。由于 $P=TP_1^m$，现在我们有 $P=R_1P_1^{m+1}$。这导致矛盾，因为 m 是使 P_1^m 整除 P 的最大整数。因此，假设 $m<n$ 是错误的，并且 $P=TP_1^{m^-}$ 与 $m\geq n$。这证明了 $P\in(P_1^n)$，且 P 在 $\Bbbk[X]/(P_1^n)$ 中的类 P 为 0。我们已经证明，若 S_f 与 P 互素，则 $f_{X,n}$ 是单射。由于 $\Bbbk[X]/(P_1^n)$ 和 $\Bbbk[X]/(P_2^n)$ 作为 $\Bbbk$ 上的向量空间具有相同的维数（由前一个命题的 1) 得出），我们推得，若 S_f 与 P 互素，则态射 $f_{X,n}$ 是同构。下面证明逆命题。为此，假设 S_f 与 P_2 不互素。因此，根据前一个命题的 3) 以及 P_2 不可约这一事实，我们有:

$$\sigma_f^X(P_1)\circ Q_f=SP_2^m,$$

对于某个 $m>1$ 和某个 $S\in\Bbbk[X]$。如果 $n=2$，由该等式可见，P_1 在 $\Bbbk[X]/(P_1^2)$ 中的（非零）等价类属于 $f_{X,n}$的核。对于 $n>2$，记 $q_{n,m}$为 n 除以 m所得的商。我们有 $(q_{n,m}+1)m\geq n$ 且 $q_{n,m}+1<n$。在这些条件下，将最后一个等式提升到 $q_{n,m}+1$ 次幂，可见 $P^{q_{n,m}+1}$ 在 $\Bbbk[X]/(P_1^n)$ 中的非零等价类属于 $f_{X,n}$的核。我们已经证明，如果 S_f 与 P_2 不互素，那么态射 $f_{X,n}$ 不是同构。[1] □

对于 $f:\ \Bbbk[X]/(P_1)\to\Bbbk[X]/(P_2)$，一个保持 $\Bbbk$不变的环同构，我们将使用 Q_f 和 S_f 以及 σ_f^X，而不作引用。

命题 2.6. 设 $f:\Bbbk[X]/(P_1)\to\Bbbk[X]/(P_2)$ 是一个稳定 $\Bbbk$ 的环同构。

1) 若 α 是 P_2 的一个根，则 $Q_f(\alpha)$ 是 $\sigma_f^X(P_1)$ 的一个根。2) 我们有一个从 $\{$ 的根到 $P_2\}$ 的根的双射 $\{$，由 $\alpha\mapsto Q_f(\alpha)$ 给出。

证明。 1) 由命题 2.4 的等式 $\sigma_f^X(P_1)\circ Q=S_fP_2$ 得出；由 1) 可知，我们有一个映射 g: 从 $\{$ 的根到 $\sigma_f^X(P_1)\}$ 的根，由 $\alpha\mapsto Q_f(\alpha)$ 给出。为证明 2)，我们将定义 g 的逆元。将命题 2.4 的 3) 应用于 f^{-1}，可得:

$$(\sigma_f^X)^{-1}(P_2)\circ Q_{f^{-1}}=S_{f^{-1}}P_1,$$

因此

$$P_2\circ\sigma_f^X(Q_{f^{-1}})=\sigma_f^X(S_{f^{-1}})\sigma_f^X(P_1).$$

因此，我们有一个定义良好的映射 $h:\ \{\sigma_f^X(P_1)\}\to\{$ 的根到 $P_2\}$ 的根，由 $\alpha\mapsto\sigma_f^X(Q_{f^{-1}})(\alpha)$ 给出。我们将证明 h 和 g 互为逆元。由于 f 和 f^{-1} 互为逆元，我们有:

$$\sigma_f^X(Q_{f^{-1}})\circ Q_f=X+S_2P_2\quad\text{and}\quad(\sigma_f^X)^{-1}(Q_f)\circ Q_{f^{-1}}=X+S_1P_1,$$

对于某个 $S_1,\ S_2\in\Bbbk[X]$。第一个等式表明，hg 是 $P_2\}$的 $\{$个根的恒等映射。将第二个等式与 σ_f^X复合，我们得到 gh 是$\sigma_f^X(P_1)\}$的 $\{$个根的恒等映射。我们已经证明了 2）。□

