arXiv:2512.19248v1 [math.DG] 22 Dec 2025

伪拉普拉斯算子的小特征值

WERNER BALLMANN、SUGATA MONDAL 和 PANAGIOTIS POLYMERAKIS

Abstract. 我们将双曲曲面上拉普拉斯算子小特征值个数的 Otal-Rosas 界推广到伪拉普拉斯算子的小特征值。在此过程中，我们将 Colin de Verdi`ere 关于伪拉普拉斯算子谱理论的工作推广到具有多个尖点的双曲曲面。

1. Introduction引言

双曲曲面拉普拉斯算子的谱理论（曲率归一化为 -1）是黎曼几何中的经典课题，其关联领域从数论到数理物理。双曲曲面的万有覆盖是双曲平面 $\mathbb{H}$，而 $\mathbb{H}$ 上的拉普拉斯算子的谱底为 $1/4$。

双曲曲面 S 是通过离散无挠群 Γ 对 $\mathbb{H}$ 施加等距变换得到的商空间 $\Gamma\backslash\mathbb{H}$。我们关注面积 $|S| < \infty$的情形。此时， S 上的（拉普拉斯算子 Δ 的）谱在 $1/4$以下是离散的，而小于或等于 $1/4$ 的特征值称为小特征值。

对于亏格为 g 的闭曲面 S_g，Buser 和 Schmutz [3, 15] 猜想了以下最优估计。Otal 和 Rosas 在更一般的情形下证明了该猜想，即对于具有穿孔 $n \geq 0$ 的曲面 $S_{g,\,n}$，也就是具有 $n \geq 0$ 个穿孔的曲面 S_g。定理 2]:

定理 A. S_g 上的有限面积双曲度量至多有 $|\chi(S)|$ 个小特征值。

任何有限面积的非紧双曲曲面 S 都与一个闭曲面 S 微分同胚；从该曲面上去掉有限个点 $p_1, \ldots, p_n$，这些点称为穿孔。每个穿孔 p_i 都有一个邻域 C_i，位于 S中，称为尖点，它与一个从下方截断的商空间 $\mathbb{Z}\backslash\mathbb{H}$等距。这里我们将$\mathbb{H}$ 视为上半平面， $\mathbb{H} = \{z = x + iy \mid y > 0\}$，并令无限循环群 $\mathbb{Z}$ （整数群）作用于 $\mathbb{H}$，作用方式为水平平移。于是， S的尖点部分谱值得关注，也就是说，这部分谱来自 S 上的特征函数，这些特征函数在穿孔处渐近趋于零。这类特征函数及其特征值也称为尖点或抛物。尖点特征函数可以通过延拓为零的方式扩展到 S。根据

Date: 2025年12月22日。2020 *Mathematics Subject Classification.* 58J50, 35P15, 53C20。*Key words and phrases.* 双曲曲面，拉普拉斯算子，伪拉普拉斯算子，谱，小特征值。*Acknowledgments.* 我们感谢波恩的马克斯·普朗克数学研究所和豪斯多夫数学中心提供支持与热情接待。S. M. 获得了部分 EPSRC 资助，资助编号为 APP16691。

赫胥黎 [5, 定理，p. 352] 以及奥塔尔 [11, 命题 2] （采用了不同的¯方法），S 若 S 是球面或环面，则不存在较小的尖点特征值。此外，奥塔尔证明，较小¯尖点特征值的（尖点）重数至多为 $-\chi$（S）-1 [11, 命题 3]。最后，奥塔尔和罗萨斯猜想，具有 n 个穿孔的有限面积非紧双曲曲面 S 至多有

$$-\chi(\bar{S}) - 1 = -\chi(S) - n - 1 \tag{1.1}$$

较小的尖点特征值 [12, p. 113]. 关于这一猜想的部分结果已在 [10]中得到。特别是，根据 [10, 定理 1，6], 若某些闭测地线在 S 上足够短，则对 S 而言，猜想中的估计成立。该猜想本身仍未解决，也是本研究背景中的一个谱问题。

我们将研究 S谱的一种近似，这种近似由拉克斯和菲利普斯 [8]提出，并由 Colin de Verdi`ere [4]进一步研究。为描述它，我们先固定一些记号。设 S 是一个有限面积的非紧双曲曲面¯，它与一个带有 n 个穿孔 p_1、 $\dots p_n$ 的紧曲面 S微分同胚。作为 p_i周围的尖点，我们选取 S中的两两不交的闭邻域C_i、$_{b_i}$，它们同胚于上半平面 $\mathbb{H}$ 中的豪斯多夫球 $\{z = x + iy \mid y \geq b_i\}$，再对 x变量施以整数平移取商（这是一种规范化）。令 $b = (b_1, \dots, b_n)$。

对于 $a_i \geq b_i$，测地线 $H_{i,\ a_i} \cong \{(x + ia_i)\} \subseteq C_{i,\ b_i}$ 以及尖点 $C_{i,\ a_i} \cong \{(x + iy) \mid y \geq a_i\} \subseteq C_{i,\ b_i}$ 都是 $\mathbb{H}$ 中测地线和豪斯多夫球的商。对于满足 $a > b$ 的任意实数元组 $a = (a_1, \dots, a_n)$，也就是说，对于所有 $1 \leq i \leq n$， $a_i > b_i$我们令

$$H_a = \cup_i H_{i,a_i} \quad \text{and} \quad C_a = \cup_i C_{i,a_i}. \tag{1.2}$$

为后续讨论，我们还引入 S_a，即 S 中边界为 H_a 的紧区域，使得 S_a 的内部是 C_a 的补集，

$$\Gamma\backslash\mathbb{H} = S = S_a \cup C_a \quad \text{and} \quad S_a \cap C_a = H_a. \tag{1.3}$$

现在考虑索об列夫空间 $\mathcal{H}_\infty = H^1(S)$ 的闭子空间 $\mathcal{H}_a$，它由满足以下条件的函数 f 构成：对于所有 $1 \leq i \leq n$，相对于 $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ 上周期变量 x 的第一傅里叶系数 $[f]_i = [f]_i(y)$ 在 C_{i,a_i} 上消失。 $\mathcal{H}_a$ 在 $\mathcal{L}_\infty = L^2(H)$ 中的闭包 $\mathcal{L}_a$，是 $\mathcal{L}_\infty$ 中在 C_a 之外消失、且在C_a内仅依赖于 y 的函数空间的正交补。狄利克雷型 $\|\nabla f\|^2$ 在 $\mathcal{H}_a$ 上的 Friedrichs延拓 Δ_a 是 $\mathcal{L}_a$ 中的自伴算子，称为伪拉普拉斯算子；参见[4]和下文第 2 节。此外，拉普拉斯算子 Δ 与狄利克雷型 $\|\nabla f\|^2$ 在 $\mathcal{H}_\infty$ 上的 Friedrichs延拓 Δ_∞ 相同。Δ_a 的预解算子是紧的，因此其谱是离散的 [8, 第 206 页及后续页]。当 a 趋于 ∞ 时， Δ_a 的特征值在区间 $[0, 1/4]$ 内单调地逼近 $\Delta = \Delta_\infty$ 的特征值；见下文定理 4.1。对于任意 $\lambda \geq 0$，记 $N_a(\lambda)$ 为 Δ_a 在$[0, \lambda]$中的特征值个数，计入重数。对于 $\lambda \leq 1/4$，记 $N(\lambda)$ 为 Δ 在 $[0, \lambda]$ 中的特征值个数，同样计入重数。

定理 B. 对于任意给定的 $\lambda \geq 0$, $N_a(\lambda)$，其关于 a 单调不减。此外，

(1) if $\lambda \leq 1/4$, *then* $N_a(\lambda) \leq N(\lambda) \leq |\chi(S)|$;

(2) if $\lambda > 1/4$, *then* $\lim_{a\to\infty} N_a(\lambda) = \infty$.

关于 $|\chi(S)|$ 的估计在可定向情形下由 [12, Th´eor`eme 2] 推出，在一般情形下则由 [1, 定理 1.5] 推出；其余断言由单调性和下文的定理 3.22 推出。

Otal [11] 和 Otal-Rosas[12]的研究中，一个主要要素是节点域的拓扑，以及当其“拓扑较小时”对其狄利克雷谱底端的估计。这促成了解析 *systole* $\Lambda(S)$在 [1]中的定义。我们所处情境中的相应概念，则由下文的定义加以刻画。

令 $\Lambda_a(S)$为以下所有集合上的狄利克雷谱底端的下确界：嵌入的拓扑圆盘、M¨obius 带（若 S 不可定向）以及 S 中边界光滑的环带，其中环带分为以下三种类型：其边界曲线是非本质的（即同伦于一点）；或与 S中的某条闭测地线自由同伦；或与某个 $1 \le i \le n$对应的测地线 H_{a_i} 自由同伦。最后一种情形下，我们还要求，对于 H_a上方的每条测地线 H_y ，如果此类环带的内部与 H_y相交，那么其边界与 H_y 至少相交于两点。后一性质体现了对 Δ_a定义域中函数的傅里叶系数所施加的条件。我们的第一个主要结果如下。

定理 C。 对于任意 $a > b$, 我们有 $\Lambda_a(S) > 1/4$。

相比之下，对于有限面积（甚至有限型）的非紧双曲曲面，解析 systole $\Lambda(S) = 1/4$ 。借鉴 [1], 定理 1.5 的证明中的思想，我们得到第二个主要结果。

定理 D。 对于任意 $a > b$, 相应的 伪拉普拉斯算子 Δ_a 在 $[0, \Lambda_a(S)]$中至多有 $|\chi(S)|$ 个特征值。

由于 $\Lambda_a(S) > 1/4$，定理 D 强化了定理 B.1。

1.1. 文章结构。 在第 2 节中，我们一般性地讨论 Friedrichs 延拓，以及伪拉普拉斯算子情形下的 Friedrichs 延拓 Δ_a。在第 3 节中，我们汇集有限面积双曲曲面的拉普拉斯算子谱理论中的相关材料。为方便读者，我们回顾 Iwaniec 的著作 [6] 中关于艾森斯坦级数的一些性质。第 4 节专门讨论伪拉普拉斯算子的谱理论。与 [4]中所考察的单尖点情形相比，具有多个尖点的双曲曲面呈现出一些新的特征和困难。定理 4.6、4.10 和 4.12 阐明了特征函数的结构，正体现了这些新特征。尽管第 4 节中的结果并非全部用于定理 C 和 D 的证明，但它们应当有助于进一步研究和应用伪拉普拉斯算子的谱理论。在第 5 节中，我们讨论定理 C 的证明；在第 6 节中讨论定理 D 的证明。

