arXiv:2512.19335v1 [math.AT] 22 Dec 2025

几乎平坦自旋^c 流形是某个流形的边界

FEI HAN、RUIZHI HUANG 和张伟平

Abstract. 我们证明，每个几乎平坦自旋^c 流形都是某个紧致可定向流形的边界，从而在自旋^c 情形下解决了 Farrell–Zdravkovska 和 S. T. Yau 长期悬而未决的猜想。

Contents

1. 引言 1
2. 自旋^c 流形的整数 Wu 类 3
3. 自旋^c 几乎平坦流形是边界 4
4. 特殊全纯性蕴含自旋^{c}5. 四维情形 7
参考文献 8
12
13

1. Introduction

若对每个 $\epsilon > 0$，都存在其上的黎曼度量 g_ϵ M，使得闭流形 M 称为 几乎平坦，如果

$$\operatorname{diam}(M, g_\epsilon) \leq 1, \qquad |K_{g_\epsilon}| < \epsilon,$$

其中 K_{g_ϵ} 表示 g_ϵ的截面曲率。因此， M 可以取曲率任意小且直径一致有界的度量。对于每个维数 n，都存在常数 $\epsilon_n > 0$，使得若一个 n维流形具有直径至多为 1 的 ϵ_n-平坦度量，则它是几乎平坦的 [CG86]。

Gromov 的经典定理 [Gro78] 断言，每个几乎平坦流形都被某个幂零流形有限覆盖。反过来，Farrell 和 Hsiang [FH83]证明，任何被幂零流形有限覆盖的流形都与某个几乎平坦流形同胚。随后，Ruh [Ruh82]加强了 Gromov 的结果，证明每个几乎平坦流形实际上都与某个殆幂零流形微分同胚。

Farrell–Zdravkovska [FZ83]和 Yau [Yau93], 长期以来一直存在一项由两者分别提出的猜想: every almost flat manifold bounds a compact man- ifold. In the special case of flat manifolds, this was established by Hamrick and Royster [HR82] in a strikingtheorem. More recently, Davis and Fang [DF16] con-firmed the conjectureunder the additional assumptionthat the 2-Sylow subgroupof the holonomy group is cyclic orgeneralized quaternionic; their result was laterrederived by Xiong [Xio16] through a different argument. Inparticular, the theorem

2010 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类 57R19，53C27 次要分类 57R20 。
Key words and phrases. 几乎平坦流形、整 Wu 类、自旋^c 和自旋流形。

Davis 和 Fang 涵盖了 Farrell–Zdravkovska 先前取得的进展 [FZ83]和 Upadhyay [Upa 01]。

该猜想的一般情形仍未解决。此外，Davis 和 Fang [DF16]指出，判定每个几乎平坦自旋流形在改变自旋结构后是否为某个自旋流形的边界，是一个微妙而困难的问题。因此，自然且极具意义的问题是，针对几乎平坦自旋^c 流形提出相应的问题。

本文的主要结果证实了 Farrell–Zdravkovska–Yau 猜想在几乎平坦流形具有自旋结构时成立^c ，具体如下。

定理 1.1。 设 M 是一个 n维几乎平坦自旋^c 流形。那么， M是某个可定向流形的边界。此外，如果 n为奇数，则 M 带有任意自旋^{c}结构时，是某个自旋^c 流形的边界。

几乎平坦流形上自旋^c 结构的存在与其全纯群（该群为有限群）的性质密切相关。现在我们考察这种关系的一个特殊情形，并作为定理 1.1的推论得到以下定理。回顾经典的舒尔乘子：群 G 的舒尔乘子是其第二群同调 $H_2(G;\mathbb{Z})$，由 Issai Schur 于 1904年 引入。显然，有限群的舒尔乘子是有限的。

