arXiv:2512.19281v1 [math.AP] 22 Dec 2025

二维非均匀不可压黏性流的大时间行为

Song Jiang[a] * Quan Wang[b] †

[a] LCP, Institute of Applied Physics and Computational Mathematics, Huayuan Road 6, Beijing,100088, China[b] College of Mathematics, Sichuan University, Chengdu, Sichuan, 610065, China

2025年12月23日

摘要

本文研究在引力势 f作用下、有界区域内刻画分层流的二维非均匀纳维–斯托克斯方程。我们的贡献总结如下。首先，我们严格刻画了稳态，证明在狄利克雷条件$\mathbf{u}|_{\partial\Omega} = \mathbf{0}$下，唯一可容许的平衡态是满足$\nabla p_s = -\rho_s \nabla f$的静水力平衡。其次，我们揭示了瑞利–泰勒不稳定性虽可引发瞬态增长，但系统最终会弛豫至静水力平衡。这一结论通过对任意静水力剖面进行摄动分析得出。第三，我们确定了关于初始密度扰动的一个充要条件，该条件决定了解是否收敛至线性静水力密度 $\rho_s = -\gamma f + \beta$ (γ， $\beta > 0$)。最后，我们证明了初始数据属于 $H^3(\Omega)$的强解具有改进的正则性估计。

关键词——非齐次 Navier–Stokes 方程；整体稳定性；大时间行为。

*jiang@iapcm.ac.cn
†通讯作者：xihujunzi@scu.edu.cn

目录

1 引言 **3**
1.1 问题与文献综述 .31.2 稳态解 .51.3 主要定理陈述 .61.4 证明的关键思路 .9

2 一般区域上的估计 1 **0**
2.1 $\varrho+\rho_s$ 的估计.10 2.2 $\|\sqrt{\varrho+\rho_s}u\|_{L^\infty((0,\infty);L^2(\Omega))}$ 和 $\|\nabla u\|_{L^2((0,\infty);L^2(\Omega))}$ 的估计.11 2.3 $\|\nabla u\|_{L^\infty((0,\infty);L^2(\Omega))}$ 和 $\|\sqrt{\varrho+\rho_s}u_t\|_{L^2((0,\infty);L^2(\Omega))}$ 的估计 . . . . . 12 2.4 $\|\nabla u_t\|_{L^2((0,\infty);L^2(\Omega))}$ 和 $\|\sqrt{\varrho+\rho_s}u_t\|_{L^\infty((0,\infty);L^2(\Omega))}$ 的估计 . . . . . 14 2.5 $\|u\|_{L^\infty((0,\infty);L^\infty(\Omega))}$ 和 $\|u\|_{L^2([0,T];W^{2,p}(\Omega))}$ 的估计.17 2.6 $\|u\|_{L^2([0,T];W^{2,p}(\Omega))}$ 的估计.17 2.7 $\|\nabla u_t\|_{L^\infty([0,T];L^2(\Omega))}$ 和 $\|u_{tt}\|_{L^2([0,T];L^2(\Omega))}$ 的估计.19 2.8 $\|u\|_{L^2([0,T];H^4(\Omega))}$ 的估计.20

3 线性问题的估计$\Omega=\mathbb{T}\times(0,h)$ 2 **1**
3.1 $\|\sqrt{\varrho+\rho_s}u\|_{L^\infty((0,\infty);L^2(\Omega))}$ 和 $\|\nabla u\|_{L^2((0,\infty);L^2(\Omega))}$ 的估计.21 3.2 $\|\nabla u\|_{L^\infty((0,\infty);L^2(\Omega))}$ 和 $\|\sqrt{\varrho+\rho_s}u_t\|_{L^2((0,\infty);L^2(\Omega))}$ 的估计 . . . . . 22 3.3 $\|\nabla u_t\|_{L^2((0,\infty);L^2(\Omega))}$ 和 $\|\sqrt{\varrho+\rho_s}u_t\|_{L^\infty((0,\infty);L^2(\Omega))}$ 的估计 . . . . . 22 3.4 $\|\nabla u_t\|_{L^\infty((0,\infty);L^2(\Omega))}$ 和 $\|\sqrt{\varrho+\rho_s}u_{tt}\|_{L^2((0,\infty);L^2(\Omega))}$ 的估计 . . . . . 23 3.5 $\|\nabla\varrho\|_{L^\infty((0,\infty);L^2(\Omega))}$ 的估计.23

4 主定理的证明 2 **4**
4.1 定理 1.1 的证明.244.2 定理 1.2 的证明.254.3 定理 1.3 的证明.294.4 定理 1.4 的证明.29

5 附录 **30**
.0.1 强解与非线性不稳定性 .30.0.2 一些有用的不等式 .31

1 引言

1.1 问题与文献综述

本文研究二维非均匀不可压黏性流体的动力学，其中流体密度随空间变化。非均匀的密度分布会产生复杂的物理现象，这些现象在许多应用中至关重要，尤其是在地球物理流体动力学以及由密度不同、互不相溶的不可压流体组成的多相流建模中。此类流动的演化由区域 Ω 上的二维非均匀不可压纳维–斯托克斯方程（IINS）所支配：

$$\begin{cases} \rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} = \nu\Delta\mathbf{u} - \nabla P - \rho\mathbf{g}, \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\rho = 0, \\ \nabla\cdot\mathbf{u} = 0, \end{cases} \tag{1.1}$$

其中 $\mathbf{u}$ 表示速度场， ρ 表示密度， P 表示压力，而 $\mathbf{g}$ 表示外力场。本文仅考虑 $\mathbf{g} = \nabla f$的情形，其中 $f > 0$ 是一个用于描述重力及其他可能存在的保守力的光滑势函数。关于不可压缩惯性 Navier–Stokes 方程系统的详细推导，请参阅 [1] 。本文中，不可压缩惯性 Navier–Stokes 方程系统（1.1）还满足以下初始条件和边界条件：

$$(\rho, \mathbf{u})|_{t=0} = (\rho_0, \mathbf{u}_0), \quad \mathbf{u}|_{\partial\Omega} = \mathbf{0}, \tag{1.2}$$

其中，假设区域 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ 具有光滑边界 $\partial\Omega$。

在详细介绍本文的主要目标之前，我们先回顾不可压缩惯性 Navier–Stokes 方程系统在外力 $\mathbf{g} \neq \mathbf{0}$非零时的主要数学结果。不可压缩惯性 Navier–Stokes 方程的数学理论中，弱解与强解呈现出鲜明的差异。对于弱解，其存在性理论已基本完备。Antontsev 和 Kazhikov [2], Kazhikov [3],, Simon [4,5],以及 Fernández Cara 和 Guillén [6]的早期成果，在较弱假设下建立了整体时间弱解的存在性：初始密度有界 ρ_0、初始速度 $\mathbf{u}_0$, 具有有限能量，且外力 $\mathbf{g}$ 平方可积。这些结果汇总于 Lions 的专著 [1], ，甚至涵盖了初始真空情形。Hao 等人 [7]最近解决了这类弱解长期悬而未决的唯一性问题。强解（因而也是唯一解）的情形则有所不同。Ladyzhenskaya–Solonnikov [8],Okamoto [9], Padula [10, 11], 和 Salvi [12]的研究表明，局部存在性通常要求初始密度具有正下界。对真空情形的推广尚不充分，得到的结果要么是具有增强正则性的弱解 [5,13] ，要么是在外部区域中密度仅在零测集上消失的强解 [11]。2003年，Choe–Kim [14] 首次在不假设密度具有正下界的情况下，建立了三维强解的局部适定性；他们转而对外力施加更高正则性要求，并要求初始数据满足相容性条件。Kim [15] 随后给出了爆破判据，并证明当 $\|\nabla \mathbf{u}_0\|_{L^2}$充分小时存在整体解。对于 Besov 空间中的初始数据，Danchin [16, 17] 建立了大速度情形下的局部适定性，并证明当速度相对于黏性较小时具有整体适定性。在具有重要物理意义的 $\mathbf{g} = \nabla f$ 情形（用于描述重力），Zhang 等人 [18]证明，只要初始能量 $\left\|\sqrt{\rho_0}\mathbf{u}_0\right\|_{L^2} + \|\rho_0\|_{L^2}\|f\|_{L^2}$ 足够小且 $f \in H^2(\Omega)$，三维强解便具有整体正则性。Yu [19] 随后将这一结果推广至允许大外力的情形。

—

当外力不存在时（$\mathbf{g} \equiv \mathbf{0}$），不可压缩惯性 Navier–Stokes 方程（1.1）系统可大幅简化。在这种情况下，可以证明，无论是在满足狄利克雷条件 $\mathbf{u}|_{\partial\Omega} = \mathbf{0}$ 的有界区域 Ω 上，还是在全空间 $\mathbb{R}^n$中，任何有限能量稳态解都必定是平凡解：（$\mathbf{u}$ p） =（$\mathbf{0}$， p_0），其中 p_0为某个常数。由此直接可知，该系统排除了瑞利–泰勒平衡态，即压力梯度与重力相平衡的静态构型。因此，含有 $\mathbf{g} \equiv \mathbf{0}$ 的模型本质上过滤掉了丰富的动力学行为

这些行为与瑞利–泰勒不稳定性有关——这是一种众所周知、可能导致适定性丧失的物理机制 [20–22]。这一根本区别凸显了必要性：必须完善并扩展最初针对 $\mathbf{g} \neq \mathbf{0}$ 情形建立的解析框架。

在这一简化结构的基础上，后续研究显著推进了对带有$\mathbf{g} \equiv \mathbf{0}$的不可压缩惯性 Navier–Stokes 方程系统的分析。在 $\|\mathbf{u}_0\|_{H^{1/2}}$足够小时，Craig 等人 [23] 在三维情形下获得了整体强解，改进了 Kim [15]此前的结果。Abidi 等人 [24] 推导出了常黏度下光滑三维解的大时间衰减与稳定性估计，随后 Abidi–Zhang [26]将结果推广到变黏度情形。Gui 等人 [25] 证明，当黏度沿一个方向缓慢变化且初始密度接近常数时，存在大整体解。后续改进主要致力于放宽对初始数据的要求。Huang–Wang [27]将 Choe–Kim [14] 允许真空的理论推广到有界区域中的变黏度情形，在 $\|\nabla \mathbf{u}_0\|_{L^2}$ 满足小性条件的情况下建立了整体唯一强解，同时允许初始密度任意大。Li [29] 表明，在三维非负密度情形下，即使降低正则性且不满足此前 [14]要求的相容性条件，仍可实现局部适定性。另一方面，Gancedo–Garc´ıa-Ju´arez [30] 研究了二维密度斑块问题，证明无需小性假设，也不必限制密度跃变，即可得到适定性。Danchin–Mucha [31] 在不要求正则性、正的密度下界或相容性条件的情况下，获得了具有精确衰减估计的唯一解。关于整体稳定性，He 等人 [32] 在齐次 Sobolev 空间中对初始速度施加小性条件，建立了 $\mathbb{R}^3$ 中的整体存在性与指数稳定性，同时允许真空，甚至允许初始密度具有紧支集；这改进了 [23]。对于带真空的二维柯西问题，L¨u 等人 [28] 证明了整体存在性和大时间渐近行为。关于带有$\mathbf{g} \equiv \mathbf{0}$ 的不可压缩惯性 Navier–Stokes 方程系统的整体存在性与稳定性的其他结果，可参见 [33–36]。

在引力场（$\mathbf{g} = \nabla f$）作用下，稳态的结构发生了根本性变化。如引理 1.1 所示，在满足狄利克雷条件的有界区域或全空间中，任何有限能量稳态都必然是静水力平衡 $(\mathbf{u}, \rho, P) = (0, \rho_s, p_s)$，并满足 $\nabla p_s = -\rho_s \nabla f$。Li [37] 近期的研究证明，若静水力平衡满足 $\nabla \rho_s = h(\mathbf{x}) \nabla f$，且在某点 $\mathbf{x}_0 \in \Omega$ 处有 $h(\mathbf{x}_0) > 0$，则它在任意 L^p-范数 $(1 \leq p \leq \infty)$ 下都是非线性不稳定的，这是瑞利–泰勒不稳定性的一种体现。这一结果大幅拓展了早期的数学研究 [20, 21, 38–41],，后者主要考察均匀引力场 $\mathbf{g} = (0, g)$。尽管 [37] 证明了瑞利–泰勒不稳定性能够引发快速的短时间增长（见附录中的定理 .3），但不存在速度非零的非平凡稳态，这强烈表明解仍应能全局存在。此外，人们推测，当 $t \to \infty$ 时，任何接近静水力平衡的解——无论其稳定与否——都必须收敛到由静水力平衡关系 $\nabla p_s = -\rho_s \nabla f$ 确定的稳态，其中 ρ_s 和 f 满足稳定性条件 $\nabla \rho_s \cdot \nabla f \leq 0$。一个基本的未解决问题是，具有 $\mathbf{g} = \nabla f \neq \mathbf{0}$ 的方程 (1.1) 的任意解是否会渐近趋近于某个静水力平衡；更具体地说，是否会趋近于具有 $\rho_s = -\gamma f + \beta$ 形式且满足 $\gamma > 0$ 的线性密度分布。

值得注意的是，对于一个常数竖直重力场 $\nabla f = (0, g)$，线性稳定的分层静水平衡（$\mathbf{u}$ ρ）=（$\mathbf{0}$, $-\gamma z + \beta$）——其中高密度流体位于轻质流体之下——也是由（ [42–44], ）推导出的 Boussinesq 方程的稳态。根据物理学，这种构型应当具有线性和非线性稳定性。近年来，其在 Boussinesq框架下的非线性稳定性受到广泛关注；参见 [45–49] 及其中的参考文献。我们最近的工作 [50, 51] 证明了，在 Boussinesq近似下，接近静水力平衡的解——无论该平衡稳定还是不稳定——都会收敛于由静水平衡决定的稳态（或者在存在旋转时，收敛于涉及科里奥利力的平衡）。自然可以预期，对于完整非均匀系统（1.1），类似的收敛性同样成立。

在上述认识的基础上，本文旨在从两个重要方面推进系统（1.1）的整体适定性理论与长时间动力学研究：

1）我们将二维不可压缩惯性 Navier–Stokes 方程的整体存在理论从$\mathbf{g} \equiv \mathbf{0}$[23, 28, 31–36] 的情形推广至具有物理意义的 $\mathbf{g} = \nabla f \neq \mathbf{0}$情形。

2）我们证明了解收敛到满足 $\nabla p_s = -\rho_s \nabla f$的静水力平衡态，从而将我们此前关于 Boussinesq 方程的结果 [50, 51] 推广到了完全非齐次系统（1.1）。

3）我们推导出了充要条件，在这些条件下，方程（1.1）的任意解的密度分布 ρ ——其中$\mathbf{g} = \nabla f \neq \mathbf{0}$ ——渐近趋近于稳态分布$\rho_s = -\gamma f + \beta$，其中 $\gamma > 0$。

我们的分析为保守外力作用下的分层流提供了统一框架，并推动了刻画其渐近行为这一基本未解决问题的研究。

分析在非零力场$\mathbf{g} \neq \mathbf{0}$作用下方程（1.1）解的长期行为，远比$\mathbf{g} \equiv \mathbf{0}$的情形微妙得多。首要难点出现在能量估计中。与零力情形不同，建立关键的衰减估计

$$\int_0^\infty t\|\nabla \mathbf{u}(t)\|_{L^2}^2 dt < \infty, \qquad \sup_{t>0} t\|\sqrt{\rho}\mathbf{u}(t)\|_{L^2}^2 < \infty, \tag{1.3}$$

变得非平凡。对于有界区域上满足狄利克雷条件 1.1 的系统，$\mathbf{u}|_{\partial\Omega} = \mathbf{0}$和 $\mathbf{g} \equiv \mathbf{0}$，基本能量平衡为

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\sqrt{\rho}\mathbf{u}\|_{L^2}^2 = -\mu\|\nabla \mathbf{u}(t)\|_{L^2}^2.$$

乘以 t 后得到的一个关键恒等式为

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(t\|\sqrt{\rho}\mathbf{u}\|_{L^2}^2\right) + t\mu\|\nabla \mathbf{u}(t)\|_{L^2}^2 = \frac{1}{2}\|\sqrt{\rho}\mathbf{u}\|_{L^2}^2.$$

由于 $\int_0^\infty \|\sqrt{\rho}\mathbf{u}\|_{L^2}^2 d\tau < +\infty$，该恒等式直接给出（1.3）中的衰减估计。

相比之下，对于 $\mathbf{g} = \nabla f \neq \mathbf{0}$，相应的加权恒等式变为

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(t\|\sqrt{\rho}\mathbf{u}\|_{L^2}^2 + 2t\|\rho f\|_{L^1}\right) + t\mu\|\nabla \mathbf{u}(t)\|_{L^2}^2 = \frac{1}{2}\|\sqrt{\rho}\mathbf{u}\|_{L^2}^2 + \|\rho f\|_{L^1}.$$

标准论证之所以失效，源于右端项的不可积性。事实上，对于定常势 f，量 $\|\rho f\|_{L^1}$不满足 $\int_0^\infty \|\rho f\|_{L^1} d\tau < +\infty$。因此，衰减估计（1.3）——这是 [33–36] 中分析的核心——不再适用，也就无法得出 $\|\nabla \mathbf{u}(t)\|_{L^2}^2 \to 0$ 当 $t \to \infty$ 时的结论。

第二个主要障碍在于，先前研究中采用的技术——包括 [1–6、8–11、14–17, 19]中的技术——不足以获得 $\|\nabla \mathbf{u}\|_{L^2}^2$的时间一致有界性。这一一致有界性是分析长期行为的重要前提，不仅关系到$\|\nabla \mathbf{u}\|_{L^2}^2$本身，也关系到 $\|\mathbf{u}_t\|_{L^2}^2$、 $\|\Delta \mathbf{u}\|_{L^2}^2$以及有效压强项 $\nabla P + \varrho \nabla f$。

第三个挑战在于确定渐近密度分布。不能直接利用连续性方程 $\partial_t \rho + \mathbf{u} \cdot \nabla \rho = 0$ 推断渐近状态必定具有形式 $(\mathbf{u}\ \rho) = (\mathbf{0}, \rho_s)$，其中 ρ_s 满足静水平衡条件 $\nabla p_s = -\rho_s \nabla f$。这一局限源于连续性方程本质上是纯输运定律，它仅沿粒子轨迹输运初始密度，并未施加静水条件所要求的函数关系 $\rho_s = \rho_s(f)$。因此，需要新的方法来刻画渐近密度分布 ρ_s，并证明它从一般初始数据出发的收敛性。

1.2 稳态解

在流体运动方程的研究中，全面理解系统的精确稳态——它们代表了可能的渐近行为——往往至关重要。我们考察不可压缩惯性 Navier–Stokes 方程（1.1）的稳态解，其形式如下：

引理 1.1 (静水力平衡)。 系统 $(\mathbf{u}\ \rho, P)$–(1.2)–(1.2) 中满足 $\mathbf{g}\ = \nabla f$ 的任意稳态解都必须是如下形式的静水力平衡:

$$(\mathbf{u}, \rho, P) = (0, \rho_s, p_s), \tag{1.4}$$

其中，压力 p_s 和密度 ρ_s 满足静水力平衡条件:

$$\nabla p_s = -\rho_s \nabla f.$$

证明。 稳态解满足条件 $\partial_t \mathbf{u}\ = 0$ 和 $\partial_t \rho\ = 0$，从而原系统可简化为:

$$\begin{cases} \rho(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} = \nu\Delta\mathbf{u} - \nabla P - \rho\nabla f, \\ (\mathbf{u}\cdot\nabla)\rho = 0, \\ \nabla\cdot\mathbf{u} = 0, \quad \mathbf{u}|_{\partial\Omega} = \mathbf{0}. \end{cases} \tag{1.5}$$

对方程（1.5）$_1$ 与$\mathbf{u}$ 取内积，并在区域上积分 Ω:

$$\int_\Omega \rho(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}\,d\mathbf{x} - \nu\int_\Omega \Delta\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}\,d\mathbf{x} + \int_\Omega \nabla P\cdot\mathbf{u}\,d\mathbf{x} + \int_\Omega \rho\nabla f\cdot\mathbf{u}\,d\mathbf{x} = 0. \tag{1.6}$$

我们分别分析（1.6）右端的各项。对于对流项，利用不可压缩条件 $\nabla\cdot\mathbf{u}\ = 0$ 以及散度定理，可得:

$$\int_\Omega \rho(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}\,d\mathbf{x} = \frac{1}{2}\int_\Omega \nabla\cdot\left(\rho\mathbf{u}|\mathbf{u}|^2\right)d\mathbf{x} - \frac{1}{2}\int_\Omega (\nabla\cdot(\rho\mathbf{u}))|\mathbf{u}|^2\,d\mathbf{x}.$$

