arXiv:2512.19295v1 [math.GR] 22 Dec 2025

# 无挠灯笼群的有限剩余刚性

NIKOLAY NIKOLOV 和 Julian Wykowsk I

Abstract. 我们证明，任意秩 $n \in \mathbb{N}$ 的无挠灯笼群 $\Gamma = \mathbb{Z}^n \wr \mathbb{Z}$ 在绝对意义下具有有限剩余刚性：其有限商群 $\Gamma$ 在所有有限生成剩余有限群中唯一确定了它的同构类型。证明结合了诺特整环上模的有限剩余刚性理论，以及对有限剩余完备化与 Γ相同的群的下中心列代数性质的分析。

## 1. Introduction

过去半个世纪以来，群论中的一个核心主题一直是研究有限剩余刚性：一个无限群的结构能否从其有限像中辨认出来？设 $\Gamma$ 是一个有限生成剩余有限群，并记 $\mathcal{C}(\Gamma$为 Γ的有限满射像的同构类集合。我们称 $\Gamma$ 在绝对意义下具有有限剩余刚性，若对于任意满足 $\Delta$ $\mathcal{C}(\Delta) = \mathcal{C}(\Gamma)$的有限生成剩余有限群，都存在一个同构 $\Delta \cong \Gamma$。这等价于说， $\Gamma$ 的同构类型可由其有限剩余完备化$\widehat{\Gamma} = \varprojlim \mathcal{C}(\Gamma$在所有有限生成剩余有限群中加以区分 [Dix+82]。

源于 Grothendieck 在算术几何方面的工作，有限剩余刚性已在从几何拓扑学到表示论和计算代数等诸多领域的背景下得到研究 [Gro70；BG04；BW15；WZ19]。然而，对于大多数群而言，哪些群在绝对意义下具有有限剩余刚性，仍然是一个巨大的谜题；其中一个突出的障碍在于，即使人们掌握了关于某个群的大量信息 Γ，通常也无法排除某个未知的奇异群 Δ可能拥有与 Γ相同的有限像。事实上，对于自由群和自由可解群而言，有限剩余刚性问题是一个长期悬而未决的问题，通常归因于 Remeslennikov [NRR82，问题 15]。

最近，第二作者发展了诺特整环上模的有限剩余刚性理论 [Wyk25a]，，随后利用该理论确立了两大无限类元后阿贝尔群的有限剩余刚性，即可解 Baumslag–Solitar 群 [Wyk25a] 和自由元阿贝尔群 [Wyk25b]。本文旨在进一步拓展这一理论，以确立无挠灯笼群的绝对有限剩余刚性，即形如以下的群

$$\Gamma_n = \mathbb{Z}^n \wr \mathbb{Z} \cong M \rtimes \langle t \rangle \tag{1.1}$$

其中 $n \in \mathbb{N}$ 和 $M$ 是秩为 $n$ 的自由 $\mathbb{Z}[\langle t \rangle]$-模。对于这一类群，我们对绝对有限剩余刚性问题给出了肯定答案。无挠灯笼群在几何群论和动力系统中占据核心地位：综述请参见

*Date*：2025年12月23日。

[GT24] 综述。群 $\Gamma_1 = \mathbb{Z} \wr \mathbb{Z}$ 在研究在一维流形上同胚作用的群时尤为重要 [CFP96; BFZ24]。

**定理 A.** 令 $n \in \mathbb{N}$ 为正整数。无挠灯笼群$\Gamma_n = \mathbb{Z}^n \wr \mathbb{Z}$ 在绝对意义下具有有限剩余刚性。

我们注意到，定理 A 与以下结果形成对比： [Pic74], 其中构造了具有无限有限生成属的后代数群；以及 [NS21], 其中发现了具有不可数有限生成属的四步可解群。另一方面，对于以素数指数基群为底的有限生成灯笼群，即形如 $\mathbb{F}_p^k \wr \mathbb{Z}$ 的群，其中 $k \in \mathbb{N}$ 且 $p$为素数，相关问题已在 [Bla25]中得到肯定解答。

证明思路如下。利用分解 (1.1)，目标是将问题归结为在 $\mathbb{Z}[\langle t \rangle]$-模范畴中 $M$ 的有限剩余刚性问题，随后可借助诺特整环上模的有限剩余刚性理论解决该问题 [Wyk25a]。然而，困难在于 $M$ 严格大于 Γ的导出子群，因此首先必须在任意具有 $\Delta \cong \Gamma$的有限生成剩余有限群$\widehat{\quad}$ $\widehat{\quad}$ Δ的子群中，找到与模 $M$ 相对应的合理对象 $N$ 。在第 2 节探讨了一些预备结果后，第 3 节将相对于 Δ的无限族极大幂零商群构造子群 $N \leq \Delta$ 。此步骤的一个关键要素是第一作者关于有限剩余群中词子群闭包的定理 [NS07，定理 1.4]。在第 4 节，随后将 $N$ 的定义性相对性质提升为全局特征性质。最后，在第 5 节完成定理 A 的证明。

## Acknowledgements

作者感谢 Gareth Wilkes 富有成效的讨论和真知灼见。作者还要感谢剑桥的艾萨克·牛顿数学科学研究所，在“离散群与有限生成群”项目期间提供支持与款待；本次合作正是在该项目期间开始的。该项目由英国工程与自然科学研究委员会资助，资助编号为 EP/Z000580/1。此外，第二作者感谢剑桥大学剑桥国际信托基金与国王学院博士奖学金提供的经济支持。

## 2. Preliminary Results

本节将综述并证明若干预备结果，这些结果将在定理A的证明中用到。其中包括诺特整环上的有限剩余刚性理论、有限生成有限剩余群的幂零商方面的结果，以及一个关于有限直积群中元素阶的简短引理。

2.1. **诺特整环上的有限剩余刚性。** 定理 [A 的证明中的第一个主要要素，将是第二作者在 [Wyk25a]中发展起来的诺特整环上模的有限剩余刚性理论。设 $\Lambda$ 是一个有限生成交换整环，即多项式环$\mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n]$ 关于某个 $n \in \mathbb{N}$ 素理想的商。根据希尔伯特基底定理，这样的整环 $\Lambda$ 自动是诺特的，并且所有有限生成 Λ-模都自动是剩余有限的 [OR70，定理 1]。如果 Λ是同调紧性 的，我们称其为 Λ-模是自由的。

给定一个 $\Lambda$-模 $M$，我们将 $M$ 的有限剩余完备化 $M$ 定义为由逆极限给出的有限剩余$\Lambda$-模

$$\widehat{M} = \varprojlim_{N \trianglelefteq_f M} (M/N)$$

在 $\Lambda$-模范畴中，其中 $N \trianglelefteq_f M$ 遍历 $M$的有限指数子模。有限生成的 $\Lambda$-模 $M$ 若对任意有限生成的 $\Lambda$-模 $N$都满足等价关系 $M \cong N \iff M \cong N$，则称其为 $\Lambda$-有限剩余 刚性的 。我们注意到，关于同调紧性诺特整环上的自由模，有如下有限剩余刚性结果。

**定理 2.1** (Wyk25a 中的定理 C [Wyk25a])。 设 $\Lambda$ 是一个有限生成的诺特整环。若 $\Lambda$ 具有同调紧性，则所有有限生成的自由 $\Lambda$- 模都是 $\Lambda$- 有限剩余刚性的。