定理 1.2。 设 M 是一个几乎平坦的定向流形，其全纯群为 G。若 G 的舒尔乘子具有奇数阶，则 M 是某个紧流形的边界。

特别地，如果 2-*Sylow* 子群 G 是循环群、广义四元数群，或与例 2-*Sylow* 子群相同的某个有限单群（见例 *4.9*），那么 M 是某个紧流形的边界。

定理 1.2 结合定理 1.1，推广了 Davis 和 Fang [DF16] 关于几乎平坦 定向 流形的结果。此外，正如例 4.4中所指出的，Xiong 的结果 [Xio16] 是定理 1.1 的一个特例。

在 4维 情形下，我们可以对 Farrell–Zdravkovska–Yau 猜想进行完整验证，既包括可定向情形，也包括自旋情形。

定理 1.3。 设 M 是一个几乎平坦的定向 4维流形。那么 M 是某个自旋^c 流形的边界。此外，如果 M 是自旋的，那么 M 赋予任意自旋结构后都是某个自旋流形的边界。

Ontaneda [Ont20] 对经典的 Cheeger– Fukaya–Gromov 定理建立了一个重要的逆命题 [CFG92]: 如果一个几乎平坦流形 M 是某个紧流形的边界 W，且该紧流形带边界 M， $W\backslash M$ 则其上存在一个完备的有限体积黎曼度量，且具有负夹挤截面曲率。

Farrell 和 Zdravkovska [FZ83] 进一步猜想，几乎平坦（分别地，平坦）流形是某个紧流形的边界，且其内部带有完备的有限体积度量，其截面曲率为负（分别地，恒定为负）。对于平坦情形，这一猜想被 Long 和 Reid 推翻 [LR20],；而对于几乎平坦情形，当全纯群为循环群或四元数群时，Davis 和 Fang 验证了这一猜想 [DF16] 。

在本研究中，我们将定理1.1 与 Ontaneda 的定理 [Ont20],相结合，证实了这一猜想适用于几乎平坦的自旋^c 流形。

定理 1.4. 几乎平坦的自旋^c 流形是某个紧流形的边界；该紧流形的内部承载着一种完备、有限体积且具有负夹挤截面曲率的黎曼度量。

我们证明上述定理所采用的方法与早期研究大不相同。以往研究殆幂零流形主要依靠群论方法，而我们采取更偏重拓扑的观点。证明的核心工具是针对自旋^{c}流形的整 Wu 类，该类在第 2 节中构造。此构造受到 Hopkins 和 Singer [HS05] 引入的整自旋 Wu 类的启发。我们的指导思想是：Stiefel–Whitney 类本身与几何只有间接联系，而吴类的整提升则具有更直观的几何解释。因此，关于 Stiefel–Whitney 数是否消失的问题，可以归结为这些整 Wu 类的奇偶性。

自旋^c 几乎平坦流形主定理证明的关键在于，Atiyah–Singer 指标定理为自旋^c 特征类 c 的最高次幂带来了强整除性。这种整除性进而保证整 Wu 数为偶数，从而迫使相关的 Stiefel–Whitney 数消失。

本文结构如下。在第 2 节中，我们回顾 Hopkins 和 Singer 的整自旋 Wu 类，并引入相应的自旋^c 向量丛整 Wu 类，同时建立一个估计（引理2.2），供后文使用。第3 节给出主定理定理 1.1 的证明，该定理证实了 Farrell–Zdravkovska–Yau 关于几乎平坦自旋^c 流形的猜想。在第 4 节中，我们将定理 1.2 作为定理 1.1 的一个推论导出。最后，第 5 节专门讨论四维情形，并证明定理 1.3 。

致谢。Fei Han 的部分研究工作得到新加坡国立大学 AcRF A- 8000451-00-00 项目资助。Ruizhi Huang 的部分研究工作得到国家自然科学基金委员会（项目编号：12331003 和 12288201）、国家重点研发计划（项目编号：2021YFA1002300）以及中国科学院青年创新促进会的资助。Weiping Zhang 的部分研究工作得到国家自然科学基金委员会项目（项目编号：11931007）、国家重点研发计划（项目编号：2024YFA1013202）以及南开至德基金会的资助。