2. Preliminaries

我们回顾以下版本的 Friedrichs延拓；参见 [16, 第 600 页及以下]。设 J: $H^1 \to H^0$ 是 Hilbert空间之间的连续嵌入，且 H^1在 H^0中稠密。取 A ，使其为 H^0 中的自伴算子，其区域为

$$\mathcal{D}(A) = \{u \in H^1 \mid \langle u, v\rangle_1 \le C_u |v|_0 \text{ for all } v \in H^1\} \tag{2.1}$$

由定义方程给出

$$\langle Au, v\rangle_0 = \langle u, v\rangle_1. \tag{2.2}$$

我们有 $A = (JJ^*)^{-1}$，其中 $\mathcal{D}(A) = \mathrm{im}(JJ^*)$。此外，与 A 相关联的闭半双线性形式 α 的区域为 H^1，且定义为

$$\alpha(u, v) = \langle u, v\rangle_1 - \langle u, v\rangle_0 = \langle (A-1)u, v\rangle_0, \tag{2.3}$$

其中，后一等式需要 $u \in \mathcal{D}(A)$；参见 [7, 定理 VI.2.1]。

现在回顾 [4, 节 1]中的一般框架。设 H^1 是 $H^1(S)$ 的闭子空间，H^0 是它在 $L^2(S)$ 中的闭包，而 $A = 1 + \Delta_{H^1}$ 是上述 H^0 中的自伴算子。由于 H^1 是 $H^1(S)$ 的闭子空间，与 A 相关联的闭半双线性形式 α 的区域为 H^1，且定义为

$$\alpha(u, v) = \langle \nabla u, \nabla v\rangle_0 = \langle \Delta_{H^1} u, v\rangle_0, \tag{2.4}$$

其中，后一等式需要 $u \in D(\Delta_{H^1})$。我们有

$$\begin{aligned} \langle u, v\rangle_0 + \langle \nabla u, \nabla v\rangle_0 &= \langle u, v\rangle_1 = \langle u, v^\top + v^\perp\rangle_1 = \langle u, v^\top\rangle_1 \\ &= \langle Au, v^\top\rangle_0 = \langle u, v^\top\rangle_0 + \langle \Delta_{H^1} u, v^\top\rangle_0, \end{aligned} \tag{2.5}$$

对所有 $u \in \mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(\Delta_{H^1})$ 和 $v \in H^1(S)$，其中我们将 $v = v^\top + v^\perp$ 分解为 $v^\top \in H^1$ 和 $v^\perp \in H^1,\ \perp$，后者是 $H^1(S)$ 中 H^1 的正交补。

现在，按照引言中的定义，选取 $H^1(S)$ 的闭子空间 $\mathcal{H}_a$，并令 $\Delta_a = \Delta_{\mathcal{H}_a}$ 为相对于其闭包$\mathcal{L}_a \subseteq L^2(S)$ 的 Friedrichs延拓，定义同样见引言。令 S_a 表示S 中测地线下方的双曲曲面部分；也就是说，S_a 是 C_a的补集。

引理 2.6。如果 $u \in \mathcal{D}(\Delta_a)$，那么 $u|_{S_a} \in H^2(S_a)$、$u|_{C_a} \in H^2(C_a)$，并且

$$\Delta u|_{S_a} = (\Delta_a u)|_{S_a} \quad and \quad \Delta u|_{C_a} = (\Delta_a u)|_{C_a}.$$

证明。显然，$\Delta u|_{S_a}$ 以分布的意义存在于 $L^2(S_a)$中。因此，由于 Δ的椭圆性，$u|_{S_a}$ 属于 $H^2(S_a)$，且 $\Delta u|_{S_a} = (\Delta_a u)|_{S_a}$。

对于 $u|_{C_a}$，我们将 $v \in C_c^\infty(C_a)$ 分成两类互补的函数。第一类由沿 C_a 的测地线保持常数的函数 v 组成。于是，由于测地线的常平均曲率，Δv 沿 C_a 的测地线也保持常数，因此

$$\langle \nabla u, \nabla v\rangle_0 = \langle u, \Delta v\rangle_0 = 0.$$

第二类由满足以下条件的函数组成：它们在 C_a 的测地线上平均值为零。因此 $v = v^\top \in \mathcal{H}_a$，从而

$$\langle \Delta_a u, v\rangle_0 = \langle \nabla u, \nabla v\rangle_0 = \langle \nabla u|_{C_a}, \nabla v\rangle_0 = \langle u|_{C_a}, \Delta v\rangle_0.$$

总之，$\Delta u|_{C_a} = (\Delta_a u)|_{C_a}$ 以分布的意义存在。特别地，$u|_{C_a}$ 属于 $H^2(C_a)$。□

设 $u \in \mathcal{H}_a$，并假设 $u|_{S_a} \in H^2(S_a)$ 和 $u|_{C_a} \in H^2(C_a)$。则

$$\begin{aligned} \langle u, v\rangle_1 &= \langle u, v\rangle_0 + \langle \nabla u, \nabla v\rangle_0 \\ &= \langle u, v\rangle_0 + \langle \Delta u|_{S_a}, v\rangle_{S_a,0} + \langle \Delta u|_{C_a}, v\rangle_{C_a,0} + T_u v \\ &= \langle u, v\rangle_0 + \langle \Delta u, v\rangle_0 + T_u v \end{aligned} \tag{2.7}$$

对所有 $v \in H^1(S)$ 均成立，其中 ν 表示 S_a 沿 H_a 的外向单位法向量，而 $T_u \in H^{-1}(S)$ 定义为

$$T_u v = \int_{H_a} (\nabla_\nu u|_{S_a} - \nabla_\nu u|_{C_a})\, v. \tag{2.8}$$

这里注意，在此积分中，沿 H_a 的相应迹存在，并且 $v|_{S_a}$ 与 $v|_{C_a}$ 沿 H_a 的迹在 $H^{1/2}(H_a) \subseteq L^2(H_a)$中重合。要使右端对所有 $v \in \mathcal{H}_a$至多为 $C_u|v|_0$ ，需要T_u在 $\mathcal{H}_a$上为零，从而 $\nabla_\nu u|_{S_a} - \nabla_\nu u|_{C_a} =$沿 H_a局部为常数。因此我们得到

命题 2.9. Δ_a 的区域 $D(\Delta_a)$ 由所有使得 $u|_{S_a} \in H^2(S_a)$、 $u|_{C_a} \in H^2(C_a)$，并且沿 H_a满足下列条件的 $u \in \mathcal{H}_a$ 组成，

$$u|_{S_a} = u|_{C_a} \quad and \quad \nabla_\nu u|_{S_a} = \nabla_\nu u|_{C_a} + \text{loc. const.}$$

对任意 $u \in D(\Delta_a)$，我们有

$$\Delta_a u = \Delta u|_{S_a} + \Delta u|_{C_a}.$$

事先，上述公式中的 $\Delta u|_{S_a}$ 与 $\Delta u|_{C_a}$ 仅在 S_a与 C_a上有定义，但我们将它们零延拓到 S各自的其余部分。

注记 2.10. 像上文那样，在 S 的其余部分上延拓为零，我们也有

$$\mathcal{D}(\Delta_a) = H^2(S_a) \oplus_\tau \big\{ v \in H^2(C_a) \,\big|\, \int_{H_{i,t}} v = 0 \text{ for all } t \geq a_i,\, 1 \leq i \leq n \big\},$$

其中传递条件 τ 为

$$\tau(u,v): \quad u|_{H_a} = v|_{H_a} \quad \text{and} \quad \nabla_\nu u = \nabla_\nu v + \text{loc. const}$$

在 $L^2(H_a)$ 中；参见 [8] 中的 (8.3)。相反，

$$H^2(S) = H^2(S_a) \oplus_\sigma H^2(C_a),$$

其中传递条件 σ 现在更强，

$$\sigma(u,v): \quad u|_{H_a} = v|_{H_a} \quad \text{and} \quad \nabla u = \nabla v$$

分别在 $L^2(H_a)$ 和 $L^2(H_a, TS|_{H_a})$ 中。

注记 2.11. 令 $E = \{u \in H^1(S) \mid u|_{S_a} \in H^2(S_a)\ u|_{C_a} \in H^2(C_a)\}$，由 (2.7) 可得 $u \in E$ 的弱拉普拉斯算子，

$$\langle u, \Delta v\rangle_0 = \langle \Delta u|_{S_a} + \Delta u|_{C_a}, v\rangle_0 + \int_{H_a} (\nabla_\nu u|_{S_a} - \nabla_\nu u|_{C_a}) v$$

对所有 $u \in E$和 $v \in C_c^\infty(X)$ 均成立。因此， $\nabla_\nu u|_{S_a} - \nabla_\nu u|_{C_a} =$loc. const $=: \varphi_u$沿 H_a对 $u \in \mathcal{D}(\Delta_a)$ 成立，恰好意味着 $\Delta_{\text{weak}} u - \varphi_u T_a \in L^2(X)$，其中 $T_a v$是定义在 H_a 上的局部常值函数，它将 H_{a_i} 上的点映射为 v 沿 H_{a_i}方向的零阶傅里叶系数；可与 [4, Th´eor`eme1], 对照，其中讨论了 $n = 1$ 的情形。

命题 2.9 有如下

推论 2.12. 若 $u \in D(\Delta_a)$ 是 Δ_a 的特征函数，则 $u|_{S_a}$ 和$u|_{C_a}$ 是定义在 S_a 和 C_a 上的正则函数，并且沿着 H_a，

$$u|_{S_a} = u|_{C_a} \quad and \quad \nabla_\nu u|_{S_a} = \nabla_\nu u|_{C_a} + \text{loc. const.}$$

证明. 椭圆正则性表明，对于所有 k， $u|_{S_a} \in H^k(S_a)$ 和 $u|_{C_a} \in H^k(C_a)$。断言现在可由例如 [16, 命题 4.4.3] 得出。□

显然，推论 2.12 的断言可推广到 Δ_a 的特征函数的有限线性组合。

3. Spectral theory of the Laplacian

为方便起见，我们汇总一些关于 S 的拉普拉斯算子谱理论的事实。本节中，我们始终假设 $S = \Gamma\backslash\mathbb{H}$ 是有限面积的，且有 $n \geq 1$ 个尖点。我们还假设 S 是可定向的，因为据我们所知，没有文献涵盖不可定向情形。

3.1. 标准双曲尖点上的谱理论。 在双曲平面的上半空间模型 $\mathbb{H} = \{y > 0\}$ 中，标准双曲尖点 C_0 是 $\mathbb{H}$ 除以由下述等距变换生成的无限循环群所得的商：

