arXiv:2512.19333v1 [hep-ex] 22 Dec 2025

双峰发现实验中似然比检验统计量的渐近分布

Clara Bertinelli Salucci、Hedvig Borgen Reiersrud、A. L.Read、Anders Kvellestad、Riccardo De Bin

2025年12月

摘要

似然比检验广泛应用于高能物理领域，其中通常假设检验统计量服从威尔克斯定理所规定自由度的卡方分布。当信号或耦合强度等参数被限制为非负，且其在零假设下的取值位于参数空间边界时，这一假设便不再成立。基于近期对两个参数位于边界时似然比检验统计量正确渐近分布的澄清，我们重新探讨双峰信号加背景计数实验中的显著性估计问题。在高能物理文献中，此类实验通常采用Wilks卡方分布或单参数Chernoff极限进行分析。我们表明，这些方法可能导致显著性校准严重失准；而检验统计量的分布实际上可由一个卡方混合分布很好地描述，其权重由Fisher信息矩阵决定。我们的结果凸显了在分析双峰计数实验时采用边界感知渐近理论的必要性。

1 引言

在基于似然的统计推断中，尤其是在通过似然比检验进行假设检验时，人们几乎普遍假定，在零假设下，检验统计量的分布可渐近地近似为卡方分布，其自由度等于所考虑的感兴趣参数的个数，这一结论源自威尔克斯定理 [1]。人们常常忽视的是，该定理依赖一组正则条件——包括可辨识性、与参数无关的支撑集、真实参数的内点性、对数似然的光滑性，以及巴特利特恒等式的

满足——而这些条件并非鲜少遭到违反。近期，Brazzale 和 Mameli [2] 以及 Algeri 等人 [3]的研究重新引起了人们对这一疏漏的关注。只要零假设将某个参数固定在其定义域的边界上，就会违反内点条件，此时极大似然估计量被限制在边界的一侧。因此，经典渐近理论所依据的通常对称性遭到破坏，估计量和似然比统计量呈现出非标准的极限行为。然而，即便在此类情形下，若能获得渐近分布的闭式表达式，在实践中也尤为有价值，因为基于模拟或数据的校准在计算上可能代价高昂 [4] ，甚至无法实现。

Chernoff 对这个问题进行了首次严格分析 [5], ，他指出，对边界上的单个感兴趣参数进行检验，会得到一个极限分布：它由零点处的点质量和一个 χ^2_1 按 50:50 混合而成，通常写作 $\frac{1}{2}\chi^2_0 + \frac{1}{2}\chi^2_1$。当推广到多个受约束参数时，区分感兴趣参数和干扰参数十分重要；后者通常通过似然剖面处理。对于边界上的两个感兴趣参数，似然比统计量的零假设分布是 χ^2_0、 χ^2_1 和 χ^2_2 的混合，其权重由边界处的 Fisher信息矩阵决定 [6, 7]。当边界上的两个参数分别为一个感兴趣参数和一个干扰参数时，如果二者正相关 [1], ，我们仍得到相同的 χ^2_0、 χ^2_1 和 χ^2_2 混合分布，但权重形式不同，且由 Fisher 信息的另一种函数决定 [8]。在负相关的情况下，零假设分布不再是精确的卡方混合分布，但可以用正相关情形下适用的混合分布的一个修正版来近似 [7]。

然而，物理学文献中常见的做法是依赖 Wilks卡方分布，至多针对一个位于边界上的参数进行校正。例如， γ射线天文学中的谱线搜寻通常使用 Wilks 分布或 Chernoff分布报告局部显著性，即使所扫描的模型实际上涉及两个受约束振幅（双线搜索） [9, 10, 11],，或者在将第二条谱线的振幅视为干扰参数时进行逐线检验 [12], ，却忽略了即便作为干扰参数，该参数仍位于边界上，必须据此加以处理。对撞机光谱分析也通常在不变质量谱 [13, 14]的扩展似然拟合中，一次检验一个峰，或比较单峰与双峰信号加背景模型。这种做法足以确立单个结构的存在；但如果一种理论依据充分的理论将两个相邻峰联系起来（例如固定它们的相对位置或强度），联合检验便能提高检验效能、缩窄区间，并避免分别逐峰扫描时不可避免地产生重复的“试验次数效应”。

人们或许会疑惑，采用不同的渐近分布是否真的有必要，因为在单峰和双峰搜索中，零假设通常仍然是“完全没有峰”

[1]在全文中，提到参数相关时，我们指的是它们的估计量相关；在频率学派框架下，这种相关性由协方差（或费 Fisher 信息）矩阵量化。

。关键在于，备择假设的结构至关重要。允许两个可能非零的振幅会扩大参数空间，而似然比检验必须考虑数据可能支持其中一个峰或两个峰的情形。因此，即使数据仅包含背景，极大似然估计量仍可能落在一个或两个边界上，这会改变问题的几何结构，并改变检验统计量的极限分布，尽管零假设本身并未改变。文献中常见的另一种情形是，将两个振幅之一视为感兴趣参数，另一个视为干扰参数。然而，在仅有背景的数据下，干扰振幅仍处于边界上；它的存在会改变似然比统计量的渐近分布，但方式不同于将两个振幅都视为感兴趣参数的情形。正如本文所示，采用错误的渐近参照分布会导致p值和局部显著性的系统性校准偏差，直接影响发现声明的可靠性。

本文采用一个典型的玩具示例，通过受物理启发的模拟，展示当两个参数位于边界上时，似然比检验统计量的正确渐近分布。我们考虑一个类似于 [3], 中所述的信号加背景实验，但其中包含双峰信号；这很好地抽象了前述文章所涉及的情形。我们考察当两个边界上的参数都受到关注，以及其中一个参数为干扰参数时，依赖错误参考分布所产生的后果。我们特别关注参数化方式的选择，因为事实证明，这对于维持大样本理论的有效性至关重要。我们还推导并给出了费 Fisher 信息矩阵的解析表达式，该矩阵决定了问题的几何结构以及所得卡方混合分布的权重。

本文其余部分安排如下：第 2 节介绍双峰信号加背景情形。第 3 节介绍似然比检验以及一个和两个参数位于边界上的渐近结果，讨论当前情形下适当的参数化方式，并展示模拟结果。第 4 节分析这些发现的意义，并探讨这一框架在不同实验情形中的适用性。第 5 节给出结论。

2 双峰信号加背景实验

考虑这样一项实验：在能量范围$[E_{\min}, E_{\max}]$内观测到 N 个事件，每个事件 i($i = 1$，2，.....，N)均由测得的能量 E_i表征。分析旨在探究是否存在一种新现象，它会在能谱中产生两个不同的结构；这两个结构以信号事件的平均数量 μ_1 和 μ_2 量化，并叠加在预期产额为 β的背景之上。信号被建模为截断的高斯密度

在该能量区间内，其均值 γ_1 和 γ_2 已知，方差为1，

$$g_j(E) \;=\; \frac{\exp\!\left(-\tfrac{1}{2}(E-\gamma_j)^2\right)}{\int_{E_{\min}}^{E_{\max}} \exp\!\left(-\tfrac{1}{2}(u-\gamma_j)^2\right)\,du}, \qquad j=1,2.$$

背景由指数密度描述，

$$b(E;\phi_1,\phi_2) = \frac{\exp(\phi_1 E + \phi_2 E^2)}{\int_{E_{\min}}^{E_{\max}} \exp(\phi_1 u + \phi_2 u^2)\,du},$$

且信号和背景的概率密度函数均经过归一化，使其在所考虑的区间上积分为 1。图1展示了这一配置的一个示例：两个信号峰叠加在指数背景之上，同时还显示了在零假设（仅有背景）下抽取的观测值。这个玩具示例本质上是对 [3] 中所考虑示例的双峰扩展。它旨在作为此类众多问题的典型抽象；尽管它直接扩展了单峰设定，但由于边界上有两个参数而非一个，因此需要采用截然不同的分析方法。