作者谨向 Haibao Duan 致谢，感谢他就整 Wu 类所进行的有益讨论。Ruizhi Huang 还感谢 Xiaolei Wu 关于群同调的宝贵交流，并感谢 Nansen Petrosyan 指出注3.7。

2. Integral Wu class for spin^c manifolds

本节旨在为自旋^c 流形构造整 Wu 类，这将成为我们研究几乎平坦自旋^c 流形的主要工具。

我们首先回顾 Hopkins 和 Singer 引入的 Spin 流形的整吴类。设 V 是紧致定向光滑流形 M 上的一个 n 维定向向量丛。当且仅当其第二 Stiefel–Whitney 类 $\omega_2(V)$ 消失时，称丛 V 为 自旋。

在 [HS05的附录 E 中，1], Hopkins-Singer 为自旋向量丛的模 2 法 Wu 类（即稳定补丛的 Wu 类）构造了一个整提升， V记作

$$\nu_t^{Spin}(V) = 1 + \nu_4^{Spin}(V) + \nu_8^{Spin}(V) + \cdots \in H^{4*}(M;\mathbb{Z}).$$

在泛情形下，整系数自旋法向吴类

$$\nu_t^{Spin} = 1 + \nu_4^{Spin} + \nu_8^{Spin} + \cdots \in H^{4*}(BSpin; \mathbb{Z})$$

由特征级数确定

$$g(x) = \sqrt{f(x)f(-x)} = 1 - \frac{x^2}{2} - \frac{9x^4}{8} - \frac{17x^6}{16} - \frac{277x^8}{128} - \frac{839x^{10}}{256} + \cdots \in \mathbb{Z}\left[\frac{1}{2}\right][[x]],$$

其中

$$f(x) = 1 + x + x^3 + \cdots + x^{2^n-1} + \cdots$$

是模 2 法向吴类的特征级数。特别地， ν_t^{Spin} 的模2约化就是模 2 法向吴类。

本文研究切向吴类，也就是与切丛相关联的通常吴类。我们使用“切向”一词，仅为将其与法向吴类区分开来。按照 [HS05 附录 E 中的论证，1], 可以为自旋向量丛 V 构造一族模 2 切向吴类的整系数提升； [HHZ25 第 2] 节给出了详细说明。对于本文中的应用，任意一种这样的提升都足够；全文中我们固定采用其中一种。

自旋向量丛V的模 2 切向 吴类存在一个整提升，记为

$$\mu_t^{Spin}(V) = 1 + \mu_4^{Spin}(V) + \mu_8^{Spin}(V) + \cdots \in H^{4*}(M; \mathbb{Z}),$$

其中在泛情形下，整系数自旋切向吴类

$$\mu_t^{Spin} = 1 + \mu_4^{Spin} + \mu_8^{Spin} + \cdots \in H^{4*}(BSpin; \mathbb{Z})$$

由特征级数确定

$$G(x) = \sqrt{h(x)h(-x)} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{11x^4}{8} + \frac{5x^6}{16} + \frac{51x^8}{128} + \frac{95x^{10}}{256} + \cdots \in \mathbb{Z}\left[\frac{1}{2}\right][[x]],$$

其中

$$h(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^{2^n} + \cdots$$

是模 2 切向吴类的特征级数 [Wu50，HBJ94]。特别地， μ_t^{Spin} 的模2约化是模 2 切向吴类。

参见 [HS05，附录 E。1] 以及 [HHZ25，例 2。3]其中分别给出了前几个整系数自旋法向吴类和切向吴类关于庞特里亚金类的显式表达式。

由于本文其余部分始终只关注切向吴类，因此我们将简单地称其为吴类。

现在让我们转向自旋^c 情形。设 V 是紧致定向光滑流形 M 上的一个 n 维定向向量丛。当且仅当其第二 Stiefel-惠特尼类 $\omega_2(V)$ 属于模 2 约化同态的像时，称其为 自旋^c