第一项由于散度定理和无滑移边界条件 $\mathbf{u}|_{\partial\Omega} = \mathbf{0}$而消失。对于第二项，我们注意到：$\nabla\cdot(\rho\mathbf{u}) = \mathbf{u}\cdot\nabla\rho$，根据稳态密度输运方程（$\mathbf{u}\cdot\nabla$）$\rho = 0$，该项等于零。因此，对流项完全消失。至于黏性项，应用散度定理可得

$$-\nu\int_\Omega \Delta\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}\,d\mathbf{x} = \nu\int_\Omega |\nabla\mathbf{u}|^2\,d\mathbf{x} \geq 0.$$

压力项因不可压缩条件 $\nabla\cdot\mathbf{u}\ = 0$而消失。对于重力项，可以得到

$$\int_\Omega \rho\nabla f\cdot\mathbf{u}\,d\mathbf{x} = \int_\Omega \nabla\cdot(\rho f\mathbf{u})\,d\mathbf{x} - \int_\Omega f\nabla\cdot(\rho\mathbf{u})\,d\mathbf{x}.$$

第一项根据散度定理和边界条件而消失。对于第二项，如前所示，$\nabla\cdot(\rho\mathbf{u}) = 0$。因此，左端的第四项（1.6）消失。

将结果代入（1.6），得到$\nu\int_\Omega |\nabla\mathbf{u}|^2\,d\mathbf{x}\ = 0$，这意味着 $\nabla\mathbf{u}\ = 0$ 在 Ω 中。结合边界条件$\mathbf{u}|_{\partial\Omega} = 0$，可得$\mathbf{u} \equiv 0$。将$\mathbf{u}\ = 0$ 代入（1.5）中的动量方程，得到：$\nabla P = -\rho\nabla f$。当$\mathbf{u}\ = 0$ 时，连续性方程$\mathbf{u}\cdot\nabla)\rho\ = 0$ 和密度方程自动满足。因此，任意光滑的稳态解必定具有以下形式:

$$(\mathbf{u}, \rho, P) = (0, \rho_s, p_s), \quad \text{with} \quad \nabla p_s = -\rho_s\nabla f,$$

这正是静水力平衡状态。 □

1.3 主要定理的陈述

为分析稳态解（1.4）附近的长时间动力学行为，我们首先推导相应的扰动系统。令（$\mathbf{u}$ ϱ）表示稳态解周围的扰动

满足（1.4）的。将（$\mathbf{u}$ ρ）=（$\mathbf{u}$ $\varrho+\rho_s$）代入系统（1.1，得到以下扰动方程:

$$\begin{cases}(\varrho+\rho_s)\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}+(\varrho+\rho_s)(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u}=\nu\Delta\mathbf{u}-\nabla P-\varrho\nabla f, & \mathbf{x}\in\Omega,\\ \frac{\partial \varrho}{\partial t}+(\mathbf{u}\cdot\nabla)\varrho+(\mathbf{u}\cdot\nabla)\rho_s=0, & \mathbf{x}\in\Omega,\\ \nabla\cdot\mathbf{u}=0, & \mathbf{x}\in\Omega,\end{cases} \tag{1.7}$$

其满足以下无滑移边界条件:

$$\mathbf{u}|_{\partial\Omega}=\mathbf{0}. \tag{1.8}$$

对于扰动系统（1.7），以下三个定理确立了解的正则性，并刻画了其长时间动力学行为。

定理 1.1. [**正则性**]假设存在两个正常数 α_1 和 α_2 使得$0<\alpha_1\le\varrho_0+\rho_s\le\alpha_2<\infty$，并设（$\mathbf{u}$ ϱ）是满足边界条件（1.8）的扰动系统（1.7）的一个解。则有以下结论:

(1) 对于初始数据（$\mathbf{u}_0,\varrho_0$）$\in H^2(\Omega)\times L^\infty(\Omega)$，若 $f\in W^{2,\infty}(\Omega)$，则有

$$\mathbf{u}\in L^\infty\left((0,\infty);W^{2,p}(\Omega)\right)\cap L^p\left((0,\infty);W^{1,p}(\Omega)\right),\quad 2\le p<\infty, \tag{1.9a}$$
$$\mathbf{u}_t\in L^\infty\left((0,\infty);L^2(\Omega)\right)\cap L^2\left((0,\infty);H^1(\Omega)\right), \tag{1.9b}$$
$$\sqrt{\varrho+\rho_s}\mathbf{u}_t\in L^\infty\left((0,\infty);L^2(\Omega)\right)\cap L^2\left((0,\infty);L^2(\Omega)\right), \tag{1.9c}$$
$$\nabla p\in L^\infty\left((0,\infty);L^2(\Omega)\right), \tag{1.9d}$$
$$\varrho\in L^\infty\left((0,\infty);L^s(\Omega)\right),\quad 1\le s\le\infty. \tag{1.9e}$$

(2) 在（1）的假设下，若 $\varrho_0\in H^1(\Omega)$，则对任意 $T>0$，($\mathbf{u}$ ϱ) 还满足 s:

$$\mathbf{u}\in L^2\left([0,T];W^{2,p}(\Omega)\right),\quad \nabla\mathbf{u}\in L^2\left([0,T];L^\infty(\Omega)\right), \tag{1.10a}$$
$$\varrho\in L^\infty\left([0,T];H^1(\Omega)\right),\quad \varrho_t\in L^\infty\left([0,T];L^2(\Omega)\right). \tag{1.10b}$$

(3) 在条件 (2) 下，若 $\nabla f\in W^{2,\infty}(\Omega)$ 且 $(\mathbf{u}_0,\rho_0)\in H^3(\Omega)$，并且初始数据满足以下相容性条件:

$$\begin{cases}\nabla\cdot\mathbf{u}_0=0, & \mathbf{u}_0|_{\partial\Omega}=0,\\ (\nu\Delta\mathbf{u}_0-\nabla P_0-\varrho_0\nabla f)|_{\partial\Omega}=0,\end{cases} \tag{1.11}$$

其中 P_0 由以下椭圆系统确定:

$$\begin{cases}\nabla\cdot\left(\frac{\nabla P_0}{\varrho_0+\rho_s}\right)=\nabla\cdot\left(\frac{1}{\varrho_0+\rho_s}(\nu\Delta\mathbf{u}_0-\varrho_0\nabla f)-(\mathbf{u}_0\cdot\nabla)\mathbf{u}_0\right),\\ \nabla P_0\cdot\mathbf{n}|_{\partial\Omega}=(\nu\Delta\mathbf{u}_0-\varrho_0\nabla f)\cdot\mathbf{n}|_{\partial\Omega},\end{cases}$$

那么对于任意 $T>0$，解 ($\mathbf{u}$ ϱ) 还满足:

$$\nabla\mathbf{u}_t\in L^\infty\left([0,T];L^2(\Omega)\right),\quad \mathbf{u}_{tt}\in L^2\left([0,T];L^2(\Omega)\right), \tag{1.12a}$$
$$\mathbf{u}\in L^2\left([0,T];H^4(\Omega)\right)\cap C\left([0,T];H^3(\Omega)\right),\quad 2\le p<\infty, \tag{1.12b}$$
$$\varrho_t\in L^\infty\left([0,T];L^\infty(\Omega)\right),\quad \varrho\in C\left([0,T];H^3(\Omega)\right). \tag{1.12c}$$

注 1.1. 系统 (1.7)（或原系统 (1.1)）的强解的局部存在性与唯一性已在 [14, 52]中得到证明。我们的结果表明，此类局部强解实际上是整体的。注意，对于 $\nabla f\equiv 0$ 在（1.7）或（1.1）的情形，强解的整体存在性此前已在 [28, 33, 34]中得到证明。

定理 1.2. [**大时间行为**] 在 定理 1.1的条件下，对任意 $1 \le r < \infty$以及问题（$\mathbf{u}$ ϱ）-（1.7）-（1.8）的解，我们有以下结论：

（1）问题（1.7）-（1.8）的解满足以下渐近性质：

$$\|\mathbf{u}\|_{W^{1,r}} \to 0, \quad t \to \infty, \tag{1.13a}$$
$$\|\mathbf{u}_t\|_{L^2} \to 0, \quad t \to \infty, \tag{1.13b}$$
$$\Delta \mathbf{u} \rightharpoonup 0 \quad \text{in} \quad L^2(\Omega), \quad t \to \infty, \tag{1.13c}$$
$$\nabla P + \varrho \nabla f \rightharpoonup 0 \quad \text{in} \quad L^2(\Omega), \quad t \to \infty. \tag{1.13d}$$

（2）对于任意 $\gamma > 0$ 和 $\beta \in \mathbb{R}$，有

$$\int_\Omega \varrho f \, d\mathbf{x} \to I_1, \quad t \to \infty, \tag{1.14a}$$
$$\|\varrho + \rho_s + \gamma f - \beta\|_{L^2}^2 \to I_2, \quad t \to \infty, \tag{1.14b}$$

其中 I_1 和 I_2 是满足以下条件的两个常数

$$\begin{aligned} &I_1 \le \frac{\|\sqrt{\varrho + \rho_s}\mathbf{u}_0\|_{L^2}^2}{2} + \int_\Omega \varrho_0 f \, d\mathbf{x}, \\ &0 \le I_2 \le \gamma \left\|\sqrt{\varrho + \rho_s}\mathbf{u}_0\right\|_{L^2}^2 + \|\varrho_0 + \rho_s + \gamma f - \beta\|_{L^2}^2, \\ &\|\varrho_0 + \rho_s + \gamma f(x,y) - \beta\|_{L^2}^2 - I_2 = 2\gamma \left(\int_\Omega \varrho_0 f \, d\mathbf{x} - I_1 \right). \end{aligned} \tag{1.15a}$$

（3）将 $\varrho \nabla f$ 分解为 $\varrho \nabla f = \mathbf{w} + \nabla q$，其中 $\mathbf{w} \in L^2$ 是满足 $\nabla \cdot \mathbf{w} = 0$ 且在 $\partial\Omega$ 上满足 $\mathbf{w} \cdot \mathbf{n} = 0$ 的无散部分，而 $\nabla q \in L^2$ 是满足$\int_\Omega q \, d\mathbf{x} = 0$的无旋部分。于是，当 $t \to \infty$时，有以下渐近性质：

$$\nu \mathbb{P} \Delta \mathbf{u}(t) - \mathbf{w}(t) \to 0 \quad \text{in} \quad L^2(\Omega), \tag{1.16a}$$
$$\mathbf{w}(t) \rightharpoonup 0 \quad \text{in} \quad L^2(\Omega), \tag{1.16b}$$
$$\nu(\mathbb{I} - \mathbb{P})\Delta \mathbf{u}(t) - \nabla P(t) - \nabla q(t) \to 0 \quad \text{in} \quad L^2(\Omega), \tag{1.16c}$$

其中 $\mathbb{P}$ 是相应的 Leray 投影算子。

(4) 假设$|\partial_{x_1} f| \ge f_0 > 0$或$|\partial_{x_2} f| \ge f_0 > 0$。当 $t \to \infty$时， ϱ在 $L^2(\Omega)$ 中收敛到稳态ρ^*，且满足 $\mathbb{P}\rho^* \nabla f = 0$，当且仅当

$$\lim_{t \to +\infty} (\mathbb{I} - \mathbb{P})\varrho \nabla f = \rho^* \nabla f \quad \text{in } L^2(\Omega) \text{ and } \quad \|\rho^* + \rho_s\|_{L^2} = \|\varrho_0 + \rho_s\|_{L^2}. \tag{1.17a}$$

在这种情况下，当 $t \to \infty$时，我们进一步有

$$\nu \Delta \mathbf{u}(t) \to 0 \quad \text{in} \quad L^2(\Omega), \tag{1.18a}$$
$$\nabla P + \varrho \nabla f \to 0 \quad \text{in} \quad L^2(\Omega). \tag{1.18b}$$

注 1.2. 注意，对于 (1.7) 或 (1.1) 系统 $\nabla f \equiv 0$，解的大时间行为已在先前的研究中得到确立，参见例如 [33–36]。据我们所知，定理1.2首次给出了非齐次纳维–斯托克斯系统（1.1）在重力强迫 $\nabla f \neq 0$不为零时，解的大时间渐近行为的相关结果。

定理 1.3。 [**大时间行为**] 在定理 1.1的条件下，问题（**1.7**）-（1.8的解（$\mathbf{u}$ ϱ）满足以下两个结论：

（1）以下渐近结果成立

$$\int_\Omega \varrho f d\mathbf{x} \to 0, \quad t \to \infty, \tag{1.19a}$$

当且仅当存在 $\gamma > 0$ 和 β 使得

$$\|\varrho_0 + \rho_s + \gamma f(x,y) - \beta\|_{L^2}^2 - \lim_{t\to+\infty} \|\varrho + \rho_s + \gamma f - \beta\|_{L^2}^2 = 2\gamma \int_\Omega \varrho_0 f d\mathbf{x}. \tag{1.20a}$$

（2）以下渐近结果成立

$$\|\varrho + \rho_s - (-\gamma f + \beta)\|_{L^2} \to 0, \quad t \to \infty, \tag{1.21a}$$

当且仅当存在 $\gamma > 0$ 和 β 使得

$$\lim_{t\to\infty} 2\gamma \int_\Omega (\varrho_0 - \varrho(t)) f d\mathbf{x} = \|\varrho_0 + \rho_s + \gamma f(x,y) - \beta\|_{L^2}^2. \tag{1.22a}$$

注 1.3. 定理*1.3*首次确立了预测非齐次 *Navier– Stokes* 系统 (1.1) 中密度分布大时间渐近行为的充要条件，该系统具有非零重力强迫 $\nabla f \neq 0$。

对于一般有界区域 Ω 上满足边界条件（1.8）的非线性问题（1.7），要将结果（1.13b）的正则性从 L^2-范数提升到 H^1-范数，并将（1.13c）的正则性从 H^{-1}-范数提升到L^2-范数，极具挑战性。然而，在稳定剖面 ρ_s 满足 $\nabla\rho_s = -\delta(\mathbf{x})\nabla f$且具有一致正正常数 $\delta(\mathbf{x}) \geq \delta_0 > 0$这一特定条件下，对于特殊的平坦区域 $\Omega = \mathbb{T} \times (0,h)$，线性化问题可以进一步改善这些结果。考虑以下线性系统：

$$\begin{cases} \rho_s \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \nu\Delta\mathbf{u} - \nabla P - \varrho\nabla f, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{T} \times (0,h), \\ \frac{\partial \varrho}{\partial t} = \delta(\mathbf{x})\mathbf{u} \cdot \nabla f, \quad \mathbf{x} \in T \times (0,h),, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{T} \times (0,h), \end{cases} \tag{1.23}$$

满足自由边界条件

$$u_2|_{x_2=0,h} = \partial_{x_2} u_1|_{x_2=0,h} = 0, \tag{1.24}$$

结果（1.13b）和（1.13c）可改进如下：

定理 1.4. [**线性问题**] 满足自由边界条件（1.231.24）的问题（1.24）的解具有以下渐近性质：

$$\|\mathbf{u}\|_{W^{1,r}} \to 0, \quad t \to \infty, \tag{1.25a}$$
$$\|\mathbf{u}_t\|_{H^1} \to 0, \quad t \to \infty. \tag{1.25b}$$

此外，若 $\nabla f = (0,g)$ 是一个常数，且 $\delta(\mathbf{x}) \equiv \delta_0 > 0$，则还可得

$$\|\nabla P + \varrho(0,g)\|_{L^2} \to 0, \quad t \to \infty. \tag{1.26a}$$

1.4 证明的关键思路

证明定理 1.1 和定理 1.2 的关键步骤是证明$\|\mathbf{u}\|_{L^2}^2$的一致有界性。这是分析其渐近行为的基本前提，不仅

包括 $|\nabla \mathbf{u}|_{L^2}^2$，还包括 $\|\mathbf{u}_t\|_{L^2}^2$, $\|\Delta \mathbf{u}\|_{L^2}^2$，以及 $\nabla P + \varrho \nabla f$。证明 $\|\mathbf{u}\|_{L^2}^2$ 一致有界性的关键步骤基于以下不等式

$$\frac{\nu}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |\nabla \mathbf{u}|^2 dx + \frac{1}{2}\|\sqrt{\varrho+\rho_s}\mathbf{u}_t\|_{L^2}^2 \le C\left\|\sqrt{\varrho+\rho_s}\mathbf{u}\right\|_{L^4}^2 \|\nabla \mathbf{u}\|_{L^4}^2 - \int_\Omega \varrho \mathbf{u}_t \cdot \nabla f \, dx.$$

为了处理右端的项$\|\sqrt{\varrho+\rho_s}\mathbf{u}\|_{L^4}^2$，我们采用精细估计$\|\sqrt{\varrho+\rho_s}\mathbf{u}\|_{L^4}^2 \le C\left(1+\|\sqrt{\varrho+\rho_s}\mathbf{u}\|_{L^2}\right)\|\mathbf{u}\|_{H^1}\sqrt{\ln\left(2+\|\mathbf{u}\|_{H^1}^2\right)}$，该估计改进了以往研究中使用的常规界$\|\sqrt{\varrho+\rho_s}\mathbf{u}\|_{L^4}^2 \le \|\nabla \mathbf{u}\|_{L^2}^2$。此外，与早期研究 [6, 8–11, 14–17, 19] 中一样，我们不对第二项应用 Hölder 不等式，而是

$$\left|-\int_\Omega \varrho \mathbf{u}_t \cdot \nabla f \, dx\right| \le \epsilon \|\sqrt{\varrho+\rho_s}\mathbf{u}_t\|_{L^2}^2 + C\|\varrho \nabla f\|_{L^2}^2,$$

我们利用连续性方程（1.7）$_2$ 将该项改写为

$$-\int_\Omega \varrho \mathbf{u}_t \cdot \nabla f \, dx = -\partial_t \int_\Omega \varrho \mathbf{u} \cdot \nabla f \, dx + \int_\Omega (\varrho+\rho_s)\,\mathbf{u}\cdot\nabla(\mathbf{u}\cdot\nabla f)\, d\mathbf{x}.$$

这一改写导出了一个关键不等式

$$\begin{aligned}
&\partial_t \int_\Omega (\varrho+\rho_s)\,\mathbf{u}\cdot\nabla f\, dx + \nu\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |\nabla \mathbf{u}|^2 dx + \|\sqrt{\varrho+\rho_s}\mathbf{u}_t\|_{L^2}^2 \\
&\le C_0\|\nabla \mathbf{u}\|_{L^2}^2\left(2+C_0+\|\nabla \mathbf{u}\|_{L^2}^2\right)\ln\left(2+C_0+\|\nabla \mathbf{u}\|_{L^2}^2\right) \\
&\quad + C_0\|\nabla \mathbf{u}\|_{L^2}^3\sqrt{\left(2+C_0+\|\nabla \mathbf{u}\|_{L^2}^2\right)\ln\left(2+C_0+\|\nabla \mathbf{u}\|_{L^2}^2\right)} \\
&\quad + C_0\|\nabla \mathbf{u}\|_{L^2}^2 + C_0\|\nabla \mathbf{u}\|_{L^2}^3 + C_0\|\nabla \mathbf{u}\|_{L^2}^2.
\end{aligned}$$

这与引理.3共同推出了 $\|\mathbf{u}\|_{L^2}^2$的一致有界性。

为了确定定理 1.3 中给出的扰动系统（1.7）里 ϱ 的渐近状态，我们建立了两个关键恒等式：（2.5）和能量关系 $E_\gamma(t)+\gamma\nu\int_0^t \|\nabla \mathbf{u}(\tau)\|_{L^2}^2\, d\tau = E_\gamma(0)$，其中能量泛函定义为$E_\gamma(t) = \frac{\gamma}{2}\int_\Omega (\varrho+\rho_s)|\mathbf{u}|^2 d\mathbf{x} + \frac{1}{2}\int_\Omega (\varrho+\rho_s)^2\, d\mathbf{x}$ 且 $\gamma > 0$。这两个恒等式使我们能够推导出初始构型 ϱ_0 满足的充要条件，使得 $\varrho+\rho_s$ 收敛到剖面 $-\gamma f + \beta$，其中 γ, $\beta > 0$。

2 一般区域上的估计

在后续分析中，C 和 C_0 表示一般的正常数，它们可能随行变化。这里，C 与初始数据 $(\mathbf{u}_0, \varrho_0)$ 无关，而 C_0 可能依赖于它。我们还用C_T 表示依赖于 T 的一般正常数，它们可能随行变化。