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{3.1}$$

这里以及下文中，我们用 $z = x+iy$ 表示 $\mathbb{H}$ 的元素。对于任意 $y > 0$， C_0 中的圆 $H_y = \{x + iy \mid x \in \mathbb{Z}\backslash\mathbb{R}\}$ 称为高度为 y 处的测地线。 H_y 的长度为 $1/y$。因此，函数

$$y^{1/2}e^{2\pi ikx}, \quad \text{for } k \in \mathbb{Z}, \tag{3.2}$$

对所有 $y > 0$，构成 $L^2(H_y)$ 的希尔伯特基。它们定义了光滑函数 f 在 C_0 上的傅里叶系数 $f_k(y)$，其中

$$f_k(y) = \int_0^1 f(x + iy)y^{1/2}e^{2\pi ikx}dx, \tag{3.3}$$

它们在 $y > 0$ 上光滑。 $\mathbb{H}$ 和 C_0 上的拉普拉斯算子为

$$\Delta = -y^2(\partial_x^2 + \partial_y^2) \tag{3.4}$$

若将光滑函数 f 用其傅里叶系数表示，则

$$\begin{aligned} \Delta f &= \Delta \sum\nolimits_{k\in\mathbb{Z}} f_k y^{1/2}e^{2\pi ikx} \\ &= \sum\nolimits_{k\in\mathbb{Z}} \big(- y^2 f_k'' - y f_k' + (1/4 + 4\pi^2k^2y^2)f_k\big)y^{1/2}e^{2\pi ikx}, \end{aligned} \tag{3.5}$$

这给出了 Δf 的傅里叶分解。因此，对于 $\lambda \in \mathbb{C}$， f 是 Δ 的 λ-特征函数，当且仅当函数 f_k 满足

$$y^2 f_k'' + y f_k' - (1/4 + 4\pi^2k^2y^2 - \lambda) = 0, \tag{3.6}$$

这是一组二阶线性常微分方程。

推论 3.7. 若 f 是 Δ 的 λ-特征函数，则对于任意给定的 $a > 0$， f 由 $f|_{H_a}$ 和 $\partial_y f|_{H_a}$ 确定。

我们将其写作 $\lambda = s(1 - s) \in \mathbb{C}$，并顺带指出， $s(1 - s)$ 定义了复 λ 平面上的一个双重覆盖，其分支点位于 $s = 1/2$。对于$k = 0$，方程 (3.6) 有以下两个基本解，

$$f_0(y) = y^{s-1/2} \text{ and } y^{1/2-s} \quad \text{respectively} \quad 1 \text{ and } \ln y \tag{3.8}$$

分别对应 $\lambda \neq 1/4$ （即 $s \neq 1/2$）和 $\lambda = 1/4$ （即 $s = 1/2$）。特别是，如果 f 仅依赖于 y，那么 $\Delta f = \lambda f$ 有以下两个基本解，

$$f(y) = y^s \text{ and } y^{1-s} \quad \text{respectively} \quad y^{1/2} \text{ and } y^{1/2} \ln y \tag{3.9}$$

分别对于 $\lambda \neq 1/4$ （即 $s \neq 1/2$）和 $\lambda = 1/4$ （即 $s = 1/2$）。对于 $k \neq 0$，方程 (3.6) 有以下两个基本解，

$$f_k(y) = 2K_{s-1/2}(2\pi ky) \quad \text{and} \quad f_k(y) = 2\pi I_{s-1/2}(2\pi ky), \tag{3.10}$$

其中 I_ν 和 K_ν 表示与常微分方程相关的贝塞尔函数

$$y^2 f'' + yf' - (y^2 + \nu^2) f = 0;$$

参见 [6, 附录 B4]。

3.2. 艾森斯坦级数。 我们沿用 [6] 中的论述。设 $S = \Gamma\backslash\mathbb{H}$ 是一个具有有限面积和 $n \geq 1$ 个尖点 $C_1, \ldots, C_n$ 的双曲曲面。对于每个尖点，选取一个理想点 ξ_i，其在 Γ 中的稳定子为 $\Gamma_i \cong \langle \gamma_i \rangle$，并选取一个将双曲平面映为 $\sigma_i \infty = \xi_i$ （在上半空间模型中）的等距变换 σ_i，使得

$$C_i = \Gamma_i \backslash \sigma_i \{y \geq b_i\}, \quad \text{where} \quad \gamma_i = \sigma_i \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \sigma_i^{-1}. \tag{3.11}$$

注意，对于给定的 ξ_i，σ_i 在 $\mathbb{H}$ 的平移 $n_t(x+iy) = x+t+iy$ 意义下是唯一的。对于 $\mathbb{R}^+$ 上的函数 φ，我们得到加权埃森斯坦级数

$$E_i(z, \varphi) = \sum\nolimits_{\gamma \in \Gamma_i \backslash \Gamma} \varphi(\operatorname{Im} \sigma_i^{-1} \gamma z) \tag{3.12}$$

如果定义良好，那么也可将其视为 S 上的函数。对于 ξ_i 的另一种选择 $\xi_i' = g\xi_i$，其中 $g \in \Gamma$，Γ 中的稳定子 Γ_i' 为 $g\Gamma_i g^{-1}$，于是有

$$\sum\nolimits_{\gamma \in \Gamma_i' \backslash \Gamma} \varphi(\operatorname{Im} n_t^{-1} \sigma_i^{-1} g^{-1} \gamma z) = \sum\nolimits_{\gamma \in \Gamma_i \backslash \Gamma} \varphi(\operatorname{Im} \sigma_i^{-1} \gamma z) = E_i(z, \varphi)$$

对于权为 φ 的艾森斯坦级数，其中 $\sigma_i' = g\sigma_i n_t$，因为 n_t 不会改变虚部。对于 $s \in \mathbb{C}$ 和 $\varphi(y) = y^s$，记作

$$E_i(z, s) = E_i(z, y^s) = \sum\nolimits_{\gamma \in \Gamma_i \backslash \Gamma} (\operatorname{Im} \sigma_i^{-1} \gamma z)^s. \tag{3.13}$$

定义 $1 - s$ 的 s-特征函数 V_s 和 W_s 为

$$\begin{aligned} V_s(z) &= 2\pi y^{1/2} I_{2-1/2}(2\pi y) e^{2\pi ix}, \\ W_s(z) &= 2y^{1/2} K_{s-1/2}(2\pi y) e^{2\pi ix}, \end{aligned} \tag{3.14}$$

其中 W 称为惠特克函数；参见 [6, 方程1.26、1.27、1.36]。注意 V_s 和 W_s 的渐近行为不同，

$$V_s(z) \sim e^{2\pi ix} e^{2\pi y} \quad \text{and} \quad W_s(z) \sim e^{2\pi ix} e^{-2\pi y} \quad \text{as } y \to \infty; \tag{3.15}$$

参见 [6, 方程1.37、1.38]。根据 [6,方程6.18], ，我们有

$$E_i(\sigma_j z, s) = \delta_{ij} y^s + \varphi_{ij}(s) y^{1-s} + \sum\nolimits_{k \neq 0} \varphi_{ij}(k, s) W_s(kz), \tag{3.16}$$

其中，系数 $\varphi_{ij}(s)$ 和 $\varphi_{ij}(k, s)$ 是关于 s 的亚纯函数。系数矩阵 $\Phi(s) = (\varphi_{ij}(s))$ 称为散射矩阵。

注记 3.17。 对于 $s \neq 1/2$，0 阶项，即 (3.16) 右侧的前两项之和，并非恒等于零，因此 $E_i(\cdot, s)$ 也不恒等于零。另一方面， $E_i(\cdot, 1/2)$ 恒等于零，当且仅当 $\varphi_{ii}(1/2) = -1$。

以下是 [6] 与[4,Th´eor`eme 4]中的定理 6.6、6.9、6.10 和 6.11。

定理 3.18。 当 s 为实数时，散射矩阵 $\Phi(s) = (\varphi_{ij}(s))$ 是厄米的；当$\operatorname{Re} s = 1/2$时，它是酉的。

定理 3.19。 系数 $\varphi_{ij}(s)$ 在$\operatorname{Re} s \geq 1/2$中是全纯的，但在区间$(1/2, 1]$内有有限个简单极点除外。若 s 是这样的极点，则它也是 $\varphi_{ii}(s)$ 的极点，且其留数为留数 $\varphi_{ii}(s) > 0$。

定理 3.20。 映射 $s \mapsto E_i(\cdot, s) \in C^\infty(S)$ 在 $\{s \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} s \geq 1/2\}$中是全纯的，但 $\varphi_{ii}(s)$的极点除外。留数

$$\operatorname{res} E_i(z, s) = \lim_{s' \to s} (s' - s) E_i(z, s')$$

在 $\varphi_{ii}(s)$ 的极点处，是定义在 S 上非零的平方可积 λ-特征函数，其中 $\lambda = s(1 - s)$。

注意，取留数会消去 (3.16) 中 0 阶傅里叶系数的第一项，而第二项变为 $\operatorname{res} \varphi_{ij}(s) y^{1-s}$。由于极点的实部为 $> 1/2$，因此极点 s 处的留数 $\operatorname{res} E_i(\cdot, s)$ 平方可积。$\operatorname{res} E_i(z, s)$ 非零，因为对这些极点，$\operatorname{res} \varphi_{ii}(s) > 0$。

3.3. **谱分解**。 定理 3.20 中这类特征值和特征函数称为剩余的。例如，$s = 1$ 是每个艾森斯坦级数 $E_i(z, s)$ 的一个极点，而留数 $\operatorname{res} E_i(z, 1) = 1/|S|$，根据 [6, 命题 6.13]。注意，在 $s = 1$ 处的留数是常数，不依赖于 i；而特征值 $\lambda = 0$ 的重数为一。下面的命题 3.24 将根据散射矩阵的留数刻画剩余特征值的重数。

如果 φ 光滑且具有紧支集，那么 $E_i(z, \varphi)$ 是定义良好的有界光滑函数，定义在 S 上，称为不完全艾森斯坦级数。由不完全艾森斯坦级数生成的向量空间记为 $\mathcal{E}'$。

如果一个光滑函数 f 在 S 上满足：沿 S 的尖点，其阶数为 0 的傅里叶系数均为零，则称其为尖点函数。更确切地说，对于任意 $1 \leq i \leq n$、$\tilde{}$，$f \circ \sigma_i$ 的阶数为 0 的傅里叶系数均为零（完全为零，而不仅仅是对于$y > b_i$），其中 f 表示将 f 提升到上半平面后的函数。有界尖点函数构成的向量空间记为 $\mathcal{C}'$。它在 $L^2(S)$ 中与 $\mathcal{E}'$正交。相应的闭包 $\mathcal{E}$ 和 $\mathcal{C}$ 在 $L^2(S)$ 中分解 $L^2(S)$，

$$L^2(S) = \mathcal{C} \oplus \mathcal{E}, \tag{3.21}$$

参见 [6, (3.16)]。该分解是 L^2-正交且 Δ-不变的，并按如下方式分解谱（[6,定理 4.7 和 7.3]）。

定理 3.22. Δ 在尖点部分 $\mathcal{C}$ 上的谱是离散的。 Δ 在 $\mathcal{E}$ 上的谱具有一个 L^2-正交且 Δ-不变的分解

$$\mathcal{E} = \mathcal{R} \oplus \mathcal{E}_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{E}_n,$$