我们将把这一结果与 Quillen 和 Suslin 的以下著名结果结合使用，并在此引用其局部化形式。

**定理 2.2** (推论 *7.4*，见 Sus77])。 整系数 *Laurent* 多项式环$\Lambda = \mathbb{Z}[x_1^{\pm}, \ldots, x_n^{\pm}]$ 在 $n$ 个变量下，对任意 $n \in \mathbb{N}$ 均具有同调紧性。

2.2. **幂零商的有限剩余不变性**。 对于离散群或有限剩余群 $G$，我们将用 $\gamma_n(G)$ 表示其下中心列的第 $n$ 项，即

$$\gamma_n(G) = [G, \gamma_{n-1}(G)]$$

当 $n \geq 2$ 且 $\gamma_1(G) = G$ 时。若 $G$ 是有限剩余群，换位子子群表示由所有上述形式的换位子生成的抽象子群，因此 $\gamma_n(G)$ 未必是 $G$ 的闭子群。然而，对于有限生成有限剩余群，它确实是闭子群，这可由第一作者与 Dan Segal 的一项深刻定理推出。

**定理 2.3** (定理 1.4，见 [NS07])。 设 $G$ 是一个有限生成有限剩余群。对于任意 $k \in \mathbb{N}$, 抽象子群 $\gamma_k(G)$ 是 $G$中的闭子群。

定理 2.3的一个推论是以下命题，它将在第 3 节特征子群的构造中发挥关键作用。

**命题 2.4**。 设 $\Gamma$、$\Delta$ 是有限生成剩余有限群。若存在 有限生成完备的同构 $\Gamma \cong \Delta$，则下中心因子之间存在同构 $\gamma_n(\Gamma)/\gamma_{n+1}(\Gamma) \cong \gamma_n(\Delta)/\gamma_{n+1}(\Delta)$ 对所有 $n \in \mathbb{N}$ 均成立。

证明。 我们首先断言，对于任意有限生成剩余有限群 $\Gamma$，其在有限剩余完备化 $\Gamma$ 中的闭包 $\overline{\gamma_n(\Gamma)}$ 满足

$$\overline{\gamma_n(\Gamma)} = \gamma_n(\widehat{\Gamma}) \tag{2.1}$$

对所有 $n \in \mathbb{N}$ 都成立。事实上，对于任意离散群或有限剩余群 $G$， $n$ 阶下中心项 $\gamma_n(G)$ 等于 $G$ 中与词 $w_n$ 相关联的词子群：由简单交换子 $w_n(x_1, \ldots, x_n) = [x_1, \ldots, x_n]$ 给出的 $G^n \to G$。由于根据定理 2.3， $\gamma_n(\Gamma)$ 是闭的，包含关系 $\widehat{\gamma_n(\Gamma)} \subseteq \gamma_n(\Gamma)$ 成立。反之，由于 $\Gamma$ 在 $\Gamma$ 中稠密，连续映射 $w_n$ 下的像 $w_n(\Gamma^n)$ 在闭集 $\widehat{\gamma_n(\Gamma)} = w_n(\Gamma^n)$ 中稠密。因此，子群 $\gamma_n(\Gamma) = \langle w_n(\Gamma^n) \rangle$ 在闭子群 $\gamma_n(\Gamma) = \langle w_n(\Gamma) \rangle$ 中稠密，从而 $\gamma_n(\Gamma) = \gamma_n(\Gamma)$ ~~成立~~。这证明了该断言。

现在，分别将 $\overline{\gamma_n(\Gamma)}$ $\overline{\gamma_{n+1}(\Gamma)}$ 在有限剩余完备化 $\Gamma$ 中的闭包记为 $\gamma_n(\Gamma)$ $\gamma_{n+1}(\Gamma)$，并将商群 $\widehat{\gamma_n(\Gamma)/\gamma_{n+1}(\Gamma)}$ 在幂零群 $\Gamma_{n+1}=\Gamma/\gamma_{n+1}(\Gamma)$ 的有限剩余完备化 $\Gamma_{n+1}$ 中的闭包记为 $\gamma_n(\Gamma)/\gamma_{n+1}(\Gamma)$。利用第三同构定理以及逆极限函子是正合函子的事实 [RZ10, 《命题 2.2》4], ，我们得到

$$\overline{\gamma_n(\Gamma)}/\overline{\gamma_{n+1}(\Gamma)} \cong \varprojlim_{U\trianglelefteq_f\Gamma}\left(\frac{\gamma_n(\Gamma)/U\cap\gamma_n(\Gamma)}{\gamma_{n+1}(\Gamma)/U\cap\gamma_{n+1}(\Gamma)}\right) \tag{2.2}$$

$$\cong \varprojlim_{U\trianglelefteq_f\Gamma}\left(\frac{\gamma_n(\Gamma)\cdot U}{\gamma_{n+1}(\Gamma)\cdot U}\right) \tag{2.3}$$

$$\cong \overline{\gamma_n(\Gamma)/\gamma_{n+1}(\Gamma)} \tag{2.4}$$

成立。此外，有限生成幂零群在其所有子群上诱导出完整的有限剩余拓扑 [Seg83，第 223], 页

$$\overline{\gamma_n(\Gamma)/\gamma_{n+1}(\Gamma)} \cong \widehat{\gamma_n(\Gamma)/\gamma_{n+1}}(\Gamma) \tag{2.5}$$

事实上是阿贝尔群 $\gamma_n(\Gamma)/\gamma_{n+1}(\Gamma)$的有限剩余完备化。将其与关于 $\Delta$ 的类似等式以及该断言结合起来，我们得到

$$\widehat{\gamma_n(\Gamma)/\gamma_{n+1}}(\Gamma) \cong \gamma_n(\widehat{\Gamma})/\gamma_{n+1}(\widehat{\Gamma}) \cong \gamma_n(\widehat{\Delta})/\gamma_{n+1}(\widehat{\Delta}) \cong \widehat{\gamma_n(\Delta)/\gamma_{n+1}}(\Delta) \tag{2.6}$$

对所有 $n\in\mathbb{N}$均成立。但有限生成阿贝尔群在有限剩余意义下具有刚性 [Wil24，推论 3.2。12], 因此事实上必有 $\gamma_n(\Delta)/\gamma_{n+1}(\Delta) \cong \gamma_n(\Gamma)/\gamma_{n+1}(\Gamma)$，正如所假设的那样。□

2.3. **有限直积中的阶**。最后，我们陈述并证明以下关于有限直积群中元素的阶的初等引理，我们将在第4节中引用该引理。

**引理 2.5.** 设 $A, B$ 是两个有限交换群，且 $x=(a,b)$ 和 $y=(1,b')$是 $A\times B$ 中的两个元素。假设存在一个素数 $p$ 以及正整数 $n, m, k$，满足 $n\geq m$

$$\operatorname{ord}(a)=p^n,\ \operatorname{ord}(b)=p^m,\ \operatorname{ord}(b')=p^k$$

其中 $\operatorname{ord}(-)$ 表示元素的阶。那么，由 $x$ 和 $y$ 在 $A\times B$ 中生成的群 $\langle x,y\rangle$ 同构于 $\langle x,y\rangle\cong C_{p^n}\times C_{p^k}$。