2.1 $\varrho+\rho_s$的估计

作为预备步骤，我们通过以下常微分方程定义粒子路径 $X(\mathbf{x}\ t)$:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}X(\mathbf{x},t) = \mathbf{v}(X(\mathbf{x},t),t), \\ X(\mathbf{x},0) = \mathbf{x}. \end{cases} \tag{2.1}$$

沿着这样的粒子路径，根据方程（1.7）$_2$ 可得

$$\frac{d}{dt}\left(\varrho(X(\mathbf{x},t),t) + \rho_s(X(\mathbf{x},t))\right) = 0,$$

对于所有 $t>0$ 以及 $\mathbf{x}\in\Omega$。这意味着沿着轨迹总密度守恒：

$$\alpha_1 \le \varrho(X(\mathbf{x},t),t)+\rho_s(X(\mathbf{x},t)) = \varrho_0(\mathbf{x})+\rho_s(\mathbf{x}) \le \alpha_2 < \infty, \tag{2.2}$$

其中 $0<\alpha_1\le\alpha_2<\infty$ 是常数。

引理 2.1。设 Ω 是 $\mathbb{R}^2$ 中具有光滑边界的有界区域。假设 $0<\varrho+\rho_s<\infty$ 且 $\mathbf{u}\in H_0^1(\Omega)$。那么，下面的对数插值不等式成立：

$$\left\|\sqrt{\varrho+\rho_s}\,\mathbf{u}\right\|_{L^4}^2 \le C\left(1+\left\|\sqrt{\varrho+\rho_s}\,\mathbf{u}\right\|_{L^2}\right)\|\mathbf{u}\|_{H^1}\sqrt{\ln\left(2+\|\mathbf{u}\|_{H^1}^2\right)}. \tag{2.3}$$

这个不等式的证明（它推广了已知的二维环面情形的结果）可见 [53]。对于 $\mathbb{R}^2$ 中具有光滑边界的有界区域 Ω 的情形，可以通过类似地调整证明来建立该结果。

2.2 $\|\sqrt{\varrho+\rho_s}\mathbf{u}\|_{L^\infty((0,\infty);L^2(\Omega))}$ 和 $\|\nabla\mathbf{u}\|_{L^2((0,\infty);L^2(\Omega))}$ 的估计

引理 2.2。设 $(\mathbf{u},\varrho)$ 是问题 (1.7) 在条件 (1.8) 下的一个解，其初始数据为 $(\mathbf{u}_0,\varrho_0)\in H^2(\Omega)\times L^\infty(\Omega)$。若 $f\in L^\infty(\Omega)$，则下面的一致估计成立：

$$\begin{aligned}
&\sqrt{\varrho+\rho_s}\,\mathbf{u}\in L^\infty((0,\infty);L^2(\Omega)),\\
&\nabla\mathbf{u}\in L^2((0,\infty);L^2(\Omega)),\\
&(\varrho+\rho_s)f\in L^\infty((0,\infty);L^1(\Omega)).
\end{aligned} \tag{2.4}$$

此外，该解对所有 $t>0$ 均满足以下能量恒等式：

$$\left\|\sqrt{\varrho+\rho_s}\,\mathbf{u}(t)\right\|_{L^2}^2+2\int_\Omega \varrho f\,d\mathbf{x}+2\nu\int_0^t\|\nabla\mathbf{u}(\tau)\|_{L^2}^2d\tau = \left\|\sqrt{\varrho_0+\rho_s}\,\mathbf{u}_0\right\|_{L^2}^2+2\int_\Omega\varrho_0 f\,d\mathbf{x}. \tag{2.5}$$

证明。我们从总机械能开始：

$$E(t)=\frac{1}{2}\int_\Omega(\varrho+\rho_s)|\mathbf{u}|^2d\mathbf{x}+\int_\Omega\varrho f\,d\mathbf{x}.$$

对 $E(t)$ 关于时间求导，得到

$$\frac{dE}{dt}=\int_\Omega(\varrho+\rho_s)\,\mathbf{u}_t\cdot\mathbf{u}d\mathbf{x}+\frac{1}{2}\int_\Omega\rho_t|\mathbf{u}|^2d\mathbf{x}+\int_\Omega\varrho_t f\,d\mathbf{x}. \tag{2.6}$$

由连续性方程 $\varrho_t=-(\mathbf{u}\cdot\nabla)\varrho-(\mathbf{u}\cdot\nabla)\rho_s$，第二项变为：

$$\frac{1}{2}\int_\Omega\varrho_t|\mathbf{u}|^2d\mathbf{x}=-\frac{1}{2}\int_\Omega(\mathbf{u}\cdot\nabla(\varrho+\rho_s))|\mathbf{u}|^2d\mathbf{x}.$$

利用动量方程，式（2.6）中的第一项变为

$$\begin{aligned}
\int_\Omega(\varrho+\rho_s)\,\mathbf{u}_t\cdot\mathbf{u}d\mathbf{x} &= -\int_\Omega(\varrho+\rho_s)(\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u})\cdot\mathbf{u}d\mathbf{x}-\int_\Omega\nabla P\cdot\mathbf{u}d\mathbf{x}\\
&\quad+\nu\int_\Omega\Delta\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}d\mathbf{x}-\int_\Omega\varrho\nabla f\cdot\mathbf{u}d\mathbf{x}\\
&= -\int_\Omega(\varrho+\rho_s)(\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u})\cdot\mathbf{u}d\mathbf{x}\\
&\quad-\nu\|\nabla\mathbf{u}\|_{L^2}^2.-\int_\Omega\varrho\nabla f\cdot\mathbf{u}d\mathbf{x}.
\end{aligned}$$

对于前一个方程中的对流项，我们有

$$\begin{aligned}\int_\Omega (\varrho+\rho_s)(\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u})\cdot\mathbf{u}d\mathbf{x} &= \int_\Omega (\varrho+\rho_s)\,\mathbf{u}\cdot\nabla\left(\frac{1}{2}|\mathbf{u}|^2\right)d\mathbf{x}\\ &= -\int_\Omega \nabla\cdot((\varrho+\rho_s)\,\mathbf{u})\cdot\frac{1}{2}|\mathbf{u}|^2 d\mathbf{x}\\ &= -\frac{1}{2}\int_\Omega (\mathbf{u}\cdot\nabla(\varrho+\rho_s))|\mathbf{u}|^2 d\mathbf{x},\end{aligned}$$

其中，由于不可压缩性，我们用到了 $\nabla\cdot((\varrho+\rho_s)\,\mathbf{u}) = \mathbf{u}\cdot\nabla(\varrho+\rho_s)$。

此外，对于外力项，有

$$\begin{aligned}-\int_\Omega \varrho\nabla f\cdot\mathbf{u}d\mathbf{x} &= \int_\Omega f\nabla\cdot(\varrho\mathbf{u})d\mathbf{x} - \int_{\partial\Omega}\varrho f\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}dS\\ &= \int_\Omega f\nabla\cdot(\varrho\mathbf{u})d\mathbf{x} = -\int_\Omega f\varrho_t dx - \int_\Omega f\nabla\cdot(\rho_s\mathbf{u})d\mathbf{x}.\end{aligned}$$

将所有项代回式（2.6），得

$$\begin{aligned}\frac{dE}{dt} &= -\frac{1}{2}\int_\Omega (\mathbf{u}\cdot\nabla(\varrho+\rho_s))|\mathbf{u}|^2 d\mathbf{x} + \left[\frac{1}{2}\int_\Omega (\mathbf{u}\cdot\nabla(\varrho+\rho_s))|\mathbf{u}|^2 d\mathbf{x}\right]\\ &\quad -\nu\|\nabla\mathbf{u}\|_{L^2}^2 - \int_\Omega f\varrho_t d\mathbf{x} - \int_\Omega f\nabla\cdot(\rho_s\mathbf{u})d\mathbf{x} + \int_\Omega \varrho_t f d\mathbf{x} = -\nu\|\nabla\mathbf{u}\|_{L^2}^2,\end{aligned} \tag{2.7}$$

其中，我们用到了

$$\int_\Omega f\nabla\cdot(\rho_s\mathbf{u})d\mathbf{x} = -\int_\Omega \rho_s\nabla f\cdot\mathbf{u}d\mathbf{x} = \int_\Omega \nabla p_s\cdot\mathbf{u}d\mathbf{x} = 0.$$

将（2.7）从零积分到 t，于是得到（2.4）-（2.5）。 □

2.3 $\|\nabla\mathbf{u}\|_{L^\infty((0,\infty);L^2(\Omega))}$ 的估计以及 $\|\sqrt{\varrho+\rho_s}\mathbf{u}^t\|_{L^2((0,\infty);L^2(\Omega))}$

引理 2.3。 设$(\mathbf{u},\ \varrho)$ 是满足条件(1.8)的问题(1.7) 的一个解，其初始数据为$(\mathbf{u}_0,\varrho_0)\in H^1(\Omega)\times L^\infty(\Omega)$。若 $\nabla f\in W^{1,\infty}(\Omega)$，则以下一致估计成立：

$$\begin{aligned}&\sqrt{\varrho+\rho_s}\mathbf{u}_t\in L^2\left((0,\infty);L^2(\Omega)\right),\\ &\nabla\mathbf{u}\in L^\infty\left((0,\infty);L^2(\Omega)\right),\\ &(\varrho+\rho_s)\,\mathbf{u}\cdot\nabla f\in L^\infty\left((0,\infty);L^1(\Omega)\right).\end{aligned} \tag{2.8}$$

此外，该解满足以下估计：

$$\int_\Omega |\nabla\mathbf{u}(t)|^2 dx + \frac{2}{\nu}\int_0^t \left\|\sqrt{\varrho+\rho_s}\mathbf{u}_\tau\right\|_{L^2}^2 d\tau \le G^{-1}\left(\int_0^t \|\nabla\mathbf{u}\|_{L^2}^2 ds\right), \tag{2.9}$$

其中 $G:[C_0,\infty)\to\mathbb{R}$ 由 $G(z)=\frac{2}{\nu}\int_{C_0}^z \frac{1}{w(s)}ds$ 定义，且函数 $w(z)$ 由下式给出

$$\begin{aligned}w(z) &= (2+C_0+z)\ln(2+C_0+z) + C_0\sqrt{z} + C_0\\ &\quad + \sqrt{2+C_0+z}\cdot\sqrt{(2+C_0+z)\ln(2+C_0+z)}.\end{aligned}$$

证明。 检验（1.7）$_1$ 通过 $\mathbf{u}_t$ 并在 Ω 上积分可得

$$\begin{aligned}&\nu\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |\nabla\mathbf{u}|^2 dx + \frac{1}{2}\|\sqrt{\varrho+\rho_s}\mathbf{u}_t\|_{L^2}^2\\ &\le C\left\|\sqrt{\varrho+\rho_s}\mathbf{u}\right\|_{L^4}^2\|\nabla\mathbf{u}\|_{L^4}^2 - \int_\Omega \varrho\mathbf{u}_t\cdot\nabla f\,dx\\ &\le C\left\|\sqrt{\varrho+\rho_s}\mathbf{u}\right\|_{L^4}^2\|\nabla\mathbf{u}\|_{L^2}\left\|\nabla^2\mathbf{u}\right\|_{L^2}\\ &\quad + C\left\|\sqrt{\varrho+\rho_s}\mathbf{u}\right\|_{L^4}^2\|\nabla\mathbf{u}\|_{L^2}^2 - \int_\Omega \varrho\mathbf{u}_t\cdot\nabla f\,dx\\ &:= I_1+I_2+I_3.\end{aligned} \tag{2.10}$$

为了估计项 I_1，需要控制 $\nabla^2\mathbf{u}$ 的 L^2-范数。注意到

$$\begin{aligned}\left\|\nabla^2\mathbf{u}\right\|_{L^2} &\le C\left\|\sqrt{\varrho+\rho_s}\mathbf{u}_t\right\|_{L^2}\\ &\quad + C\left\|\sqrt{\varrho+\rho_s}\mathbf{u}\right\|_{L^4}\|\nabla\mathbf{u}\|_{L^4} + C\|\varrho\nabla f\|_{L^2}\\ &\le C\left\|\sqrt{\varrho+\rho_s}\mathbf{u}_t\right\|_{L^2}\\ &\quad + C\left\|\sqrt{\varrho+\rho_s}\mathbf{u}\right\|_{L^4}\|\nabla\mathbf{u}\|_{L^2}^{\frac{1}{2}}\left(\left\|\nabla^2\mathbf{u}\right\|_{L^2}^{\frac{1}{2}} + \|\nabla\mathbf{u}\|_{L^2}^{\frac{1}{2}}\right) + C\|\varrho\nabla f\|_{L^2}\\ &\le C\left\|\sqrt{\varrho+\rho_s}\mathbf{u}_t\right\|_{L^2} + C\left\|\sqrt{\varrho+\rho_s}\mathbf{u}\right\|_{L^4}^2\|\nabla\mathbf{u}\|_{L^2} + 1/2\left\|\nabla^2\mathbf{u}\right\|_{L^2}\\ &\quad + C\left\|\sqrt{\varrho+\rho_s}\mathbf{u}\right\|_{L^4}\|\nabla\mathbf{u}\|_{L^2} + \|\varrho\nabla f\|_{L^2}.\end{aligned}$$

这意味着

$$\begin{aligned}\left\|\nabla^2\mathbf{u}\right\|_{L^2} \le C\left\|\sqrt{\varrho+\rho_s}\mathbf{u}_t\right\|_{L^2} + C\left\|\sqrt{\varrho+\rho_s}\mathbf{u}\right\|_{L^4}^2\|\nabla\mathbf{u}\|_{L^2}\\ + C\left\|\sqrt{\varrho+\rho_s}\mathbf{u}\right\|_{L^4}\|\nabla\mathbf{u}\|_{L^2} + \|\varrho\nabla f\|_{L^2}.\end{aligned} \tag{2.11}$$

结合不等式（2.3）与（2.5），我们可得 I_2 的以下界：

$$\left\|\sqrt{\varrho+\rho_s}\mathbf{u}\right\|_{L^4}^2\|\nabla\mathbf{u}\|_{L^2}^2 \le C_0\left(2+C_0+\|\nabla\mathbf{u}\|_{L^2}\right)\sqrt{\ln\left(2+C_0+\|\nabla\mathbf{u}\|_{L^2}^2\right)}\|\nabla\mathbf{u}\|_{L^2}^2. \tag{2.12}$$

为处理 I_3，我们利用（1.7）$_2$，不采用以往研究中直接使用 H¨older 不等式的方法，而是简化其表达式：

$$\begin{aligned}-\int_\Omega \varrho\mathbf{u}_t\cdot\nabla f\,d\mathbf{x} &= -\partial_t\int_\Omega(\varrho+\rho_s)\,\mathbf{u}\cdot\nabla f\,d\mathbf{x} + \int_\Omega\varrho_t\mathbf{u}\cdot\nabla f\,d\mathbf{x}\\ &= -\partial_t\int_\Omega(\varrho+\rho_s)\,\mathbf{u}\cdot\nabla f\,d\mathbf{x}\\ &\quad -\int_\Omega\left(\mathbf{u}\cdot\nabla\left(\varrho+\rho_s\right)\right)\left(\,\mathbf{u}\cdot\nabla f\right)\,d\mathbf{x}\\ &= -\partial_t\int_\Omega(\varrho+\rho_s)\,\mathbf{u}\cdot\nabla f\,d\mathbf{x} + \int_\Omega(\varrho+\rho_s)\,\mathbf{u}\cdot\nabla\left(\,\mathbf{u}\cdot\nabla f\right)\,d\mathbf{x}.\end{aligned} \tag{2.13}$$

将（2.11）-（2.13）代入（2.10），可得

$$\begin{aligned}&\partial_t\int_\Omega(\varrho+\rho_s)\,\mathbf{u}\cdot\nabla f\,dx + \nu\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega|\nabla\mathbf{u}|^2dx + \|\sqrt{\varrho+\rho_s}\mathbf{u}_t\|_{L^2}^2\\ &\le C\left\|\sqrt{\varrho+\rho_s}\mathbf{u}\right\|_{L^4}^4\|\nabla\mathbf{u}\|_{L^2}^2 + C\left\|\sqrt{\varrho+\rho_s}\mathbf{u}\right\|_{L^4}^3\|\nabla\mathbf{u}\|_{L^2}^2\\ &\quad + C\left\|\sqrt{\varrho+\rho_s}\mathbf{u}\right\|_{L^4}^2\|\nabla\mathbf{u}\|_{L^2} + C\left\|\sqrt{\varrho+\rho_s}\mathbf{u}\right\|_{L^4}^2\|\nabla\mathbf{u}\|_{L^2}^2\\ &\quad + \int_\Omega(\varrho+\rho_s)\,\mathbf{u}\nabla\,\left(\,\mathbf{u}\cdot\nabla f\right)\,d\mathbf{x}\\ &\le C\left\|\sqrt{\varrho+\rho_s}\mathbf{u}\right\|_{L^4}^4\|\nabla\mathbf{u}\|_{L^2}^2 + C\left\|\sqrt{\varrho+\rho_s}\mathbf{u}\right\|_{L^4}^2\|\nabla\mathbf{u}\|_{L^2}^3\\ &\quad + C\|\mathbf{u}\|_{L^2}\|\nabla\mathbf{u}\|_{L^2}^2 + C\left\|\sqrt{\varrho+\rho_s}\mathbf{u}\right\|_{L^2}\|\nabla\mathbf{u}\|_{L^2}^3 + C\|\nabla\mathbf{u}\|_{L^2}^2\\ &\le C_0\|\nabla\mathbf{u}\|_{L^2}^2\left(2+C_0+\|\nabla\mathbf{u}\|_{L^2}^2\right)\ln\left(2+C_0+\|\nabla\mathbf{u}\|_{L^2}^2\right)\\ &\quad + C_0\|\nabla\mathbf{u}\|_{L^2}^3\sqrt{\left(2+C_0+\|\nabla\mathbf{u}\|_{L^2}^2\right)\ln\left(2+C_0+\|\nabla\mathbf{u}\|_{L^2}^2\right)}\\ &\quad + C\|\mathbf{u}\|_{L^2}\|\nabla\mathbf{u}\|_{L^2}^2 + C\left\|\sqrt{\varrho+\rho_s}\mathbf{u}\right\|_{L^2}\|\nabla\mathbf{u}\|_{L^2}^3 + C\|\nabla\mathbf{u}\|_{L^2}^2\\ &\le C_0\|\nabla\mathbf{u}\|_{L^2}^2\left(2+C_0+\|\nabla\mathbf{u}\|_{L^2}^2\right)\ln\left(2+C_0+\|\nabla\mathbf{u}\|_{L^2}^2\right)\\ &\quad + C_0\|\nabla\mathbf{u}\|_{L^2}^3\sqrt{\left(2+C_0+\|\nabla\mathbf{u}\|_{L^2}^2\right)\ln\left(2+C_0+\|\nabla\mathbf{u}\|_{L^2}^2\right)}\\ &\quad + C_0\|\nabla\mathbf{u}\|_{L^2}^2 + C_0\|\nabla\mathbf{u}\|_{L^2}^3 + C_0\|\nabla\mathbf{u}\|_{L^2}^2.\end{aligned}$$

在区间 $[0,t]$ 上对上述不等式关于时间积分，可得

$$\begin{aligned}&\int_\Omega (\varrho+\rho_s)\,\mathbf{u}\cdot\nabla f\,d\mathbf{x}+\frac{\nu}{2}\int_\Omega |\nabla\mathbf{u}|^2dx+\int_0^t \|\sqrt{\varrho+\rho_s}\mathbf{u}_s\|_{L^2}^2\,ds\\&\le\int_\Omega (\varrho_0+\rho_s)\,\mathbf{u}_0\cdot\nabla f\,d\mathbf{x}+\frac{\nu}{2}\int_\Omega |\nabla\mathbf{u}_0|^2d\mathbf{x}+\int_0^t \|\nabla\mathbf{u}\|_{L^2}^2 h\left(\|\nabla\mathbf{u}\|_{L^2}^2\right)\,ds,\end{aligned}\tag{2.14}$$

其中 $h(z)$ 是由下式给出的正函数

$$\begin{aligned}h(z)=&(2+C_0+z)\ln(2+C_0+z)\\&+\sqrt{2+C_0+z}\sqrt{(2+C_0+z)\ln(2+C_0+z)}+C_0\sqrt{z}+C_0.\end{aligned}$$

利用能量估计 (2.5)，不等式 (2.14) 可得

$$\frac{\nu}{2}\int_\Omega |\nabla\mathbf{u}|^2d\mathbf{x}\le C_0+\int_0^t \|\nabla\mathbf{u}\|_{L^2}^2 h\left(\|\nabla\mathbf{u}\|_{L^2}^2\right)ds.\tag{2.15}$$