其中， Δ 在

(1) 剩余部分 $\mathcal{R}$ 由有限个剩余特征值组成，且包含于 $[0,1/4)$；*(2)* 每个 $\mathcal{E}_i$ 都是绝对连续的，覆盖 $[1/4,\infty)$ ，重数为一。

Δ 在 $\mathcal{E}_i$ 上的谱由 $E_i(z,1/2+ir)$ $r\in\mathbb{R}$张成，尽管后者本身并不属于 $L^2(S)$；详情请参见 [6, 定理 7.3]。

我们将 Δ在 $\mathcal{C}$上的特征值按重数计数，记为

$$0<\lambda_1^{\mathrm{cus}}\le\lambda_2^{\mathrm{cus}}\le\lambda_3^{\mathrm{cus}}\le\dots$$

我们称它们为尖点特征值，其对应的特征函数称为尖点特征函数。 Δ在 $\mathcal{E}$ 中的点谱由有限个剩余特征值组成

$$0=\lambda_0^{\mathrm{res}}<\lambda_1^{\mathrm{res}}\le\lambda_2^{\mathrm{res}}\le\dots\le\lambda_k^{\mathrm{res}}<1/4,$$

这里注意到，0 是与极点 $s=1$[6,定理 6.13]相关联的剩余特征值。

注 3.23. Δ 在 $[0,1/4)$ 中的谱是离散的。它由有限多个有限重数的尖点特征值和剩余特征值组成。若 $1/4$是一个特征值，则根据 Otal 的结果 [11]，它是一个有限重数的尖点特征值，且其重数至多为$\lfloor\chi(S)|-1$。

我们将非负实数记为 $\lambda=s(1-s)$，其中 $1/2\le s\le1$或 $s\in\mathbb{C}$ 满足 Re $s=1/2$ 且 Im $s\ge0$。对于任意 $s\in(1/2,1]$，令 $P(s)$ 由满足以下条件的那些 $1\le i\le n$ 构成： s 是艾森斯坦级数 E_i 的一个极点，并令 $Q(s)$ $=\{1,\dots,n\}\setminus P(s)$。若 $P(s)=\emptyset$，则称 s为正则；否则称 s为奇异。除有限多个外，所有 s 都是正则的；根据定理 3.20，奇异的那些属于 $(1/2,1]$。若 $Q(s)$ $=\emptyset$，则称 s 为完全奇异。根据 [6, 定理 6.13]， $s=1$ 是完全奇异的。若 S 恰有一个端，则 s 要么是正则的，要么是完全奇异的。

命题 3.24。 $\lambda=s(1-s)$ 作为 Δ 的剩余的特征值的重数等于散射矩阵 $\Phi(s)$ 的秩留数 $\Phi(s)$。此外，当 $P(s)\neq\emptyset$时，秩留数 $\Phi(s)\ge1$。

例如， $\lambda=0$ 是一个重数为一的剩余的特征值。因此，res $\Phi(1)$ 的秩等于一。

证明。剩余 λ-特征函数空间由所有留数 res $E_i(.\,s)$ 的线性组合 f、 $i\in P(s)$ 构成。如果

$$\sum\nolimits_{i\in P(s)}\alpha_i\operatorname{res}\varphi_{ij}(s)=0$$

对所有 $1\le j\le n$，则 f 的零阶傅里叶系数沿尖点消失，因此处处为零。同时， f 与 $\mathcal{C}$正交。因此 $f=0$，第一个结论得证。至于第二个结论，我们注意到，如果 $P(s)\neq\emptyset$，那么 res $\Phi(s)\neq0$。□

4. Spectral theory of pseudo-Laplacians

在 [4, Th´eor`eme 5], Colin de Verdi`ere 用尖点形式 Δ_∞ 和艾森斯坦级数描述了 Δ_a 的谱，这一结果适用于S 恰有一个尖点的情形。在本小节中，我们将他的结果推广到曲面可能有多个尖点的情形。他的结果对应于下文在只有一个尖点时的定理 4.1 以及推论 4.7 和 4.13。多个尖点的情形更为复杂，我们的许多论证也与他的不同。我们沿用上述设定，并令$C_{i,b_i} = \Gamma_i\backslash\sigma_i\{y \geq b_i\}$，其中 $1 \leq i \leq n$。

与上一节一样，将 Δ 在 $\mathcal{E}$中的点谱（由有限个剩余特征值组成）记为

$$0 = \lambda_0^{\mathrm{res}} < \lambda_1^{\mathrm{res}} \leq \lambda_2^{\mathrm{res}} \leq \cdots \leq \lambda_k^{\mathrm{res}} < 1/4.$$

由于 Δ和 Δ_a 在 $\mathcal{C}$上相同，尖点特征值也是所有Δ_a的特征值。对于 $a > b$，令

$$0 < \lambda_0^a \leq \lambda_1^a \leq \lambda_2^a \leq \dots$$

为 Δ_a 在 $\mathcal{C}$的正交补 $\mathcal{E}_a = \mathcal{H}_a \cap \mathcal{E}$ 上的特征值。

定理 4.1. 对于所有 $j \geq 0$， λ_j^a 关于 a 在 $b < a < \infty$上连续。此外，对于所有 $b < a < a'$，我们有

(1) $\lambda_j^{\mathrm{res}} < \lambda_j^{a'} < \lambda_j^a$ *and* $\lim_{a\to\infty} \lambda_j^a = \lambda_j^{\mathrm{res}}$ *for* $j \leq k$;

(2) $1/4 < \lambda_j^{a'} < \lambda_j^a$ *and* $\lim_{a\to\infty} \lambda_j^a = 1/4$ *for* $j > k$.

证明。令 φ 为一个在 $(-2\delta, 2\delta)$ 中具有紧支集的光滑函数，使得 $\varphi = 1$ 在 $(-\delta, \delta)$ 上成立，其中 $\delta > 0$ 充分小。对于 $1 \leq i \leq n$，令 Y_i 为 S上的向量场，它在尖点 C_{i,b_i}之外为零，在 C_{i,b_i}中垂直于测地线，在 C_{i,b_i}中指向远离无穷远处的方向，且长度为 $\varphi(\ln(y/a_i))$，这里我们使用 $\sigma_i^{-1} = x + iy$ 作为坐标。注意， Y_i 的支集是紧的，因此它们是完备的。

令 $F_{i,s}$ 为 Y_i的流。那么，在 H_{i,a_i} 的2δ-邻域之外，$F_{i,s}$ 等于恒等映射，并且 $F_{i,\ln(a_i'/a_i)}(C_{a_i'}) = C_{a_i}$ 当 $|\ln(a_i'/a_i)| < \delta$时。此外，由于 Y 在C_{i,b_i} 中垂直于测地线，且沿测地线长度恒定，$F_{i,s}$ 将测地线映射为测地线，因此拉回$F_{i,s}^*$ 保持函数在测地线上沿零阶的傅里叶系数为零这一条件。因此，拉回 $F_{aa'}^*$ 与 $F_{i,\ln(a_i'/a_i)}$ 的复合映射 $F_{aa'}$ 将 $\mathcal{H}_{a'}$ 映射到 $\mathcal{H}_a$。

由于 $F_{i,s}$ 在 s 趋于零时于 C^∞拓扑下趋于 S 的恒等映射，因此第一个结论由特征值的变分刻画和极小极大原理得出。极小极大原理将 λ_j^a 刻画为满足以下条件的最小数 λ：存在一个 $(j+1)$ 维子空间 $V \subseteq \mathcal{E}_a$，

$$\|\nabla u\|_{L^2}^2 \leq \lambda \|u\|_{L^2}^2 \quad \text{for all } u \in V. \tag{4.2}$$

注意， $F_{aa'}^*$不会将 $\mathcal{E}_{a'}$映射到 $\mathcal{E}_a$，因为 $F_{aa'}^*$不保持体积。然而，由于 a' 趋于 a时， $F_{aa'}$ 在 C^∞拓扑下趋于 S 的恒等映射， $F_{aa'}^*(\mathcal{E}_{a'})$ 趋于 $\mathcal{E}_a$，而且在 $F_{aa'}^*$ 作用下，瑞利商也彼此趋近。关于连续性的断言由此得出。

根据定理 3.22 和特征值的变分刻画，对应于 $\lambda_j(a)$ 的 $\mathcal{E}$ 上 Δ 的特征值，可通过将 (4.2) 中对 $\mathcal{E}$ 的要求里的 $\mathcal{E}_a$ 替换为

$\mathcal{E}$ 而得到，因此当 $j \le k$ 时等于 λ_j^{res}，当 $j > k$ 时等于 $1/4$。由于 $\mathcal{E}_a \subseteq \mathcal{E}_{a'} \subseteq \mathcal{E}$，我们得到了所述不等式的弱形式。现在，$\Delta_a$ 的一个 $\mathcal{E}_a$-特征函数不可能是 $\Delta_{a'}$ 的一个 $\mathcal{E}_{a'}$-特征函数；否则，它在尖点的 $[a, a']$-部分上的第一个傅里叶系数就会消失，进而由于关于 a' 的解析性，在尖点的内部部分上也会消失，于是该函数将属于 $\mathcal{C}$。但由于它与 $\mathcal{C}$ 正交，它只能恒为零。这就证明了严格不等式 $\lambda_j^{a'} < \lambda_j^a$；其余不等式严格性的证明则可由定理 3.22 得出。极限行为也是定理 3.22 的推论，因为 $\mathcal{E}_a$ 穷尽了 $\mathcal{E}$。□

推论 4.3。对于所有 $b < a < a'$，我们有

$$N_a(1/4) \le N_{a'}(1/4) \le N(1/4) \le |\chi(S)|$$

并且对于所有充分大的 a，$= N(1/4)$ 和 $N_a(1/4)$

证明。根据 [1, 定理 1.5], $\Delta = \Delta_\infty$ 在$[0, 1/4]$中至多有 $|\chi(S)|$ 个特征值（计重数）。因此，根据定理 4.1 中所述的单调性，该断言立即成立。□

现在考虑艾森斯坦级数及其在给定 s处的留数的线性组合，

$$f_s = \sum\nolimits_{i \in Q(s)} \alpha_i E_i(z, s) + \sum\nolimits_{i \in P(s)} \alpha_i \operatorname{res} E_i(z, s). \tag{4.4}$$