$$\rho_2 : H^2(M; \mathbb{Z}) \to H^2(M; \mathbb{Z}/2).$$

指定一个自旋^c 结构，等价于选择一个特定的类 $c \in H^2(M; \mathbb{Z})$，使得 $\rho_2(c) = \omega_2(V)$；它确定一个复直线丛 ξ 及其对应的圆丛，反之亦然

$$S^1 \to S(\xi) \to M$$

以及 $V\oplus\xi$上的一个自旋结构。我们常把自旋^c 向量丛 V连同其特征类 $c=c_1(\xi)$, 简称为这一对 $(V,\ \xi)$ 或 $(V,\ c)$; 当 $V=TM$是 M的切丛时，则记作 $(M,\ c)$。

我们通过整自旋吴类来定义整自旋^c （切向）吴类。为此，我们需要选定一组复吴类。在 [HS05，附录 E.1 中，2], Hopkins-Singer 为复向量丛定义了一个复法向吴类，它由特征类 $f(x)$ 给出，其模2约化是模 2 法向吴类。类似地，我们可以定义一个复（切向）吴类

$$\mu_t^U(\eta)=1+\mu_2^U(\eta)+\mu_4^U(\eta)+\cdots\in H^{2*}(M;\mathbb{Z})$$

对于复向量丛 η在 M 上，可由特征级数 $h(x)$ 定义，其模2约化是模 2（切向）吴类。

对于自旋^c 丛（V,ξ），定义整自旋^c （切向）吴类 为

$$\mu_t^{Spin^c}(V):=\frac{\mu_t^{Spin}(V\oplus\xi)}{\mu_t^U(\xi)}=\frac{\mu_t^{Spin}(V\oplus\xi)}{h_t(c_1(\xi))}.$$

由于 $\mu_t^{Spin}(V\oplus\xi)$ 和 $\mu_t^U(\xi)$ 的模2约化分别是 $V\oplus\xi$ 和 ξ的模 2 吴类，惠特尼乘积公式意味着 $\mu_t^{Spin^c}(V)$ 的模2约化是 V的模 2 吴类。这就证明了该定义的合理性。

陈根算法可用于将普适积分自旋^{c}吴类 $\mu_{2k}^{Spin^c}$ 表示为庞特里亚金类与普适特征类 $c\in H^2(BSpin^c;\mathbb{Z})$ 的多项式。

例 2.1. 前八个积分自旋^c 吴类在有理数域上为

$$\begin{aligned}
\mu_2^{Spin^c}&=-c,\\
\mu_4^{Spin^c}&=\frac{c^2}{2}+\frac{p_1}{2},\\
\mu_6^{Spin^c}&=\frac{c^3}{2}-\frac{cp_1}{2},\\
\mu_8^{Spin^c}&=-\frac{5c^4}{8}+\frac{c^2p_1}{4}+\frac{11p_1^2}{8}-\frac{5p_2}{2},\\
\mu_{10}^{Spin^c}&=\frac{9c^5}{8}+\frac{c^3p_1}{4}-\frac{11cp_1^2}{8}+\frac{5cp_2}{2},\\
\mu_{12}^{Spin^c}&=-\frac{11c^6}{16}-\frac{5c^4p_1}{16}+\frac{11c^2p_1^2}{16}+\frac{5p_1^3}{16}-\frac{5c^2p_2}{4}-\frac{p_1p_2}{4}-p_3,\\
\mu_{14}^{Spin^c}&=-\frac{15c^7}{16}+\frac{9c^5p_1}{16}+\frac{11c^3p_1^2}{16}-\frac{5cp_1^3}{16}-\frac{5c^3p_2}{4}+\frac{cp_1p_2}{4}+cp_3,\\
\mu_{16}^{Spin^c}&=\frac{211c^8}{128}-\frac{11c^6p_1}{32}-\frac{55c^4p_1^2}{64}+\frac{5c^2p_1^3}{32}+\frac{51p_1^4}{128}+\frac{25c^4p_2}{16}-\frac{c^2p_1p_2}{8}\\
&\quad-\frac{23p_1^2p_2}{16}+\frac{19p_2^2}{8}-\frac{c^2p_3}{2}-2p_1p_3+\frac{3p_4}{2}.
\end{aligned}$$