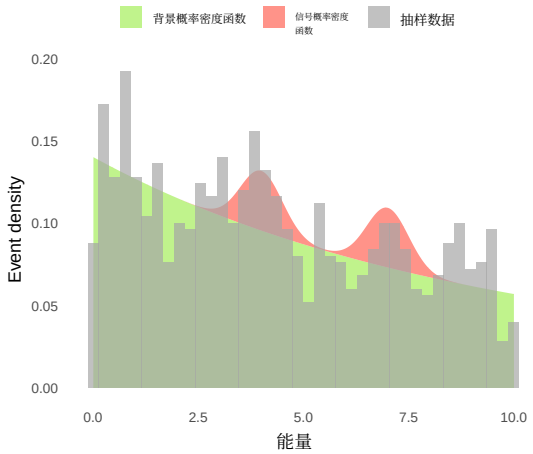

图1：分析中始终使用的双峰玩具模型示意图。绿色区域对应背景分量，其模型为归一化指数密度；红色区域表示两个截断高斯信号分量之和（双峰信号）；灰色直方图则显示了在零假设下模拟生成的一组数据。

期望信号计数 μ_1 和 μ_2 是感兴趣参数；期望背景计数 β以及背景模型的形状参数 ϕ_1 和 ϕ_2 则被视为干扰参数，即虽非直接关注、但为进行推断而必须估计的参数。该

零假设对应于两个信号均不存在的情形，即 $\mu_1 = \mu_2 = 0$；备择假设则意味着 μ_1 和/或 μ_2非零。由于信号计数不能为负，在零假设下令 $\mu_1 = \mu_2 = 0$ 会使两个感兴趣参数都处于参数空间边界上。

令 $\lambda = \mu_1 + \mu_2 + \beta$ 表示事件的总期望数。给定一个包含 N 个观测能量 E_1、……、E_N 的样本，$\theta = (\mu_1,\ \mu_2,\ \beta,\ \phi_1,\ \phi_2)$ 的扩展似然函数通常表示为 [3]

$$L(\theta) = \mathrm{Pois}(N \mid \lambda) \cdot \prod_{i=1}^{N} \frac{1}{\lambda} \left[\mu_1\, g_1(E_i) + \mu_2\, g_2(E_i) + \beta\, b(E_i; \phi_1, \phi_2) \right], \quad (1)$$

其对数似然为

$$\ell(\theta) = \sum_{i=1}^{N} \log \left[\frac{1}{\lambda} \left(\mu_1\, g_1(E_i) + \mu_2\, g_2(E_i) + \beta\, b(E_i; \phi_1, \phi_2) \right) \right] - \lambda + N \log \lambda - \log(N!), \quad (2)$$

其中，泊松概率质量函数 $\mathrm{Pois}(N \mid \lambda) = \frac{\lambda^N e^{-\lambda}}{N!}$ 说明观测事件的总数 N 本身是一个随机量。如下一节所示，在此参数化下的扩展似然函数不满足经典渐近理论的条件，因此需要采用另一种参数化。

3 似然比检验统计量的渐近结果

似然比检验是实验物理学中最广泛使用的假设检验工具之一，这得益于其普适性及其渐近性质 [15, 16]。其基础作用源于奈曼–皮尔逊引理，该引理确立了似然比检验在区分两个简单假设 [17]时具有最大检验效力。在正则条件下，威尔克斯定理保证似然比检验统计量 λ_{LR} 的分布在零假设下收敛于卡方分布，其自由度等于所检验参数的数量。这为将检验统计量转换为 p 值或局部显著性的标准做法提供了理论基础。形式上，给定基于大小为 N 的样本构造的似然 $L(\theta)$，λ_{LR} 定义为

$$\lambda_{\mathrm{LR}} \;=\; -2 \log \left(\frac{\sup_{\theta \in \Theta_0} L(\theta)}{\sup_{\theta \in \Theta_1} L(\theta)} \right).$$

其中，θ 是一个参数向量，Θ_0 和 Θ_1 分别表示零假设和备择假设下的参数空间。根据构造，λ_{LR} 的较大取值为反对零假设、支持备择假设提供证据。

在这种情况下，我们不能直接依赖威尔克斯定理，因为边界上的参数违反了其正则条件 [2, 3]。不过，只要其余正则条件得到满足，我们可以考虑能够处理边界参数 [7], 的其他渐近卡方分布。例如，在本分析中，信号高斯峰的均值被视为已知，因为若不如此，这些均值在零假设下将变得不可识别，从而违反正则条件。另一项关键要求是正确设定渐近框架，确保 $N \to \infty$确实对应于统计单位数量的增加，从而正确设定渐近框架。

3.1 参数化与渐近区域

当扩展似然形式写成公式（1）中的形式时——以预期的 计数 μ's 为参数，并表示为对N 探测到的事件的乘积——人们或许会倾向于将每个观测到的事件视为基本观测单位，并认为当 $N \to \infty$ 时便达到了渐近区域。这种解释类似于高斯、指数或二项样本中常见的似然构造，在这些情形下，每次测量确实构成一个独立的观测单位。

然而，对于泊松分布数据，这种类比具有误导性：在计数实验中，泊松计数并非源自一系列独立观测单位（如单次测量）。相反，观测单位是给定特定 μ's 和β 、并且曝光区间 T 明确规定时观测到的事件数 N；也就是说，自然的观测单位是观测泊松过程所跨越的曝光区间 。如附录 A 所示，如果将单个事件视为观测单位，巴特利特恒等式便不成立，这表明公式（1）中的参数化并不对应于任何定义明确的抽样单位所对应的适当似然。

为明确这一点，考虑 Fisher 信息矩阵，

$$\mathcal{I}(\theta) = -\,\mathbb{E}_\theta\big[\nabla^2 \ell(\theta)\big]\,,$$

它在满足正则条件时刻画最大似然估计量（MLE）的渐近协方差。为简单起见，这里仅讨论强度为 μ、归一化密度为 $g(E)$的单个信号峰，以及零假设 H_0：$\mu = 0$；推广到双峰模型可直接得到。在公式（1）的参数化下，零假设下样本量的增加必然对应于预期背景 β的增加。如附录所示， μ 的 Fisher 信息具有如下形式

$$\mathcal{I}_\mu(\theta_0) = \frac{1}{\beta_0} \int_{E_{\min}}^{E_{\max}} \frac{g(E)^2}{b(E)}\, dE,$$

当 $\beta_0 \to \infty$ 时趋于零，其中 β_0 表示预期背景计数的真实值 β。因此，在这种参数化下，大样本极限反而会丢失信息： μ的任何无偏估计量的方差都会发散，

并且似然曲面在 μ 方向上渐近变平。经典渐近理论失效，因为 μ的估计量会随着 β_0的增大而变得越来越不可靠。

通过将曝光区间视为观测单位，并将实验建模为在长度为 T 的区间上观测到的泊松点过程（PPP），即可得到统计一致的表述。在这种表述中， μ and β 表示速率 （单位曝光量内的事件数），而一个区间内信号和本底事件的期望数量分别为 μT 和 βT。令 $h(E_i) = \mu g(E_i) + \beta b(E_i)$，其中 $i = 1, ..., N$，则单个曝光区间的似然为

$$L_T(\theta) = \frac{e^{-(\mu+\beta)T}\,[(\mu+\beta)T]^N}{N!} \prod_{i=1}^{N} \frac{h(E_i)}{\mu+\beta}, \tag{3}$$

其对数似然为

$$\ell_T(\theta) = -(\mu+\beta)T + N\log T + \sum_{i=1}^{N} \log h(E_i) - \log N!.$$

在这种参数化中，渐近区域对应于增加曝光量，而非增加速率；费 Fisher 信息随总曝光量 $T_{\rm tot} = nT$ 线性增长。事实上，令 $\mathcal{I}_\mu(\theta_0; T)$ 表示持续时间为 T 的单个曝光区间所对应的费 Fisher 信息，则有

$$n\,\mathcal{I}_\mu(\theta_0; T) = T_{\rm tot} \cdot I_\mu^{(1)}(\theta_0), \qquad I_\mu^{(1)}(\theta_0) = \frac{1}{\beta_0} \int_{E_{\rm min}}^{E_{\rm max}} \frac{g(E)^2}{b(E)}\, dE,$$

因此

$$\mathcal{I}_\mu(\theta_0; T_{\rm tot}) = \frac{T_{\rm tot}}{\beta_0} \int_{E_{\rm min}}^{E_{\rm max}} \frac{g(E)^2}{b(E)}\, dE.$$