它们沿 C_j 的零阶傅里叶系数为

$$\sum\nolimits_{i \in Q(s)} \alpha_i \varphi_{ij}(s) y^{1-s} + \sum\nolimits_{i \in P(s)} \alpha_i \operatorname{res} \varphi_{ij}(s) y^{1-s} + \begin{cases} \alpha_j y^s, \\ 0, \end{cases} \tag{4.5}$$

对所有 $j \in Q(s)$，分别有 $j \in P(s)$；参见 (3.16)。

定理 4.6. 对于上述任意 $s \ne 1/2$ 和 $\lambda = s(1-s)$，$\mathcal{E}_a$ 上 Δ_a 的 λ-特征空间由在 a 处截断的 f_s 构成，如 (4.4) 所示，并且对所有 $1 \le j \le n$,

$$\sum\nolimits_{i \in Q(s)} \alpha_i \varphi_{ij}(s) + \sum\nolimits_{i \in P(s)} \alpha_i \operatorname{res} \varphi_{ij}(s) = \begin{cases} -\alpha_j a_j^{2s-1} & \text{if } j \in Q(s), \\ 0 & \text{if } j \in P(s). \end{cases}$$

若 $f_s \ne 0$，则存在 $j \in Q(s)$，使得 $\alpha_j \ne 0$。

除有限多个 s 外，其余均为正则；对于这些正则值，左侧的第二个求和项和右侧的第二种情形均不存在。在这种情况下，所显示的方程组要求 -1 是一个矩阵的特征值，该矩阵的元素为 $\varphi_{ij}(s) a_j^{1-2s}$，其中 $1 \le i, j \le n$；也就是说，散射矩阵 $\Phi(s)$ 与 a_j^{1-2s} 的向量相乘。

推论 4.7 (极点作为屏障). 若 $s \in (1/2, 1]$ 是完全奇异的，则 λ 不是 $\mathcal{E}_a$-特征值 Δ_a。特别地，若 ℓ 表示低于 λ的剩余特征值数量，按重数计，则

$$\lambda_{\ell-1}^a < \lambda_\ell^{\mathrm{res}} = \lambda = \lambda_{\ell+r-1}^{\mathrm{res}} < \lambda_\ell^a$$

对所有 $b < a < \infty$，其中 $1 \le r =$秩留数 $\Phi(s) \le n$。

证明。由于 s 是完全奇异的，$Q(s) = \emptyset$。□

在一个尖点的情况下， s 要么是正则的，要么是完全奇异的。因此我们得到以下 [4,定´理`的 5]断言。

推论 4.8. 如果 S 恰有一个尖点，那么 $\mathcal{E}_a$的特征值重数为一，且不是剩余的。更准确地说，

$$0 = \lambda_0^{\mathrm{res}} < \lambda_0^a < \lambda_1^{\mathrm{res}} < \cdots < \lambda_k^{\mathrm{res}} < \lambda_k^a.$$

注 4.9. 我们看到，在恰有一个尖点的情形下， $\mathcal{E}_a$的特征值λ_i^a分别包含于区间 $(\lambda_i^{\mathrm{res}}, \lambda_{i+1}^{\mathrm{res}})$（对应 $i < k$）和 $(\lambda_k^{\mathrm{res}}, \infty)$ 中。由于$\lambda_k^{\mathrm{res}} < 1/4$，当 a 变化时，只有 λ_k^a 可能穿过 $1/4$ 。若尖点多于一个，则当 s 不是完全奇异时，$\mathcal{E}_a$的特征值可能穿过剩余特征值$\lambda = s(1-s)$。

定理 *4.6* 的证明. 所展示的方程组表明，推论 2.12 的条件得以满足，因为 f_s 在尖点 C_j 处的零阶傅里叶系数在 a_j 处消失，并且对于所有 $1 \le j \le n$，f_s 的截断是通过删除超过 a_j的零阶傅里叶系数实现的。截断艾森斯坦级数 $E_i(\sigma_j z, s)$ 的平方可积性由 [6,(6.20)], 得出，该式指出

$$E_i(\sigma_j z, s) = \delta_{ij} y^s + \varphi_{ij}(s) y^{1-s} + O(e^{-2\pi y})$$

如果 s 不是 E_i的极点。此外，艾森斯坦级数的留数及其截断也都是平方可积的。因此，所有 f_s 都属于 $\mathcal{E}_a$上的 Δ_a 的λ-特征空间。

为证明 f_s 张成该空间，先假设 s 是正则的。设g 是 $\mathcal{E}_a$上的 Δ_a 的 λ-特征函数。那么， g 在 $[b_j, a_j]$ 上的零阶傅里叶系数，对于所有$1 \le j \le n$，都等于某些常数 β_j，γ_j所给出的 $\beta_j y^s + \gamma_j y^{1-s}$。这些关于 $\Delta f = \lambda f$ 的解可延拓到所有 $[b_j, \infty)$。将其加到 (a_j, ∞) 上的 g，便得到一个 λ-特征函数 $\hat{}g$，使得 g 等于 $\hat{}g$ 在 a处的截断。将 $s = 1/2 + it$ 写成 $t < 0$，或将 $t = i\sigma$ 写成 $\sigma < 0$。那么，$\hat{}g$ 沿 S 的第 j个尖点的零阶傅里叶系数具有如下形式

$$\beta_j y^s + \gamma_j y^{1-s} = y^{1/2}(\beta_j y^{it} + \gamma_j y^{-it}).$$

因此，沿第 j 个尖点的零阶傅里叶系数

$$h = g - \sum \beta_j E_j(., s)$$

根据 (3.16)，不涉及 y^s，而只涉及 y^{1-s}。因此， $f = (h, \ ith)$ 满足 [8, 定理 8.4] （见 [8, 第 203] 页第 1 行）的假设，因而$f = 0$；所以 $h = 0$也成立。

现在更一般地，假设 $s \ne 1/2$，令 $\lambda = s(1-s)$，并回忆一下， Δ的尖点谱是离散的，且属于所有$\Delta_{a'}$的谱。此外， Δ_a 的 $\mathcal{E}_a$ 谱也是离散的，随 a 连续变化，并且严格单调。因此，存在一个 $\varepsilon > 0$，使得对于所有充分接近 a 的 a'， $\Delta_{a'}$ 在 $\lambda - \varepsilon$ 与 $\lambda + \varepsilon$ 之间的 $\mathcal{E}_{a'}$ 个特征值（按重数计）等于 λ 作为 Δ_a 的 $\mathcal{E}_a$ 特征值的重数 μ。由单调性，对于所有充分接近 a 的 $a' > a$， $\Delta_{a'}$ 在 $(\lambda - \varepsilon, \ \lambda)$ 中恰有 μ $\mathcal{E}_{a'}$ 个特征值。

现在考虑一个由 $a_n > a$ 收敛到 a 的 $\mathcal{E}_{a_n}$-特征函数f_{s_n} 序列，其中 $s_n \to s$，且 f_{s_n} 收敛到一个 $\mathcal{E}_a$-特征函数 f_s。记 f_{s_n}

与 (4.4) 中相同，并注意到 $P(s_n) = \emptyset$。对于 $i \in P(s)$，将 α_{in}除以 $s_n - s$，并将 $E_i(., s_n)$ 乘以 $s_n - s$，可得极限具有 (4.4) 中的形式。此外，该极限的零阶傅里叶系数 f_s在 a处为零，因此满足定理 4.6 中所述的方程。根据维数计数论证，这些极限张成了 Δ_a 在 $\mathcal{E}_a$上的整个 λ-特征空间，因此定理的第一部分得证。

至于最后一个断言，若对所有 $j \in Q(s)$ 都有 $\alpha_j = 0$，则定理 4.6 所显示等式左侧的第一项求和以及右侧的第一种情形均不存在。因此，该显示等式要求 $(\alpha_1, \ldots\ldots, \alpha_n) \in$限制映射的核 $\Phi(s)$。由于此条件不取决于 a 的选取， f_s 的零阶傅里叶系数沿所有尖点都为零，因而处处为零。因此， f_s 属于 $\mathcal{C}$。与此同时， f_s 与 $\mathcal{C}$ 正交，因此 $f_s = 0$。□

按照 Wolpert [17, 定义 3.1], , 若函数 f 在 S 上存在常数 $c > 0$，使得对 S 的每个尖点$C_{i,\ b_i}$，当 $y \to \infty$时， $f(\sigma_i z) = O(y^c)$，其中我们照常将 $z = x + iy$ 记作 $z = x + iy$。如同在 [17, 定义 4.1], 中，我们令 $\mathcal{E}(1/4)$ 表示 Δ 的中等增长广义$1/4$-特征函数空间，且该空间中的函数与 $\mathcal{C}$正交。

散射矩阵 $\Phi(1/2) = (\varphi_{ij}(1/2))$ 是厄米且酉的，因此 $\mathbb{C}^n$ 按正交方式分解为其对应特征值 ± 1 （重数为 $\mu_\pm \geq 0$）的特征空间 $E^\pm$ 之和。令

$$\mathcal{F}^+ = \{\sum\nolimits_{1 \leq i \leq n} \alpha_i^+ E_i(z, 1/2) \mid \alpha^+ \in E^+\},$$
$$\mathcal{F}^- = \{\sum\nolimits_{1 \leq i \leq n} \alpha_i^- \partial_s E_i(z, 1/2) \mid \alpha^- \in E^-\},$$

其中 $\alpha^\pm = (\alpha_1^\pm$、.....、 $\alpha_n^\pm) \in E^\pm$。关于 $\mathcal{F}^-$ 的定义，说明如下：任意线性组合

$$f = \sum\nolimits_i \alpha_i^- E_i(z, 1/2) = 0.$$

至于后者的证明，由于 $\alpha^- \in E^-$， f 的零阶傅里叶系数沿着 S 的每个尖点恒等于零。因此，由于 f 与 $\mathcal{C}$ 正交，根据定理 3.22，它必定恒等于零。

定理 4.10。 我们有 $\mathcal{E}(1/4) = \mathcal{F}^+ \oplus \mathcal{F}^-$，也就是说， Δ 的任意中等增长的广义 $1/4$ 特征函数，只要与 $\mathcal{C}$ 正交，都可表示为唯一的线性组合

$$f_s = f_{1/2} = \sum\nolimits_i \big(\alpha_i^+ E_i(z, 1/2) + \alpha_i^- \partial_s E_i(z, 1/2)\big). \tag{4.11}$$

证明。 由定义可知，函数 $E_i(z, 1/2)$ 和 $\partial_s E_i(z, 1/2)$ 属于 $\mathcal{E}(1/4)$，其中 $1 \leq i \leq n$。显然，其中许多函数可能线性相关。事实上，根据 [17, 引理 4.5], $\mathcal{E}(1/4)$ 的维数至多为 n。