通过与前一个例子比较可知，以下引理中的估计是最优的。

引理 2.2. 在通用积分自旋^c 吴类 $\mu_{2n}^{Spin^c}$ 的表达式中， c^n 的系数 a_n 的分母满足

$$\text{denom }(a_n)\mid 2^{n-s_2(n)},$$

其中 $s_2(n)$ 表示 n的二进制数字之和。

证明。为计算 c^n 的系数，我们可以形式上假设存在一个万能丛 V，使得所有庞特里亚金类 $p_i(V)$ 都为零。于是

$$\mu_t^{Spin^c}(V) = \frac{\mu_t^{Spin}(V \oplus \xi)}{\mu_t^U(\xi)} = \frac{\sqrt{h(c)h(-c)}}{h(c)} = \sqrt{\frac{h(-c)}{h(c)}},$$

其中 $h(c) = 1 + \sum_{k=0}^{\infty} c^{2^k}$。记

$$\mu_t^{Spin^c}(V) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k c^k \quad \text{and} \quad \frac{h(-c)}{h(c)} = \sum_{k=0}^{\infty} b_k c^k.$$

注意到 $a_0 = b_0 = 1$，并且每个 $b_k \in 2\mathbb{Z}$ 都满足 $\sum_{k=0}^{\infty} b_k c^k = h(-c)\, h(c) \equiv 1$ 模 2。我们要证明，对于每个 n，都有 $2^{n-s_2(n)}a_n \in \mathbb{Z}$。

n前面的等式意味着 $(\sum_{k=0}^{\infty} a_k c^k)^2 = \sum_{k=0}^{\infty} b_k c^k$，进而得到 $\sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k} = b_n$。因此，我们有递推公式

$$2a_n = b_n - \sum_{k=1}^{n-1} a_k a_{n-k}.$$

由归纳法可设，对任意 $k < n$，$2^{k-s_2(k)}a_k \in \mathbb{Z}$。由于[1]

$$s_2(n) \le s_2(k) + s_2(n-k),$$

由此可得

$$2^{n-s_2(n)}a_k a_{n-k} = 2^{s_2(k)+s_2(n-k)-s_2(n)} \cdot (2^{k-s_2(k)}a_k) \cdot (2^{n-k-s_2(n-k)}a_{n-k}) \in \mathbb{Z},$$

于是

$$2^{n+1-s_2(n)}a_n = 2^{n-s_2(n)}b_n - \sum_{k=1}^{n-1} \left(2^{n-s_2(n)}a_k a_{n-k}\right) \in \mathbb{Z}.$$

要证明 $2^{n-s_2(n)}a_n \in \mathbb{Z}$，等价于证明前一个等式右边是偶整数；这又等价于证明和式 $2^{n-s_2(n)} \sum_{k=1}^{n-1} a_k a_{n-k} \in 2\mathbb{Z}$。

注意，在和式 $\sum_{k=1}^{n-1} a_k a_{n-k}$ 中，除 $n = 2m$ 时的项 a_m^2 外，每一项 $a_k a_{n-k}$ 都出现两次。后一种情形下，

$$2^{n-s_2(n)}a_m^2 = 2^{2m-s_2(m)}a_m^2 = 2^{s_2(m)} \cdot (2^{m-s_2(m)}a_m)^2 \in 2\mathbb{Z}.$$

---

[1]经典的勒让德公式指出，对于素数 p，$m!$ 的素因数分解中 p的指数为

$$\nu_p(m!) = \sum_{k \ge 1} \left\lfloor \frac{m}{p^k} \right\rfloor = \frac{m - s_p(m)}{p-1},$$