因此，在大曝光量极限下，费 Fisher 信息不会消失，并且对于任意数量的曝光区间，巴特利特恒等式均成立。

需要注意的是，这种参数化问题并非扩展似然所独有；在计数实验中，只要隐含地将观测单位视为检测到的事件，而非曝光量，任何泊松似然都会出现这一问题。许多分析中，采用一种将曝光量隐含地“纳入”绝对计数的参数化方法，在实践中效果良好，能够得到稳定的点估计和合理的方差估计，但对似然的渐近解释仍然是错误的。当 Fisher 信息直接影响检验统计量的极限分布时，这一点就变得尤为重要，例如本文讨论的双峰发现检验统计量；然而，一般而言，要获得定义良好的渐近区域，也需要明确采用 PPP 参数化。否则，即使实际中可能不会遇到困难，尤其是在关注点估计时 [18], ，似然比统计量的理论性质——例如效率、最优性及其极限分布的有效性——也不再有保证。

3.2 边界与似然比检验统计量的渐近分布

尽管可以通过对问题进行适当的重新参数化来恢复正确的渐近区域，但如果真实参数位于参数空间内部这一假设不成立，就无法正确应用威尔克斯定理。物理学文献中已知这一问题；对于单个感兴趣参数位于边界上的情形，即 50:50 混合分布 $\frac{1}{2}\chi_0^2+\frac{1}{2}\chi_1^2$ [5, 4]，人们正确采用了相应的渐近分布（例如 [19, 20]）。不过需要强调的是，这一结果仅适用于只有一个参数位于边界上的简单情形，并不能推广到两个参数的情形，即使这两个位于边界上的参数中有一个是干扰参数。

3.2.1 边界上的两个感兴趣参数

对于两个位于边界上的感兴趣参数，该分布是 χ_0^2、 χ_1^2 和 χ_2^2 的混合，其权重为

$$\{w_0, w_1, w_2\} \;=\; \left\{\frac{1}{2}-\frac{\arccos\left(\frac{I_{12}}{\sqrt{I_{11}I_{22}}}\right)}{2\pi},\;\frac{1}{2},\;\frac{\arccos\left(\frac{I_{12}}{\sqrt{I_{11}I_{22}}}\right)}{2\pi}\right\},$$

其中， $I = I(\theta_0)$ 表示在真实参数值 θ_0 [6, 7] 处求得的期望 Fisher 信息矩阵。元素 I_{11} 和 I_{22} 对应于两个感兴趣参数，而 I_{12} 是它们的非对角元素，用于描述相关结构。由于真实参数值未知，实际应用中通常用最大似然估计 θ 代替它。结合第 3.1 节的讨论，我们注意到，Chernoff 关于一个参数位于边界上的结果，以及 Self 和 Liang 对两个参数位于边界上的情形所作的扩展，都明确要求真实参数值处的 Fisher 信息矩阵为正定；换言之，这些结果成立的前提是 Fisher 信息不为零。

3.2.2 边界上的干扰参数和感兴趣参数

当干扰参数和感兴趣参数均位于边界上时，在正相关情况下， λ_{LR} 的渐近分布仍然是 χ_0^2、 χ_1^2和 χ_2^2 的混合分布，但混合权重 [8, 7]有所不同：

$$\{\tilde{w}_0, \tilde{w}_1, \tilde{w}_2\} \;=\; \left\{\frac{1}{2}-\frac{\arcsin\left(-\frac{I_{12}}{\sqrt{I_{11}I_{22}}}\right)}{2\pi},\;\frac{1}{2},\;\frac{\arcsin\left(-\frac{I_{12}}{\sqrt{I_{11}I_{22}}}\right)}{2\pi}\right\}. \quad (4)$$

当边界参数之间的相关性为负时，即 $\rho = -\frac{I_{12}}{\sqrt{I_{11}I_{22}}} < 0$， λ_{LR} 的渐近分布不再能表示为

卡方混合分布。不过， [7] 表明，适用于$\rho > 0$ 的混合分布可以进行适当修改，从而在负相关情况下也能提供准确的近似，

$$f_{\mathrm{mod}}(x) \;=\; \tfrac{1}{2} f_{\chi^2_0}(x) + \tfrac{1}{2}\, f_{\chi^2_1}(x) + \tilde{w}_2\, f_{\chi^2_2}(x) - \tilde{w}_2\, g_\varepsilon(x), \qquad \tilde{w}_2 = \frac{\arcsin(\rho)}{2\pi} < 0,$$

其中， $g_\varepsilon(x)$ 表示定义在 $(0, \varepsilon)$ 上、归一化后积分为 1 的任意非负分布的概率密度函数，例如定义在 $(0, \varepsilon)$ 上的均匀密度；在实践中，通常较小的 ε 值就足够了。

3.3 数值结果

本节展示通过对双信号实验进行 10^5 次蒙特卡洛（MC）重复得到的结果，分别考虑将两个期望信号计数视为感兴趣参数的情形，以及检验其中一个、同时将另一个视为干扰参数的情形。在两种分析中，数据集均在零假设下采样，即不含信号，且 $\beta_0 = 100, \phi_1^{(0)} = -0.1, \phi_2^{(0)} = 0.001$，能量范围为 $E \in [0.01, 10]$。峰的位置设为 $\gamma_1 = 4$ 和 $\gamma_2 = 6$，曝光量设为 $T = 10$。

3.3.1 两个感兴趣的峰，不含干扰参数

我们首先只估计两个期望信号计数，同时将背景归一化和形状视为完全已知，不在估计中纳入任何干扰参数。图2（左图）显示了 λ_{LR} 的经验累积分布函数（cdf）（黑色实线），并将其与四种参考分布进行比较：(i) Wilks 正则情形，即一个自由度为 2 的 χ^2 （橙色虚线）；对于这一边界问题，它在原点附近明显下降得过慢，且尾部过轻；(ii) Chernoff分布，$\frac{1}{2}\chi^2_0 + \frac{1}{2}\chi^2_1$ （青绿色点线），它考虑了存在一个峰位于边界上的情况，但没有考虑两个峰；(iii) [6] 中给出的、在非暴露量参数化下违反巴特利特恒等式的两个参数位于边界时的卡方混合分布，以 mix beta（紫色长虚线）表示。该分布改善了拟合，但仍不尽如人意；(iv) 使用基于曝光量的参数化的相同卡方混合分布（浅绿色点划线），以 mix exp 表示，它在整个范围内与经验累积分布函数最为接近。插图表格列出了每条曲线的第 50 个、第 95 个和第 99 个分位数；最接近经验分位数的数值以粗体突出显示。为便于比较，图的右图给出了残差图 $F_{\text{参考}}(t) - F_{\text{经验}}(t)$，即每个参考累积分布函数与经验累积分布函数之间的逐点差值：正值表示尾部比观测到的更轻，可能导致 p值过小，从而使显著性显得过于乐观；负值则表示尾部较重（结果更保守）。

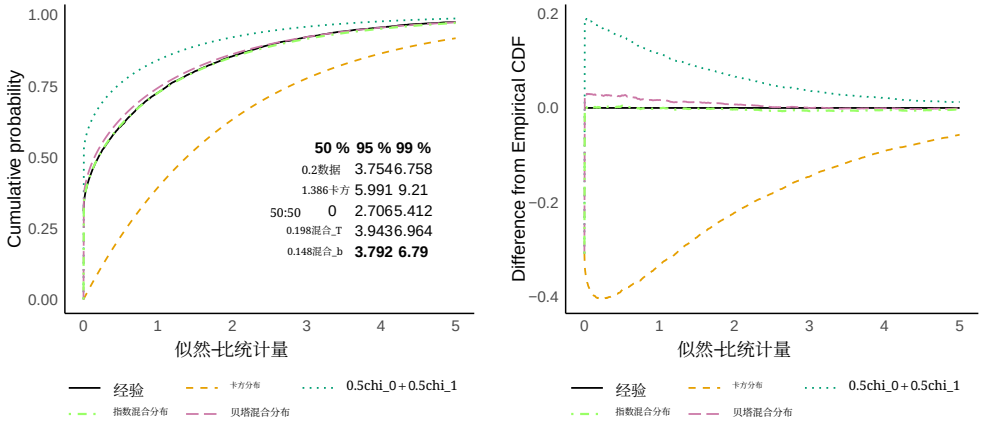

图2： 在无干扰参数的情况下，对两个期望信号计数进行估计的诊断。左： λ_{LR}的经验累积分布函数（累积分布函数）（黑色实线），并与四个参考累积分布函数叠加比较：(i) Wilks 正则情形，即具有 2 个自由度的 χ^2 （橙色虚线）；(ii) Chernoff 单参数边界定律$\frac{1}{2}\chi^2_0 + \frac{1}{2}\chi^2_1$（青绿色点线）；(iii) [6], 在非暴露量参数化下，两个参数位于边界时的卡方混合极限（紫色长虚线）；(iv) 采用基于曝光量的参数化时的同一卡方混合分布（浅绿色点划线）。插图表格列出每条曲线的第 50个、第 95个和第 99个 分位数，最接近经验分位数的数值以粗体标出。右：残差图 $F_{\text{参考}}(t) - F_{\text{经验}}(t)$；正值表示尾部比观测到的更轻，负值表示尾部比观测到的更重。