$f = \sum_i \alpha_i^+ E_i(z, 1/2)$ 沿 C_{j,b_j} 的零阶傅里叶系数为

$$\big(\alpha_j^+ + \sum\nolimits_i \alpha_i^+ \phi_{ij}(1/2)\big) y^{1/2} = 2\alpha_j^+ y^{1/2},$$

其中，在后一个方程中我们使用了 $\alpha^+ \in E^+$。因此，若 $\alpha^+ \neq 0$，则有 $f \neq 0$。类似地， $f = \sum_i \alpha_i^- \partial_s E_i(z, 1/2)$ 的零阶傅里叶系数为 $\in \mathcal{F}^-$

沿着 $C_{j,\ b_j}$ 为

$$\begin{aligned}&\big(\alpha_j^- - \sum\nolimits_i \alpha_i^- \phi_{ij}(1/2)\big) y^{1/2} \ln y + \sum\nolimits_i \alpha_i^- \phi'_{ij}(1/2) y^{1/2} \\ &= 2\alpha_j^- y^{1/2} \ln y + \sum\nolimits_i \alpha_i^- \phi'_{ij}(1/2) y^{1/2}.\end{aligned}$$

因此 $f \neq 0$ 当 $\alpha^- \neq 0$ 时。由此可知，$\mathcal{F}^{\pm}$ 的维数为 $\dim E^{\pm}$。还可知 $\mathcal{F}^+ \cap \mathcal{F}^- = \{0\}$，因为零阶傅里叶系数沿 S 的尖点具有不同的增长率。现在 $\dim E^+ + \dim E^- = n$，因此 $\mathcal{E}(1/4) = \mathcal{F}^+ \oplus \mathcal{F}^-$，如所断言。□

顺便指出，上述证明表明 $\dim \mathcal{F}^{\pm} = \dim E^{\pm}$，且 $\dim \mathcal{E}(1/4) = n$。后一个等式也曾在 [17,备注 4.6] 中得到。

定理 4.12。对于 $a > b$，Δ_a 在 $\mathcal{E}_a$ 中的任意 $1/4$-特征函数，都由 a 处所有如 (4.11) 中的线性组合的截断组成，并且在 a处的零阶傅里叶系数为零；也就是说，对于所有 $1 \leq j \leq n$,

$$2\alpha_j^+ + 2\alpha_j^- \ln a_j + \sum\nolimits_{1 \leq i \leq n} \alpha_i^- \varphi'_{ij}(1/2) = 0.$$

证明。仿照定理 4.6 的证明策略，我们可以将 $\mathcal{E}_a$ 中 Δ_a 的任意 $1/4$-特征函数解析地延拓到整个 S。由于 Δ_a 的任意特征函数都属于 $L^2(S)$，延拓后的函数具有中等增长，因此具有形式 (4.11)。最后一个恒等式是通过考察延拓函数在每个尖点处的零阶傅里叶系数，并令其在第 i 个尖点处等于 $y = a_i$ 得到的。□

推论 4.13。$\mathcal{E}_a$ 中 Δ_a 的 $1/4$ 作为特征值的重数等于

$$\mu = \dim\{\alpha \in E^- \mid (D_a + \Phi'(1/2)^t)\alpha \in E^+\},$$

其中，D_a 表示一个对角矩阵，其对角元为 $2 \ln a_j$。特别地，$\mu \leq$ 维数 E^-，并且，若 $\Phi(1/2) = -I$，则 $\mu = \ker(D_a + \Phi'(1/2)^t)$ 的维数。

备注 4.14。Phillips 和 Sarnak 猜想，对于有限拓扑型曲面上的一般有限面积双曲度量，$\Phi(1/2) = -I$；参见第 28] 页 [13,。

推论 4.15. 设 $f \in L^2(S)$ 是 λ-特征函数，定义在 $\mathcal{E}_a$ 上的 Δ_a。那么 $\hat{}$ $\hat{}f$ 是唯一一个定义在 $\mathcal{E}$ 上的 Δ 的 λ- 特征函数 f 的截断，且 f 具有中等增长，但不是平方可积的。

4.1. 不可定向情形。在第 3 节和第 4 节前述部分中，我们始终假设 S 是可定向的。现在我们简要说明，在不可定向情形下，定理 B 证明所需的相关结果以及其余各节的内容如何得出。

为此，设 S 是一个有限面积的非紧非定向双曲曲面，且 $p\colon S' \to S$ 是其定向覆盖，覆盖变换为 τ，其中 S' 赋予了提升度量。于是，S 与一个带有有限个穿孔 p_1、.....、p_n 的闭非定向曲面微分同胚。与可定向情形一样，我们可以在 p_i 周围选取两两不相交的闭尖点邻域 $C_{i,\ b_i}$，并以测地线 $H_{i,\ b_i}$ 作为边界。由于尖点是可定向的，每个 $C_{i,\ b_i}$ 都提升为 S' 中的两个等距尖点邻域 $C'_{i,\ b_i}$ 和 $C''_{i,\ b_i}$，并由 τ 互换。

沿用之前的记号，对于任意 $a > b$，我们在 S 上得到一个伪拉普拉斯算子 Δ_a。通过 p 的拉回将 Δ_a 与 S' 上相应的伪拉普拉斯算子 Δ'_a 交织起来，其中这里的 Δ'_a 与以下选择 a_i 对于 C'_i、a_i 和 C''_i、a_i 相关。由此可知，Δ_a 的特征函数提升为 Δ'_a 的特征函数，并且 Δ_a 的谱是离散的。这足以满足我们在以下各节中的讨论。

现在，在可定向情形下，定理 B 立即由定理 4.1 得出；因此，对我们而言，只需证明定理 4.1 在不可定向情形下的一个版本即可。由于 $\mathcal{C}$ 的拉回等于 $\mathcal{C}'$，$L^2(S)$ 中 $\mathcal{C}$ 的正交补 $\mathcal{E}$ 拉回后为 $\mathcal{E}'$，而 Δ_a 保持 $\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{E}$ 不变。Δ_a 的特征函数拉回后，是 S' 上 τ-不变的特征函数。现在逐步考察证明可知，定理 4.1 在不可定向情形下同样成立。

还值得注意的是，推论 4.15 可推广至不可定向情形。事实上，若 $f \in L^2(S)$ 是 $\mathcal{E}_a$ 上 Δ_a 的一个 λ-特征函数，则它在 S' 上的提升 f' 是 $\mathcal{E}'_a$ 上 Δ'_a 的一个 λ-特征函数。因此，f' 是 $\mathcal{E}'$ 上 Δ' 的一个 ˆ ˆλ-特征函数 f 的截断。注意到 f 是τ-不变的，即可得出该断言，因为 ˆ $f - \hat{f} \circ \tau$ 是一个在 S'_a 上消失的 λ-特征函数 Δ'。

5. Analytic systoles

现在我们引入解析 systole [1] 的一个适配版本。首先注意，任意不恒为零的 $u \in D(\Delta_a)$ 的瑞利商为

$$\mathrm{Ray}(u) = \frac{\langle \Delta_a u, u\rangle_0}{\|u\|_0^2} = \frac{\|\nabla u\|_0^2}{\|u\|_0^2}.$$

如果 $(\Omega_i)_i$ 表示 u的节点域族，那么我们得到

$$\mathrm{Ray}(u) = \frac{\sum_i \int_{\Omega_i} |\nabla u|^2}{\sum_i \int_{\Omega_i} |u|^2}$$

对于任意区域 $\Omega \subseteq S$，令

$$\lambda_0(\Omega) = \inf_{u \in \mathrm{Lip}_0(\Omega)} \mathrm{Ray}(u).$$

右侧的下确界也可以通过令 u 遍历 Ω 中具有紧支集的光滑函数来取得。

回顾 [1] 中解析 *systole* 的概念，它属于 S，

$$\Lambda(S) = \inf_{\Omega} \lambda_0(\Omega),$$

其中 Ω 遍历 S 中所有边界分段光滑且同胚于闭圆盘、环带或莫比乌斯带的区域。由于我们取下确界，不失一般性地假设竞争区域是边界光滑的紧区域。由于尖点的存在，我们有$\Lambda(S) = 1/4$，这对我们的目的来说还不够，因此我们需要进一步细化这一概念。

我们区分 S 中具有分段光滑边界的紧域 Ω 的以下类型：

˜类型 1：Ω 是一个嵌入圆盘。因此，Ω 可等距提升为双曲平面中的一个圆盘 Ω，故根据 Faber-Krahn 不等式，我们有

$$\lambda_0(\Omega) = \lambda_0(\tilde{\Omega}) \geq \lambda_0(D_{|\Omega|}) \geq \lambda_0(D_{|S|}), \tag{5.1}$$

其中 D_V 表示双曲平面中面积为 V 的圆盘。

类型 2：Ω 是一个嵌入环带，其边界圆均为零同伦。于是，S 中 Ω 的补集的一个连通分支是 S 中的圆盘 B'，我们将其与 Ω 粘合，得到圆盘 $B = \Omega \cup B'$。我们得到

$$\lambda_0(\Omega) \geq \lambda_0(B) \geq \lambda_0(D_{|B|}) \geq \lambda_0(D_{|S|}). \tag{5.2}$$

类型 3：Ω 是一个嵌入环带，其边界圆与 S 中的一条简单闭测地线 c 同伦。

类型 4：Ω 是一个嵌入的 M¨带。于是，Ω 的边界圆与 S 中的一条闭测地线 c 同伦。

类型 5：Ω 是一个环带，其边界圆与 S 的（恰好）一个尖点中的测地线同伦，并且 Ω 体现了这样的要求：$\mathcal{H}_a$ 中的函数在H_a之后的傅里叶系数均为零。也就是说，我们进一步假设，对于 H_a上方的每条测地线 H_y，若此类环带的内部与 H_y相交，则其边界与 H_y 至少相交于两点。

最后，我们将相对于 Δ_a 的 S 解析 *systole* 定义为

$$\Lambda_a(S) = \inf_{\Omega} \lambda_0(\Omega)$$

其中，Ω 遍历上述五种类型的所有区域。

命题 5.3. 对于任意 $a > b$，我们有 $\Lambda_a(S) > 1/4$。此外，对于上述类型之一的任意区域 Ω，我们有 $\lambda_0(\Omega) > \Lambda_a(S)$。

证明。为证明第一个断言，我们可以分别考察上述五种类型的区域。对于类型 1 和 2 的 Ω，根据 Faber-Krahn 不等式，$\lambda_0(\Omega)$ 的下界为$\lambda_0(D_{|S|})$。由单调性可知，后者严格大于双曲平面上的 λ_0，即 $1/4$。对于类型 3 和 4 的 Ω，$\lambda_0(\Omega)$ 的下界为

$$\frac{1}{4} + \min\left\{\frac{\pi}{|S|}, \frac{\mathrm{sys}(S)^2}{|S|^2}\right\},$$