其中，$s_p(m)$ 表示 m 在 p 进制下的数字之和（例如，参见 [Mo12，第 77]页）。令 $p = 2$ $\nu_2(n) = n - s_2(n)$ k $n-k$ ——— $\nu_2(n)$ $\ge$，可得 $(!)()$。由于$n!$ $!()!$ $\nu_2(k) + \nu_2(n-k)$ $s_2(n) \le s_2(k) + s_2(n-k)$ 是一个整数，因此有 $(!)(!)((()!)$，这意味着 $()()()$。

$_{n-1}$因此，无论如何 $2^{n-s_2(n)}\sum_{k=1} a_k a_{n-k} \in 2\mathbb{Z}$。由此可得 $2^{n+1-s_2(n)}a_n \in 2\mathbb{Z}$，进而得到 $2^{n-s_2(n)}a_n \in \mathbb{Z}$。

□

3. Spin^c almost flat manifolds bound

设 (M, c) 是一个 n 维闭自旋^c 光滑流形。那么 M 具有如下形式的有理特征数：

$$\langle \lambda(c, p_1, \cdots, p_{\lfloor \frac{n}{4} \rfloor}),\ [M]\rangle,$$

其中 λ 是关于 c 和 M 的庞特里亚金类 $p_i(M)$ 的有理多项式，总次数为 n。我们将任何此类特征数称为 (M, c) 的 c-庞特里亚金数 。

以下引理用特征类刻画定向和自旋^c 协边；定向情形参见 [Wal60]，自旋情形参见 [Sto68，定理，第 337]页。^{c} 。

引理 3.1。两个闭定向流形定向协边，当且仅当它们具有相同的斯蒂费尔-惠特尼数和庞特里亚金数。

两个闭自旋^c 流形自旋^c 配边，当且仅当它们具有相同的斯蒂费尔-惠特尼数和 c-庞特里亚金数。□

引理 3.2. 设 M 是一个几乎平坦流形。那么 M 的有理庞特里亚金类全部消失。

证明。对于几乎平坦流形 M，根据 Gromov 的经典结果 [Gro78]，存在一个有限 d覆盖 $\widetilde{M} \xrightarrow{\pi} M$，其中 $\widetilde{M}$是一个幂零流形。于是，$\mathrm{tr} \circ \pi^*(p_i(M)) = d \cdot p_i(M)$，其中 $H^*(\widetilde{M}; \mathbb{Z}) \xrightarrow{\mathrm{tr}} H^*(M; \mathbb{Z})$ 是有限覆盖的转移映射。由于幂零流形可平行化，M 的所有庞特里亚金类均在整数系数下消失。因此，M 的所有有理庞特里亚金类都消失。□

引理 3.3. 设（M、c）是一个 $2n$ 维几乎平坦自旋^c 流形。那么$2^n n! \mid \langle c^n, [M]\rangle$。

证明。考虑 M 上的自旋^c 狄拉克算子 D^c。Atiyah-Singer 指数定理断言

$$\mathrm{Ind}(D^c) = \int_M \widehat{A}(M) e^{c/2} \in \mathbb{Z}.$$

由于 M 的所有有理庞特里亚金类都消失，我们得到

$$\mathrm{Ind}(D^c) = \int_M \widehat{A}(M) e^{c/2} = \int_M \frac{c^n}{n! \cdot 2^n}.$$

所需的整除性由此得出。□

按照 [MS75，第 16], 章中，记作 $S_I = S_{j_1} \cdots S_{j_r}$，其中 $\{S_j\}_{j\in\mathbb{Z}^+}$ 表示以正整数为指标的任意乘法符号系统，$I = \{j_1, \ldots, j_r\}$ 是一个固定正整数 m的任意分拆。