证明。设 $D=\langle x,y\rangle$，并注意到 $\operatorname{ord}(x)=p^n$ 且 $\operatorname{ord}(y)=p^k$ 成立。因此，只需证明 $|D|\geq p^{n+k}=\operatorname{ord}(x)\cdot\operatorname{ord}(y)$，由此即可得到所要求的同构 $D\cong\langle x\rangle\times\langle y\rangle\cong C_{p^n}\times C_{p^k}$。记 $\pi_A\colon A\times B\to A$ 为到 $A$ 的投影。我们有 $|\pi(D)|=|\langle a\rangle|=p^n$，而 $\ker\pi\cap D=B\cap D$ 包含 $b'$。因此 $|D|=|\pi(D)||D\cap B|\geq\operatorname{ord}(a)\cdot\operatorname{ord}(b')\geq p^np^k$，结论得证。□

## 3. Nilpotent Quotients

本节开始证明关于无挠灯笼群有限剩余刚性的定理 A $\Gamma_n=\mathbb{Z}^n\wr\mathbb{Z}$。本节的主要结果是以下命题，其中我们概述了一个算法，用于构造子群 $N\leq\Delta$，该子群对应于有限剩余亏格 $\Delta$ 中任意群 $\Gamma$ 所对应的模 $M\leq\Gamma_n$。我们将推迟到下一节再证明 $N$ 是阿贝尔群并构成一个 $\mathbb{Z}[\langle t\rangle]$-模。

**命题 3.1.** 设 $n \in \mathbb{N}$ 为正整数， $\Gamma = \mathbb{Z}^n \wr \mathbb{Z}$ 为相应的无挠灯笼群， $\Delta$为满足条件 $\Delta \cong \Gamma$ 的有限生成剩余有限$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$群。存在一个子群 $N \trianglelefteq \Delta$ ，使得 $\Delta/N \cong \mathbb{Z}$ ，并且对于任意正整数 $k \in \mathbb{N}$， 包含关系 $[N, [\gamma_k(\Delta)\ \gamma_k(\Delta)]] \leq \gamma_k(\Delta)$ 成立。

为证明命题3.1，我们需要若干预备结果。事实上，设$n \in \mathbb{N}$ 是一个正整数，且 $\Gamma = \mathbb{Z}^n \wr \mathbb{Z}$ 是相应的无挠灯笼群。假设 $\Delta$ 是一个有限生成剩余有限群，并存在一个$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$有限生成完备的同构 $\Delta \cong \Gamma$。利用命题 2.4 以及 $\Gamma$的下中心列，我们得到以下结果。

**引理 3.2**。 对所有正整数 $m > 1$，均有同构 $\Delta^{\mathrm{ab}} \cong \mathbb{Z}^{n+1}$ 和 $\gamma_m(\Delta)/\gamma_{m+1}(\Delta) \cong \mathbb{Z}^m$。

以下引理给出了对 $\Delta$ 的进一步限制。

**引理 3.3**。 设 $U \trianglelefteq \Delta$ 是一个满足 $U \leq [\Delta, \Delta]$ 的正规子群，且其在 $[\Delta, \Delta]$ 中的指数有限。考虑有限的 $\mathbb{Z}[\Delta^{\mathrm{ab}}]$-模 $T = [\Delta, \Delta]/U$。自然映射 $\Delta \twoheadrightarrow \Delta/C_\Delta(T) \to$ 自同构群$_{\mathbb{Z}}(T)$ 的像是一个有限循环群。

证明。首先，注意到，关于 $\Gamma$ 的类似结果可由分解式 (1.1) 以及观察到 $M = C_\Gamma([\Gamma, \Gamma])$ 得出。现在设 $U \trianglelefteq \Delta$ 是包含于 $D = [\Delta, \Delta]$ 中的有限指数正规子群，并设 $E = [\Gamma, \Gamma]$。记作$\Lambda = \mathbb{Z}[\Delta^{\mathrm{ab}}] \cong \mathbb{Z}[\Gamma^{\mathrm{ab}}]$ ，并将 $D$ 和 $E$ 视为 $\Lambda$-模，其中 $\Lambda$ 分别通过 $\Delta$ 和 $\Gamma$内的共轭作用。根据 [Wyk25a，引理 5.2]，，在相应有限剩余完备化 $\Delta$ 和$\Gamma$ 中，$\widehat{D}$ $\widehat{\ }$和 $E$ 的闭包同构于$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$完备化 $D$ 和 $E$ ，且作为 $\Lambda$-模同构。根据假设，存在有限剩余群 $\phi$的同构$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$: $\Delta \to \Gamma$，因此我们得到一个交换图

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \widehat{D} \cong \overline{[\Delta,\Delta]} & \longrightarrow & \widehat{\Delta} & \longrightarrow & \widehat{\Delta}^{\mathrm{ab}} \cong \widehat{\mathbb{Z}}^{n+1} & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow f & & \downarrow \phi & & \downarrow \phi^{\mathrm{ab}} & & \\ 0 & \longrightarrow & \widehat{E} \cong \overline{[\Gamma,\Gamma]} & \longrightarrow & \widehat{\Gamma} & \longrightarrow & \widehat{\Gamma}^{\mathrm{ab}} \cong \widehat{\mathbb{Z}}^{n+1} & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

具有正合行，且其列是有限交换群之间的同构。注意，阿贝尔化映射 $\phi^{\mathrm{ab}}$ 诱导出一个自同构群 $\alpha\colon\ \widehat{\Lambda} \xrightarrow{\sim} \widehat{\Lambda}$ ，其结构为赋范有限环。此外，无限生成有限交换群之间的同构 $f\colon\ \widehat{D} \xrightarrow{\sim} \widehat{E}$ 不一定是 $\Lambda$-模的态射，但满足扭曲恒等式

$$f(\lambda \cdot m) = \alpha(\lambda) \cdot f(m) \tag{3.1}$$

$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$当且仅当 $\lambda \in \Lambda$ 和 $m \in D$。由于 $U$ 是 $\Delta$的正规子群，它在共轭 $\Lambda$-模结构下构成一个子模，而 $T = D/U$ 构成$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$$\Lambda$-有限剩余完备化 $D$的有限 $\Lambda$-模商。因此，扭曲同构 $f\colon\ D \to E$ 诱导出有限阿贝尔群之间的同构

$$\widetilde{f}\colon \widehat{D}/\overline{U} \xrightarrow{\sim} \widehat{E}/f(\overline{U})$$

它再次满足扭曲恒等式

$$\widetilde{f}(\lambda \cdot m) = \alpha(\lambda) \cdot \widetilde{f}(m) \tag{3.2}$$

当且仅当 $\chi \in \Lambda$ 且 $m \in D/U$ 时。正如前面所观察到的，假设的结果对于 $\Gamma$ 同样成立，因此该像

$$I_\Gamma := \mathrm{Im}\left(\widehat{\Gamma}^{\mathrm{ab}} \to \mathrm{Aut}_{\mathbb{Z}}(\widehat{E}/f(\overline{U}))\right) = \mathrm{Im}\left(\Gamma^{\mathrm{ab}} \to \mathrm{Aut}_{\mathbb{Z}}(\widehat{E}/f(\overline{U}))\right)$$

是一个有限循环群。但（3.2）给出

$$\mathrm{Im}\left(\Delta^{\mathrm{ab}} \to \mathrm{Aut}_{\mathbb{Z}}(T)\right) = \mathrm{Im}\left(\widehat{\Delta}^{\mathrm{ab}} \to \mathrm{Aut}_{\mathbb{Z}}(\widehat{D}/\overline{U})\right) = \alpha(I_\Gamma) = \phi^{\mathrm{ab}}(I_\Gamma)$$