其中 sys(S)，即 S的最短闭测地线长度，是 S中简单闭测地线的最小长度；见 [9] 和 [2, 定理 4.1(1)]。由于 sys(S) > 0，上述项严格大于 $1/4$。

接下来考虑类型 5 的区域。设 Ω_n 是 S 中此类型区域的一个竞争序列。经过抽取子序列后，不妨设 $\partial\Omega_n$ 的边界圆同伦于 $c = H_{i,\ a_i}$，即固定尖点 $C = C_{i,\ a_i}$ 的基本群 Γ_i 的一个生成环 c，其中 S。我们将 $\partial\Omega_n = c_n \cup c_n^+$ 的边界圆排序为，其中 c_n 相对于 C 位于 c_n^+ 下方。从现在起，如有必要，通过取更大的环带，我们假设 c_n^+ 位于 C 内部，且 c_n 不与 C 相交。

现在反设断言不成立，即 $\lambda_0(\Omega_n) \to \lambda \leq 1/4$，并考虑支集位于 Ω_n 中的 $\varphi_n \in C_c^\infty(S)$，其中 $\|\varphi_n\|_{L^2} = 1$ 且 Ray $\varphi_n \to \lambda$。

记住，φ_n 在每条位于 H_{i,a_i} 上方的测地线 H 上某处取值为零，由引理 5.5 可得

$$\int_{C_{i,y}} |\nabla \varphi_n|^2 \geq \pi^2 y^2 \int_{C_{i,y}} \varphi_n^2 \tag{5.4}$$

对于任意 $y \geq a_i$。令 $C_n = C \cup \Omega_n$ 为 S 的区域，其边界为 c_n，且包含 C。取一点 $x_0 \in c = \partial C$，并注意到存在 $R > 0$，使得对于任意 $n \in \mathbb{N}$，$d(x_0, c_n) \leq R$。事实上，由于 c_n 与 c 同伦，它必定与 S_a 相交，而 S_a 的直径有限。还应注意，从 x_0 到 c_n 的任意最短测地线的像都包含在 C_n 中。

令 Γ_i 表示 $\pi_1(S, x_0)$ 中与 c 对应的抛物子群，现将其视为作用在双曲平面上。我们考虑双无限尖点 $\mathcal{C} = \Gamma_i \backslash \mathbb{H}$。区域 C_n 对应于 $\mathcal{C}$ 中的区域 C_n。显然，存在一个与 n 无关的 $\bar{a} \leq a_i$，使得 $\partial C_n \cap \mathcal{C}_{\bar{a}} \neq \emptyset$，其中 $\mathcal{C}_{\bar{a}} = \Gamma \backslash \{x + iy : y \geq \bar{a}\}$，并且连接 $\tilde{x}_0$ 与 $\partial \tilde{C}_n$ 的最短测地线包含在 C_n 中。

记 C_n 为提升的环带，并考虑相应的函数 $\tilde{\varphi}_n \in C_c^\infty(\mathcal{C})$，其支集包含于 Ω_n。注意到 $\lambda_0(\mathcal{C}) = 1/4$ 不是 $\mathcal{C}$ 上拉普拉斯算子 Friedrichs 延拓的特征值，由 [14, 命题 6.2] 可推出 $\lambda = 1/4$ 以及 $\tilde{\varphi}_n \rightharpoonup 0$ 在 $L^2(\mathcal{C})$ 中。后者意味着，对于 $\mathcal{C}$ 的任意紧子集 K，$\tilde{\varphi}_n \to 0$ 属于 $L^2(K)$。此外，由 5.4 可得

$$\int_{\mathcal{C}_y} |\nabla \tilde{\varphi}_n|^2 \geq \pi^2 y^2 \int_{\mathcal{C}_y} \tilde{\varphi}_n^2$$

对任意 $y \geq a_i$ 均成立。由于当 n 充分大时，$\nabla \tilde{\varphi}$ 的 L^2-范数的平方有界于 $1 + 1/4$，因此对任意 $y > 0$，有 $\tilde{\varphi}_n \to 0$ 属于 $L^2(\mathcal{C}_y)$。事实上，给定任意 $y > 0$ 和 $\varepsilon > 0$，存在 $y' \geq \max\{y, a_i\}$，使得对任意充分大的 n，$\|\tilde{\varphi}_n\|_{L^2(\mathcal{C}_{y'})} < \varepsilon$，且 $\tilde{\varphi}_n \to 0$ 属于 $L^2(\mathcal{C}_y \setminus \mathcal{C}_{y'})$，其中 $\mathcal{C}_y \setminus \mathcal{C}_{y'}$ 相对紧。

现在考虑支集位于 $\mathcal{C}_{\bar{a}/4}$ 中的 $\chi \in C^\infty(\mathcal{C})$，其中 $0 \leq \chi \leq 1$，且 $\chi = 1$ 位于 $\mathcal{C}_{\bar{a}/2}$ 上。显然，$\chi \tilde{\varphi}_n \to 0$ 属于 $L^2(\mathcal{C})$，因此，函数 $\psi_n = (1 - \chi)\tilde{\varphi}_n$ 满足 Ray $\psi_n \to 1/4$。事实上，$\nabla \chi$ 的支集是紧的，并且对于紧的 $\tilde{\phi}_n \to 0$，$L^2(K)$ 中的 K，所以当 n 足够大时，瑞利商不会受到 $\phi_n \nabla \chi$ 的贡献。由 $\psi_n = 0$ 属于 $\mathcal{C}_{\bar{a}}$ 这一事实，我们很容易看出，ψ_n 的支集位于环带 A_n 中，其边界连通分支 $\tilde{c} = \partial \mathcal{C}_{a_i}$ 和 $\tilde{c}_n = \partial C_n$ 分别为。此外，由于 $\psi_n = 0$ 属于 $\mathcal{C}_{\bar{a}/2}$ 且 $\tilde{c}_n \cap \mathcal{C}_{\bar{a}} \neq \emptyset$，我们可得，$\psi_n$ 的支集与一条从 $\tilde{x}_0$ 到 $\tilde{c}_n$ 的最短测地线不相交；这条曲线连接了 ∂A_n 的连通分支。这意味着 ψ_n 的支集包含在一个面积至多为 $|S|$ 的拓扑圆盘中。由于这些对象可以等距提升到 $\mathbb{H}$，因此根据 Faber-Krahn 不等式，得到矛盾。

第二个所述不等式显然成立：由于这些竞争区域是紧的，且具有分段光滑边界，而 S 非紧，因此每个区域的补集都是 S 中的一个非空开子集。于是可以扩张这些区域，从而减小 λ_0。□

引理 5.5。 设C_{i,b_i} 是 S 的一个尖点，且 $f \in \mathrm{Lip}(C_{i,b_i}) \cap H^1(C_{i,b_i})$ 是一个在$H_{i,t}$ 中某点处取值为零的非零函数，对任意 $t \geq b_i$均如此。则$\mathrm{Ray}(f) \geq \pi^2 b_i^2$。

证明。 利用余面积公式，我们计算得

$$\begin{aligned}\int_{C_{i,b_i}} |\nabla f|^2 &= \int_{b_i}^{+\infty} t^{-1} \int_{H_{i,t}} |\nabla f|^2 dt \geq \int_{b_i}^{+\infty} t^{-1} \int_{H_{i,t}} |\nabla^\top f|^2 dt \\ &= \int_{b_i}^{+\infty} t^{-1} \int_{H_{i,t}} |\nabla f|_{H_{i,t}}|^2 dt,\end{aligned}$$

其中， $\nabla^\top f$ 表示 ∇f 相对于$H_{i,t}$的切向分量。注意到$f|_{H_{i,t}}$ 在某一点处为零，且$H_{i,t}$ 是长度为 t^{-1}的圆，$f|_{H_{i,t}}$可以提升为 $[0, t^{-1}]$ 上的一个函数，该函数在边界上为零，且具有相同的瑞利商。因此，

$$\int_{H_{i,t}} |\nabla f|_{H_{i,t}}|^2 \geq \lambda_0^D([0, t^{-1}]) \int_{H_{i,t}} f^2$$

对任意 $t \geq b_i$，其中 $\lambda_0^D([0, t^{-1}]) = \pi^2 t^2$ 表示 $[0, t^{-1}]$ （带欧几里得度量）的狄利克雷谱底端。结合以上结果，我们得出

$$\int_{C_{i,b_i}} |\nabla f|^2 \geq \pi^2 b_i^2 \int_{b_i}^{+\infty} t^{-1} \int_{H_{i,t}} f^2 dt = \pi^2 b_i^2 \int_{C_{i,b_i}} f^2,$$

再次利用余面积公式。 □

6. Proof of Theorem D

回顾一下， S 是一个无边界、具有$n \geq 1$ 个尖点的完备双曲曲面 C_1，……， C_n，其中 $C_i = \Gamma_i \backslash \sigma_i\{y \geq b_i\}$ 如第 3.2 节所述。这里我们讨论 Δ_a的特征函数线性组合的节点集结构，其中 $a =$ （a_1，……， a_n）是一个由实数组成的 n元组，满足 $a_i > b_i$。

令 u 为 Δ_a的一个非平凡（有限）特征函数线性组合（对应不同的特征值）。那么我们可以写成

$$u = \varphi + \sum\nolimits_s d_s \hat{f}_s, \tag{6.1}$$

ˆ 其中 φ 是尖点特征函数的线性组合，而 f_s 是函数 f_s 按 (4.4) 和 (4.11) 所述作出的截断。令

$$\tilde{u} = \varphi + \sum\nolimits_s d_s f_s,$$

在整个 S 上有定义且解析，并且

$$\hat{u} = \tilde{u} - \sum\nolimits_s d_s [f_s]_{a-\varepsilon},$$

在{v1}上有定义且解析

$$C_{a-\varepsilon} = \cup_{i=1}^n C_{i,a_i-\varepsilon} \subset S$$

对于 $a_i - \varepsilon > b_i$。注意

$$\tilde{u}|_{S_a} = u|_{S_a}, \quad \hat{u}|_{C_a} = u|_{C_a}, \quad \text{and} \quad \tilde{u}|_{H_a} = \hat{u}|_{H_a} = u|_{H_a}.$$

还要注意， $\hat{u} = 0$ 将意味着 $\varphi = 0$ 和 $\sum_s d_s f_s = 0$。但这样我们还会有ˆ $u = 0$，进而得到 $u = 0$，这就产生了矛盾。另一方面

，$\hat{u}=0$ 将意味着 $\tilde{u}=\sum_s d_s[f_s]_{a-\varepsilon}$ 在 $C_{a-\varepsilon}$上成立。但这样 $\tilde{u}$ 将只依赖于尖点中的 y参数，无法解析延拓到 S的其余部分。因此， $\tilde{u}$ 和$\hat{u}$都不为零。