3.3.2 两个感兴趣峰及背景干扰参数

同时估计背景相关参数时，情况会发生显著变化。从图3可以看到，mix beta 曲线和 mix exp 曲线都不再与蒙特卡洛重复试验得到的经验累积分布函数吻合。这种不匹配是因为剖面化掉干扰参数后，必须相应地调整信息矩阵。为明确说明这一点，将参数向量划分为 $\theta = (\psi,\ \eta)$，其中 $\psi = (\mu_1,\ \mu_2)$ 是感兴趣参数，$\eta = (\beta,\ \phi_1,\ \phi_2)$ 表示干扰参数。采用这一记法，Fisher信息矩阵可写成分块形式

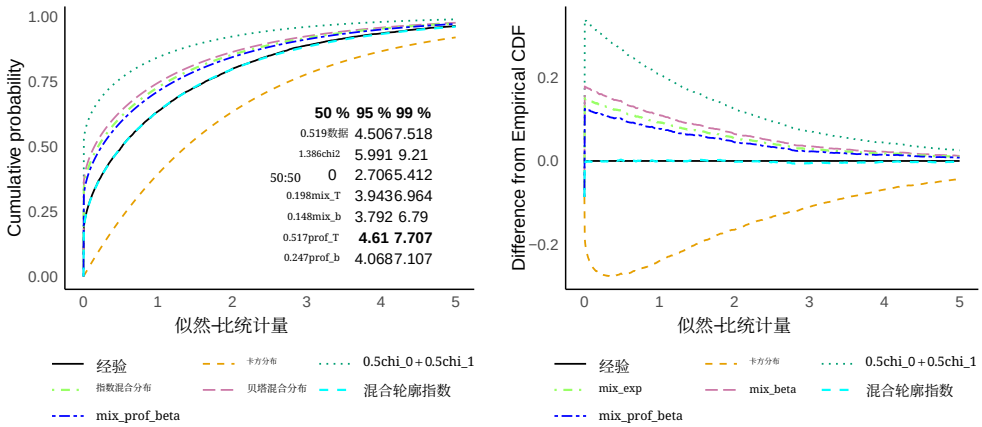

图3： 用于估计两个期望信号计数和背景干扰参数的诊断。左： λ_{LR} （实线黑色）的经验累积分布函数（累积分布函数），并叠加了六个参考累积分布函数：（i）Wilks 正则情形，即具有 2 个自由度的 χ^2 （橙色虚线）；（ii）Chernoff 单参数边界定律 $\frac{1}{2}\chi^2_0 + \frac{1}{2}\chi^2_1$ （青绿色点线）；（iii）在非暴露量参数化下，来自 [6]，的两个参数位于边界时的卡方混合极限（紫色长虚线）；（iv）采用基于曝光量的参数化时的相同卡方混合分布（浅绿色点划线）；（v）基于曝光量的剖面卡方混合分布（青色长划线）；（vi）单事件／无曝光剖面卡方混合分布（深蓝色划点线）。插图表格列出了每条曲线的第 50th、第 95th和第 99th 分位数，并以粗体突出显示与经验分位数最接近的条目。右：残差图 $F_{\mathrm{ref}}(t) - F_{\mathrm{emp}}(t)$，其中正值表示尾部比观测结果更轻，负值表示尾部比观测结果更重。

$$\mathcal{I}(\theta) = \begin{pmatrix} \mathcal{I}_{\psi\psi} & \mathcal{I}_{\psi\eta} \\ \mathcal{I}_{\eta\psi} & \mathcal{I}_{\eta\eta} \end{pmatrix},$$

其中， $I_{\psi\psi}$ 量化了在已知 η 的情况下关于（μ_1， μ_2）的信息， $I_{\eta\eta}$ 则量化了关于干扰参数的信息，而 $I_{\psi\eta}$ 则反映了它们之间的关系（与 $I_{\eta\psi} = I_{\psi\eta}^{\top}$有关）。本例中这些分块的显式表达式见附录 B。关于 ψ 的推断所适用的渐近参照分布，则由通过舒尔补得到的有效 费 Fisher 信息决定（参见例如 [21],第 4.6 节），

$$\mathcal{I}^{\mathrm{eff}}_{\psi\psi} = \mathcal{I}_{\psi\psi} - \mathcal{I}_{\psi\eta}\,\mathcal{I}^{-1}_{\eta\eta}\,\mathcal{I}_{\eta\psi}, \tag{5}$$

而不是我们此前用于所示结果的未调整区块 $I_{\psi\psi}$ 。实施这一修正后，理论曲线与模拟结果重新吻合，但仅限于基于曝光量的参数化（图3中的青色长虚线，在图例中标为 mix prof exp，在插图表格中标为 mix T）： 标准参数化仍然

明显不拟合（深蓝色点划线，在图例中标为 mix prof beta，在表格中标为 prof b），进一步印证了基于曝光量的参数化是合适的选择。

3.3.3 感兴趣的第一个峰，第二个峰作为干扰参数，且不含背景干扰参数

这里我们仅将第一个峰的信号期望计数视为感兴趣参数，而将第二个峰作为干扰参数处理，同时仍要求其为正。这是应用场景中的常见做法（例如类希格斯共振搜索或暗物质伽马射线线谱分析），通常一次检验一个峰：要么将第二个峰固定为零，要么将其作为干扰参数进行估计，并施加物理约束$\mu_2 \geq 0$。我们首先只关注作为干扰参数的第二个峰强度，同时将所有背景相关参数固定为已知值。作为比较，在非物理但数学上规则的情形中，若干扰参数 μ_2 不受约束，则似然比检验统计量服从标准的 Chernoff 分布，该分布对应于一个位于边界上的单参数。

如第 3 节所述，在干扰参数受到约束的情况下，λ_{LR} 的分布取决于 μ_1 与 μ_2、$\rho_{12} = -\frac{I_{12}}{\sqrt{I_{11}I_{22}}}$之间相关性的符号。若相关性为正，则渐近分布是 χ^2_0、χ^2_1 和 χ^2_2 的混合分布，其权重由式（4）给出；否则，它不再是卡方混合分布，但可使用 [7] 给出的修正作为近似。由于两个信号期望计数是相互竞争的参数，也就是说，观测到的事件超额既可归因于第一个峰，也可归因于第二个峰，因此我们预计它们呈负相关；随着两个峰的位置越来越接近，以及峰本身越来越宽（标准差增大），相关性的绝对值也会增大。事实上，对于本例中的位置 $\gamma_1 = 4$ 和 $\gamma_2 = 6$ 以及标准差 $\sigma = 1$，我们得到 $\rho_{12} = -0.37$。因此，我们预计蒙特卡罗研究所得的经验累积分布函数会与 [7], 所建议的近似相当吻合；图4所示结果确实证实了这一点。需要强调的是，Chernoff 分布通常用于此类逐峰检验，但并不适用，因为它未考虑到：即使第二个峰被当作干扰参数处理，其强度仍处于参数空间的边界上。