为便于分析，我们引入以下记号：

$$y(t)=\int_\Omega |\nabla\mathbf{u}(t)|^2d\mathbf{x},\quad g(t)=\|\nabla\mathbf{u}(t)\|_{L^2}^2,\quad w(z)=\frac{2}{\nu}h(z).$$

用这些函数表示，不等式 (2.15) 可改写为

$$y(t)\le\frac{2C_0}{\nu}+\int_0^t g(s)w(y(s))ds.$$

定义函数

$$G(z)=\int_{C_0}^z\frac{1}{w(s)}ds.$$

直接验证可得

$$\int_{C_0}^{+\infty}\frac{1}{w(s)}ds=+\infty,$$

这意味着 w 是一个非递减函数。因此，应用引理.3 可得

$$\begin{aligned}\int_\Omega |\nabla\mathbf{u}|^2dx=y(t)&\le\frac{2C_0}{\nu}+\int_0^t g(s)w\left(y(s)\right)\,ds\\&\le G^{-1}\left(G(C_0)+\int_0^t g(s)\,ds\right)\\&=G^{-1}\left(\int_0^t\|\nabla\mathbf{u}(\tau)\|_{L^2}^2\,d\tau\right)\\&\le G^{-1}\left(\int_0^{+\infty}\|\nabla\mathbf{u}(\tau)\|_{L^2}^2\,d\tau\right)<+\infty.\end{aligned}$$

结合（2.14），可得（2.16）和（2.9）。

□

2.4 $\|\nabla\mathbf{u}_t\|_{L^2((0,\infty);L^2(\Omega))}$ 和 $\|\sqrt{\varrho+\rho_s}\mathbf{u}_t\|_{L^\infty((0,\infty);L^2(\Omega))}$ 的估计

引理 2.4。 设$(\mathbf{u},\ \varrho)$ 是问题(1.7) 的一个解，满足条件(1.8)，初始数据为$(\mathbf{u}_0,\varrho_0)\in H^2(\Omega)\times L^\infty(\Omega)$。若 $\nabla f\in W^{1,\infty}(\Omega)$ 则有

$$\sqrt{\varrho+\rho_s}\mathbf{u}_t\in L^\infty\left((0,\infty);L^2(\Omega)\right),\quad \nabla\mathbf{u}_t\in L^2\left((0,\infty);L^2(\Omega)\right).\tag{2.16}$$

此外，我们有

$$\int_\Omega(\varrho+\rho_s)\,|\mathbf{u}_t|^2\,d\mathbf{x}+C_0\nu\int_0^t\|\nabla\mathbf{u}_\tau\|_{L^2}^2\,d\mathbf{x}\,d\tau\le C_0.\tag{2.17}$$

证明。 对方程（1.7）$_1$ 关于时间求导，得到 $\mathbf{u}_t$的演化方程:

$$\begin{aligned}&(\varrho+\rho_s)\,\mathbf{u}_{tt}+\varrho_t\mathbf{u}_t+\varrho_t(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u}+(\varrho+\rho_s)\,(\mathbf{u}_t\cdot\nabla)\mathbf{u}\\&\quad=\nu\Delta\mathbf{u}_t-\nabla P_t-\varrho_t\nabla f-(\varrho+\rho_s)\,(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u}_t.\end{aligned}\tag{2.18}$$

现在我们用 $\mathbf{u}_t$ 检验所得方程，并在 Ω 上积分。

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega(\varrho+\rho_s)\,|\mathbf{u}_t|^2\,d\mathbf{x}+\nu\int_\Omega|\nabla\mathbf{u}_t|^2\,d\mathbf{x}\\&=-\int_\Omega(\varrho+\rho_s)\,(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u}_t\cdot\mathbf{u}_t\,d\mathbf{x}-\int_\Omega\varrho_t(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}_t\,d\mathbf{x}\\&\quad-\int_\Omega(\varrho+\rho_s)\,(\mathbf{u}_t\cdot\nabla)\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}_t\,d\mathbf{x}-\int_\Omega\varrho_t\,(\nabla f\cdot\mathbf{u}_t)\,d\mathbf{x}\\&=-\frac{1}{2}\int_\Omega(\mathbf{u}\,(\varrho+\rho_s))\,\nabla|\mathbf{u}_t|^2\,d\mathbf{x}+\int_\Omega(\mathbf{u}\cdot\nabla\,(\varrho+\rho_s))\,(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}_t\,d\mathbf{x}\\&\quad-\int_\Omega(\varrho+\rho_s)\,(\mathbf{u}_t\cdot\nabla)\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}_t\,d\mathbf{x}+\int_\Omega(\mathbf{u}\cdot\nabla\,(\varrho+\rho_s))\,(\nabla f\cdot\mathbf{u}_t)\,d\mathbf{x}\\&:=J_1+J_2+J_3+J_4.\end{aligned}\tag{2.19}$$

现在我们分别估计每一项 J_j当 $j=1$，2，3，4。通过应用 H¨older 不等式、Sobolev 嵌入和 Young不等式，我们推得

$$\begin{aligned}J_1&=-\frac{1}{2}\int_\Omega(\mathbf{u}\,(\varrho+\rho_s))\,\nabla|\mathbf{u}_t|^2\,d\mathbf{x}\\&\le\big\|\sqrt{\varrho+\rho_s}\mathbf{u}\big\|_{L^4}\big\|\sqrt{\varrho+\rho_s}\mathbf{u}_t\big\|_{L^4}\|\nabla\mathbf{u}_t\|_{L^2}\\&\le\frac{\nu}{8}\|\nabla\mathbf{u}_t\|_{L^2}^2+C\big\|\sqrt{\varrho+\rho_s}\mathbf{u}\big\|_{L^4}^2\big\|\sqrt{\varrho+\rho_s}\mathbf{u}_t\big\|_{L^4}^2\\&\le\frac{\nu}{8}\|\nabla\mathbf{u}_t\|_{L^2}^2+C_0\big\|\sqrt{\varrho+\rho_s}\mathbf{u}\big\|_{L^4}^2\big\|\sqrt{\varrho+\rho_s}\mathbf{u}_t\big\|_{L^2}\|\nabla\mathbf{u}_t\|_{L^2}\\&\le\frac{\nu}{8}\|\nabla\mathbf{u}_t\|_{L^2}^2+C_0\big\|\sqrt{\varrho+\rho_s}\mathbf{u}_t\big\|_{L^2}^2\|\nabla\mathbf{u}\|_{L^2}^2.\end{aligned}\tag{2.20}$$

对于这一项 J_2，应用估计式（2.9）可得

$$\begin{aligned}J_2&=\int_\Omega(\mathbf{u}\cdot\nabla\,(\varrho+\rho_s))\,(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}_t\,d\mathbf{x}\\&=-\int_\Omega(\varrho+\rho_s)\,\mathbf{u}\cdot\nabla\,((\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}_t)\,d\mathbf{x}\\&\le\int_\Omega(\varrho+\rho_s)\,|\mathbf{u}||\mathbf{u}_t|\left(|\nabla\mathbf{u}|^2+|\mathbf{u}|\big|\nabla^2\mathbf{u}\big|\right)d\mathbf{x}\\&\quad+\int_\Omega(\varrho+\rho_s)\,|\mathbf{u}|^2|\nabla\mathbf{u}||\nabla\mathbf{u}_t|\,d\mathbf{x}\\&\le\big\|\sqrt{\varrho+\rho_s}\mathbf{u}\big\|_{L^6}\big\|\sqrt{\varrho+\rho_s}\mathbf{u}_t\big\|_{L^6}\left(\|\nabla\mathbf{u}\|_{L^3}^2+\|\mathbf{u}\|_{L^6}\big\|\nabla^2\mathbf{u}\big\|_{L^2}\right)\\&\quad+C_0\big\|\sqrt{\varrho+\rho_s}\mathbf{u}\big\|_{L^6}^2\|\nabla\mathbf{u}\|_{L^6}\|\nabla\mathbf{u}_t\|_{L^2}\\&\le C_0\|\nabla\mathbf{u}_t\|_{L^2}\|\nabla\mathbf{u}\|_{L^2}^2\big\|\nabla^2\mathbf{u}\big\|_{L^2}+C_0\|\nabla\mathbf{u}_t\|_{L^2}\|\nabla\mathbf{u}\|_{L^2}^3\\&\le\frac{\nu}{8}\|\nabla\mathbf{u}_t\|_{L^2}^2+C_0\|\nabla\mathbf{u}\|_{L^2}^4\big\|\nabla^2\mathbf{u}\big\|_{L^2}^2+C_0\|\nabla\mathbf{u}\|_{L^2}^6\\&\le\frac{\nu}{8}\|\nabla\mathbf{u}_t\|_{L^2}^2+C_0\|\nabla\mathbf{u}\|_{L^2}^4\big\|\sqrt{\varrho+\rho_s}\mathbf{u}_t\big\|_{L^2}^2+C_0\big\|\sqrt{\varrho+\rho_s}\mathbf{u}\big\|_{L^4}^4\|\nabla\mathbf{u}\|_{L^2}^6\\&\quad+C_0\big\|\sqrt{\varrho+\rho_s}\mathbf{u}\big\|_{L^4}^2\|\nabla\mathbf{u}\|_{L^2}^6+C_0\|\varrho\nabla f\|_{L^2}^2\|\nabla\mathbf{u}\|_{L^2}^4+C_0\|\nabla\mathbf{u}\|_{L^2}^6\\&\le\frac{\nu}{8}\|\nabla\mathbf{u}_t\|_{L^2}^2+C_0\|\nabla\mathbf{u}\|_{L^2}^2\big\|\sqrt{\varrho+\rho_s}\mathbf{u}_t\big\|_{L^2}^2+C_0\big\|\sqrt{\varrho+\rho_s}\mathbf{u}\big\|_{L^2}^2,\end{aligned}\tag{2.21}$$

其中我们用到了

$$\begin{aligned}\left\|\nabla^2\mathbf{u}\right\|_{L^2}^2 \leq C\left\|\sqrt{\varrho+\rho_s}\mathbf{u}_t\right\|_{L^2}^2 + C\left\|\sqrt{\varrho+\rho_s}\mathbf{u}\right\|_{L^4}^4\|\nabla\mathbf{u}\|_{L^2}^2 + \\ + C\left\|\sqrt{\varrho+\rho_s}\mathbf{u}\right\|_{L^4}^2\|\nabla\mathbf{u}\|_{L^2}^2 + \|\varrho\nabla f\|_{L^2}^2.\end{aligned}$$

对于其余各项 J_3 和 J_4，我们有如下整体估计：

$$\begin{aligned}J_3 &= -\int_\Omega (\varrho+\rho_s)(\mathbf{u}_t\cdot\nabla)\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}_t\,d\mathbf{x}\\ &\leq \|\nabla\mathbf{u}\|_{L^2}\left\|\sqrt{\varrho+\rho_s}\mathbf{u}_t\right\|_{L^4}^2\\ &\leq C_0\|\nabla\mathbf{u}\|_{L^2}\left\|\sqrt{\varrho+\rho_s}\mathbf{u}_t\right\|_{L^2}\|\nabla\mathbf{u}_t\|_{L^2}\\ &\leq \frac{\nu}{8}\|\nabla\mathbf{u}_t\|_{L^2} + C_0\|\nabla\mathbf{u}\|_{L^2}^2\left\|\sqrt{\varrho+\rho_s}\mathbf{u}_t\right\|_{L^2}^2.\end{aligned} \tag{2.22}$$

$$\begin{aligned}J_4 &= -\int_\Omega (\mathbf{u}(\varrho+\rho_s))\nabla(\nabla f\cdot\mathbf{u}_t)\,d\mathbf{x}\\ &\leq \frac{\nu}{8}\|\nabla\mathbf{u}_t\|_{L^2}^2 + C_0\left\|\sqrt{\varrho+\rho_s}\mathbf{u}\right\|_{L^2}^2\\ &\leq \frac{\nu}{8}\|\nabla\mathbf{u}_t\|_{L^2}^2 + C_0\|\nabla\mathbf{u}\|_{L^2}^2.\end{aligned} \tag{2.23}$$

将式（2.20）-（2.23）代入式（2.19），得到

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega(\varrho+\rho_s)|\mathbf{u}_t|^2\,d\mathbf{x} + \nu\int_\Omega|\nabla\mathbf{u}_t|^2\,d\mathbf{x} \leq C_0\|\nabla\mathbf{u}\|_{L^2}^2\left\|\sqrt{\varrho+\rho_s}\mathbf{u}_t\right\|_{L^2}^2 + C_0\|\nabla\mathbf{u}\|_{L^2}^2. \tag{2.24}$$

因此，由Gronwall不等式可得

$$\int_\Omega(\varrho+\rho_s)|\mathbf{u}_t|^2\,d\mathbf{x} + C_0\nu\int_0^t\|\nabla\mathbf{u}_\tau\|_{L^2}^2\,d\mathbf{x}\,d\tau \leq C_0\int_\Omega(\varrho_0+\rho_s)|\mathbf{u}_t(0)|^2\,d\mathbf{x} + C_0. \tag{2.25}$$

为估计 $\|\sqrt{\varrho_0+\rho_s}\mathbf{u}_t(0)\|_{L^2}^2$，将动量方程（1.7）$_1$ 在 $t=0$ 两边乘以 $\mathbf{u}_t(0)\in L^2(\Omega)$，并在 Ω 上积分，得到

$$\begin{aligned}&\int_\Omega(\varrho_0+\rho_s)|\mathbf{u}_t|^2\,d\mathbf{x} - \nu\int_\Omega\Delta\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}_t\,d\mathbf{x}\\ &+\int_\Omega(\varrho_0+\rho_s)\mathbf{u}_t\cdot(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u}\,d\mathbf{x} = -\int_\Omega\rho\nabla f\cdot\mathbf{u}_t\,d\mathbf{x}.\end{aligned}$$

由此可得

$$\begin{aligned}\left\|\sqrt{\varrho_0+\rho_s}\mathbf{u}_t\right\|_{L^2}^2 \leq &\nu\|\mathbf{u}_t\|_{L^2}\|\Delta\mathbf{u}\|_{L^2} + C_0\left\|\sqrt{\varrho_0+\rho_s}\mathbf{u}_t\right\|_{L^2}\|(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u}\|_{L^2}\\ &+ C_0\|\nabla f\|_{L^\infty}\|\rho_0\|_{L^2}\left\|\sqrt{\varrho_0+\rho_s}\mathbf{u}_t\right\|_{L^2},\end{aligned}$$

这就得到

$$\left\|\sqrt{\varrho_0+\rho_s}\mathbf{u}_t(0)\right\|_{L^2}^2 \leq C\left(\nu\|\mathbf{u}_0\|_{H^2} + \|\mathbf{u}_0\|_{H^2}\|\mathbf{u}_0\|_{H^1} + C_0\|\nabla f\|_{L^\infty}\|\rho_0\|_{L^2}\right).$$

□

引理2.5。 对于满足边界条件(1.8)且初始数据为$(\mathbf{u}_0,\varrho_0)\in H^1(\Omega)\times L^\infty(\Omega)$的问题(1.7) 的任意解 $(\mathbf{u}\ \varrho)$，若 $\nabla f\in W^{1,\infty}(\Omega)$，则有

$$\mathbf{u}_t\in L^2\left((0,\infty);L^p(\Omega)\right),\quad 1\leq p<\infty. \tag{2.26}$$

Proof. 该引理是引理 2.4 和引理.2a中的估计 (.2) 的直接推论。 □

2.5 关于 $\|\mathbf{u}\|_{L^\infty((0,\infty);L^\infty(\Omega))}$ 和 $\|\mathbf{u}\|_{L^2([0,T];W^{2,p}(\Omega))}$ 的估计

引理 2.6。 设 $(\mathbf{u}\ \varrho)$ 是问题 (1.7) 在条件 (1.8)下的一个解，初始数据为 $(\mathbf{u}_0, \varrho_0) \in H^2(\Omega) \times L^\infty(\Omega)$。若 $\nabla f \in W^{1,\infty}(\Omega)$ 则有

$$\mathbf{u} \in L^\infty\left((0,\infty); L^\infty(\Omega)\right), \quad 1 \le p < \infty. \tag{2.27}$$

证明。 根据引理 3.2 和引理 2.4，我们得出 $\|\nabla\mathbf{u}\|_{L^2}$ 和 $\|\sqrt{\varrho+\rho_s}\mathbf{u}_t\|_{L^2}$在时间上均一致有界。然后，利用引理.1，可得

$$\begin{aligned}\|\mathbf{u}\|_{H^2}^2 &\le C\left\|\sqrt{\varrho+\rho_s}\mathbf{u}_t\right\|_{L^2}^2 + C\left\|\sqrt{\varrho+\rho_s}\mathbf{u}\right\|_{L^4}^4\|\nabla\mathbf{u}\|_{L^2}^2 \\ &\quad + C\left\|\sqrt{\varrho+\rho_s}\mathbf{u}\right\|_{L^4}^2\|\nabla\mathbf{u}\|_{L^2}^2 + \|\varrho\nabla f\|_{L^2}^2 \\ &\le C\left\|\sqrt{\varrho+\rho_s}\mathbf{u}_t\right\|_{L^2}^2 + C_0\|\nabla\mathbf{u}\|_{L^2}^4 + C_0\|\nabla\mathbf{u}\|_{L^2}^3 + \|\varrho\nabla f\|_{L^2}^2,\end{aligned} \tag{2.28}$$

由此，利用 Sobolev嵌入 $H^2(\Omega) \subset W^{1,\ p}(\Omega)$，其中 $1 \le p < \infty$ 以及（.2b），可知

$$\|\mathbf{u}\|_{L^\infty}^2 \le C_0, \quad \forall t \in [0,+\infty). \tag{2.29}$$

其中 C_0 与时间无关 t。这就得到了（2.27）。

□

2.6 关于 $\|\mathbf{u}\|_{L^2([0,T];W^{2,p}(\Omega))}$ 的估计

引理 2.7。 设$(\mathbf{u}\ \varrho)$ 是问题(1.7) 的一个解，满足条件(1.8)，其初始数据为$(\mathbf{u}_0, \varrho_0) \in H^2(\Omega) \times L^\infty(\Omega)$。若 $\nabla f \in W^{1,\infty}(\Omega)$，对于 $p \ge 2$，我们有

$$\mathbf{u} \in L^2\left([0,T]; W^{2,p}(\Omega)\right), \quad \nabla\mathbf{u} \in L^2\left([0,T]; L^\infty(\Omega)\right), \tag{2.30}$$

证明。 现在证明（2.27）的第二部分。注意到

$$\|(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u}\|_{H^1}^2 \le C\left(\|\mathbf{u}\|_{L^\infty}^2 + \|\mathbf{u}\|_{H^1}^2\right)\|\mathbf{u}\|_{H^2}^2.$$

由此结合（.2a），可得

$$\|(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u}\|_{L^p}^2 \le C_0, \quad \forall t \in [0,+\infty), \tag{2.31}$$

对于 $1 \le p < \infty$，其中 C_0 与时间 t无关。

对于任意 $T \in (0,+\infty)$，可见 $\int_0^T \|\mathbf{u}\|_{W^{2,p}}^2\,dt$ 可由以下量控制：

$$\int_0^T \|\mathbf{u}\|_{W^{2,p}}^2\,dt \le C_0\int_0^T\left(\|\mathbf{u}_t\|_{L^p}^2 + \|(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u}\|_{L^p}^2 + \|\varrho\nabla f\|_{L^p}^2\right)dt, \quad 1 \le p < +\infty. \tag{2.32}$$

由此推出（2.30）。接着由 $\nabla\mathbf{u} \in L^2\left([0,T];\ W^{1,p}(\Omega)\right)$，结合 $p > 2$和（.2b），可得

T

$$\int_0^T \|\nabla\mathbf{u}(t)\|_{L^\infty}^2\,dt \le C_T.$$

□

引理 2.8. 在引理 2.7的条件下，若 $\varrho_0 \in H^1$，则有

$$\varrho \in L^\infty\left([0,T]; H^1(\Omega)\right), \quad \varrho_t \in L^\infty\left([0,T]; L^2(\Omega)\right). \tag{2.33}$$

证明。 对于任意 $p \ge 2$，对 ∂_{x_j} （1.7）$_2$, 可得

$$\partial_t\partial_{x_j}\varrho + (\partial_{x_j}\mathbf{u}\cdot\nabla)\varrho + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\partial_{x_j}\varrho + (\partial_{x_j}\mathbf{u}\cdot\nabla)\rho_s + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\partial_{x_j}\rho_s = 0, \quad j = 1,2.$$

将前一个方程与 $\partial_{x_j}(\varrho+\rho_s)$ 作点积，并进行分部积分，可得

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\|\nabla(\varrho+\rho_s)\|_{L^2}^2\right) \leq \|\nabla \mathbf{u}\|_{L^\infty}\|\nabla(\varrho+\rho_s)\|_{L^2}^2,$$