因此它也是一个有限循环群，正如所假设的那样。 □

现在开始证明命题 4.1。给定一个正整数 $m > 2$，令 $\Delta_m = \Delta/\gamma_m(\Delta)$，并考虑群 $V_m = [\Delta_m, \Delta_m] = \gamma_2(\Delta)/\gamma_m(\Delta)$，它是阿贝尔群，因为 $\Delta \cong \Gamma$，而 $\Gamma$ 是元后阿贝尔群。此外，对任意正整数 $m > 2$，引理 3.2 得出 $V_m \cong \mathbb{Z}^{n(m-2)}$。群 $\Delta_m^{\mathrm{ab}}$ 通过共轭作用于 $V_m$，并对所有 $s = 2、3、\ldots\ldots、m-1$，逐集合固定下中心因子 $\gamma_s(\Delta_m)/\gamma_{s+1}(\Delta_m) \cong \mathbb{Z}^n$。因此，其在 $\mathrm{Aut}(V_m)$ 中的像 $L_m$ 是群 $\mathrm{UT}^{n(m-2)}(\mathbb{Z})$ 的一个子群；该群是相对于 $V_m$ 的某个适当基选取所得到的单位上三角矩阵群。现在 $\mathrm{UT}^{n(m-2)}(\mathbb{Z})$ 是一个有限生成幂零群，因此根据 Seg83，第 223] 页，它在 $L_m$ 上诱导出完整的有限剩余拓扑 [。反过来，该拓扑与其同余拓扑一致（同余拓扑由正整数 $k$ 对应的主同余子群 $\mathrm{UT}^{n(m-2)}(k\mathbb{Z})$ 定义），依据 [ For76，定理 5]。由此可知，$L_m$ 的任意有限像都是同余像，也就是说，它可经由某个 $k \in \mathbb{N}$ 对应的主同余像 $L_m/L_m(k)$ 分解，其中 $L_m(k) = L \cap \mathrm{UT}^{n(m-2)}(k\mathbb{Z})$ 由 $L$ 中所有与 $\mathrm{Id}^{n(m-2)}$ 模 $k\mathbb{Z}$ 同余的矩阵组成。

现在令 $T_m = C_\Delta(V_m)$ 为映射 $\Delta \twoheadrightarrow \Delta_m$ 下 $V_m$ 的中心化子的原像。我们断言，对所有 $m \geq 4$，$T_m = T_4$ 和 $\Delta/T_4 \cong \mathbb{Z}$ 都成立。事实上，任取正整数 $m \geq 4$。根据前面的论证，群 $\Delta/T_m \cong L_m$ 的所有有限商群都具有如下形式

$$\frac{L_m}{L_m(k)} \cong \frac{\Delta_m}{C_{\Delta_m}(V_m/kV_m)}$$

根据引理3.3，这是一个循环群。根据 [Wil24，推论 3.2。12], 可知 $L_m$ 本身也是循环群。此外，$T_m \leq T_4$，因此 $L_m \cong \Delta/T_m \twoheadrightarrow \Delta/T_4 \cong L_4$。但唯一能满射到 $\mathbb{Z}$ 的循环群就是 $\mathbb{Z}$本身，而且 $\mathbb{Z}$ 具有霍普夫性质。因此，断言中的第一条由第二条推出；要证明该断言，只需证明 $\cong \Delta/T_4$ 是无限的。

为此，任取一个奇素数 $p$。根据假设，$\Delta$与 $\Gamma$具有相同的有限像，因此特别地，我们得到一个满同态

$$\Delta_4 \twoheadrightarrow Q_p = \left(\frac{\mathbb{F}_p[x]}{(x-1)^3}\right)^n \rtimes C_p$$

其中，$C_p$ 的生成元通过乘以 $x$ 来作用。$x$ 在换位子 $[Q_p, Q_p] = \left( \begin{smallmatrix} (x-1) & (x-1) \\ & 3 \end{smallmatrix} \right)^n$ 上的作用非平凡，因此特别地 $L_4 \twoheadrightarrow C_p$。由于这对任意奇素数 $p$ 都成立，群 $L_4 \cong \Delta/T_4$ 必定是无限的，断言得证。

为完成该命题的证明，定义 $N = T_4$。根据断言的第一部分，我们有 $N = T_m = C_\Delta(V_m)$，对所有 $m \geq 4$均成立，因此 $N$ 在模 $[\Delta, \Delta]$ 意义下中心化$\gamma_m(\Delta)$，对每个 $m \in \mathbb{N}$均成立。另一方面，断言的第二部分给出$\Delta/N \cong \mathbb{Z}$。命题 3.1 的证明至此完成。

**注 3.4**。设 $N \trianglelefteq \Delta$ 如命题 *3.1* 中所述，并选取 $\zeta \in \Delta$ 使得$\langle \zeta, N\rangle = \Delta$。对于任意 $m > 2$，存在一个 $\mathbb{Z}[x^{\pm}]$-模的同构

$$\frac{\gamma_2(\Delta)}{\gamma_m(\Delta)} \cong \left(\frac{\mathbb{Z}[x]}{(x-1)^{m-2}}\right)^n$$

其中，$x$ 在左侧的作用是由 $\zeta$ 的共轭作用给出的，在右侧则通过乘法作用。

证明。根据命题 3.1，存在 $\zeta \in \Delta$，其像生成 $\Delta/N$。如命题 3.1的证明所示，对于任意 $m > 2$，存在一个分次阿贝尔群同构

$$\frac{\gamma_2(\Delta)}{\gamma_m(\Delta)} \cong \bigoplus_{i=2}^{m-1} \frac{\gamma_i(\Delta)}{\gamma_{i+1}(\Delta)} \cong \bigoplus_{i=2}^{m-1} \mathbb{Z}^n$$

并且，相对于该分次，$\Delta$的共轭作用是上三角的。选取元素 $\{\alpha_{1,1}, \dots, \alpha_{n,1}\} \subset \gamma_2(\Delta)$，它们构成自由阿贝尔群 $\gamma_2(\Delta)/\gamma_3(\Delta)$ 的一组基。由于自由阿贝尔群 $\gamma_2(\Delta)/\gamma_3(\Delta)$ 与 $\gamma_3(\Delta)/\gamma_4(\Delta)$ 的秩相等，我们得出，对于 $i = 1, \dots, n$, 元素 $\alpha_{i,2} := [\zeta, \alpha_{i,1}] = \zeta\alpha_{i,1}\zeta^{-1} - a_{i,1}$ 构成 $\gamma_3(\Delta)/\gamma_4(\Delta)$ 的一组基。以同样的方式继续，我们对所有 $1 \le i \le n$ 和 $1 \le j < m-2$ 定义 $\alpha_{i,j+1} := [\alpha_{i,j}, \zeta]$，并注意到，对所有 $1 \le i \le n$，$\zeta\alpha_{i,m-2}\zeta^{-1} = \alpha_{i,m-2}$ 成立。自由阿贝尔群 $\gamma_2(\Delta)/\gamma_m(\Delta)$ 以 $\{\alpha_{i,j} \mid 1 \le i \le n, 1 \le j \le m-2\}$ 为基，并具有一个 $\mathbb{Z}[x]$-模结构，其中 $x$ 在 $\Delta$内的作用是由 $\zeta$的共轭作用给出的。现在考虑 $\mathbb{Z}[x]$-模之间的同态

$$\phi\colon \mathbb{Z}[x]^n \to \frac{\gamma_2(\Delta)}{\gamma_m(\Delta)}$$

由将 $\mathbb{Z}[x]^n$ 的第 $i$ 个基向量 $e_i$ 映射到 $\phi(e_i) = \alpha_{i,1}$ 生成。由于对所有 $i$ 和 $j > 1$，$\alpha_{i,j} = \phi\left((x-1)^{j-1}\alpha_{i,1}\right)$ 成立，因此该映射是满射。另一方面，可以发现 $\mathrm{Ker}(\phi) = (x-1)^{m-2}$。因此，$\phi$ 便导出了所提出的同构。□