3.3.4 第一个关注峰，第二个峰作为干扰参数，并包含背景干扰参数

现在，我们将背景相关参数作为干扰参数进行估计，并同时将第二个峰的强度 μ_2 作为干扰参数，而分析中唯一感兴趣的参数是 μ_1。直观来看，由于干扰参数的数量仍然相对较少，与

前一种情形相比，预计不会有显著变化。然而，当我们使用有效费舍尔信息（公式 5）重新计算 μ_1 和 μ_2 之间的相关性时，得到的结果是 $\rho_{12} = 0.55$。这种正相关有着重要的含义：将干扰参数剖面化消去后，两个期望信号计数不再只是争夺同一部分事件超额。相反，背景参数引起的调整会重塑有效信息矩阵，使得两个峰的估计值倾向于同向变动。从推断的角度来看，这使似然比检验统计量的渐近分布从“负相关情形”转变为“正相关情形”：在前一种情形下，简单的卡方混合分布并不适用，因此我们采用了启发式扩展；而在后一种情形下，经典卡方混合权重（公式 4）能够给出正确的渐近分布。图5确实证实了这一点：经验累积分布函数与正相关情形的预测高度吻合；而在前一种情形下与经验累积分布函数最为接近的启发式扩展，如今则明显失效。

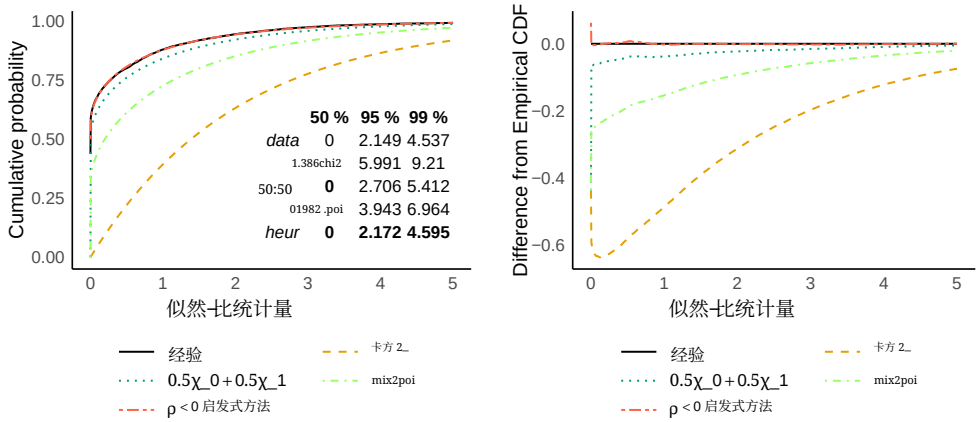

图4：估计第一个峰的产额、将第二个峰作为干扰参数且不包含额外背景干扰参数时的诊断。左：λ_{LR} 的经验累积分布函数（累积分布函数）（黑色实线），与四种参考累积分布函数叠加比较：(i) Wilks 正则情形，即具有 2 个自由度的 a χ^2（橙色虚线）；(ii) Chernoff 单参数边界定律 $\frac{1}{2}\chi^2_0 + \frac{1}{2}\chi^2_1$（青绿色点线）；(iii) 在非暴露量参数化下，[6]，给出的两个参数位于边界上的卡方混合极限（浅绿色点划线）；(iv) [7] 给出的负相关参数修正分布（红色双虚线）。插图表格列出了每条曲线的 50th、95th 和 99th 分位数，并以粗体标出与经验分位数最接近的数值。右：残差图 $F_{\text{参考}}(t) - F_{\text{经验}}(t)$，正值表示尾部比观测结果轻，负值表示尾部比观测结果重。

4 讨论

本分析详细刻画了在两个参数受限于参数空间边界的背景加信号情形下，似然比统计量 λ_{LR} 的分布。

在最简单的情形下，以两个峰的期望计数作为感兴趣参数，且不存在背景干扰参数时， λ_{LR} 的经验分布明显偏离 Wilks 的 χ^2_2 定律以及单参数 Chernoff 分布。将两个边界上的参数的卡方混合分布 [6]，应用于标准扩展似然参数化时，结果有所改善。然而，只有基于曝光量的参数化才能在整个范围内与经验分布实现较好的一致性：这证实了在构造检验时采用曝光量参数化的适当性，因为它恢复了巴特利特恒等式，并允许使用标准渐近理论。

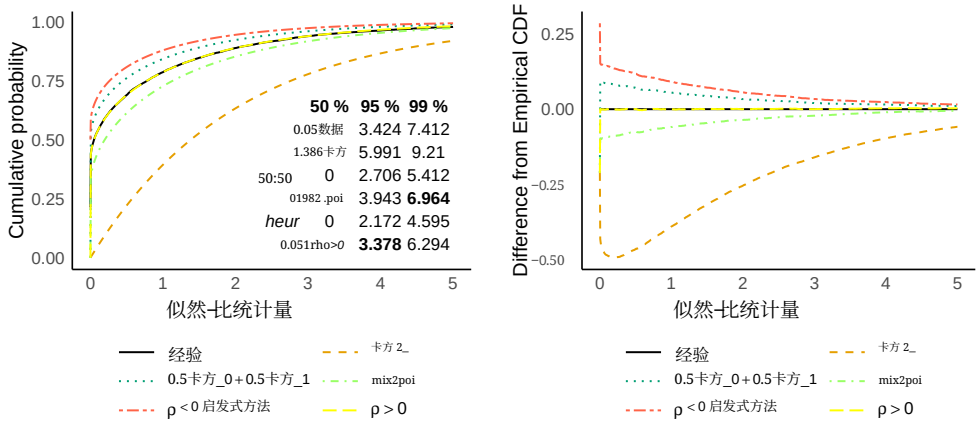

图5： 对第一个峰产额进行估计的诊断，其中第二个峰作为干扰参数，背景还包含另外三个干扰参数。左： λ_{LR} 的经验累积分布函数（累积分布函数）（黑色实线），并叠加五个参考累积分布函数：(i) Wilks 正则情形，即自由度为 2 的 χ^2 （橙色虚线）；(ii) Chernoff 单参数边界定律 $\frac{1}{2}\chi^2_0 + \frac{1}{2}\chi^2_1$ （青绿色点线）；(iii) 来自 [6], 、在非暴露量参数化下两个参数位于边界上的卡方混合极限（浅绿色点划线）；(iv) 来自 [7] 、适用于负相关参数的修正分布（红色双点划线）；(v) 正相关情形的精确卡方混合分布（黄色长虚线）。插图表格列出了每条曲线的第 50th、第 95th 和第 99th 分位数，并以粗体标出与经验分位数最接近的数值。右：残差图 $F_{\mathrm{ref}}(t) - F_{\mathrm{emp}}(t)$，其中正值表示尾部比观测结果更轻，负值表示尾部更重。

引入背景干扰参数后，同一混合分布不再与模拟结果相匹配，这表明必须使用有效费舍尔信息来替代未经调整的分块，以纳入剖面化的影

响。实施舒尔补校正后，结果恢复了一致性；但值得注意的是，这仅在基于曝光量的参数化下成立。这证实，在存在干扰参数时，基于曝光量的参数化对于获得正确的渐近结果至关重要。

通常，为了避免处理双峰同时检验，文献会采用逐峰检验，并将第二个峰视为干扰参数。转向这种逐峰检验框架，我们首先考虑 μ_1 为感兴趣参数、 μ_2 作为干扰参数，且所有背景参数均固定的情形。在这里，两个峰作为对同一超额事件的相互竞争的解释，从而导致负相关。在这一情形下，正确的渐近分布不再是简单的卡方混合分布，而经验分布最好用 [7]中提出的启发式校正来近似。需要特别注意的是，Chernoff 分布 $\frac{1}{2}\chi^2_0 + \frac{1}{2}\chi^2_1$虽然常用于实际的逐峰检验，但并不适用：即使作为干扰参数，第二个峰仍然受到边界约束，因此必须考虑这一结构性特征。

最后，当背景干扰参数和 μ_2 均经过剖面化处理时，相关性会反转（$\rho_{12} > 0$）：在本例中，剖面化重塑了信息结构，使两个期望计数趋于同向变化，而不是相互竞争。必须考虑这一从负相关到正相关的转变，因为它会使参考分布从采用启发式修正近似的非-χ^2分布，转变为权重由有效费舍尔信息根据公式（4）确定的卡方混合分布情形。这表明，即使是规模不大的干扰参数集合，也可能从定性上改变所处情形；因此，为使用正确的渐近分布，必须明确检查有效费舍尔信息。