由此得到

$$\frac{d}{dt}\left(\|\nabla(\varrho+\rho_s)\|_{L^2}\right) \leq \|\nabla \mathbf{u}\|_{L^\infty}\|\nabla(\varrho+\rho_s)\|_{L^2}$$

由 Gronwall不等式 得到

$$\|\nabla\varrho(\cdot,t)+\nabla\rho_s\|_{L^2} \leq \|\nabla(\varrho_0+\rho_s)\|_{L^2}\exp\left\{\int_0^T \|\nabla \mathbf{u}\|_{L^\infty}dt\right\} \leq C_T,$$

对于 $\forall t\in[0,T]$。注意到2.33，即可得到其第一部分

$$\|\nabla\varrho(\cdot,t)\|_{L^2} \leq \|\nabla\varrho(\cdot,t)+\nabla\rho_s\|_{L^2}+\|\nabla\rho_s\|_{L^2} \leq C_T.$$

式(2.33的第二部分由以下估计得出

$$\|\varrho_t\|_{L^2} \leq \|\mathbf{u}\cdot\nabla(\varrho+\rho_s)\|_{L^2} \leq \|\mathbf{u}\cdot\nabla(\varrho+\rho_s)\|_{L^2} \leq \|\mathbf{u}\|_{L^\infty}\|\nabla(\varrho+\rho_s)\|_{L^2} \leq C_T.$$

□

引理 2.9。 在引理2.7的条件下，若 $\varrho_0\in W^{1,\infty}$，则有

$$\varrho\in L^\infty\left([0,T];W^{1,\infty}(\Omega)\right), \quad \varrho_t\in L^\infty\left([0,T];L^\infty(\Omega)\right). \tag{2.34}$$

证明。 对于任意 $p\geq 2$，对 ∂_{x_j} （1.7）$_2$ 进行计算，得到

$$\partial_t\partial_{x_j}\varrho+(\partial_{x_j}\mathbf{u}\cdot\nabla)\varrho+(\mathbf{u}\cdot\nabla)\partial_{x_j}\varrho+(\partial_{x_j}\mathbf{u}\cdot\nabla)\rho_s+(\mathbf{u}\cdot\nabla)\partial_{x_j}\rho_s=0, \quad j=1,2.$$

将前述方程与 $|\nabla(\varrho+\rho_s)|^{p-2}\partial_{x_j}(\varrho+\rho_s)$ 作点积，并应用分部积分，得到

$$\frac{1}{p}\frac{d}{dt}\left(\|\nabla(\varrho+\rho_s)\|_{L^p}^p\right) \leq \|\nabla \mathbf{u}\|_{L^\infty}\|\nabla(\varrho+\rho_s)\|_{L^p}^p,$$

由此可得

$$\frac{d}{dt}\left(\|\nabla(\varrho+\rho_s)\|_{L^p}\right) \leq \|\nabla \mathbf{u}\|_{L^\infty}\|\nabla(\varrho+\rho_s)\|_{L^p}$$

由 Gronwall不等式可得

$$\|\nabla\varrho(\cdot,t)+\nabla\rho_s\|_{L^p} \leq \|\nabla(\varrho_0+\rho_s)\|_{L^p}\exp\left\{\int_0^T \|\nabla \mathbf{u}\|_{L^\infty}dt\right\} \leq C_T,$$

当 $\forall p\geq 2$，且 $\forall t\in[0,T]$。令 $p\to\infty$ 注意到2.34）的第一部分可得

$$\|\nabla\varrho(\cdot,t)\|_{L^\infty} \leq \|\nabla\varrho(\cdot,t)+\nabla\rho_s\|_{L^\infty}+\|\nabla\rho_s\|_{L^\infty} \leq C_T, \quad \forall t\in[0,T].$$

第二部分（2.33）由以下估计得出

$$\|\varrho_t\|_{L^\infty} \leq \|\mathbf{u}\cdot\nabla(\varrho+\rho_s)\|_{L^\infty} \leq \|\mathbf{u}\|_{L^\infty}\|\nabla(\varrho+\rho_s)\|_{L^\infty} \leq C_T, \quad \forall t\in[0,T].$$

□

2.7 $\|\nabla \mathbf{u}^t\|_{L^\infty([0,T];L^2(\Omega))}$ 和 $\|\mathbf{u}^{tt}\|_{L^2([0,T];L^2(\Omega))}$ 的估计

引理 2.10。 设 $(\mathbf{u}\ \varrho)$ 是满足条件 (1.7) 的问题(1.8)的一个解，其初始数据为$(\mathbf{u}_0, \varrho_0) \in H^3(\Omega)$。若 $\nabla f \in W^{1,\infty}(\Omega)$，则有

$$\nabla \mathbf{u}_t \in L^\infty\left([0,T];L^2(\Omega)\right), \quad \mathbf{u}_{tt} \in L^2\left([0,T];L^2(\Omega)\right). \tag{2.35}$$

证明。 对 L^2 $\mathbf{u}_t$ 的演化方程的内积$\mathbf{u}_t$ (2.18) 与 $\mathbf{u}_{tt}$ 作内积，并利用密度方程（1.7）$_2$,可得

$$\begin{aligned}
&\frac{\nu}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla \mathbf{u}_t\|_{L^2}^2 + \left\|\sqrt{\varrho+\rho_s}\mathbf{u}_{tt}\right\|_{L^2}^2 \\
&\le \int_\Omega \left(-\mathbf{u}\cdot\nabla(\varrho+\rho_s)\right)\mathbf{u}_t\cdot\mathbf{u}_{tt}\,d\mathbf{x} + \int_\Omega \left(-\mathbf{u}\cdot\nabla(\varrho+\rho_s)\right)(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}_{tt}\,d\mathbf{x} \\
&\quad + \int_\Omega (\varrho+\rho_s)(\mathbf{u}_t\cdot\nabla)\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}_{tt}\,d\mathbf{x} + \int_\Omega \left(-\mathbf{u}\cdot\nabla(\varrho+\rho_s)\right)\nabla f\cdot\mathbf{u}_{tt}\,d\mathbf{x} \\
&\quad - \int_\Omega (\varrho+\rho_s)(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u}_t\cdot\mathbf{u}_{tt}\,d\mathbf{x} := S_1+S_2+S_3+S_4+S_5.
\end{aligned} \tag{2.36}$$

现在我们对这些项作如下估计 $S_1 - S_5$：

$$\begin{aligned}
S_1 &= \int_\Omega \left(-\mathbf{u}\nabla\cdot(\varrho+\rho_s)\right)\mathbf{u}_t\cdot\mathbf{u}_{tt}\,d\mathbf{x} \\
&\le \frac{1}{10}\left\|\sqrt{\varrho+\rho_s}\mathbf{u}_{tt}\right\|_{L^2}^2 + C_0\|\mathbf{u}\|_{L^\infty}\|\nabla(\varrho+\rho_s)\|_{L^\infty}\|\nabla\mathbf{u}_t\|_{L^2} \\
&\le \frac{1}{10}\left\|\sqrt{\varrho+\rho_s}\mathbf{u}_{tt}\right\|_{L^2}^2 + C_T\|\nabla\mathbf{u}_t\|_{L^2}, \\
S_2 &= \int_\Omega \left(-\mathbf{u}\cdot\nabla(\varrho+\rho_s)\right)(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}_{tt}\,d\mathbf{x} \\
&\le \frac{1}{10}\left\|\sqrt{\varrho+\rho_s}\mathbf{u}_{tt}\right\|_{L^2}^2 + C_0\|\mathbf{u}\|_{L^\infty}\|\nabla(\varrho+\rho_s)\|_{L^\infty}\|(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u}\|_{L^2} \\
&\le \frac{1}{10}\left\|\sqrt{\varrho+\rho_s}\mathbf{u}_{tt}\right\|_{L^2}^2 + C_0\|\nabla(\varrho+\rho_s)\|_{L^\infty} \\
&\le \frac{1}{10}\left\|\sqrt{\varrho+\rho_s}\mathbf{u}_{tt}\right\|_{L^2}^2 + C_T, \\
S_3 &= \int_\Omega (\varrho+\rho_s)(\mathbf{u}_t\cdot\nabla)\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}_{tt}\,d\mathbf{x} \\
&\le \frac{1}{10}\left\|\sqrt{\varrho+\rho_s}\mathbf{u}_{tt}\right\|_{L^2}^2 + C\|\nabla\mathbf{u}\|_{L^\infty}\left\|\sqrt{\varrho+\rho_s}\mathbf{u}_t\right\|_{L^2}^2 \\
&\le \frac{1}{10}\left\|\sqrt{\varrho+\rho_s}\mathbf{u}_{tt}\right\|_{L^2}^2 + C_0\|\nabla\mathbf{u}\|_{L^\infty} \\
S_4 &= \int_\Omega \left(-\mathbf{u}\cdot\nabla(\varrho+\rho_s)\right)\nabla f\cdot\mathbf{u}_{tt}\,d\mathbf{x} \\
&\le \frac{1}{10}\left\|\sqrt{\varrho+\rho_s}\mathbf{u}_{tt}\right\|_{L^2}^2 + C\|\mathbf{u}\|_{L^\infty}\|\nabla f\|_{L^\infty}\|\nabla(\varrho+\rho_s)\|_{L^2}^2 \\
&\le \frac{1}{10}\left\|\sqrt{\varrho+\rho_s}\mathbf{u}_{tt}\right\|_{L^2}^2 + C_T \\
S_5 &= -\int_\Omega (\varrho+\rho_s)(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u}_t\cdot\mathbf{u}_{tt}\,d\mathbf{x} \\
&\le \frac{1}{10}\left\|\sqrt{\varrho+\rho_s}\mathbf{u}_{tt}\right\|_{L^2}^2 + C\|\mathbf{u}\|_{L^\infty}\|\nabla\mathbf{u}_t\|_{L^2}^2 \\
&\le \frac{1}{10}\left\|\sqrt{\varrho+\rho_s}\mathbf{u}_{tt}\right\|_{L^2}^2 + C_0\|\nabla\mathbf{u}_t\|_{L^2}^2.
\end{aligned}$$

将前面的所有估计代入（2.36），得到

$$\frac{\nu}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla\mathbf{u}_t\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2}\left\|\sqrt{\varrho+\rho_s}\mathbf{u}_{tt}\right\|_{L^2}^2 \le C_T\|\nabla\mathbf{u}_t\|_{L^2}^2 + C_T + C_0\|\nabla\mathbf{u}\|_{L^\infty}. \tag{2.37}$$

注意，由引理2.4-2.7，等式（2.37）右端的所有项关于时间都是可积的。然后，我们对（2.37）在时间区间 $[0,T]$ 上积分，得到（2.38）中的结果。 □

2.8 对 $\|\mathbf{u}\|_{L^2([0,T];H^4(\Omega))}$ 的估计

引理 2.11。 设 $(\mathbf{u}\ \varrho)$ 是问题 (1.7) 的一个解，满足条件 (1.8)，其初始数据为 $(\mathbf{u}_0, \varrho_0) \in H^3(\Omega)$。若 $\nabla f \in W^{2,\infty}(\Omega)$，则有

$$(\rho, \mathbf{u}) \in C\left([0,T]; H^3(\Omega)\right), \quad \mathbf{u} \in L^2\left([0,T]; H^4(\Omega)\right). \tag{2.38}$$

证明。 根据引理.1，有

$$\|\mathbf{u}\|_{H^3} \le C_0\|\varrho\|_{H^1} + C_T\|\mathbf{u}_t\|_{H^1} + C_T\|(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u}\|_{H^1} \le C_T, \quad \forall t \in [0,T]. \tag{2.39}$$

这意味着 $\mathbf{u} \in C\left([0,T];\ H^3(\Omega)\right)$。注意到根据引理 .1，有

$$\begin{aligned}
\int_0^T \|\mathbf{u}\|_{H^4}^2\,dt \le & C_T\int_0^T \|\mathbf{u}_t\|_{H^2}^2\,dt + \int_0^T \left\|\nabla^2(\varrho+\rho_s)\right\|_{L^4}^2 \|\nabla\mathbf{u}_t\|_{L^2}^2\,dt \\
& + C_T\int_0^T \|(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u}\|_{H^2}^2\,dt + C\int_0^T \|\varrho\|_{H^2}^2\,dt \\
& + \int_0^T \left\|\nabla^2(\varrho+\rho_s)\right\|_{L^4}^2 \|(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u}\|_{L^4}^2\,dt \\
\le & C_T\Big(\int_0^T \|\mathbf{u}_t\|_{H^2}^2\,dt + \int_0^T \|(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u}\|_{H^2}^2\,dt \\
& + \int_0^T \left\|\nabla^2(\varrho+\rho_s)\right\|_{L^4}^2\,dt + \int_0^T \|\varrho\|_{H^2}^2\,dt\Big) \\
= & C_T(L_1+L_2+L_3+L_4).
\end{aligned} \tag{2.40}$$

我们首先估计各项 L_1 和 L_2。利用引理 .1中的斯托克斯估计以及方程（2.18），得到

$$\begin{aligned}
L_1 = \int_0^T \|\mathbf{u}_t\|_{H^2}^2\,dt \le & C_0\int_0^T \|\mathbf{u}_{tt}\|_{L^2}^2\,dt + \int_0^T \|\varrho_t\|_{L^\infty}\|\mathbf{u}_t\|_{L^2}^2\,dt \\
& + \int_0^T \|\mathbf{u}\|_{L^\infty}\|\nabla\mathbf{u}\|_{L^\infty}\|\varrho_t\|_{L^2}^2\,dt + C_0\int_0^T \|\nabla\mathbf{u}\|_{L^\infty}\|\mathbf{u}_t\|_{L^2}^2\,dt \\
& + C_0\int_0^T \|\mathbf{u}\|_{L^\infty}\|\nabla\mathbf{u}_t\|_{L^2}^2\,dt + C\int_0^T \|\varrho_t\|_{L^2}^2\,dt,
\end{aligned}$$

其中我们用到了以下不等式

$$\|\nabla\mathbf{u}\|_{L^\infty} \le C\|\mathbf{u}\|_{W^{2,p}} \le C\|\mathbf{u}\|_{H^3} \le C_T, \quad \forall t \in [0,T]. \tag{2.41}$$

由此以及引理 2.7-引理2.10，可得

$$L_1 \le C_T. \tag{2.42}$$

利用（2.28）和（2.39），可得

$$L_2 = \int_0^T \|(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u}\|_{H^2}^2\,dt \le \int_0^T \|\mathbf{u}\|_{H^2}^2\|\mathbf{u}\|_{H^3}^2\,dt \le C_T. \tag{2.43}$$

为了估计 L_3+L_4，注意到 $\partial_{x_k}\partial_{x_j}(\varrho+\rho_s)$ 满足

$$\begin{aligned}
& \partial_t\partial_{x_k}\partial_{x_j}(\varrho+\rho_s) + (\partial_{x_k}\partial_{x_j}\mathbf{u}\cdot\nabla)(\varrho+\rho_s) + (\partial_{x_j}\mathbf{u}\cdot\nabla)\partial_{x_k}(\varrho+\rho_s) \\
& + (\partial_{x_k}\mathbf{u}\cdot\nabla)\partial_{x_j}(\varrho+\rho_s) + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\partial_{x_k}\partial_{x_j}(\varrho+\rho_s) = 0, \quad j,k = 1,2.
\end{aligned} \tag{2.44}$$

对任意 $p \geq 2$，将式（2.44）乘以 $\left|\partial_{x_k}\partial_{x_j}(\varrho+\rho_s)\right|^{p-2}\partial_{x_k}\partial_{x_j}(\varrho+\rho_s)$，对所得方程在 Ω 上积分，并利用 H¨older 不等式，可得

$$\begin{aligned}\frac{1}{p}\frac{d}{dt}\left\|\partial_{x_k}\partial_{x_j}(\varrho+\rho_s)\right\|_{L^p}^p \leq & C\|\nabla(\varrho+\rho_s)\|_{L^\infty}\left\|\nabla^2\mathbf{u}\right\|_{L^p}\left\|\nabla^2(\varrho+\rho_s)\right\|_{L^p}^{p-1}\\ & + C\|\nabla\mathbf{u}\|_{L^\infty}\left\|\nabla^2(\varrho+\rho_s)\right\|_{L^p}^p,\end{aligned}$$

由此可得

$$\frac{1}{p}\frac{d}{dt}\left\|\nabla^2(\varrho+\rho_s)\right\|_{L^p}^p \leq C_T\left(\left\|\nabla^2(\varrho+\rho_s)\right\|_{L^p}^{p-1}+\left\|\nabla^2(\varrho+\rho_s)\right\|_{L^p}^p\right).$$

由前面的不等式可知

$$\frac{d}{dt}\left\|\nabla^2(\varrho+\rho_s)\right\|_{L^p} \leq C_T\left(1+\left\|\nabla^2(\varrho+\rho_s)\right\|_{L^p}\right).$$

应用 Gronwall不等式，可得

$$\left\|\nabla^2(\varrho+\rho_s)\right\|_{L^p} \leq C_T, \quad 2\leq p<\infty \quad \text{and} \quad \forall t\in[0,T]. \tag{2.45}$$

类似地，我们还可以证明

$$\frac{d}{dt}\left\|\nabla^3(\varrho+\rho_s)\right\|_{L^p} \leq C_T\left(1+\left\|\nabla^3(\varrho+\rho_s)\right\|_{L^p}\right).$$

结合 Gronwall不等式，可得

$$\left\|\nabla^3(\varrho+\rho_s)\right\|_{L^p} \leq C_T, \quad 2\leq p<\infty \quad \text{and} \quad \forall t\in[0,T]. \tag{2.46}$$

最后，应用（2.45）和（2.46），可得

$$\begin{aligned}L_3+L_4 &= \int_0^T\left\|\nabla^2(\varrho+\rho_s)\right\|_{L^4}^2 dt+\int_0^T\|\varrho\|_{H^2}^2 dt\\ &\leq \int_0^T\left\|\nabla^2(\varrho+\rho_s)\right\|_{L^4}^2 dt+\int_0^T\|\varrho+\rho_s\|_{H^2}^2 dt\\ &\quad+\int_0^T\|\rho_s\|_{H^2}^2 dt\leq C_T, \quad \forall t\in[0,T].\end{aligned} \tag{2.47}$$

结合（2.39）、（2.40）、（2.42）、（2.43）、（2.46）和（2.47），得到（2.38）。 □

3 Ω = T × (0, h) 上线性问题的估计

3.1 $\left\|\sqrt{\varrho+\rho_s}\mathbf{u}\right\|_{L^\infty((0,\infty);L^2(\Omega))}$ 和 $\left\|\nabla\mathbf{u}\right\|_{L^2((0,\infty);L^2(\Omega))}$ 的估计

引理 3.1。 设$\Omega = \mathbb{T}\times(0,h)$，$(\mathbf{u}\ \varrho)$ 是问题(1.23)-(1.24) 的解，其初始数据为$(\mathbf{u}_0,\varrho_0) \in H^2(\Omega) \times L^\infty(\Omega)$。若 $\delta, f \in L^\infty(\Omega)$ 且 $\delta(\mathbf{x}) > \delta_0 > 0$，则有

$$\sqrt{\rho_s}\mathbf{u}\in L^\infty\left((0,\infty);L^2(\Omega)\right), \quad \nabla\mathbf{u}\in L^2\left((0,\infty);L^2(\Omega)\right), \quad \frac{\varrho}{\sqrt{\delta}}\in L^\infty\left((0,\infty);L^2(\Omega)\right). \tag{3.1}$$

此外，我们有如下恒等式

$$\|\sqrt{\rho_s}\mathbf{u}\|_{L^2}^2+\left\|\frac{\varrho}{\sqrt{\delta}}\right\|_{L^2}^2+2\nu\int_0^t\|\nabla\mathbf{u}(\tau)\|_{L^2}^2 d\tau = \|\sqrt{\rho_s}\mathbf{u}_0\|_{L^2}^2+\left\|\frac{\varrho_0}{\sqrt{\delta}}\right\|_{L^2}^2. \tag{3.2}$$

证明。 我们将线性系统的广义能量定义为 E_l （1.23）如下

$$E_l = \frac{1}{2}\left(\|\sqrt{\rho_s}\mathbf{u}\|_{L^2}^2 + \left\| \frac{\varrho}{\sqrt{\delta}} \right\|_{L^2}^2 \right) \tag{3.3}$$

对 $E_l(t)$ 关于时间求导，并利用 (1.23)，可得

$$\frac{dE_l}{dt} = \int_\Omega \rho_s \mathbf{u}\cdot\mathbf{u}_t\, d\mathbf{x} + \int_\Omega \frac{\varrho\varrho_t}{\delta}\mathbf{u}_t\, d\mathbf{x} = -\nu\int_\Omega |\nabla\mathbf{u}|^2\, d\mathbf{x}$$