## 4. Lifting Centralisers

在本节中，我们将命题3.1 从关于极大幂零商群的相对结论，提升为关于任意群的全局结论 $\Delta$，其中该群属于 $\Gamma$的有限剩余亏格。具体而言，我们证明以下结果。

**命题 4.1**。设 $n \in \mathbb{N}$ 为一个正整数，$\Gamma = \mathbb{Z}^n \wr \mathbb{Z}$ 为相应的无挠灯笼群，且 $\Delta$ 为一个满足 $\Delta \cong \Gamma$ 的有限生成剩余有限群。存在一个阿贝尔正规子群 $N \trianglelefteq \Delta$，它在 $\Delta$ 中中心化换位子 $[\Delta, \Delta]$，并满足 $\Delta/N \cong \mathbb{Z}$。

我们将命题 4.1 的证明分成其陈述中的两个部分：见下文的引理4.2 和引理 4.3 。注意，若已知 $\Delta$ 是剩余幂零的，那么引理 4.2 便可直接由命题 3.1推出；然而，与 $\Gamma$不同，我们没有先验理由相信 $\Delta$ 满足这一条件。

设 $n \in \mathbb{N}$ 为一个正整数，设 $\Gamma = \mathbb{Z}^n \wr \mathbb{Z}$ 为相应的无挠灯笼群，并设 $\Delta$ 为满足以下条件的有限生成剩余有限群。$\Delta \cong \Gamma$。设 $N \trianglelefteq \Delta$ 为命题 3.1所给出的子群。

**引理 4.2.** 子群 $N \trianglelefteq \Delta$ 中心化导出子群 $\gamma_2(\Delta)$（属于 $\Delta$）。

证明。设 $D = \gamma_2(\Delta) = [\Delta, \Delta]$，将其视为诺特整环 $\mathbb{Z}[\Delta^{\mathrm{ab}}]$ 上的模，其中 $\Delta^{\mathrm{ab}}$ 通过在 $\Delta$中的共轭作用作用。根据命题 3.1，商 $\Delta/N$ 是循环的，因此我们可以选取一个元素 $\zeta \in \Delta$ 使得 $\langle N, \zeta\rangle = \Delta$。

由于 $\Delta/D \cong \Delta^{\mathrm{ab}} \cong \Gamma^{\mathrm{ab}} \cong \mathbb{Z}^n$ 是幂零的，P. Hall 的经典结果蕴含[Rob96, Exercise 15.4.2]，即$\bigcap_p$ 素数$pD = 0$。此外，对于每个素数 $p$， $\mathbb{Z}[\Delta^{\mathrm{ab}}]$-模 $D/pD$ 都是剩余有限的 $\mathbb{Z}[\Delta^{\mathrm{ab}}]$，因为 $\mathbb{Z}[\Delta^{\mathrm{ab}}]$ 是有限生成交换环 [OR70, Theorem 1]。因此，只需证明 $N$ 对任何形如 $V = D/L$ 且满足 $L \geq pD$ 的有限$\mathbb{F}_p[\Delta^{\mathrm{ab}}]$-模都施加共轭作用。事实上，任取一个素数$p$，并令 $V = D/L$为一个满足 $L \geq pD$的有限 $\mathbb{F}_p[\Delta^{\mathrm{ab}}]$-模。我们记$\rho_V\colon \Delta \to \Delta^{\mathrm{ab}} \to \mathrm{GL}(V)$ 为共轭作用映射。

**断言：** 对于任意 $\nu \in N$， $\rho_V(\nu) \in \mathrm{GL}(V)$ 的阶是 $p$ 的幂。事实上，反设存在 $\nu \in N$，使得 $\rho_V(\nu) \in \mathrm{GL}(V)$ 的阶可被某个具有正重数的素数 $q \neq p$ 整除。我们可以写成 $\mathrm{ord}(\rho_V(\zeta)) = q^l r$，其中 $l \geq 0$ 和 $r \in \mathbb{N}$ 互素，且 $r \in \mathbb{N}$ 与 $q$ 互素。 $\Delta^{\mathrm{ab}}$ 的作用固定每个 $m \in \mathbb{N}$ 的 $\gamma_m(\Delta)$，因此子群 $\gamma_m(\Delta) \trianglelefteq D$ 构成一个 $\mathbb{Z}[\Delta^{\mathrm{ab}}]$-子模。于是考虑 $\mathbb{Z}[\Delta^{\mathrm{ab}}]$-模

$$W = \frac{D}{qD + \gamma_{q^l+2}(\Delta)} \cong \frac{\mathbb{F}_q[x]}{(x-1)^{q^l}}$$

其中该同构源自注 3.4。记 $\rho_W\colon \Delta \to \Delta^{\mathrm{ab}} \to$ 一般线性群$(W)$ 为共轭作用映射。根据命题 3.1，元素 $\nu \in N$ 在 $W$上平凡作用，因此 $\mathrm{ord}(\rho_W(\nu)) = 1$。另一方面， $\zeta$的作用相当于乘以 $x$，因此 $\mathrm{ord}(\rho_W(\zeta)) = q^l$。现在 $p$ 与 $q$ 互素，因此得到一个直和分解

$$T := \frac{D}{\big(qD + \gamma_{q^l+2}(\Delta)\big) \cap L} \cong V \oplus W$$

作为 $\mathbb{Z}[x^{\pm}]$-模。将 $A = \mathrm{GL}(W)$ 和 $B = \mathrm{GL}(V)$，以及 $a = \rho_W(\zeta^r)$ 和 $b = \rho_V(\zeta^r)$ 和 $b' = \rho_V(\nu)^{\mathrm{ord}(\rho_V(\nu))/q}$ 记作这样，我们发现 $\mathrm{ord}(a) = \mathrm{ord}(b) = q^l$，而 $\mathrm{ord}(b') = q$。由引理 2.5 可知， $\zeta^r$ 和 $\nu^{\rho_V(\nu))/q}$ 在 $\mathrm{Aut}(T) \cong A \times B$ 中的像生成了一个与 $C_{q^l} \times C_q$ 同构的 $\mathrm{Aut}(T)$ 子群，这与引理 3.3 矛盾。这就证明了该断言。