这些发现与实际分析直接对应。在使用 Fermi–LAT 数据进行相互独立的双峰伽马射线谱线搜索时， [9, 10, 11], 双谱线产额被设为自由参数，因此其零假设分布与我们的双峰设置相对应。这种情况下，需要采用权重由剖面Fisher信息决定的卡方混合分布。尽管如此，基于 Wilks 定理并经过截断的映射渐近等价于 Chernoff 分布，仍常被采用；有些情况下甚至会直接使用卡方 χ^2_2 分布 [11], ，而这一假设显然与当前的边界问题不符。正如我们的结果所示，采用 Chernoff 分布会导致显著性估计过于乐观，而采用威尔克斯定理给出的普通卡方分布则会导致显著性估计过于保守。除了伽马射线谱线之外，对撞机共振谱学中也存在类似做法：通常一次只检验一个峰，或者在不变质量谱的扩展似然拟合中比较单峰与双峰假设 [13, 14]。扩展希格斯扇区就是一个具体例子，其中一对 CP 偶/CP 奇 H/A 粒子可在共同末态中产生两个相邻峰 [22], ，对此，联合双信号分析十分适用。我们的结果强调，只要将第二个峰的强度视为干扰参数并限制为正，剖面化引起的有效相关性就决定了哪种渐近参照分布才是正确的。

更一般地说，本文讨论的框架广泛适用于多种实验情境。在轴子望远镜和轴子的X射线搜索中，理论可能预言同一能带内出现两条离散谱线 [23], ，这促使人们采用双谱线联合检验。在运动学特征搜索中（例如级联衰变产生的双端点或双雅可比峰），质量层级预言的两个尖锐结构 [24]可以联合检验。在不同道道的成对信号中（例如，一个共振同时对 $\gamma\gamma$ 和 $Z\gamma$ 谱作出贡献 [25]），单个组合扩展似然配合两个信号强度，就能清晰地刻画模型关系。

在所有这些情形以及可能的许多其他情形中，检验两个非负计数时，适当的参考分布是卡方混合分布，其权重由本文所述的剖面Fisher信息决定。事实上，图6直接比较了最常用参考分布的尾部与正确混合分布的尾部，并给出了相应的 3–5σ 水平。上图对应双峰检验，下图则显示逐峰检验，其中第二个峰被视为干扰参数。在这两种情形下，使用单参数 Chernoff 分布会为给定的 σ 水平指定过小的检验统计量值，从而夸大显著性，并带来错误发现声明的风险。反之，使用双参数威尔克斯分布会给出过大的阈值，使检验过于保守，并可能漏掉真实发现。

5 结论

本文以双峰计数实验为例，刻画了两个感兴趣参数位于参数空间边界时似然比检验统计量的渐近分布，并说明干扰参数、参数化选择和相关结构所产生的影响。我们的模拟表明，na¨ıve 地使用威尔克斯定理或 Chernoff 分布可能导致严重的模型设定错误；正确的渐近参照分布则在很大程度上取决于参数化方式，以及剖面化干扰参数所产生的影响。采用过于保守的渐近分布（尾部较重）会导致 p 值高于其真实值，可能使真正的发现被遗漏。反之，采用过于宽松的渐近分布（尾部较轻）会产生人为偏小的 p 值，增加错误发现声明的风险。

对于当前情形，基于曝光量的参数化能够保证在观测到足够多的数据时渐近理论的有效性，并允许使用权重由剖面化费 Fisher 信息确定的卡方混合分布。结果表明，即使是规模不大的干扰参数集合，也可能从定性上改变边界参数之间的相关结构，进而改变极限分布。通过考察有效费舍尔信息正确判断所处的情形，对于实现有效推断至关重要。

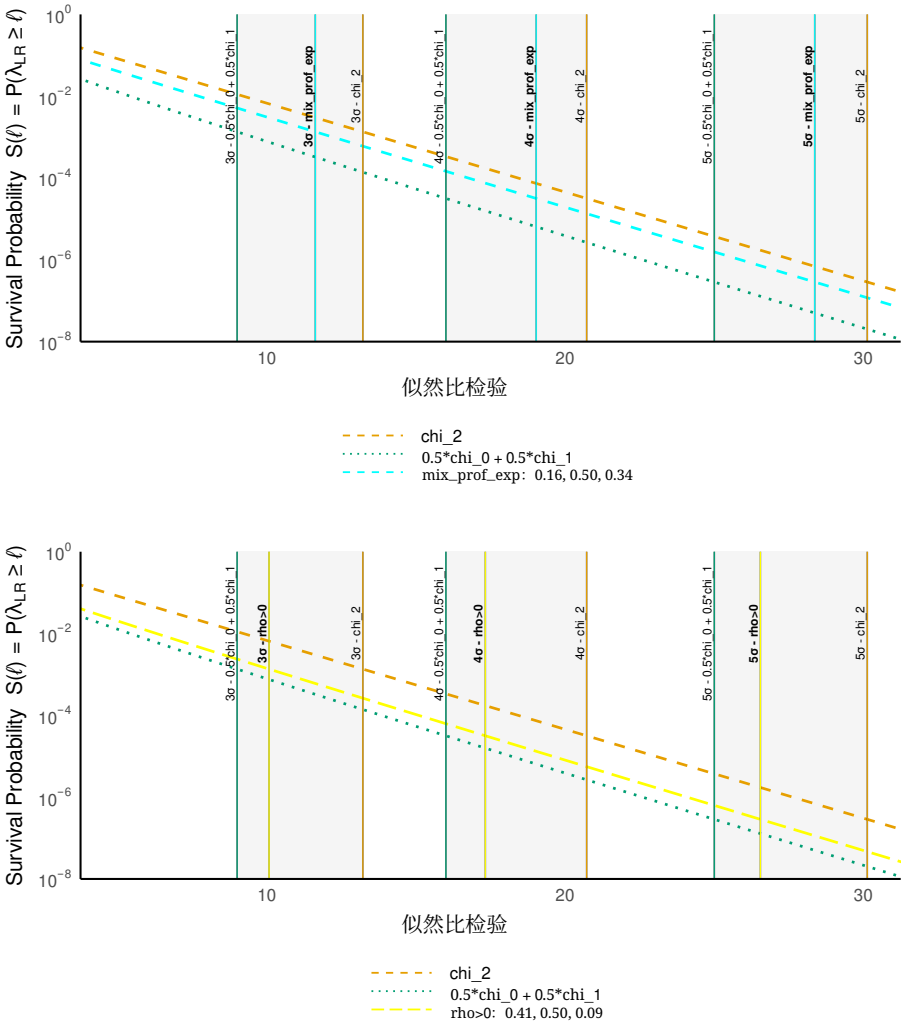

图6： 生存概率，即不同渐近参考分布下似然比分布的上尾（对数尺度）。上图：双峰检验，将信号的两个期望计数均视为感兴趣参数。下图：逐峰检验，其中第二个峰被视为干扰参数。每个面板中，橙色虚线表示 Wilks χ^2_2 分布；绿色点划线表示 Chernoff $\frac{1}{2}\chi^2_0 + \frac{1}{2}\chi^2_1$ 分布；青色（上图）或黄色（下图）混合实线表示卡方混合分布，其权重由剖面Fisher信息决定。灰色阴影区域表示不同渐近参照模型所隐含的名义 3σ、 4σ和5σ 阈值范围；彩色竖线则以对应的线条颜色标出这些阈值的精确位置。

致谢

本研究得到挪威研究理事会（RCN）的支持，资助项目包括 FRIPRO PLUMBIN'（资助编号：323985）、卓越研究中心 INTEGREAT（编号：332645）以及挪威 CERN 研究中心（编号：310713）。