对时间积分可得 (3.1)-(3.2)。

□

3.2 对 $\|\nabla\mathbf{u}\|_{L^\infty((0,\infty);L^2(\Omega)}$ 和 $\left\|\sqrt{\varrho+\rho_s}\mathbf{u}^t\right\|_{L^2((0,\infty);L^2(\Omega)}$ 的估计

引理 3.2。 设 $\Omega = \mathbb{T}\times(0,h)$，$(\mathbf{u}\ \varrho)$ 为问题 (1.23)-(1.24) 的解，且初始数据为 $(\mathbf{u}_0,\varrho_0)\in H^2(\Omega)\times L^\infty(\Omega)$。若 $(\delta,f)\in L^\infty(\Omega)\times W^{1,\infty}(\Omega)$ 且 $\delta(\mathbf{x})>\delta_0>0$，则有

$$\begin{aligned}
&\sqrt{\rho_s}\mathbf{u}_t \in L^2\left((0,\infty);L^2(\Omega)\right),\\
&\nabla\mathbf{u}\in L^\infty\left((0,\infty);L^2(\Omega)\right),\\
&\varrho\mathbf{u}\cdot\nabla f\in L^\infty\left((0,\infty);L^1(\Omega)\right).
\end{aligned} \tag{3.4}$$

此外，我们有

$$\int_\Omega |\nabla\mathbf{u}|^2 dx + \frac{2}{\nu}\int_0^t \|\sqrt{\varrho+\rho_s}\mathbf{u}_\tau\|_{L^2}^2\, d\tau \le C_0. \tag{3.5}$$

证明。 将动量方程 $(1.23)_1$ 乘以$\mathbf{u}_t$，在 Ω 上积分，得到

$$\begin{aligned}
&\nu\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |\nabla\mathbf{u}|^2 d\mathbf{x} + \|\sqrt{\rho_s}\mathbf{u}_t\|_{L^2}^2 = -\int_\Omega \varrho\mathbf{u}_t\cdot\nabla f\, d\mathbf{x}\\
&= -\frac{d}{dt}\int_\Omega \varrho\mathbf{u}\cdot\nabla f\, d\mathbf{x} + \int_\Omega \varrho_t\mathbf{u}\cdot\nabla f\, d\mathbf{x}\\
&= -\frac{d}{dt}\int_\Omega \varrho\mathbf{u}\cdot\nabla f\, d\mathbf{x} + \int_\Omega \delta(\mathbf{x})\left(\mathbf{u}\cdot\nabla f\right)^2\, d\mathbf{x}
\end{aligned} \tag{3.6}$$

其中，最后一个等式用到了 $(1.23)_2$ 。对 (3.6) 进行时间积分，得到

$$\begin{aligned}
&\nu\int_\Omega |\nabla\mathbf{u}|^2 d\mathbf{x} + 2\int_0^t \|\sqrt{\rho_s}\mathbf{u}_\tau\|_{L^2}^2\, d\tau\\
&= -2\int_\Omega \varrho\mathbf{u}\cdot\nabla f\, d\mathbf{x} + 2\int_0^t \left\|\delta(\mathbf{x})\left(\mathbf{u}(\tau)\cdot\nabla f\right)^2\right\|_{L^1} d\tau\\
&\quad + \nu\|\nabla\mathbf{u}_0\|_{L^2}^2 + 2\|\varrho_0\mathbf{u}_0\cdot\nabla f\|_{L^1} \le C_0.
\end{aligned} \tag{3.7}$$

由此可得结论 (3.4) 和 (3.5)。

□

3.3 $\|\nabla\mathbf{u}^t\|_{L^2((0,\infty);L^2(\Omega))}$ 和 $\left\|\sqrt{\varrho+\rho_s}\mathbf{u}^t\right\|_{L^\infty((0,\infty);L^2(\Omega)}$ 的估计

引理 3.3。 设 $\Omega = \mathbb{T}\times(0,h)$，$(\mathbf{u}\ \varrho)$ 为问题 (1.23)-(1.24) 的解，其初始数据为 $(\mathbf{u}_0,\varrho_0)\in H^2(\Omega)\times L^\infty(\Omega)$。若 $(\delta,f)\in L^\infty(\Omega)\times W^{1,\infty}(\Omega)$ 且 $\delta(\mathbf{x})>\delta_0>0$，则有

$$\sqrt{\varrho+\rho_s}\mathbf{u}_t\in L^\infty\left((0,\infty);L^2(\Omega)\right),\quad \nabla\mathbf{u}_t\in L^2\left((0,\infty);L^2(\Omega)\right). \tag{3.8}$$

此外，我们有

$$\int_\Omega (\varrho+\rho_s)|\mathbf{u}_t|^2\, d\mathbf{x} + \nu\int_0^t \|\nabla\mathbf{u}_\tau\|_{L^2}^2\, d\mathbf{x}\, d\tau \le C_0. \tag{3.9}$$

证明。 对1.23）1 关于时间求导，可得以下演化方程:

$$\rho_s \mathbf{u}_{tt} = \nu \Delta \mathbf{u}_t - \nabla P_t - \varrho_t \nabla f. \tag{3.10}$$

将所得方程乘以$\mathbf{u}_t$，用同一函数进行检验，并在区域 Ω 上积分，我们得到

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\sqrt{\rho_s}\mathbf{u}_t\|_{L^2}^2 + \nu\|\nabla \mathbf{u}_t\|_{L^2}^2 = \|-\delta(\mathbf{u}\cdot\nabla f)(\mathbf{u}_t\cdot\nabla f)\|_{L^1} \le \frac{\nu}{2}\|\nabla \mathbf{u}_t\|_{L^2}^2 + C_0\|\nabla \mathbf{u}\|_{L^2}^2.$$

这意味着

$$\frac{d}{dt}\|\sqrt{\rho_s}\mathbf{u}_t\|_{L^2}^2 + \nu\|\nabla \mathbf{u}_t\|_{L^2}^2 \le C_0\|\nabla \mathbf{u}\|_{L^2}^2. \tag{3.11}$$

对（3.11）关于时间积分，得到

$$\|\sqrt{\rho_s}\mathbf{u}_t\|_{L^2}^2 + \nu\int_0^t \|\nabla \mathbf{u}_\tau\|_{L^2}^2\, d\tau \le C_0 + C_0\int_0^t \|\nabla \mathbf{u}(\tau)\|_{L^2}^2\, d\tau.$$

由此可得结论（3.8）和（3.9）。 □

3.4 关于 $\|\nabla \mathbf{u}_t\|_{L^\infty((0,\infty);L^2(\Omega))}$ 和 $\left\|\sqrt{\varrho+\rho_s}\mathbf{u}^{tt}\right\|_{L^2((0,\infty);L^2(\Omega))}$ 的估计

引理 3.4. 设 $\Omega = \mathbb{T}\times(0,h)$, $(\mathbf{u}\ \varrho)$ 为问题 (1.23)-(1.24) 的解，其初始数据为 $(\mathbf{u}_0, \varrho_0) \in H^2(\Omega) \times L^\infty(\Omega)$。若 $(\delta, f) \in L^\infty(\Omega) \times W^{1,\infty}(\Omega)$ 且 $\delta(\mathbf{x}) > \delta_0 > 0$，则有

$$\sqrt{\varrho+\rho_s}\mathbf{u}_{tt} \in L^2\left((0,\infty);L^2(\Omega)\right), \quad \nabla \mathbf{u}_t \in L^\infty\left((0,\infty);L^2(\Omega)\right). \tag{3.12}$$

此外，有

$$\int_\Omega (\varrho+\rho_s)\,|\mathbf{u}_t|^2\, d\mathbf{x} + \nu\int_0^t \|\nabla \mathbf{u}_\tau\|_{L^2}^2\, d\mathbf{x}\, d\tau \le C_0. \tag{3.13}$$

证明。 将 (3.10) 两边乘以 $\mathbf{u}_{tt}$，并在 Ω 上积分，得到

$$\|\sqrt{\rho_s}\mathbf{u}_{tt}\|_{L^2}^2 + \nu\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla \mathbf{u}_t\|_{L^2}^2 = \|-\delta(\mathbf{u}\cdot\nabla f)(\mathbf{u}_{tt}\cdot\nabla f)\|_{L^1} \le \frac{1}{2}\|\sqrt{\rho_s}\mathbf{u}_{tt}\|_{L^2}^2 + C_0\|\nabla \mathbf{u}\|_{L^2}^2.$$

这意味着

$$\|\sqrt{\rho_s}\mathbf{u}_{tt}\|_{L^2}^2 + \nu\frac{d}{dt}\|\nabla \mathbf{u}_t\|_{L^2}^2 \le C_0\|\nabla \mathbf{u}\|_{L^2}^2. \tag{3.14}$$

将 (3.14) 对时间积分，得到

$$\nu\|\nabla \mathbf{u}_t\|_{L^2}^2 + \int_0^t \|\sqrt{\rho_s}\mathbf{u}_{\tau\tau}\|_{L^2}^2\, d\tau \le C_0 + C_0\int_0^t \|\nabla \mathbf{u}(\tau)\|_{L^2}^2\, d\tau.$$

由此可得结论 (3.12) 和 (3.13)。

□

3.5 估计 $\|\nabla \varrho\|_{L^\infty((0,\ \infty);L^2(\Omega))}$

引理 3.5。 设 $\Omega = \mathbb{T}\times(0,h)$，$(\mathbf{u}\ \varrho)$ 为问题 (1.23)-(1.24) 的解，其初始数据为 $(\mathbf{u}_0, \varrho_0) \in H^2(\Omega) \times L^\infty(\Omega)$。若 $(\delta, \nabla f) \equiv (\delta_0,\ (0,g))$，则有

$$\nabla \varrho \in L^\infty\left((0,\infty);L^2(\Omega)\right). \tag{3.15}$$

证明。 若 $(\delta,\ \nabla f) \equiv (\delta_0,\ (0,\ g))$，则可知 $\omega = \nabla \times \mathbf{u}$ 和 $\nabla \varrho$ 满足以下系统

$$\begin{cases} \rho_s \frac{\partial \omega}{\partial t} + \nabla^\perp \rho_s \cdot \mathbf{u}_t = \nu \Delta \omega - g \partial_{x_1} \rho, \mathbf{x} \in \Omega = \mathbb{T} \times (0,h), \\ \frac{1}{\delta_0} \partial_t \nabla \varrho = g \nabla u_2, \quad \mathbf{x} \in \Omega = \mathbb{T} \times (0,h). \end{cases} \tag{3.16}$$

将（3.16）$_1$ 和（3.16）$_2$ 分别乘以 ω 和 $\nabla \varrho$，并在 Ω 上积分，得到

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\|\sqrt{\rho_s}\omega\|_{L^2}^2 \frac{1}{\delta_0}\|\nabla \varrho\|_{L^2}^2 \right) + \nu \|\nabla \omega\|_{L^2}^2 \\ &= -g \int_\Omega \left(\omega \partial_{x_1} \rho - \nabla u_2 \cdot \nabla \varrho \right) d\mathbf{x} - \int_\Omega \nabla^\perp \rho_s \cdot \mathbf{u}_t \omega \, d\mathbf{x} \\ &= - \int_\Omega \nabla^\perp \rho_s \cdot \mathbf{u}_t \omega \, d\mathbf{x} \le \nu \|\nabla \omega\|_{L^2}^2 / 2 + C \|\mathbf{u}_t\|_{L^2}^2. \end{aligned} \tag{3.17}$$

其中用到了以下恒等式

$$\begin{aligned} \int_\Omega \left(\omega \partial_{x_1} \rho - \nabla u_2 \cdot \nabla \varrho \right) d\mathbf{x} &= - \int_\Omega \partial_{x_2} u_1 \partial_{x_1} \rho \, d\mathbf{x} - \int_\Omega \partial_{x_2} u_2 \partial_{x_2} \rho \, d\mathbf{x} \\ &= - \int_\Omega \partial_{x_2} u_1 \partial_{x_1} \rho \, d\mathbf{x} + \int_\Omega \partial_{x_1} u_1 \partial_{x_2} \rho \, d\mathbf{x} \\ &= - \int_{\mathbb{T}} u_1(h) \partial_{x_1} \rho(h) \, dx_1 + \int_{\mathbb{T}} u_1(0) \partial_{x_1} \rho(0) \, dx_1 \\ &\quad + \int_\Omega u_1 \partial_{x_1} \partial_{x_2} \rho \, d\mathbf{x} + \int_\Omega \partial_{x_1} u_1 \partial_{x_2} \rho \, d\mathbf{x} \\ &= - \int_\Omega \partial_{x_1} u_1 \partial_{x_2} \rho \, d\mathbf{x} + \int_\Omega \partial_{x_1} u_1 \partial_{x_2} \rho \, d\mathbf{x} = 0. \end{aligned}$$

对 3.17 关于时间积分可得

$$\|\sqrt{\rho_s}\omega\|_{L^2}^2 + \frac{1}{\delta_0}\|\nabla \varrho\|_{L^2}^2 + \nu \int_0^t \|\nabla \omega(\tau)\|_{L^2}^2 \, d\tau \le C_0 + C_0 \int_0^t \|\mathbf{u}_t\|_{L^2}^2 \, d\tau$$

由此结合引理 3.2，得到 3.15。 □

4 主定理的证明

4.1 定理1.1 的证明

证明。 我们先证明定理1.1中的(1)。引理2.6 指出，要证明(1.9a)，只需证明$\mathbf{u} \in L^p\left((0,\infty); W^{1,p}(\Omega)\right)$。利用 Gagliardo-Nirenberg 插值，我们得到

$$\|\mathbf{u}\|_{W^{1,p}}^p \le \|\mathbf{u}\|_{H^1}^2 \|\mathbf{u}\|_{H^2}^{p-2}, \quad 2 \le p.$$

由此得到(1.9a)。利用引理 2.2、引理 2.6 以及上面的不等式，我们得到

$$\int_0^{+\infty} \|\mathbf{u}(t)\|_{W^{1,p}}^p \, dt \le C_0 \int_0^{+\infty} \|\nabla \mathbf{u}(t)\|_{L^2}^2 \, dt < \infty.$$

不难看出，由引理 3.2和引理 2.4可得(1.9b)和(1.9c)成立。利用引理.1 给出的 Stoke 估计并取

$$g = -(\varrho + \rho_s) \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - (\varrho + \rho_s)(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} - \varrho \nabla f \in L^\infty\left((0,\infty); L^2(\Omega)\right).$$

结论(1.9e)由(2.2)推出。

定理 1.1 的结论（2）由引理2.7至引理 2.9的结果综合得出。定理 1.1的结论（3）是引理 2.10–引理 2.11的直接推论。 □

4.2 定理1.2的证明

证明。 **（1）的证明**：我们已经证明

$$\begin{aligned}
&\partial_t \int_\Omega \frac{2}{\nu}(\varrho+\rho_s)\,\mathbf{u}\cdot\nabla f\,dx + \frac{d}{dt}\int_\Omega |\nabla\mathbf{u}|^2 d\mathbf{x} + \frac{2}{\nu}\|\sqrt{\varrho+\rho_s}\mathbf{u}_t\|_{L^2}^2 \\
&\le C_0\|\nabla\mathbf{u}\|_{L^2}^2\left(2+C_0+\|\nabla\mathbf{u}\|_{L^2}^2\right)\ln\left(2+C_0+\|\nabla\mathbf{u}\|_{L^2}^2\right) \\
&\quad + 2C_0\|\nabla\mathbf{u}\|_{L^2}^3\sqrt{\left(2+C_0+\|\nabla\mathbf{u}\|_{L^2}^2\right)\ln\left(2+C_0+\|\nabla\mathbf{u}\|_{L^2}^2\right)} \\
&\quad + C_0\|\nabla\mathbf{u}\|_{L^2}^2 + C_0\|\nabla\mathbf{u}\|_{L^2}^3 + C_0\|\nabla\mathbf{u}\|_{L^2}^2.
\end{aligned}$$

注意到

$$\left|-\int_\Omega \varrho\mathbf{u}_t\cdot\nabla f\,d\mathbf{x}\right| \le \frac{1}{2}\|\sqrt{\varrho+\rho_s}\mathbf{u}_t\|_{L^2}^2 + C_0\|\nabla f\|_{L^\infty}|\Omega|.$$

将此与 (2.10) 结合，可得

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{d}{dt}\int_\Omega |\nabla\mathbf{u}|^2 dx + \frac{1}{\nu}\|\sqrt{\varrho+\rho_s}\mathbf{u}_t\|_{L^2}^2\right| \\
&\le C_0\|\nabla\mathbf{u}\|_{L^2}^2\left(2+C_0+\|\nabla\mathbf{u}\|_{L^2}^2\right)\ln\left(2+C_0+\|\nabla\mathbf{u}\|_{L^2}^2\right) \\
&\quad + C_0\|\nabla\mathbf{u}\|_{L^2}^3\sqrt{\left(2+C_0+\|\nabla\mathbf{u}\|_{L^2}^2\right)\ln\left(2+C_0+\|\nabla\mathbf{u}\|_{L^2}^2\right)} \\
&\quad + C_0\|\nabla\mathbf{u}\|_{L^2}^2 + C_0\|\nabla\mathbf{u}\|_{L^2}^3 + C.
\end{aligned}$$

记

$$\begin{aligned}
&g(t)=y(t)=\|\nabla\mathbf{u}\|_{L^2}^2,\quad h(t)=\frac{1}{\nu}\|\sqrt{\varrho+\rho_s}\mathbf{u}_t\|_{L^2}^2, x(t)=\int_\Omega\frac{2}{\nu}(\varrho+\rho_s)\,\mathbf{u}\cdot\nabla f\,dx,, \\
&q(z)=(2+C_0+z)\ln(2+C_0+z) \\
&\qquad +\sqrt{2+C_0+z}\sqrt{(2+C_0+z)\ln(2+C_0+z)}+C_0\sqrt{z},\quad w(z)=q(z)+C_0.
\end{aligned}$$

那么，它们满足两个不等式 (.6)。引理.4 的结论 (3) 表明

$$\|\nabla\mathbf{u}\|_{H^1}^2\to 0 \quad \text{for} \quad t\to+\infty.$$

因此，(1.13a) 由 Gagliardo–Nirenberg 插值不等式得出

$$\|\nabla\mathbf{u}\|_{W^{1,p}} \le \|\nabla\mathbf{u}\|_{H^1}^{2/p}\|\nabla\mathbf{u}\|_{H^2}^{1-2/p}.$$

由 (2.19) 可得

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{d}{dt}\int_\Omega(\varrho+\rho_s)|\mathbf{u}_t|^2\,d\mathbf{x}+\nu\int_\Omega|\nabla\mathbf{u}_t|^2\,d\mathbf{x}\right| \\
&\le C_0\|\nabla\mathbf{u}\|_{L^2}^2\left\|\sqrt{\varrho+\rho_s}\mathbf{u}_t\right\|_{L^2}^2 + C_0\|\nabla\mathbf{u}\|_{L^2}^2.
\end{aligned} \tag{4.1}$$

回顾 (2.16) 可知 $\sqrt{\varrho+\rho_s}\mathbf{u}_t$ 满足

$$\int_0^\infty \|\sqrt{\varrho+\rho_s}\mathbf{u}_t\|_{L^2}^2\,dt<+\infty.$$

结合 (4.1) 和 Barb˘alat 的引理，可得

$$\lim_{t\to+\infty}\|\sqrt{\varrho+\rho_s}\mathbf{u}_t\|_{L^2}^2=0.$$

由此得到结果（1.13b）。

对于任意 $\epsilon > 0$ 以及任意 $\mathbf{v} \in L^2(\Omega)$，存在 $\tilde{\mathbf{v}} \in H_0^1(\Omega)$，使得

$$\|\mathbf{v} - \tilde{\mathbf{v}}\|_{L^2} < \epsilon.$$

这表明，对于任意 $\epsilon > 0$ 以及任意 $\mathbf{v} \in L^2(\Omega)$，有

$$\left| \int_\Omega \Delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} \right| \leq \|\mathbf{v} - \tilde{\mathbf{v}}\|_{L^2} \|\Delta \mathbf{u}\|_{L^2} + \|\tilde{\mathbf{v}}\|_{H^1} \|\mathbf{u}\|_{H^1} < C_0 \epsilon + \|\tilde{\mathbf{v}}\|_{H^1} \|\mathbf{u}\|_{H^1} < 2C_0 \epsilon$$