为完成引理 4.2 的证明，我们要证明 $N$ 中心化 $V$。事实上，反设存在一个 $\nu \in N$，它在 $V$ 上的作用非平凡。由该断言可知，对某个正整数 $k \geq 1$，有 $\mathrm{ord}(\rho_V(\nu)) = p^k$。令 $m(x) \in \mathbb{F}_p[x]$ 为 $\zeta$ 在 $V$ 上作用的最小多项式。我们可以将其分解为 $m(x) = m_0(x)m_1(x)$，其中 $m_0(x) = (x-1)^d$，且 $d \geq 0$ 和 $m_1(1) \neq 0$，也就是说，$m_1(x)$ 与 $(x-1)$ 互素。利用主分解定理，我们得到一个由 $\zeta$ 不变的向量空间分解

$$V = V_0 \oplus V_1$$

使得 $m_i$ 是 $V_i$ 上 $\zeta$ 关于 $i = 0$、1 的最小多项式。由于 $N$ 和 $\zeta$在作用于 $V$ 时可交换，我们推得每个 $V_i$ 实际上都是$\mathbb{Z}[\Delta^{\mathrm{ab}}]$的子模。根据构造，存在 $(x-1)$ 的某个幂将 $V_0$消去。根据断言， $\rho_V(N)$是一个有限 $p$-群，因此它在 $V$上的作用也必定是幺幂的。又由于 $\rho_V(N)$和 $\rho_V(\zeta)$在 $V$上的作用可交换，我们可以推断，$\Delta^{\mathrm{ab}}$ 在 $V$上的作用也是幺幂的，即

$$\mathfrak{I}^s V_0 = 0$$

其中 $\mathfrak{I}$ 是 $\mathbb{F}_p[\Delta^{\mathrm{ab}}]$ 的增广理想， $s \in \mathbb{N}$ 是一个正整数。特别地，对于某个整数 $s \geq 1$， $V_0$ 是 $D/\mathfrak{I}^s D = \gamma_2(\Delta)/\gamma_{n+2}(\Delta)$的同态像。由此根据命题 3.1可知， $\nu$ 中心化 $V_0$。因此，只需证明 $\nu$ 中心化 $V_1$，并且我们不妨假设$V = V_1$ 与 $\zeta$ 作用于 $V$ 时的最小多项式 $m(x)$互素于 $(x-1)$。

和之前一样，我们可以写成 $\mathrm{ord}(\rho_V(\zeta)) = p^l s$，其中 $l$ 是某些整数， $s \in \mathbb{N}$ 满足 $s$ 与 $p$ 互素。同样， $\gamma_m(\Delta)$ 在 $\Delta^{\mathrm{ab}}$ 的共轭作用下作为集合保持不变，因此它构成一个 $\mathbb{Z}[x]$-子模，属于 $D$，我们可以考虑这个 $\mathbb{F}_p[\Delta^{\mathrm{ab}}]$-模

$$W = \frac{D}{pD + \gamma_{p^l+2}(\Delta)}$$

它构成一个 $\mathbb{F}_p$维数为 $p^l n$的向量空间。注意， $\zeta$在 $W$上的最小多项式为 $(x-1)^{p^l}$，如注记 3.4所述。因此， $\zeta$ 在 $W$ 上的最小多项式与 $m(x$互素，由主分解定理可得一个同构

$$S := \frac{D}{\big((pD + \gamma_{p^l+2}(\Delta)\big) \cap L} \cong W \oplus V$$

作为 $\mathbb{Z}[x]$-模。记 $A = \mathrm{GL}(W)$ 和 $B = \mathrm{GL}(V)$，以及 $a = \rho_W(\zeta^r)$、$b = \rho_V(\zeta^r)$ 和 $b' = \rho_V(\nu)$，我们发现 $\mathrm{ord}(a) = \mathrm{ord}(b) = p^l$，而 $\mathrm{ord}(b') = p^k$。此外，根据命题 3.1，元素 $\nu \in N$ 在 $W$ 上平凡作用。由引理 2.5 可知， $\zeta^r$ 和 $\nu$ 在 $\mathrm{Aut}(S)$ 中的像 $\cong A \times B$ 生成了 $\mathrm{Aut}(T)$ 的一个子群，该子群同构于 $C_{p^l} \times C_{p^k}$，这与引理 3.3 矛盾。我们得出结论：任何 $\nu \in N$ 都必须与 $V$ 对易，证明完成。□

**引理 4.3.** 群 $N$ 是阿贝尔群。

证明。 我们首先构造无挠灯笼群 $\Gamma = \mathbb{Z}^n \wr \mathbb{Z}$ 的一个有限商群共尾族。考虑 $\Gamma$ 在（1.1）中的半直积约化，并固定自由 $a_1$-模 $a_n$ 的生成元 $\mathbb{Z}[\langle t \rangle]$，使得 $M$作为群可由 $\Gamma$， $a_1$，.....， $a_n$ 和 $t$ 表示。给定一个正整数 $m \in \mathbb{N}$，定义

$$\Gamma(m) = C_m^n \wr C_m \cong R_m^n \rtimes C_m$$

其中 $R_m$ 是环的加法阿贝尔群

$$R_m = \frac{(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})[x]}{(x^m - 1)}$$

而 $C_m$ 的生成元 $\tau_m$ 在 $R_m$ 的每个副本上都作用为乘以 $x$。自然映射 $M \twoheadrightarrow R_m$ 和 $\langle t \rangle \twoheadrightarrow C_m$ 给出一个满同态 $\pi_m \colon \Gamma \twoheadrightarrow C_m$。事实上，给定任意有限指数正规子群 $U \trianglelefteq \Gamma$，令 $m = 2 \cdot [\Gamma : U]$ 且$V = \langle\langle t^m, a_1^m, \ldots, a_n^m \rangle\rangle \trianglelefteq \Gamma$，即可得到 $V \leq U$和 $\Gamma/V \cong \Gamma(m)$。因此，集合 $\{\Gamma(m) : m \in \mathbb{N}\}$是有限商群逆系统 $\mathcal{C}(\Gamma) = \mathcal{C}(\Delta)$ 的共尾子系统。要证明 $N$ 是阿贝尔群，只需证明对于 $m > 2$， $\pi_m(N) \leq \Gamma(m)$ 是阿贝尔群。此外，由引理 4.2 可得 $\pi_m(N) \leq C_{\Gamma(m)}([\Gamma(m)\ \Gamma(m)])$，因此，只需证明对于每个正整数 $m > 2$，中心化子 $Z(m) = C_{\Gamma(m)}([\Gamma(m)\ \Gamma(m)]) \trianglelefteq \Gamma(m)$ 是阿贝尔群。

事实上，我们将证明 $Z(m) = R_m^n$，它按构造即为阿贝尔群。一方面，我们有 $[\Gamma(m)\ \Gamma(m)] = (x-1)R_m^n$，它被其阿贝尔超群 $R_m^n$中心化，因此 $R_m^n \leq Z(m)$。反过来，为了导出矛盾，假设存在 $z \in Z(m) \backslash R_m^n$。不失一般性，我们可以假设 $z = \tau^k$，其中某个 $k \in \{1, \ldots, m-1\}$。 $z$中心化 $[\Gamma(m)\ \Gamma(m)]$这一条件