引理 3.4。设(M, c) 是一个 n 维几乎平坦自旋^c 流形。那么，它的所有斯蒂费尔-惠特尼数均为零。

证明。 根据引理 3.2，几乎平坦流形 M 的有理庞特里亚金类均为零，因此每个整自旋^c 吴类 $\mu_{2i}^{Spin^c}(M) = a_i c^i$，其中 a_i 是通用整自旋 c^i 吴类 ^{c} 的表达式中 $\mu_{2i}^{Spin^c}$ 的系数。因此，若 ^{c} 为奇数，或为 n 偶数且形如 $a_I c^m$，其中 $I = \{j_1, \dots, j_r\}$ 是 m 的一个分拆，则任意整自旋 $n = 2m$ 吴数均为零。对于后一种情况，回顾经典的勒让德公式

$$m! = 2^{m - s_2(m)} \cdot (\text{an odd number})$$

以及事实 $s_2(m) \leq s_2(j_1) + \cdots + s_2(j_r)$。于是由引理 2.2 和 3.3，

$$\langle a_I c^m, [M] \rangle \in 2^m m! a_I \mathbb{Z} \subseteq 2^{s_2(j_1)+\cdots+s_2(j_r)} m! \mathbb{Z} \subseteq 2^m \mathbb{Z}.$$

特别地， M 的任意整数自旋^c 吴数的模2约化都为零；等价地， M 的模2吴数全部为零。由于斯蒂费尔-惠特尼数与模2吴数等价， M的斯蒂费尔-惠特尼数也全部为零。□

注 3.5。 在引理 3.4的证明中，我们已经证明，对于一个 $2m$维几乎平坦自旋^c 流形 M，

$$2^m \mid \langle \mu_{2I}^{Spin^c}(M), [M] \rangle$$

对于任意的分拆 I of m。

下面的命题给出了几乎平坦自旋^{c}流形为边界的一个简单判据。

命题 3.6。 设(M, c) 是一个 n 维近乎平坦自旋^c 流形。那么(M, c) 是某个自旋^{c}流形的边界，当且仅当 $\langle c^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}, [M] \rangle = 0$。

证明。 由引理 3.1，(M, c) 是某个自旋^c 流形的边界，当且仅当斯蒂费尔-惠特尼数和 c-庞特里亚金数均为零。由引理 3.4，其斯蒂费尔-惠特尼数均为零。由引理 3.2可知，在所有 c-庞特里亚金数中，只有数 $\langle c^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}, [M] \rangle$ 可能非零。因此，命题得证。 □

现在我们可以证明定理 1.1。

定理 *1.1*的证明。 若 n 为偶数，则由引理 3.4可知， M 的斯蒂费尔-惠特尼数均为零；由引理 M 的庞特里亚金数均由引理 3.2可知均为零。由引理 3.1 可得，(M, c) 是某个可定向流形的边界。

若 n为奇数，则 $\langle c^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}, [M] \rangle = 0$ 自动成立。由命题3.6 可得，(M, c) 是某个自旋^c 流形的边界。□

注 3.7。事实上，证明给出的结果比定理1.1更一般。确切地说，我们证明：如果一个自旋^c 流形 M 的所有有理庞特里亚金类均为零，那么它是某个可定向流形的边界。此外，如果 n 为奇数，则 M在赋予任意自旋^c 结构后，都是某个自旋^c 流形的边界。

4. Special Holonomies imply spin^c

设 M 是一个 n维几乎平坦可定向流形。根据 Gromov [Gro78] 和 Ruh [Ruh82]的结果，M 与一个殆幂零流形微分同胚 $\Gamma \backslash L \rtimes G/G$，其中 L 是一个单连通幂零李群， G 是

Aut(L) 的有限子群，且 Γ 是 $L \rtimes G$ 的离散无挠余紧子群，并有一个短正合列

$$1 \longrightarrow \Gamma \cap L \longrightarrow \Gamma \longrightarrow G \longrightarrow 1.$$