命题 6.2。设 u 是 Δ_a 的特征函数的一个非平凡有限线性组合。那么 $Z(u)$ 是一个局部有限图。此外，如果 u 是 Δ_a 的特征函数的有限线性组合，那么 $S\setminus Z(u)$ 至少有两个连通分支。

注意，我们并未排除 $Z(u)$ 含有零度和奇度顶点的可能性。奇度顶点可能出现在 H_a 上，但不会出现在其他地方。

命题 *6.2* 的证明。如果 $u=\varphi$ 是尖点型的，那么 $\tilde{u}=\hat{u}=u$ 在 S 上是解析的，因此断言由 [12, 命题 4] 得出。在这种情况下， $Z(u)$ 的所有顶点度数均为偶数；其中不排除零度顶点，也就是孤立点。一般而言， u 在 $S\setminus H_a$ 上是解析的，因此同样由 [12, 命题 4] 可知，在远离 H_a 的地方，$Z(u)$ 是一个顶点度数均为偶数的局部有限图。根据上文所述，

$$Z(u)=Z(\tilde{u}|_{S_a})\cup Z(\hat{u}|_{C_a}).$$

此外， $\tilde{u}$ 和$\hat{u}$ 分别在 S 和 $C_{a-\varepsilon}$上解析，因此同样由 [12, 命题 4]可知，$Z(\tilde{u})$和 $Z(\hat{u})$分别是在 S 和 $C_{a-\varepsilon}$上顶点度数为偶数的局部有限图。现在 $u|_{H_a}$ 是解析的。因此，对于每个 $1\le i\le n$，现在有两种情况：要么$u|_{H_{i,\,a_i}}=0$ ，要么 u 沿着$H_{i,\,a_i}$只有有限多个零点。对于每个这样的零点$x\in H_{i,\,a_i}$， $Z(\tilde{u}|_{S_a})$和 $Z(\hat{u}|_{C_a})$中有有限条边终止于 x。在这两种情况下， $Z(u)$都是关于 x的图，而 x 是一个顶点，其度数等于 x 作为 $\tilde{u}|_{S_a}$ 的顶点的度数与$\hat{u}|_{C_{i,\,a_i}}$的度数之和；在第一种情况下再减去二。

若 u 是 Δ_a的特征函数的有限线性组合，则 $u\in D(\Delta_a)$，因此 u 的零阶傅里叶系数在 H_a中为零。因此，

$$\int_{H_a} u=0.$$

这就得出了最后一个结论。 □

设 φ 是 Δ_a的特征函数的有限线性组合。根据上述讨论， φ 在整个 S 上是连续函数，而 $\varphi|_{S_a}$， $\varphi|_{C_a}$， $\varphi|_{H_a}$ 是解析函数。根据萨德定理，这些函数几乎所有的值都是正则值。按照 [1] ，我们称 $\varepsilon>0$ 为 φ 正则的，若 $\pm\varepsilon$ 分别是这三个函数的正则值。令

$$Z_\varphi(\varepsilon)=\{x\in S:|\varphi(x)|\le\varepsilon\}$$

表示 φ的 ε-节点集。

显然， $\partial Z_\varphi(\varepsilon)\cap S_a$ 和 $\partial Z_\varphi(\varepsilon)\cap C_a$ 由光滑弧组成。由 $\varphi|_{H_a}$的正则性可知，对于任意 $p\in H_a$，至多有一条 S_a 中的弧（以及至多一条 C_a中的弧）可以终止于 p。由 φ 的连续性，这些弧沿着 H_a相接，形成连续闭弧。最后， $\cap_{\varepsilon>0}Z_\varphi(\varepsilon)=Z(\varphi)$。

命题 6.3。设 φ 是 Δ_a的特征函数的有限线性组合。对于任意 φ-正则的 $\varepsilon>0$， ε-节点集的边界 $\partial Z_\varphi(\varepsilon)$

$Z_\varphi(\varepsilon)$ 由局部有限的不交集合构成，这些集合是连续的分段解析环路。此外，这些环路仅在 H_a 上的点处可能不是解析的，并且在任何此类点处，发出的两条弧之间的夹角非零。

证明。 $\partial Z_\varphi(\varepsilon)$ 在 H_a 附近的局部有限性已在上文说明。在其他点， φ 是解析的。

对于任意 $p \in H_a$，在 $\partial Z_\varphi(\varepsilon) \cap S_a$ 中至多有一条弧（在 $\partial Z_\varphi(\varepsilon) \cap C_a$ 中也至多有一条弧）可以从 p 出发；这些弧不能与 H_a 相切，因为 $\varphi|_{H_a}$ 在 p 处是正则的。□

6.1. Otal-Rosas 论证。 定理 D 的证明涉及曲面拓扑中的论证，并且非常接近地沿用了 [1] 中的方法。事实上，大部分论证请参见 [1, 第 4] 节；我们将说明需要作哪些修改，才能使那里的论证适用于此处。

首先，我们考虑由 Δ_a 的特征函数构成的有限线性组合 φ ，并注意到 φ 满足 [1, 引理 4.3]。事实上，证明几乎完全相同，因为 $\varphi \in H^1(S)$ 以及 φ 可能不可微的点都包含在若干条测地线的并集中，因此具有零测度。

接下来，我们注意到，对于上述任意 φ ， ε-圆盘的概念几乎可以完全照搬。沿测地线 H_a 定义 ν 时存在歧义。为解决这一问题，我们注意到 $H_a \cap \partial Z_\varphi(\varepsilon)$ 是离散的，并定义 $\nu|_{H_a} = \partial\theta$，其中 θ 是沿 H_a 的单位切向量。若 $\partial Z_\varphi(\varepsilon)$ 中的一条弧与 H_a 相交，则交角非零；这一做法尤其适合我们的目的。特别是， [1] 中关于 ε-圆盘的所有讨论均适用，因此对于任何由 Δ_a 的特征函数有限线性组合而成的 φ ，都有 [1] 中引理 4.6–4.8 的结论。

接下来，我们考虑 [1, 引理 4.10] ，并注意到证明中的论证几乎可以原样适用，从而保证存在一个连通分支 $Y_\varphi(\varepsilon)$，其基本群包含自由群 F_2。事实上，唯一的区别在于考虑满足 $\lambda \le \Lambda_a(S)$ 的 λ-特征函数 φ 时的情形。在这种情况下，与 [1], 中不同，我们无法保证 φ 光滑。然而，由于 φ 是 Δ_a 的特征函数，根据命题 6.2，我们知道 $Z(\varphi)$ 是一个局部有限图，且 $S \setminus Z(\varphi)$ 有多个连通分支。因此，根据命题 5.3 的最后一部分， $S \setminus Z(\varphi)$ 的任何连通分支都不是圆盘、环带或莫比乌斯带。 [1, 引理 4.10] 中关于连通分支不可压缩性的证明无需任何改动，便可推出 [1, 引理 4.10] 的其余断言。

在 [1] 导向主定理[1, 定理 1.5] 证明的其余论证在本质上是拓扑的，无需作任何改动（除了使用上述引理 4.3-4.10 的修订版本），即可给出定理 D 的证明。

References

[1] W. Ballmann、H. Matthiesen 和 S. Mondal, 《有限型曲面的小特征值》。 *Compositio Math.* **153** (2017), 第 8 期, 1747–1768。[2] W. Ballmann、H. Matthiesen 和 S. Mondal, 《有限型黎曼曲面的解析 systole》。Geom. Funct. Anal. **27** (2017), 第 5 期, 1070–1105。

[3] P. Buser, *Geometry and spectra of compact Riemann surfaces.* 数学进展丛书第 106 卷。Birkh¨auser 波士顿公司，马萨诸塞州波士顿，1992 年。xiv+454 页。[4] Y. Colin de Verdi`ere, 《伪拉普拉斯算子 II》, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **33** (1983), 第 2 期，87–113。[5] M. N. Huxley, 《含边界项的 Cheeger 不等式》。

Comment. Math. Helv. ( ), 第 –

58 1983 3, 347 354

期。[6] H. Iwaniec, *Spectral methods of automorphic forms. Second edition.* 数学研究生丛书第 53 卷。美国数学会，罗德岛州普罗维登斯；Revista Matem´atica Iberoamericana, 马德里，2002 年，xii+220 页。[7] T. Kato, *Perturbation theory for linear operators.* 数学经典丛书。施普林格出版社，柏林，1995 年，xxii+619 页。[8] P. Lax 和 R. Phillips, *Scattering theory for automorphic functions.* 《数学年刊研究》第 87 卷。普林斯顿大学出版社，新泽西州普林斯顿，1976 年，x+300 页。[9] S. Mondal, 闭双曲曲面的最短闭测地线长度与 λ_{2g-2} g *Enseign.*, 亏

Math. **60** 2014 1 2, 3 24

格为 。( )，第 - 期，– 。[10] S. Mondal, 《有限面积双曲曲面上较小尖点特征值个数的拓扑上界》。 *Int. Math. Res. Not. IMRN* 2015, 第 24 期，13208—13237。[11] J.-P. Otal, 《双曲曲面上较小特征函数的三个拓扑性质》。 *Geometry and dynamics of groups and spaces*, 685–695，数学进展丛书第 265 卷，Birkh¨auser，巴塞尔，2008 年。[12] J.-P. Otal 和 E. Rosas, 《对于每个亏格为 g 的双曲曲面》, $\lambda_{2g-2} > 1/4$。*Duke Math. J.* **150** (2009), 第 1 期，101–115。[13] R. Phillips 和 P. Sarnak, 《自守函数上拉普拉斯算子的扰动理论》。 *J. Amer. Math. Soc.* **5** (1992), 第 1 期，1–32。[14] P. Polymerakis, 《保持谱底的覆盖》。

J. Spectr. Theory ( ), 第 —

12 2022 3, 993 1022

期。[15] P. Schmutz, 《亏格为 2 的黎曼曲面上的小特征值》。 *Invent. Math.* **106** (1991), 第 1 期，121–138。[16] M. Taylor, *Partial differential equations I. Basic theory.* 应用数学科学丛书第 115 卷。施普林格出版社，纽约，2011 年，xxii+654 页。[17] S. Wolpert, 《双曲曲面的谱极限，I》。 *Invent. Math.* **108**, 第 1 期，67 89–。

WB: Max Planck Institute for Mathematics, Vivatsgasse 7, 53111 Bonn
Email address: hwbllmnn@mpim-bonn.mpg.de

SM: Department of Mathematics and Statistics, University of Reading, Pepper Lane, Whiteknights, RG6 6AX UK*Email address*: s.mondal@reading.ac.uk

PP: Department of Mathematics University of Thessaly 3rd km Old Na- , , „ , tional Road Lamia–Athens 35100 Lamia Greece
Email address: ppolymerakis@uth.gr