只要 t 充分大即可。由此可得

$$\Delta \mathbf{u} \rightharpoonup 0 \quad \text{in} \quad L^2(\Omega).$$

最后，利用 (1.13a)-(1.13c)，对于任意 $\mathbf{v} \in L^2(\Omega)$，有

$$\begin{aligned} \int_\Omega |\mathbf{v} \cdot (\nabla P + \varrho \nabla f)| \, d\mathbf{x} \leq & \left\| \sqrt{\varrho + \rho_s} \mathbf{u}_t \right\|_{L^2} \|\mathbf{v}\|_{L^2} + C \|\nabla \mathbf{u}\|_{L^4} \|\mathbf{u}\|_{L^4} \|\mathbf{v}\|_{L^2} \\ & + \left| \int_\Omega \Delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} \right| \to 0 \quad \text{as} \quad t \to \infty, \end{aligned} \tag{4.2}$$

其中我们用到了

$$\nabla P + \rho \nabla f = \nu \Delta \mathbf{u} - (\varrho + \rho_s) \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - (\varrho + \rho_s)(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}.$$

于是，由 (1.14b) 可由 (4.2) 得出。

（2）的证明：对等式（ $t \to +\infty$ 2.5）两边取极限，得到

$$\lim_{t \to \infty} \int_\Omega \varrho(t) f d\mathbf{x} = \frac{\|\sqrt{\varrho_0 + \rho_s} \mathbf{u}_0\|_{L^2}^2}{2} + \int_\Omega \varrho_0 f d\mathbf{x} - \nu \int_0^\infty \|\nabla \mathbf{u}(\tau)\|_{L^2}^2 \, d\tau = I_1. \tag{4.3}$$

This 得到（1.14a）$_1$ 和（1.15a）$_1$。为证明（1.14a）$_2$ 和（1.15a）$_2$，，我们引入新变量 es

$$\begin{cases} \mathbf{v} = \mathbf{u}, \\ \varrho = \theta - \rho_s + \rho^*(x, y), \\ p = q - p_s + h(x, y), \end{cases}$$

其中，$\rho^*(x, y)$ 和 $h(x, y)$ 由以下方程定义

$$\rho^* = -\gamma f(x, y) + \beta, \quad \gamma > 0, \quad \nabla h = -\rho^* \nabla f, \quad \nabla p_s = -\rho_s \nabla f.$$

于是，可以观察到（$\mathbf{v}$ θ，q）满足以下系统：

$$\begin{cases} (\theta + \rho^*) \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\theta + \rho^*) (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \nu \Delta \mathbf{v} - \nabla q - \theta \nabla f, \\ \frac{\partial \theta}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \theta = \gamma (\mathbf{v} \cdot \nabla) f, \\ \nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \end{cases} \tag{4.4}$$

对于系统（4.4），我们定义一个一般的能量函数：

$$E_\gamma(t) = \frac{\gamma}{2} \int_\Omega (\theta + \rho^*) |\mathbf{v}|^2 d\mathbf{x} + \frac{1}{2} \int_\Omega \theta^2 d\mathbf{x}$$

对能量函数关于时间求导，得到

$$\frac{dE}{dt} = \gamma \int_\Omega (\theta + \rho^*) \mathbf{v}_t \cdot \mathbf{v} d\mathbf{x} + \frac{\gamma}{2} \int_\Omega \theta_t |\mathbf{v}|^2 d\mathbf{x} + \int_\Omega \theta_t \theta d\mathbf{x}. \tag{4.5}$$

由连续性方程（4.4）$_2$, 第二项变为：

$$\frac{\gamma}{2} \int_\Omega \theta_t |\mathbf{v}|^2 d\mathbf{x} = -\frac{\gamma}{2} \int_\Omega (\mathbf{v} \cdot \nabla (\theta + \gamma f)) |\mathbf{v}|^2 d\mathbf{x}.$$

由连续性方程（4.4）$_1$,我们计算（4.5）右端的第一项:

$$\begin{aligned}\gamma\int_\Omega(\theta+\rho^*)\,\mathbf{v}_t\cdot\mathbf{v}d\mathbf{x}=&-\gamma\int_\Omega(\theta+\rho^*)\,(\mathbf{v}\cdot\nabla\mathbf{v})\cdot\mathbf{v}d\mathbf{x}-\gamma\int_\Omega\nabla q\cdot\mathbf{v}d\mathbf{x}\\&+\gamma\nu\int_\Omega\Delta\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}d\mathbf{x}-\gamma\int_\Omega\theta\nabla f\cdot\mathbf{v}d\mathbf{x}.\end{aligned}\tag{4.6}$$

现在分析（4.6）右端的各项。对于对流项，我们有

$$\begin{aligned}\gamma\int_\Omega(\theta+\rho^*)\,(\mathbf{v}\cdot\nabla\mathbf{v})\cdot\mathbf{v}d\mathbf{x}&=\gamma\int_\Omega(\theta+\rho^*)\,\mathbf{v}\cdot\nabla\left(\frac{1}{2}|\mathbf{v}|^2\right)d\mathbf{x}\\&=-\gamma\int_\Omega\nabla\cdot((\theta+\rho^*)\,\mathbf{v})\cdot\frac{1}{2}|\mathbf{v}|^2d\mathbf{x}\\&=-\frac{\gamma}{2}\int_\Omega(\mathbf{v}\cdot\nabla\,(\theta+\rho^*))|\mathbf{v}|^2d\mathbf{x},\end{aligned}$$

其中用到了 $\nabla\cdot((\theta+\rho^*)\,\mathbf{v})=\mathbf{v}\cdot\nabla\,(\theta+\rho^*)$，这是由（4.4）$_3$得到的。关于压力项，有

$$\int_\Omega\nabla q\cdot\mathbf{v}d\mathbf{x}=-\int_\Omega q(\nabla\cdot\mathbf{v})d\mathbf{x}+\int_{\partial\Omega}q\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}dS=0,$$

因为 $\nabla\cdot\mathbf{v}=0$ 且 $\mathbf{v}|_{\partial\Omega}=0$。至于黏性项，有

$$\nu\int_\Omega\Delta\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}d\mathbf{x}=-\nu\int_\Omega|\nabla\mathbf{v}|^2d\mathbf{x}=-\nu\|\nabla\mathbf{v}\|_{L^2}^2.$$

对于（4.5）右端的最后一项，我们有

$$\int_\Omega\theta_t\theta d\mathbf{x}=\int_\Omega(-(\mathbf{v}\cdot\nabla)\theta+\gamma(\mathbf{v}\cdot\nabla)f)\,\theta d\mathbf{x}=\gamma\int_\Omega\theta(\mathbf{v}\cdot\nabla)fd\mathbf{x}$$

将所有各项代回（2），得到

$$\begin{aligned}\frac{dE_\gamma}{dt}=&-\frac{\gamma}{2}\int_\Omega(\mathbf{v}\cdot\nabla\,(\varrho+\rho_s))|\mathbf{v}|^2d\mathbf{x}+\left[\frac{\gamma}{2}\int_\Omega(\mathbf{v}\cdot\nabla\,(\varrho+\rho_s))|\mathbf{v}|^2d\mathbf{x}\right]\\&-\gamma\nu\|\nabla\mathbf{v}\|_{L^2}^2-\gamma\int_\Omega\theta\nabla f\cdot\mathbf{v}d\mathbf{x}+\gamma\int_\Omega\theta(\mathbf{v}\cdot\nabla)fd\mathbf{x}\\=&-\gamma\nu\|\nabla\mathbf{v}\|_{L^2}^2,\end{aligned}\tag{4.7}$$

其中我们用到了以下恒等式

$$\int_\Omega f\nabla\cdot(\rho_s\mathbf{u})d\mathbf{x}=-\int_\Omega\rho_s\nabla f\cdot\mathbf{u}d\mathbf{x}=\int_\Omega\nabla p_s\cdot\mathbf{u}d\mathbf{x}=0.$$

对（4.7）从 0 积分到 t，可得

$$E_\gamma(t)+\gamma\nu\int_0^t\|\nabla\mathbf{v}(\tau)\|_{L^2}^2\,d\tau=E_\gamma(0).$$

利用（1.13a），我们得到

$$\lim_{t\to+\infty}\|\theta\|_{L^2}^2+2\gamma\nu\int_0^\infty\|\nabla\mathbf{v}(t)\|_{L^2}^2\,dt=2E_\gamma(0).$$

这意味着

$$\begin{aligned}\lim_{t\to+\infty}\|\varrho+\rho_s+\gamma f(x,y)-\beta\|_{L^2}^2=&\gamma\left\|\sqrt{\varrho+\rho_s}\mathbf{u}_0\right\|_{L^2}^2+\|\varrho_0+\rho_s+\gamma f(x,y)-\beta\|_{L^2}^2\\&-2\gamma\nu\int_0^\infty\|\nabla\mathbf{u}(t)\|_{L^2}^2\,dt=I_2.\end{aligned}\tag{4.8}$$

由此得到（1.14b）和（1.15a）$_2$。

最后，我们旨在证明（1.15a）$_3$。通过对（4.3）进行检验，2γ可得

$$2\gamma\nu\int_0^\infty \|\nabla\mathbf{u}(\tau)\|_{L^2}^2\,d\tau = \gamma\big\|\sqrt{\varrho_0+\rho_s}\mathbf{u}_0\big\|_{L^2}^2 + 2\gamma\int_\Omega \varrho_0 f d\mathbf{x} - 2\gamma I_1. \tag{4.9}$$

这意味着我们可以将 $2\gamma\nu\int_0^\infty \|\nabla\mathbf{u}(\tau)\|_{L^2}^2\,d\tau$ 替换为

$$\gamma\big\|\sqrt{\varrho_0+\rho_s}\mathbf{u}_0\big\|_{L^2}^2 + 2\gamma\int_\Omega \varrho_0 f d\mathbf{x} - 2\gamma I_1$$

代入（4.8）可得

$$2\gamma\int_\Omega \varrho_0 f d\mathbf{x} + I_2 = \|\varrho_0+\rho_s+\gamma f(x,y)-\beta\|_{L^2}^2 + 2\gamma I_1.$$

（3）的证明：基于分解 $\varrho\nabla f = \mathbf{w} + \nabla q$ 以及（1.7）$_1$，我们有

$$\|\nu\mathbb{P}\Delta\mathbf{u}-\mathbf{w}\|_{L^2} \le \left\|\sqrt{\varrho+\rho_s}\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t}\right\|_{L^2} + \|(\varrho+\rho_s)(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u}\|_{L^1} \to 0 \quad \text{as} \quad t\to+\infty. \tag{4.10}$$

这便推出了结论（1.16a），随后结论（1.16c）也随之成立。注意到 $\|\mathbf{u}\|_{H^2}$ 的一致有界性以及（1.13a）意味着

$$\nu\mathbb{P}\Delta\mathbf{u}(t) \rightharpoonup 0 \quad \text{in} \quad L^2(\Omega) \quad \text{for} \quad t\to\infty.$$

这与 (1.16a) 一起推出 (1.16b)。

对 (4) 的证明: 必要性。因为 $\mathbf{w} = \mathbb{P}\varrho\nabla f \rightharpoonup 0$ 属于 $L^2(\Omega)$，如果 ϱ 收敛到 $L^2(\Omega)$ 中满足 $\mathbb{P}\rho^*\nabla f = 0$ 的稳态ρ^*，则有 $(\mathbb{I}-\mathbb{P})\varrho\nabla f \to (\mathbb{I}-\mathbb{P})\rho^*\nabla f = \rho^*\nabla f$ 属于 $L^2(\Omega)$，并且$\|\rho^*+\rho_s\|_{L^2} = \|\varrho_0+\rho_s\|_{L^2}$ 由 $\|\varrho+\rho_s\|_{L^2} = \|\varrho_0+\rho_s\|_{L^2}$ 得出。

充分性。如果 $(\mathbb{I}-\mathbb{P})\varrho\nabla f \to \rho^*\nabla f$ 属于 $L^2(\Omega)$，由 $\mathbb{P}\varrho\nabla f \rightharpoonup 0$ 属于 $L^2(\Omega)$ 可得

$$\varrho\nabla f \rightharpoonup \rho^*\nabla f \text{ in } L^2(\Omega),$$

由此以及 $|\partial_{x_1} f| \ge f_0 > 0$ 或 $|\partial_{x_2} f| \ge f_0 > 0$，可得

$$\varrho+\rho_s \rightharpoonup \rho^*+\rho_s \text{ in } L^2(\Omega).$$

将此与 $\|\varrho+\rho_s\|_{L^2} = \|\varrho_0+\rho_s\|_{L^2} = \|\rho^*+\rho_s\|_{L^2}$结合，可得

$$\varrho+\rho_s \to \rho^*+\rho_s \quad \text{as} \quad t\to\infty.$$

最后，我们由此推得

$$\nu\Delta\mathbf{u} - (\nabla P - \rho^*\nabla f) = (\varrho+\rho_s)\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t} + (\varrho+\rho_s)(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} + \varrho\nabla f - \rho^*\nabla f$$

和引理 .1 可知，当 $t\to+\infty$ 时，有

$$\begin{aligned}
&\|\Delta\mathbf{u}\|_{L^2} + \|\nabla P - \rho^*\nabla f\|_{L^2} \le C_0\|\mathbf{u}_t\|_{L^2} + C_0\|(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u}\|_{L^2} + \|\varrho\nabla f - \rho^*\nabla f\|_{L^2} \to 0,\\
&\|\nabla P - \varrho\nabla f\|_{L^2} \le \|\nabla P - \rho^*\nabla f\|_{L^2} + \|\varrho\nabla f - \rho^*\nabla f\|_{L^2} \to 0.
\end{aligned}$$

□

4.3 定理1.3的证明

证明。 由（4.3）可得

$$\int_\Omega \varrho f d\mathbf{x} \to 0, \quad t \to \infty,$$

当且仅当对于任意 $\gamma > 0$ ，我们有

$$2\gamma\nu \int_0^\infty \|\nabla \mathbf{u}(\tau)\|_{L^2}^2 \, d\tau = \gamma \big\| \sqrt{\varrho_0 + \rho_s}\mathbf{u}_0 \big\|_{L^2}^2 + 2\gamma \int_\Omega \varrho_0 f d\mathbf{x}.$$

注意到我们已经证明

$$\begin{aligned} 2\gamma\nu \int_0^\infty \|\nabla \mathbf{u}(t)\|_{L^2}^2 \, dt = \gamma \big\| \sqrt{\varrho + \rho_s}\mathbf{u}_0 \big\|_{L^2}^2 + \|\varrho_0 + \rho_s + \gamma f(x,y) - \beta\|_{L^2}^2 \\ - \lim_{t\to+\infty} \|\varrho + \rho_s + \gamma f(x,y) - \beta\|_{L^2}^2. \end{aligned}$$

因此，(1.19a)成立当且仅当存在 $\gamma > 0$ 和 β 使得

$$2\gamma \int_\Omega \varrho_0 f d\mathbf{x} + \lim_{t\to+\infty} \|\varrho + \rho_s + \gamma f(x,y) - \beta\|_{L^2}^2 = \|\varrho_0 + \rho_s + \gamma f(x,y) - \beta\|_{L^2}^2.$$

由(4.8)可得

$$\|\varrho + \rho_s - (-\gamma f + \beta)\|_{L^2} \to 0, \quad t \to \infty,$$

当且仅当存在 $\gamma > 0$ 和 β 使得

$$2\gamma\nu \int_0^{+\infty} \|\nabla \mathbf{u}(\tau)\|_{L^2}^2 \, d\tau = \gamma \big\| \sqrt{\varrho + \rho_s}\mathbf{u}_0 \big\|_{L^2}^2 + \|\varrho_0 + \rho_s + \gamma f(x,y) - \beta\|_{L^2}^2$$

回顾一下，我们已经证明

$$2\gamma\nu \int_0^\infty \|\nabla \mathbf{u}(\tau)\|_{L^2}^2 \, d\tau = \gamma \big\| \sqrt{\varrho_0 + \rho_s}\mathbf{u}_0 \big\|_{L^2}^2 + 2\gamma \int_\Omega \varrho_0 f d\mathbf{x} - \lim_{t\to\infty} 2\gamma \int_\Omega \varrho f d\mathbf{x}$$

因此，(1.21a)成立当且仅当存在 $\gamma > 0$ 和 β 使得

$$2\gamma \int_\Omega \varrho_0 f d\mathbf{x} = \|\varrho_0 + \rho_s + \gamma f(x,y) - \beta\|_{L^2}^2 + \lim_{t\to\infty} 2\gamma \int_\Omega \varrho f d\mathbf{x}.$$

□

4.4 定理1.4 的证明

证明。 基于引理 3.1-引理 3.3，按照证明定理 1.2的类似方法，可以证明 (1.25a)成立，且 $\|\mathbf{u}_t\|_{L^2}$ 收敛:

$$\|\mathbf{u}_t\|_{L^2} \to 0, \quad t \to \infty.$$

因此，要证明定理 1.4，我们只需证明 (1.26a)以及

$$\|\nabla \mathbf{u}_t\|_{L^2} \to 0, \quad t \to \infty.$$

利用引理3.3、引理3.4 以及（3.14），我们可知 $\|\nabla \mathbf{u}_t\|_{L^2} \in L^1(0,+\infty)$ 和 $\|\nabla \mathbf{u}_t\|_{L^2}$ 是一致连续的。这就得到了（1.25b）。

现在我们来证明（1.26a）。由（3.16）$_1$ 可得

$$\nu\|\nabla\omega\|_{L^2}^2 = -\|\sqrt{\rho_s}\omega\omega_t\|_{L^1} - g\int_\Omega \omega\partial_{x_1}\rho \, d\mathbf{x} - \int_\Omega \nabla^\perp\rho_s \cdot \mathbf{u}_t\omega \, d\mathbf{x}.$$

由前一个方程可得

$$\|\mathbf{u}\|_{H^2} \leq C\nu\|\nabla\omega\|_{L^2}^2 + C\|\mathbf{u}\|_{H^1}^2 \leq C\left(\|\mathbf{u}_t\|_{H^1} + \|\nabla\varrho\|_{L^2}\right)\|\mathbf{u}\|_{H^1} + C\|\mathbf{u}\|_{H^1}^2$$

因此，我们进一步由引理3.1—引理3.5 得到

$$\|\mathbf{u}\|_{H^2} \leq C_0\|\mathbf{u}\|_{H^1}^2.$$

这与（1.25a）一起推出（1.26a）。 □

5 附录

.0.1 强解与非线性不稳定性

我们首先回顾系统（1.1）的适定性。以下引理改编自 [14,52], , 给出了在适当初始数据下解的存在性和唯一性。

定理 .1. 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ 为具有光滑边界的有界区域。若初始数据 $(u\ \rho)|_{t=0} = (u0, \rho_0) \in \left[H^2(\Omega)\right]^2 \cap \left(H^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)\right)$，其中 $u0, |_{\partial\Omega} = 0$, $\nabla \cdot u_0 = 0$ 和 $\rho(0) > \sigma > 0$ (σ 为任意给定的正常数)，则存在一个正常数 T^*，使得系统 (1.1) 具有唯一的强解 $(u\ \rho)$，满足

$$\begin{aligned}
&\sqrt{\rho}\partial_t\mathbf{u} \in L^\infty\left((0,T);L^2(\Omega)\right);\ \partial_t\mathbf{u} \in L^2\left((0,T);H^1(\Omega)\right);\\
&\mathbf{u} \in L^\infty\left((0,T);H^2(\Omega)\right) \cap L^2\left((0,T);W^{2,4}(\Omega)\right);\\
&\nabla p \in L^\infty\left((0,T);L^2(\Omega)\right) \cap L^2\left((0,T);L^4(\Omega)\right),\\
&\rho \in L^\infty\left((0,T);H^1(\Omega)\right),\ \partial_t\rho \in L^\infty\left((0,T);L^2(\Omega)\right),
\end{aligned} \tag{.1}$$

其中 $0 < T < T^*$。

证明 定理 .1 涉及偏微分方程理论中的高级技术，例如能量估计、不动点定理以及 Sobolev 空间的性质。可参阅参考文献 [14,52]。

定理 .2. *[线性不稳定性 [37]]* 若存在一点 $(x_0, y_0) \in \Omega$，使得 $\delta(\mathbf{x}_0) > 0$，则存在光滑初始数据 $(\mathbf{u}\ \varrho)|_{t=0} = (\mathbf{u}_0, \varrho_0)$ 和 $\Lambda > 0$，使得 $(\mathbf{u}\ \rho) = e^{\Lambda t}(\mathbf{u}_0, \theta_0)$ 是线性化系统的解

$$\begin{cases}
\rho_s \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \nu\Delta\mathbf{u} - \nabla P - \varrho\nabla f, & \mathbf{x} \in \Omega,\\
\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \delta(\mathbf{x})(\mathbf{u}\cdot\nabla)\nabla f = 0, & \mathbf{x} \in \Omega,\\
\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, & \mathbf{x} \in \Omega,\\
\mathbf{u}|_{\partial\Omega} = 0.
\end{cases}$$