等价于 $\tau^k - 1$ 消去 $(x-1)R_m^n$，而这又等价于方程 $(x^k-1)(x-1) = 0$ 在 $R_m$中成立。现在，若 $k \neq 1$，则

$$(x^k-1)(x-1) = x^{k+1} - x^k - x + 1 \neq 0$$

因为 $x \notin \{1, x^k, x^{k+1}\}$ 和 $1,\ x,\ \dots x^{m-1}$ 是作为自由 $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$-模的 $R_m$ 的一组基。另一方面，如果 $k = 1$ 那么

$$(x^k-1)(x-1) = x^2 - 2x + 1 \neq 0$$

因为 $m > 2$。这与 $z \in Z(m)$ 矛盾，因此我们得出 $Z(m) = R_m^n$ 是阿贝尔的，证明完毕。□

引理 4.3 与引理 4.2 共同推出命题 4.1。

## 5. The Proof of Theorem A

本节中，我们结合命题 4.1 和定理 2.1 来证明定理 A。

**定理 A。** 令 $n \in \mathbb{N}$ 为正整数。无挠灯笼群$\Gamma_n = \mathbb{Z}^n \wr \mathbb{Z}$ 在绝对意义下具有有限剩余完备化刚性。

事实上， $\Delta$是一个有限生成剩余有限群，并且其有限群完备化之间存在一个同构$\widehat{\ }\quad\widehat{\ }\ \phi\colon\ \Delta \to \Gamma$。根据命题 4.1，存在一个正规阿贝尔子群 $N \trianglelefteq \Delta$，使得 $N \leq C_\Delta([\Delta,\Delta])$，且 $\Delta/N \cong \mathbb{Z}$ 是由某个 $\zeta \in \Delta$的像生成的无限循环群。于是，阿贝尔子群$N$ 获得了一个在环 $\Lambda = \mathbb{Z}[x^{\pm}]$ 上的模结构，其中 $x$ 在超群 $\Delta$中作为由 $\zeta$ 诱导的共轭作用。类似地，分解 (1.1) 给出$\Gamma \cong M \rtimes \mathbb{Z}$，其中 $M$ 是秩为 $n$ 的自由 $\Lambda$-模，而 $x$ 在 $\Gamma$中作为由 $t$诱导的共轭作用。我们先给出以下引理。

**引理 5.1.** 令 $N$ 和$\overline{M}$ 分别表示 $\Delta$ 和 $\Gamma$中的 $N$ 和 $M$ 的闭包。有限剩余群 $\Delta$ 和 $\Gamma$的同构 $\phi\colon\ \Delta \to \Gamma$必满足 $\phi(N) = M$。

证明。 首先，我们将证明包含关系 $\phi(N) \leq M$ 成立。反设不成立，则 $M \lneq \phi(N) \cdot M$ 成立。根据 [RZ10，命题 3.2。5]，存在一个有限剩余群的同构

$$G := \widehat{\Gamma}/\overline{M} \cong \widehat{\Gamma/M} \cong \widehat{\mathbb{Z}}$$

并且 $G$有一个非平凡子群 $H := \phi(N) \cdot M/\overline{M}$。根据 [RZ10，定理 2.7.2],存在一个素数 $p$ 和一个自然数 $s \in \mathbb{N}$，使得 $p$-Sylow 子群 $H_p \trianglelefteq H$ 非平凡，且是 $p$-Sylow 子群$\sim$ $\sim G_p \trianglelefteq G$的子群，指数为 $[G_p :\ H_p] = p^s$。令 $H_p$ 为 $H_p$ 在 $\Gamma$中的原像。现在，命题 4.1 告诉我们，子群 $N$ 在 $\Delta$中中心化 $[\Delta,\Delta]$，因此像$\sim$ $\sim$ $\sim\phi(N)$ 必须在有限剩余群 $\Gamma$中中心化换位子 $\phi([\Delta,\Delta])$ $= [\Gamma,\Gamma]$。$\widehat{\ }\ \widehat{\ }$ 类似地， $M \leq C_\Gamma([\Gamma,\Gamma])$，因而 $M \leq C_{\widehat{\Gamma}}([\Gamma,\Gamma])$ 成立。由此可知，$\phi(N)$ $\cdot M$$\widehat{\ }\ \widehat{\ }$ $\sim$ 中心化换位子 $[\Gamma,\Gamma]$，这一性质也传递到其子群 $H_p$。因此，对于任意有限商群 $\Gamma \twoheadrightarrow Q$，复合映射

$$\varpi\colon \Gamma \twoheadrightarrow Q \twoheadrightarrow Q/C_Q([Q,Q]) =: T$$

诱导出 $p$-西罗子群之间的满同态 $\varpi(G_p/H_p) \twoheadrightarrow T_p$。特别地，存在一个素数 $p$，使得 $|T_p| \leq [G_p :\ H_p] = p^s$，也就是说，在群集 $Q/C_Q([Q,Q])$ 中， $Q$ 取遍各值时， $p$-西罗子群的阶有界

通过 $\Gamma$ 的有限商群。这与商群 $\Gamma \twoheadrightarrow \mathbb{F}_p[C_{p^l}] \rtimes C_{p^l} =: Q_{p,\ l}$ 的存在相矛盾，其中 $p$ 为任意素数且 $l \in \mathbb{N}$ 任意。

我们推知包含关系 $\phi(N) \leq M$ 成立。因此，我们得到一个正合行构成的交换图

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \longrightarrow & \overline{N} & \longrightarrow & \widehat{\Delta} & \longrightarrow & \widehat{\Delta/N} & \longrightarrow & 1 \\ & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \phi} & & \downarrow{\scriptstyle \widetilde{\phi}} & & \\ 1 & \longrightarrow & \overline{M} & \longrightarrow & \widehat{\Gamma} & \longrightarrow & \widehat{\Gamma/M} & \longrightarrow & 1 \end{array}$$

由 [RZ10，命题 3.2。5]。诱导映射 $\phi$ 由五引理可知是满射。但是，命题 4.1 给出 $\Delta/N \cong \mathbb{Z} \cong \Gamma/M$，且有限生成有限剩余群具有霍普夫性质 [RZ10，引理 2.5。2], 因此 $\phi$ 实际上必须是同构。再次应用五引理可得 $\phi(N) = M$，正如所设。□

此外，在各自的有限剩余完备化 $\Gamma$ 和 $\Delta$ 中，$M$ 与 $N$ 的闭包 $M$ 和 $N$ 通过环境有限群中的共轭，获得有限剩余 $\Lambda$-模的结构。根据 [Wyk25a，引理 5.2], ，这些定义在 $N$ 和 $M$ 上的 $\Lambda$-模结构，同构于模 $\Lambda$-$\widehat{\ }$ $M$ 和 $N$ 的 $\Lambda$-有限剩余完备化，我们分别将其记为 $M$ 和 $N$。由引理 5.1 可得一个交换图

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \longrightarrow & \overline{N} \cong \widehat{N} & \longrightarrow & \widehat{\Delta} & \longrightarrow & \widehat{\Delta/N} \cong \widehat{\mathbb{Z}} & \longrightarrow & 1 \\ & & \downarrow{\scriptstyle f} & & \downarrow{\scriptstyle \phi} & & \downarrow{\scriptstyle \widetilde{\phi}} & & \\ 1 & \longrightarrow & \overline{M} \cong \widehat{M} & \longrightarrow & \widehat{\Gamma} & \longrightarrow & \widehat{\Gamma/M} \cong \widehat{\mathbb{Z}} & \longrightarrow & 1 \end{array}$$

其中，$\phi$ 是有限剩余群 $\mathbb{Z}$的诱导自同构，而 $f$ 是将 $f = \phi|_N$ 限制为$N \to M$后得到的有限交换群同构。由该图表的交换性可知，$f$ 构成了有限剩余群 $\Lambda$-模的扭曲同构，即

$$f(\lambda \cdot a) = \widetilde{\phi}(\lambda) \cdot f(a) \tag{5.1}$$

对所有 $a \in N$ 和 $\lambda \in \Lambda$均成立。现在考虑由下式给出的有限交换群同构的复合：

$$F \colon \widehat{\Lambda}^n \xrightarrow{(\widetilde{\phi}^{-1})^n} \widehat{\Lambda}^n \xrightarrow{\sim} \widehat{M} \xrightarrow{f} \widehat{N}$$