参考文献

[1] S. S. Wilks. 用于检验复合假设的似然比的大样本分布。《数学统计年刊》，9:60 – 62，1938年。[2] A. R. Brazzale 和 V. Mameli. 非正则情形下的似然渐近理论：侧重于似然比的综述。《统计科学》，39:322 – 345，2024年。[3] S. Algeri、J. Aalbers、K. D. Mor˚a 和 J. Conrad. 使用剖面似然比检验搜寻新现象。《自然评论：物理》，2:245– 252，2020年。[4] G. Cowan、K. Cranmer、E. Gross 和 O. Vitells. 用于检验新物理的基于似然的检验的渐近公式。《欧洲物理杂志 *C*》，73:1554，2013年。[5] H. Chernoff. 关于似然比的分布。《数学统计年刊》，25:573–578，1954年。[6] S.G. Self 和 K.-Y. Liang. 非标准条件下最大似然估计量和似然比检验的渐近性质。《美国统计学会会刊》，82:605–610，1987年。[7] C. Bertinelli Salucci、A. Kvellestad 和 R. De Bin. 关于边界条件下似然比检验统计量渐近分布的注记，2025 年。arXiv:2509.00223 [math.ST].[8] L. Kopylev 和 B. Sinha. 当参数位于边界上时似然比检验的渐近分布。《*Sankhya*：印度统计学杂志，*B*辑》，73:20–41，2011年。[9] P. De La Torre Luque、J. Smirnov 和 T. Linden. 费米大面积望远镜 15 年数据中的伽马射线谱线：对希格斯门户暗物质的新限制。《物理评论 *D*》，109:L041301，2024年。[10] B. Anderson、S. Zimmer、J. Conrad、M. Gustafsson、M. S´anchez-Conde 和 R. Caputo. 利用费米大面积望远镜搜寻星系团方向的伽马射线谱线。《宇宙学与天体粒子物理学杂志》，2016:026，2016年。

[11] A. Rajaraman、T. M.P. Tait 和 D. Whiteson. 两条谱线还是不是两条？这是伽马射线能谱的问题。《宇宙学与天体粒子物理学杂志》，2012:003，2012年。[12] Fermi-LAT 合作组. 利用费米大面积望远镜搜寻伽马射线谱线及其暗物质意义。《物理评论 *D*》，88:082002，2013年。[13] LHCb 合作组. 质子-质子碰撞中的 $j/\psi j/\psi$ 质量能谱新结构，碰撞能量为 $\sqrt{s} = 13$ TeV。《物理评论快报》，124:082002，2020年。[14] LHCb 合作组. 首次观测到激发态 Ω_b^- 。《物理评论快报》，124:082002，2020年。[15] G. Casella 和 R. L. Berger. 统计推断，第 2 卷。Duxbury，美国加利福尼亚州太平洋丛林市，2002年。[16] G. Cowan. 统计数据分析。牛津大学出版社，美国，1998年。[17] Jerzy Neyman 和 Egon Sharpe Pearson. 关于统计假设最有效检验问题。《伦敦皇家学会哲学汇刊：*A*辑，数学或物理学论文集》，231:289–337，1933年。[18] L. Lyons、W.W.M. Allison 和 J. Pa˜nella Comellas. 最大似然还是扩展最大似然？一个来自高能物理的例子。《核仪器与方法物理研究 *A* 辑：加速器、谱仪、探测器及相关设备》，245:530–534，1986年。[19] CMS 合作组. 在 pp 碰撞中搜寻标准模型希格斯玻色子的综合结果，碰撞能量为 $sqrt(s) = 7tev$。《物理快报 *B*》，710:26–48，2012年。[20] CTAO 联盟. 使用切伦科夫望远镜阵列搜寻暗物质谱线。《宇宙学与天体粒子物理学杂志》，2024:047，2024年。[21] L. Pace 和 A. Salvan.《新费舍尔学派视角下的统计推断原理》。世界科学出版公司，1997年。[22] ATLAS 合作组. 利用 ATLAS 探测器搜寻在 pp 碰撞中衰变为两个 τ 轻子的重希格斯玻色子，碰撞能量为 $\sqrt{s} = 13$ TeV。《物理评论快报》，125:051801，2020年。[23] CAST 合作组. 利用 CAST γ- 射线量热仪搜寻来自 7Li 和 D(p,γ)3He 核衰变的太阳轴子辐射。《宇宙学与天体粒子物理学杂志》，2010:032，2010年。

[24] ATLAS 合作组。在 ATLAS 探测器中，利用 $\sqrt{s} = 8$ tev pp 碰撞数据，搜寻包含同味异号双轻子对、喷注和大量缺失横动量的事件中的超对称。《欧洲物理学杂志 *C*：粒子与场》，75:318，2015。[25]CMS 合作组。搜寻 13 tev 质子—质子碰撞中的高质量双光子共振，并与 8 tev 搜寻结果进行合并。《物理快报 *B*》，767:147–170，2017。[26] R. Barlow。扩展最大似然。《核仪器与方法物理研究 *A* 部分》，297:496–506，1990。

附录 A

在本附录中，我们证明，在公式（1）的参数化下，巴特利特恒等式并不成立。为简便起见，且仅限于本节的推导，我们考虑信号强度为 μ、归一化密度为 $g(E)$ 且零假设为 $H_0 : \mu = 0$ 的单个信号峰情形；所得结果可直接推广至双峰情形。根据两个巴特利特恒等式，在微分与积分可交换且 θ 光滑的条件下，在零假设（$\theta = \theta_0$）下有：

$$\begin{cases} \mathbb{E}[\nabla \ell(\theta)]_{\theta=\theta_0} = 0 \\ \mathcal{I}(\theta_0) = -\,\mathbb{E}\big[\nabla^2 \ell(\theta)\big]_{\theta=\theta_0} = \mathrm{Var}[\nabla \ell(\theta)]_{\theta=\theta_0} \end{cases} \tag{6}$$

第一条恒等式指出，对于 θ，得分是一个无偏估计函数；第二条恒等式则将其协方差等同于对数似然的期望曲率。在不存在边界问题或其他非规则性的情况下，这些关系是威尔克斯定理成立的充分条件 [2]。在规则的似然情形下，对于独立同分布（iid）的观测值，巴特利特恒等式在单个观测单位（单观测似然）层面以及整个包含 N个观测值的样本（完整似然）层面均应成立。

考虑扩展最大似然时，虽然它与标准最大似然法并不完全对应 [26], ，但在考虑包含 N 个事件的整个样本时，巴特利特恒等式仍然成立。事实上，令 $h(E_i) = \mu g(E_i) + \beta b(E_i)$，其中 $i = 1, ..., N$，完整似然可写为

$$L(\mu; \beta, \phi_1, \phi_2) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^N}{N!} \prod_{i=1}^{N} \frac{h(E_i)}{\lambda},$$

其对数似然为

$$\ell(\mu; \beta, \phi_1, \phi_2) = -\lambda + \sum_{i=1}^{N} \log h(E_i) + \text{const.} \tag{7}$$

关于信号期望计数的得分函数为

$$\frac{\partial \ell(\mu; \beta, \phi_1, \phi_2)}{\partial \mu} = -1 + \sum_{i=1}^{N} \frac{g(E_i)}{h(E_i)}. \tag{8}$$

为了计算得分的期望，我们利用

$$\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{N} \frac{g(E_i)}{h(E_i)}\right] = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{N} \frac{g(E_i)}{h(E_i)}\middle| N\right]\right]$$

并且，由于

$$\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{N}\frac{g(E_i)}{h(E_i)}\middle|N\right]=\sum_{i=1}^{N}\mathbb{E}\left[\frac{g(E_i)}{h(E_i)}\middle|N\right]=\sum_{i=1}^{N}\int_{E_{\min}}^{E_{\max}}\frac{h(E)}{\lambda}\frac{g(E)}{h(E)}dE=\frac{N}{\lambda},$$

我们得到

$$\mathbb{E}[\nabla\ell(\theta)]=-1+\mathbb{E}\left[\frac{N}{\lambda}\right]=-1+\frac{\lambda}{\lambda}=0,$$

因此，第一巴特利特恒等式成立。

此外，对得分函数求导可得

$$-\frac{\partial^2\ell(\mu;\beta,\phi_1,\phi_2)}{\partial\mu^2}=\sum_{i=1}^{N}\frac{g(E_i)^2}{h(E_i)^2}. \tag{9}$$