命题 2.7。 设 $f\colon\ \Bbbk[X]/(P_1)\ \to \Bbbk[X]/(P_2)$ 是一个稳定 $\Bbbk$ 的环同构。 S_f与 P_2 互素，当且仅当 $Q'_f \neq 0$。

证明。 首先注意到 $\sigma_f^X(P_1)$ 是不可约的，因为 P_1 不可约，且 σ_f^X是 $\Bbbk[X]$的一个自同构。由于 $\sigma_f^X(P_1)$ 与 P_2 的次数相同（命题 2.4 的（1）），$\sigma_f^X(P_1)$ 与 P_2 的根的个数相同（前一个命题），并且不可约多项式的根具有相同的重数，根据前一个命题，我们有:

$$\sigma_f^X(P_1)(X) = \prod_{k=1}^{m}(X - Q_f(\alpha_k))^r \quad \text{and} \quad P_2(X) = \prod_{k=1}^{m}(X - \alpha_k)^r$$

其中 α_1，.....， α_m是 P_2的互异根， r是 P_2在 m上的次数。因此，我们有:

$$(\sigma_f^X(P_1) \circ Q)(X) = \prod_{k=1}^{m}(Q(X) - Q_f(\alpha_k))^r.$$

$Q_f(\alpha_k)$彼此不同（前一个命题）。因此， α_k 作为 $\sigma_f^X(P_1) \circ Q$的根的重数，等于因子 $(Q(X) - Q_f(\alpha_k))^r$中 α_k的重数。由命题m2.4 $\sigma_f^X(P_1) \circ Q = S_f P_2$；我们已知 $P_2(X) = \prod_{k=1}^{m}(X - \alpha_k)^r$ 且 P_2 不可约。因此， S_f与 P_2互素，当且仅当因子 $(Q(X) - Q_f(\alpha_k))^r$中 α_k的重数为 r。这一条件等价于 $Q'(\alpha_k) \neq 0$。由于 P_2 不可约，且 α_k 是 P_2 的一个根，而 Q_f 的次数小于 P_2的次数，条件 $Q'(\alpha_k) \neq 0$ 等价于条件 $Q' \neq 0$。我们已经证明， S_f 与 P_2 互素，当且仅当 $Q' \neq 0$。□

定理 2.8。 取 $n > 1$。如果 $f\colon\ \Bbbk[X]/(P_1)\ \to \Bbbk[X]/(P_2)$ 是稳定 $\Bbbk$ 的环同构，那么命题 *2.4* 的 $f_{X,\,n}\colon\ \Bbbk[X]/(P_1^n)\ \to \Bbbk[X]/(P_2^n)$ 是稳定 $\Bbbk$ 的环同构，当且仅当 $Q'_f \neq 0$。

证明。 这是将上一个命题与命题 2.5 结合得到的。 □

推论 2.9。 如果 $f\colon\ \Bbbk[X]/(P_1) \to \Bbbk[X]/(P_2)$ 是稳定 $\Bbbk$ 且满足 $Q'_f \neq 0$ 的环同构，那么对于所有 $n \geq 1$， $\Bbbk[X]/(P_1^n)\ \to \Bbbk[X]/(P_2^n)$ 同构。

定理 2.10。 设 $f_m\colon\ \Bbbk[X]/(P_1^m)\ \to \Bbbk[X]/(P_2^m)$ 是对于给定 $m \geq 1$ 稳定 $\Bbbk$ 的环同构。映射 f_m 将 X 的类映射到某个 $R \in \Bbbk[X]$ 的类上。设 Q 为 R 除以 P_2 的除法余数（Q 不依赖于 R 的选择）。如果 $Q' \neq 0$，那么对于所有 $n \geq 1$，环 $\Bbbk[X]/(P_1^n)$ 和 $\Bbbk[X]/(P_2^n)$ 同构。

证明。 由于 $\Bbbk[X]/(P_1^m)$ 和 $\Bbbk[X]/(P_1^m)$ 都只有一个极大理想， f_m 诱导出一个稳定 $\Bbbk$ f 的环同构: $\Bbbk[X]/(P_1)\ \to \Bbbk[X]/(P_2)$，它是剩余域之间的同构。现在 $Q_f = Q$ ，因此 $Q'_f \neq 0$ ；根据前述定理，态射 $f_{X,\,n}\colon\ \Bbbk[X]/(P_1)\ \to \Bbbk[X]/(P_1^n)$ 是同构。□

参考文献

[AM69] Atiyah, Michael F. 和 Ian G. Macdonald。《交换代数导论》。Addison-Wesley，1969