其中 $(\mathbf{u}_0, \varrho_0)$ 满足以下恒等式

$$\Lambda^2 \int_\Omega \varrho_0 \mathbf{u}_0^2 dxdy = -\Lambda\mu\left\|\nabla\mathbf{u}_0\right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_\Omega \delta(\mathbf{x})\left|\mathbf{u}_0\cdot\nabla f\right|^2 dxdy,\ \varrho_0 = -\frac{\mathbf{u}_0\cdot\nabla\varrho_0}{\Lambda}.$$

定理 .3. *[非线性不稳定性 [37]]* 若存在一点 $(x_0, y_0) \in \Omega$，使得 $\delta(\mathbf{x}_0) > 0$，则稳态解 $(0, \rho_s)$ 在 Hadamard 意义下不稳定。也就是说，存在两个常数 ϵ 和 δ_0，以及函数 $(u0, \varrho_0) \in \left[H^2(\Omega)\right]^2 \times \left[H^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)\right]$，使得对于任意 $\delta^* \in (0, \varrho_0)$ 和初始数据 $\left(\mathbf{u}_0^{\delta^*}, \varrho_0^{\delta^*}\right) := \delta^*(u0, \varrho_0)$，问题 (1.7)- (1.8) 在初始数据 $\left(\mathbf{u}_0^{\delta^*}, \varrho_0^{\delta^*}\right)$ 下的强解 $\left(\mathbf{u}^{\delta^*}, \varrho^{\delta^*}\right) \in C\left(0, T_{\max}, \left[H^1(\Omega)\right]^2 \times L^2(\Omega)\right)$ 满足

$$\left\|\varrho^{\delta^*}\left(T^{\delta^*}\right)\right\|_{L^1(\Omega)} \geq \epsilon,\ \left\|\mathbf{u}^{\delta^*}\left(T^{\delta^*}\right)\right\|_{L^1(\Omega)} \geq \epsilon,$$

对于某个逃逸时间 $0 < T^{\delta^*} < T_{max}$，其中 T_{max} 是 $\left(\mathbf{u}^{\delta^*}, \varrho^{\delta^*}\right)$ 的最大存在时间。

.0.2 一些有用的不等式

我们还需要一些重要的不等式。这些不等式将用于估计解及其导数的范数，而这对稳定性和不稳定性结果至关重要。

引理 .1 ([54])。 设 Ω 是 $\mathbb{R}^2$ 中任意具有光滑边界 $\partial\Omega$ 的有界开区域。考虑以下斯托克斯问题

$$\begin{cases} -\nu\Delta\mathbf{u} + \nabla P = g, & in\ \Omega, \\ \nabla\cdot\mathbf{u} = 0, & in\ \Omega, \\ U = 0, & on\ \partial\Omega. \end{cases}$$

若 $g \in W^{m,p}(\Omega)$, 则 $\mathbf{u} \in W^{m+2,p}(\Omega)$, $P \in W^{m+1,p}(\Omega)$ 且存在常数 $D_0 = D_0(p, \nu, m, \Omega)$ 使得

$$\|\mathbf{u}\|_{W^{m+2,p}} + \|P\|_{W^{m+1,p}} \le D_0\|g\|_{W^{m,p}},$$

对任意 $p \in (1,\infty)$ 以及整数 $m \ge -1$。

引理 .2 ([55])。 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ 是任意具有光滑边界的有界区域。于是我们有以下嵌入和不等式:

$$H^1(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega), \quad \forall\, 1 \le p < \infty; \tag{.2a}$$
$$W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega), \quad \forall\, 2 < p < \infty; \tag{.2b}$$
$$\|u\|_{L^4}^2 \le 2\|u\|\|\nabla u\|, \quad \forall\, u : \Omega \to \mathbb{R}\ and\ f \in H_0^1(\Omega); \tag{.2c}$$
$$\|u\|_{L^4}^2 \le C\left(\|u\|\|\nabla u\| + \|u\|^2\right), \quad \forall\, u : \Omega \to \mathbb{R}\ and\ u \in H^1(\Omega). \tag{.2d}$$

引理 .3. 设 $y(t)$ $g(t)$ 是定义在 $[0,+\infty)$ 上的非负连续函数，且 $w(u)$ 是连续、正且非递减的函数。假设对于 $u > 0$, $u_0 > 0$, $\int_{u_0}^{+\infty} \frac{ds}{w\ s}() = +\infty$ ，并且满足以下积分不等式:

$$y(t) \le a + \int_0^t g(s)w(y(s))ds, \quad \forall t \in [0,+\infty),$$

其中 $a \ge u_0$ 是一个常数。那么，我们可以得到以下两个结论:

(1) 对于所有 $t \in [0,+\infty)$,

$$y(t) \le G^{-1}\left(G(a) + \int_0^t g(s)ds\right), \quad G(u) = \int_{u_0}^u \frac{ds}{w(s)}.$$

(2) 特别地，若 $\int_0^{+\infty} g(s)ds < \infty$，则有

$$y(t) \le G^{-1}\left(G(a) + \int_0^{+\infty} g(s)ds\right), \quad t \in [0,+\infty).$$

证明。 定义辅助函数

$$z(t) = a + \int_0^t g(s)w(y(s))\,ds.$$

根据构造，可得:

1. 对所有 $t \in [0,T]$, $y(t) \le z(t)$; 2. z
(0) $= a$; 3. $z(t)$ 非负且可微。

对 $z(t)$ 求导可得

$$z'(t) = g(t)w(y(t)).$$

由于 w 单调不减，且 $y(t) \le z(t)$，我们有 $w(y(t)) \le w(z(t))$。因此，

$$z'(t) \le g(t)w(z(t)). \tag{.3}$$

接下来，固定 $u_0 > 0$ 并定义

$$G(u) = \int_{u_0}^{u} \frac{ds}{w(s)}.$$

由于 $w(s) > 0$，函数 G 严格递增，因而是单射；记其反函数为G^{-1}。将不等式 (.3除以正数 $w(z(t))$，得到

$$\frac{z'(t)}{w(z(t))} \le g(t).$$

从 0 积分到 t，得到

$$\int_0^t \frac{z'(s)}{w(z(s))}\, ds \le \int_0^t g(s)\, ds. \tag{.4}$$

在左侧积分中作变量代换 $u = z(s)$，其中 $du = z'(s)\, ds$，并注意到$z(0) = a$，且 $z(t)$ 是积分上限，我们得到

$$\int_0^t \frac{z'(s)}{w(z(s))}\, ds = \int_a^{z(t)} \frac{du}{w(u)} = G(z(t)) - G(a).$$

将其代入（.4）可得

$$G(z(t)) - G(a) \le \int_0^t g(s)\, ds,$$

或者等价地

$$G(z(t)) \le G(a) + \int_0^t g(s)\, ds. \tag{.5}$$

根据假设 $\int_{u_0}^{\infty} \frac{ds}{w(s)} = +\infty$，函数 G 将 $[u_0, \infty)$ 映射到 $[0, \infty)$ 上；因此 G^{-1} 在（.5）右侧有定义。对两边应用 G^{-1}（它是递增的），得到

$$z(t) \le G^{-1}\Big(G(a) + \int_0^t g(s)\, ds\Big).$$

最后，回想 $y(t) \le z(t)$，我们得出

$$y(t) \le G^{-1}\Big(G(a) + \int_0^t g(s)\, ds\Big).$$

□

引理 .4. 设 $y(t)$ $g(t)$ $h(t)$ $q(t)$ 是 $[0, +\infty)$上的非负连续函数，$x(t)$ 是 $[0, +\infty)$上的连续且一致有界函数，并设 $w(u)$ 是关于 $u > 0$ 连续、正且非递减的函数。假设对于 $u_0 > 0$ $\int_{u_0}^{+\infty} \frac{ds}{w(s)} = +\infty$，以下两个导数不等式成立：

$$\begin{cases} y'(t) + x'(t) \le g(t)w(y(t)), \quad \forall t \in [0, +\infty), \\ -g(t)q(y(t)) - C \le y'(t) + h(t) \le g(t)q(y(t)) + C, \quad \forall t \in [0, +\infty), \quad C > 0. \end{cases} \tag{.6}$$

于是，我们得到以下三个结论：

(1) 对于所有 $t \in [0, +\infty)$,

$$y(t) \leq G^{-1}\left(G(a) + \int_0^t f(s)ds\right), \quad G(u) = \int_{u_0}^{u} \frac{ds}{w(s)},$$

其中 $a \geq u_0$ 是一个常数。

(2) 特别地，若 $\int_0^{+\infty} g(s)ds < \infty$，则有

$$y(t) \leq G^{-1}\left(G(a) + \int_0^{+\infty} g(s)\, ds\right), \quad t \in [0, +\infty).$$

(3) 此外，若 $\int_0^{+\infty} g(s)ds < \infty$、 $y(t) = g(t)$ 和 $h(t)$ 一致有界，则有

$$\lim_{t\to+\infty} y(t) = 0.$$

证明。 由不等式 $y'(t) + x'(t) \leq g(t)w(y(t))$，可得

$$y(t) \leq y(0) + x(0) - x(t) + \int_0^t g(s)w(y(s))\, ds \leq a + \int_0^t g(s)w(y(s))\, ds,$$

其中 $a \geq y(0) + x(0) - x(t)$ 是一个常数。前两个结论由引理 .3直接得出。

现在转向第三个结论。条件 $\int_0^{+\infty} g(s)ds < \infty$ 意味着 $y(t)$ 在 $[0, +\infty)$ 上一致有界。此外，利用 $y(t) = g(t)$，我们得到

$$-y(t)q(y(t)) - C \leq y'(t) \leq y'(t) + h(t) \leq y(t)q(y(t)) + C \leq C_0,$$

这与 $\int_0^{+\infty} y(s)\, ds < \infty$ 以及 $h(t)$ 的一致有界性结合起来，意味着 $y(t)$ 在 $[0, +\infty)$ 上一致连续。应用 Barb˘alat 引理可得

$$\lim_{t\to+\infty} y(t) = 0.$$

□

参考文献

[1] Pierre-Louis Lions.《流体力学中的数学专题》第1卷，第3卷《牛津数学及其应用讲座系列》。克拉伦登出版社、牛津大学出版社，纽约，1996年。不可压缩模型，牛津科学出版物。[2] S. A. Antontsev 和 A. V. Kazhikov。《非均匀流体流动的数学研究》。1973年。讲义，新西伯利亚国立大学，俄文。[3] A. V. Kazhikov。非均匀黏性流体边值问题的求解。《科学院通报》，216：1008–1010，1974年。俄文。[4] J. Simon。初始密度消失的非均匀流体流动。巴黎科学院报告 A 辑，15：1009–1012，1978年。[5] J. Simon。非均匀黏性不可压缩流体：速度、密度和压力的存在性。《SIAM 数学分析杂志》，21(5)：1093–1117，1990年。[6] E. Fernández Cara 和 F. Guillén。无界区域中非均匀黏性不可压缩流动的存在性。《偏微分方程通讯》，17(7-8)：1253–1265，1992年。

[7] Tiantian Hao、Feng Shao、Dongyi Wei 和 Zhifei Zhang。有界密度下非齐次 Navier–Stokes 方程的整体适定性。Int. Math. Res. Not. IMRN，(18)：论文编号 rnaf283，26 页，2025年。[8] O. Ladyzhenskaya 和 V. A. Solonnikov。黏性不可压非齐次流体初边值问题的唯一可解性。《J. Soviet Math.》，9：697–749，1978年。[9] H. Okamoto。关于非定常分层流体运动方程：解的唯一性与存在性。《J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math.》，30：615–643，1984年。[10] M. Padula。非均匀不可压缩流体存在性定理。《Rend. Circ. Mat. Palermo》，31(4)：119–124，1982年。[11] M. Padula。外部区域中非均匀运动的存在性与唯一性。《Math. Z.》，203：581–604，1990年。[12] R. Salvi。黏性不可压非均匀流体方程：存在性与正则性。《J. Austral. Math. Soc. Ser. B》，33：94–110，1991年。[13] Jong Uhn Kim。具有非负密度的不可压黏性流体初边值问题的弱解。《SIAM 数学分析杂志》，18(1)：89–96，1987年。[14] Hi Jun Choe 和 Hyunseok Kim。非均匀不可压缩流体 Navier–Stokes 方程的强解。《偏微分方程通讯》，28(5-6)：1183–1201，2003年。[15] Hyunseok Kim。非均匀不可压纳维-斯托克斯方程的爆破判据。《SIAM 数学分析杂志》，37(5)：1417–1434，2006年。[16] R. Danchin。临界空间中的密度依赖不可压黏性流体。《Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A》，133(6)：1311–1334，2003年。[17] R. Danchin。非齐次黏性流体流动的局部与整体适定性结果。《Adv. Differential Equations》，9(3-4)：353–386，2004年。[18] Peixin Zhang、Chong Zhao 和 Jianwen Zhang。非均匀不可压缩流体三维方程的整体正则性。《Nonlinear Anal.》，110：61–76，2014年。[19] Haibo Yu。大外力作用下三维不可压 Navier–Stokes 方程的整体强解。《J. Math. Phys.》，59(7)：073102，8页，2018年。[20] Hyung Ju Hwang 和 Yan Guo。关于动态 Rayleigh–Taylor 不稳定性。《理性力学与分析文献》，167(3)：235–253，2003年。[21] Fei Jiang 和 Song Jiang。有界区域中三维重力驱动黏性流的稳定性与不稳定性。《Adv. Math.》，264：831–863，2014年。[22] Björn Gebhard、József J. Kolumbán 和 László Székelyhidi。Rayleigh–Taylor 不稳定性的新方法。《理性力学与分析文献》，241(3)：1243–1280，2021年。[23] Walter Craig、Xiangdi Huang 和 Yun Wang。三维非齐次不可压 Navier–Stokes 方程的整体适定性。《数学流体力学杂志》，15(4)：747–758，2013年。[24] Hammadi Abidi、Guilong Gui 和 Ping Zhang。三维非齐次 Navier–Stokes 方程整体解的衰减与稳定性。《纯粹与应用数学通讯》，64(6)：832–881，2011年。

[25] Guilong Gui、Jingchi Huang 和 Ping Zhang. 一类关于单个变量缓慢变化的三维非齐次 Navier–Stokes 方程的大型整体解. 《函数分析杂志》, 261(11):3181–3210, 2011年.[26] Hammadi Abidi 和 Ping Zhang. 具有变黏度的三维密度依赖 Navier–Stokes 系统的整体适定性. 《中国科学：数学》 , 58(6):1129–1150, 2015 年 .[27] Xiangdi Huang 和 Yun Wang. 具有密度依赖黏度的三维非齐次 Navier–Stokes 方程的整体强解. 《微分方程杂志》, 259(4):1606–1627, 2015年.[28] Boqiang L¨u、Xiaoding Shi 和 Xin Zhong. 带真空的二维密度依赖 Navier–Stokes 方程柯西问题强解的整体存在性与大时间渐近行为. 《非线性》, 31(6):2617–2632, 2018年.[29] Jinkai Li. 非负密度 Navier–Stokes 方程强解的局部存在性与唯一性. 《微分方程杂志》, 263(10):6512–6536, 2017年.[30] Francisco Gancedo 和 Eduardo Garc´ıa-Ju´arez. 非齐次 Navier–Stokes 方程中二维密度斑块的整体正则性. 《理性力学与分析文献》, 229(1):339–360, 2018年.[31] Rapha¨el Danchin 和 Piotr Bogus-l aw Mucha. 真空中的不可压 Navier–Stokes 方程. 《纯粹与应用数学通讯》, 72(7):1351–1385, 2019年.[32] Cheng He、Jing Li 和 Boqiang L¨u. 无界区域中具有密度依赖黏度和真空的三维 Navier–Stokes 方程的整体适定性与指数稳定性. 《理性力学与分析文献》, 239(3):1809–1835, 2021年.[33] Jianzhong Zhang、Weixuan Shi 和 Hongmei Cao. 非负密度非齐次不可压 Navier–Stokes 方程的整体唯一可解性. 《非线性》, 35(9):4795–4819, 2022年.[34] Rapha¨el Danchin. 通过动态插值研究粗糙初值下二维非齐次黏性流的整体适定性. 《偏微分方程分析》, 18(5):1231–1270, 2025年.[35] Jean-Paul Adogbo、Piotr B. Mucha 和 Maja Szlenk. 无界密度的非齐次 Navier–Stokes 方程. 《数学流体力学杂志》, 27(3): 论文编号 53, 26, 2025 年 .[36] Chenyin Qian 和 Xiaole Zheng. 三维非齐次不可压 Navier–Stokes 方程解的存在时间. 《微分方程杂志》, 441:论文编号 113481, 18, 2025年.[37] Liang Li、Tao Tan 和 Quan Wang. 一般势作用下有界区域中非均匀流体的不稳定性与稳定性. 《物理学 D》, 481:论文编号 134816, 12, 2025年.[38] Fei Jiang、Song Jiang 和 GuoXi Ni. 非齐次不可压黏性流体的非线性不稳定性. 《中国科学：数学》, 56(4):665–686, 2013年.[39] Yiqiu Mao、Quan Wang、Chao Xing 和 Liang Yang. 地转平衡下二维无黏地球物理流体的动态 Rayleigh–Taylor 不稳定性. 《物理学 D》, 461:论文编号 134109, 13, 2024年.[40] Chao Xing、Yanlong Fan、Daozhi Han 和 Quan Wang. 具有部分黏性的非齐次不可压地球物理流体的 Rayleigh–Taylor 不稳定性. 《微分方程杂志》, 408:537–583, 2024年.[41] Yanlong Fan、Daozhi Han、Quan Wang 和 Chao Xing. 具有部分耗散的非齐次不可压地球物理流体的非线性 Rayleigh–Taylor 不稳定性. 《非线性》, 38(5):论文编号 055016, 41, 2025年。

[42] Joseph Pedlosky. 地球物理流体动力学. 施普林格, 1987年.[43] William D. Smyth 和 Jeffrey R. Carpenter. 地球物理流动的不稳定性. 剑桥大学出版社, 剑桥, 2019年.[44] Andrew Majda. 大气与海洋的偏微分方程和波导论, Courant 数学讲义第 9 卷. 纽约大学, Courant 数学研究所, 纽约；美国数学会, 罗得岛州普罗维登斯, 2003年.[45] Charles R. Doering、Jiahong Wu、Kun Zhao 和 Xiaoming Zheng. 无浮力扩散的二维 Boussinesq 方程的大时间行为.《物理学 D》, 376/377:144–159, 2018 年 .[46] ´Angel Castro 、 Diego C´ordoba 和 Daniel Lear. 带速度阻尼项的二维 Boussinesq 方程分层解的渐近稳定性.《数学模型、方法与应用科学》, 29(7):1227–1277, 2019年.[47] Lizheng Tao、Jiahong Wu、Kun Zhao 和 Xiaoming Zheng. 无热扩散的二维 Boussinesq 方程在静力平衡附近的稳定性.《理性力学与分析文献》, 237(2):585–630, 2020年.[48] Suhua Lai、Jiahong Wu、Xiaojing Xu、Jianwen Zhang 和 Yueyuan Zhong. 具有部分耗散的二维 Boussinesq 方程的最优衰减估计.《非线性科学杂志》, 31(1):论文编号 16, 33, 2021年.[49] Dhanapati Adhikari、Oussama Ben Said、Uddhaba Raj Pandey 和 Jiahong Wu. 具有水平耗散和垂直热扩散的二维 Boussinesq 系统的稳定性与大时间行为.《非线性偏微分方程与应用》, 29(4):论文编号 42, 43, 2022年.[50] Song Jiang 和 Quan Wang. 关于 Boussinesq 方程解的整体稳定性与大时间行为. arXiv:2502.16226.[51] Song Jiang 和 Quan Wang. 具有部分耗散并受旋转影响的 Boussinesq 方程解的大时间行为. arXiv:2504.10827.[52] Jong Uhn Kim. 非负密度不可压黏性流体初边值问题的弱解.《SIAM 数学分析杂志》, 18(1):89–96, 1987年.[53] Benoˆıt Desjardins. 多相黏性流体二维流动的正则性结果.《理性力学与分析文献》, 137(2):135–158, 1997年.[54] Roger Temam. Navier–Stokes 方程：理论与数值分析.《数学研究及其应用》第 2 卷. 北荷兰出版公司, 阿姆斯特丹—纽约—牛津, 1977年.[55] Robert A. Adams 和 John J. F. Fournier. Sobolev 空间, 纯粹与应用数学第 140 卷（阿姆斯特丹）. 爱思唯尔/学术出版社, 阿姆斯特丹, 第二版, 2003年。