取期望得,

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_\mu(\theta)&=\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{N}\frac{g(E_i)^2}{h(E_i)^2}\right]=\mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{N}\frac{g(E_i)^2}{h(E_i)^2}\middle|N\right]\right]\\&=\mathbb{E}\left[N\int_{E_{\min}}^{E_{\max}}\frac{1}{\lambda}\frac{g(E)^2}{h(E)}dE\right]=\int_{E_{\min}}^{E_{\max}}\frac{g(E)^2}{h(E)}dE\end{aligned}$$

在零假设下，该式简化为

$$\mathcal{I}_\mu(\theta_0)=\frac{1}{\beta_0}\int_{E_{\min}}^{E_{\max}}\frac{g(E)^2}{b(E)}dE, \tag{10}$$

其中， β_0 表示期望背景计数 β 的真实值。该表达式需要与得分的方差进行比较。根据全方差定律，得分的方差可写为

$$\mathrm{Var}[\nabla\ell(\theta)]=\mathbb{E}\left[\mathrm{Var}[\nabla\ell(\theta)\,|\,N]\right]+\mathrm{Var}\left[\mathbb{E}[\nabla\ell(\theta)\,|\,N]\right] \tag{11}$$

其中，如前所见， $\mathbb{E}[\nabla\ell(\theta)\,|N]=-1+N/\lambda$，且 $\mathrm{Var}[\nabla\ell(\theta)\,|N]=N\mathrm{Var}[g(E_i)/h(E_i)]$。于是,

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Var}[\nabla \ell(\theta)] &= \mathbb{E}\left[N \,\mathrm{Var}\left[\frac{g(E_i)}{h(E_i)}\right]\right] + \mathrm{Var}\left[-1 + \frac{N}{\lambda}\right] \\
&= \lambda \,\mathrm{Var}\left[\frac{g(E_i)}{h(E_i)}\right] + \frac{1}{\lambda} \\
&= \lambda \left(\mathbb{E}\left[\frac{g(E_i)^2}{h(E_i)^2}\right] - \mathbb{E}\left[\frac{g(E_i)}{h(E_i)}\right]^2\right) + \frac{1}{\lambda} \\
&= \lambda \left(\frac{1}{\lambda}\int_{E_{\min}}^{E_{\max}} \frac{g(E)^2}{h(E)} dE - \frac{1}{\lambda^2}\right) + \frac{1}{\lambda} \\
&= \int_{E_{\min}}^{E_{\max}} \frac{g(E)^2}{h(E)} dE
\end{aligned}
$$

在零假设下，这变为 $\mathrm{Var}[\nabla \ell(\theta)]_{\theta=\theta_0} = \frac{1}{\beta_0}\int_{E_{\min}}^{E_{\max}} \frac{g(E)^2}{b(E)}\, dE$，对应于式（10）中的费舍尔信息公式，这证实了在考虑完整似然时，第二巴特利特恒等式也成立。

然而，如果将单个观测事件视为观测单位，这一结论便不再成立。事实上，第 i个观测的公式（1）中的似然变为

$$
L_i(\theta) = \lambda\, e^{-\lambda}\, \frac{1}{\lambda}\, h(E_i) \qquad \text{with} \;\; h(E_i) = \mu\, g(E_i) + \beta\, b(E_i; \phi_1, \phi_2),
$$

其对数似然为

$$
\ell_i(\theta) = -\lambda + \log h(E_i).
$$

得分为

$$
\frac{\partial \ell_i(\theta)}{\partial \mu} = -1 + \frac{g(E_i)}{h(E_i)}
$$

因此

$$
\mathbb{E}\left[\frac{\partial \ell_i(\theta)}{\partial \mu}\right] = -1 + \frac{1}{\lambda} \qquad \text{and} \qquad \mathbb{E}\left[\frac{\partial \ell_i(\theta)}{\partial \mu}\right]_{\theta=\theta_0} = -1 + \frac{1}{\beta_0}
$$

除非 $\beta_0 = 1$，否则该值不为零。因此，第一巴特利特恒等式通常无法保证成立。

对负二阶导数取期望，得到

$$\mathbb{E}\left[-\frac{\partial^2 \ell_i(\theta)}{\partial \mu^2}\right] = \mathbb{E}\left[\frac{g(E_i)^2}{h(E_i)^2}\right] = \frac{1}{\lambda}\int_{E_{\min}}^{E_{\max}} \frac{g(E)^2}{h(E)} dE, \tag{12}$$

因此

$$\mathbb{E}\left[\frac{g(E_i)^2}{h(E_i)^2}\right]_{\theta=\theta_0} = \frac{1}{\beta_0^2}\int_{E_{\min}}^{E_{\max}} \frac{g(E)^2}{b(E)} dE; \tag{13}$$

然而，这个表达式并不等于得分的方差，

$$\mathrm{Var}\left(\frac{\partial \ell_i(\theta)}{\partial \mu}\right) = \mathrm{Var}\left(-1 + \frac{g(E_i)}{h(E_i)}\right) = \frac{1}{\lambda}\int_{E_{\min}}^{E_{\max}} \frac{g(E)^2}{h(E)} dE - \frac{1}{\lambda^2},$$

在零假设下，该方差变为

$$\mathrm{Var}\left[\frac{\partial \ell_i(\theta)}{\partial \mu}\right]_{\theta=\theta_0} = \frac{1}{\beta_0^2}\int_{E_{\min}}^{E_{\max}} \frac{g(E)^2}{b(E)} dE - \frac{1}{\beta_0^2},$$

因此，第二个恒等式也不成立。

附录 B

在本附录中，我们给出本文所讨论的双峰发现示例中期望 Fisher 信息各项的显式表达式。设参数向量分解为 $\theta = (\psi,\ \eta)$，其中

$$\psi = (\mu_1, \mu_2), \qquad \eta = (\beta, \phi_1, \phi_2),$$

从而 Fisher 信息可写成分块形式

$$I(\theta) \;=\; \begin{pmatrix} I_{\psi\psi} & I_{\psi\eta} \\ I_{\eta\psi} & I_{\eta\eta} \end{pmatrix}.$$

采用此划分，2×2 块 $I_{\psi\psi}$ 收集条目 $I_{\mu_i\mu_j}$，而2×3块 $I_{\psi\eta}$收集条目 $I_{\mu_i\beta}$和 $I_{\mu_i\phi_k}$，其余各块也依此类推。对于 $h(E) = h(E;\,\theta)$ 及其导数 $\partial_{\phi_k} b = \frac{\partial}{\partial \phi_k} b(E;\, \phi_1, \phi_2)$，各个分量如下：

$$I_{\mu_i\mu_j}(\theta) = \frac{T}{\lambda}\int_{E_{\min}}^{E_{\max}} \frac{g_i(E)\, g_j(E)}{h(E)}\, dE, \qquad i, j \in \{1, 2\};$$

$$I_{\mu_i\beta}(\theta) = \frac{T}{\lambda}\int_{E_{\min}}^{E_{\max}} \frac{g_i(E)\, b(E)}{h(E)}\, dE, \qquad i \in \{1, 2\};$$

$$I_{\beta\beta}(\theta) = \frac{T}{\lambda}\int_{E_{\min}}^{E_{\max}} \frac{b(E)^2}{h(E)}\,dE;$$

$$I_{\mu_i\phi_k}(\theta) = \frac{T\beta}{\lambda}\int_{E_{\min}}^{E_{\max}} \frac{g_i(E)\,\partial_{\phi_k} b(E)}{h(E)}\,dE, \qquad i \in \{1,2\},\ k \in \{0,1\};$$

$$I_{\beta\phi_k}(\theta) = \frac{T\beta}{\lambda}\int_{E_{\min}}^{E_{\max}} \frac{b(E)\,\partial_{\phi_k} b(E)}{h(E)}\,dE, \qquad k \in \{0,1\};$$

$$I_{\phi_k\phi_l}(\theta) = \frac{T\beta^2}{\lambda}\int_{E_{\min}}^{E_{\max}} \frac{\partial_{\phi_k} b(E)\,\partial_{\phi_l} b(E)}{h(E)}\,dE, \qquad k,l \in \{0,1\},$$

其中 T 是曝光时间，所有积分均在 $[E_{\min}, E_{\max}]$上进行。