其中，中心映射是将某个同构完备化后得到的，该同构证明了这个 $\Lambda$-模 $M$ 是秩为 $n$的自由模。注意，对于任意的 $\lambda \in \Lambda$ 和 $\vec{\omega} \in \Lambda^n$，我们有

$$\begin{aligned} F(\lambda \cdot \vec{\omega}) &= f\left((\widetilde{\phi}^{-1})^n(\lambda \cdot \vec{\omega})\right) \\ &= f\left(\widetilde{\phi}^{-1}(\lambda) \cdot (\widetilde{\phi}^{-1})^n(\vec{\omega})\right) \\ &= \widetilde{\phi}\left(\widetilde{\phi}^{-1}(\lambda)\right) \cdot f\left((\widetilde{\phi}^{-1})^n(\vec{\omega})\right) \\ &= \lambda \cdot F(\vec{\omega}) \end{aligned}$$

因此实际上 $F$ 构成了一个逆有限 $\Lambda$-模同构。因此， $\Lambda$-模 $N$ 与秩为 $n$的自由模逆有限同构。但自由 $\Lambda$-模 $\Lambda$根据定理2.1 和定理2.2的联合结论，是逆有限刚性的。因此我们得出 $M \cong \Lambda^n$ ，并且存在一个同构

$$\Delta \cong N \rtimes_x \mathbb{Z} \cong \Lambda^n \rtimes_x \mathbb{Z} \cong M \rtimes_x \mathbb{Z} \cong \Gamma$$

作为离散群。我们已经证明 $\Gamma$在绝对意义上具有有限商刚性，定理A的证明至此完成。

## References


[BFZ24] Sahana Balasubramanya、Francesco Fournier-Facio 和 Matthew C. B. Zaremsky。*Hyperbolic actions of Thompson's group F and generalizations* 2024 2406.。。arXiv：。：。[12982 [math.GR] URL https://arxiv.org/abs/2406.12982

BG04] Martin Bridson 和 Fritz Grunewald。“关于有限剩余完备化与群表示的 Grothendieck 问题”。载于：*Annals of Mathematics* 160.1（2004年7月），第359–373页。DOI：10.4007/annals.2004.160.359。[Bla25] Guy Blachar。“灯笼群的有限剩余刚性”。载于：*Proceedings of the American Mathematical Society* 2025 ISSN 0002 9939 DOI 10.1090/proc/17334 （7月）。：-。：。URL：http://dx.doi.org/10.1090/proc/17334。[BW15] Martin R. Bridson 和 Henry Wilton。“有限剩余完备化的平凡性问题”。载于：*Inventiones Mathematicae* 202 2 2015 ISSN 1432 1297 DOI 10.1007/。s00222-015-0578-8（）。：-。：。[CFP96] J W Cannon、W J Floyd 和 W R Parry。“Richard Thompson 群导论笔记”。载于：*Enseign. Math. (2)* 42（3-4，1996年），第215–256页。ISSN：0013-8584。[Dix+82] John D Dixon 等。“有限剩余完备化与同构的有限商群”。载于：*Journal of Pure and Applied Algebra* 23 3 1982 227 231 ISSN 0022 4049 DOI （），第–页。:-。：https://doi.org/10.1016/0022-4049(82)90098-6。[For76] Edward Formanek。“多循环群中的共轭可分性”。载于：*Journal of Algebra* 42 1 1976 1 10 ISSN 0021 8693 DOI 。（），第–页。:-。：https://doi.org/10.1016/0021-8693(76)90021-1。[Gro70] Alexander Grothendieck。“离散群的线性表示与有限剩余紧化”。载于：*Manuscripta Mathematica* 2.4（1970年12月），第375–396页。ISSN：1432-1785。[GT24] Anthony Genevois 和 Romain Tessera。*Lamplighter-like geometry of groups*。2024年。arXiv：2401.13520 [math.GR]。URL：https://arxiv.org/abs/2401.13520。[NRR82] G A Noskov、V N Remeslennikov 和 V A Roman'kov。“无限群”。载于：*of Soviet Mathematics* 18 5 1982 669 735 DOI 10.1007/BF01091962 *Journal*（），第–页。:。[NS07] Nikolay Nikolov 和 Daniel Segal。“关于有限生成有限剩余群，I：强完备性与一致界”。载于：*Annals of Mathematics* 165 (1，2007年1月)，第171–238页。DOI：10.4007/annals.2007.165.171。[NS21] Nikolay Nikolov 和 Dan Segal。“构造具有相同有限群完备化的不可数多个群”。载于：*New Zealand Journal of Mathematics* 52（2021年12月），第765–771页。ISSN：1179-4984。DOI：10.53733/89。[OR70] Morris Orzech 和 Luis Ribes。“环中的剩余有限性与 Hopf 性质”。载于：*Journal of Algebra* 15 1 1970 81 88 ISSN 0021 8693 DOI 10.1016/（5月），第–页。:-。:。0021-8693(70)90087-6。[Pic74] P F Pickel。“具有相同有限商群的后代数群”。载于：*Bulletin of the Australian Mathematical Society* 11 1 1974 115 120 （），第–页。[Rob96] Derek J. S. Robinson。*A course in the theory of groups*。第二版。第80卷。《数学研究生教材》。施普林格出版社，纽约，1996年，第xviii+499页。ISBN：0-387-94461 3 DOI 10.1007/978-1-4419-8594-1 URL https://doi.org/10.1007/978-1- -。:。:。[RZ10] Luis Ribes 和 Pavel Zalesskii。*Profinite groups*。第二版。第40卷。施普林格出版社，柏林，2010年。ISBN：978-3-642-01641-7。DOI：10.1007/978-3-642-01642-4。[Seg83] Daniel Segal。*Polycyclic Groups*。《剑桥数学丛书》。剑桥大学出版社，1983年。

[Sus77] A A 苏斯林。“多项式环上特殊线性群的结构”。载于：*Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.* 41 (2, 1977年)，第235–252、477页。 ISSN：0373-2436。[Wil24] G Wilkes。*Profinite Groups and Residual Finiteness*。EMS Press，2024年。 ISBN：9783-9854-7078-5。 DOI：10.4171/ETB/27。[Wyk25a] Julian Wykowski。*Profinite Rigidity over Noetherian Domains* 2025 2502.。。。arXiv：。：。10278 [math.GR] URL https://arxiv.org/abs/2502.10278
[Wyk25b] Julian Wykowski。 *The Profinite Rigidity of Free Metabelian Groups*。2025年。arXiv：2503.10321 [math.GR]。 URL： https://arxiv.org/abs/2503.10321。[WZ19] Henry Wilton 和 Pavel Zalesskii。“三维流形分解的有限型检测”。载于： *Compositio Mathematica* 155 (2，2019年1月)，第246–259页。 ISSN：1570-5846。 DOI：10.1112/s0010437x1800787x。

Mathematical Institute、 University of Oxford、 Andrew Wiles Building、 Radcliffe Observatory Quarter、 Woodstock Road、 Oxford OX2 6GG、 United Kingdom*Email address*：nikolay.nikolov@maths.ox.ac.uk

Department of Pure Mathematics and Mathematical Statistics、 Centre for Mathematical Sciences、 Wilberforce Road、 Cambridge CB3 0WB、 United Kingdom*Email address*：jw2006@cam.ac.uk