有限群 G 称为几乎平坦流形 M的全纯群 。

令 φ: $M \longrightarrow BSO(n)$ 为切丛 TM的分类映射。众所周知， φ 可通过 G的分类空间 BG 分解:

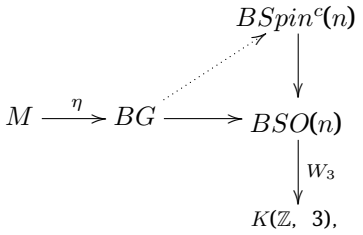
$$\varphi : M \xrightarrow{\eta} BG \longrightarrow BSO(n),$$

其中 η 是正则覆盖 $\Gamma \cap L \backslash L \longrightarrow \Gamma \backslash L \rtimes G/G$的分类映射；例如参见 [Xio16，第 3]节。

下面的引理给出了一个充分条件，在此条件下 M 是自旋^c。对于有限群 A, 记 Syl$_2$(A) 为 A的 2-西洛子群。回顾一下， $H^*(A) = H^*(BA)$ 和 $H_*(A) = H_*(BA)$ 分别是 A的群上同调和群同调。

引理 4.1. 若 $H^3(\mathrm{Syl}_2(G); \mathbb{Z}) = 0$，则几乎平坦流形 M 是自旋^c。

证明。 考虑以下同伦提升问题



其中最右列是关于自旋^c 结构的标准同伦纤维化，其中映射 W_3 表示第三积分斯蒂费尔-惠特尼类 $W_3 \in H^3(BSO(n); Z)$。

设 $H^3(G; \mathbb{Z}) = 0$。则复合映射 $BG \longrightarrow BSO(n) \xrightarrow{W_3} K(\mathbb{Z}, 3)$ 是零伦的，并且映射 $BG \longrightarrow BSO(n)$ 可以提升到同伦纤维 $BSpin^c(n)$。由前面的图可知，φ 可以提升到$BSpin^c(n)$。因此，当且仅当 $H^3(G; \mathbb{Z}) = 0$ 时， M 是自旋^c 。

假设 $H^3(\mathrm{Syl}_2(G); \mathbb{Z}) = 0$。存在一个奇数度有限覆盖 $\widehat{M} \longrightarrow\!\!\!\!\!\!\sim M$ 的几乎平坦流形，使得 M 的全纯群为 Syl$_2$(G)。先前的论证表明， M 是自旋^{c}的，或者等价地， $W_3(M) = 0$。然而，由于类 W_3 是第二 Stiefel-惠特尼类 $\omega_2 \in H^2(BSO(n); \mathbb{Z}/2)$ 的 Bockstein，类 W_3 的阶为 2，正如 ω_2 一样。因此，奇数度$\widehat{\ }$有限覆盖 $M \longrightarrow M$ 意味着 $W_3(M) = 0$，也就是说， M 是自旋^{c}的。□

借助以下引理，引理 4.1 适用于 Davis 和 Fang [DF16]所考虑的情形。

引理 4.2。 若 $\mathrm{Syl}_2(G)$ 是循环群或广义四元数群，则 $H^3(\mathrm{Syl}_2(G); \mathbb{Z}) = 0$。

证明。 基于 Hopf 的工作 [Hop45] 和 Seifert-Threlfall [ST31], Milnor[Mil57] 列出了所有在三维球面上自由正交作用的有限群 S^3。其中，2-群是循环群 $\mathbb{Z}/2^r$ 满足 $r \geq 1$

以及广义四元数群 Q_{2^s} 满足 $s \geq 2$。为证明该引理，只需证明对于 Milnor 列表中的任意有限群 A， $H^3(A;\mathbb{Z}) = 0$。

由于 A 在 S^3上自由且正交地作用，我们得到球面空间形式$N = S^3/A$。显然，对于任意 $i \geq 2$， $\pi_1(N) \cong A$ 且 $\pi_i(N) \cong \pi_i(S^3)$。特别地， $\pi_2(N) = 0$。通过附加维数大于 3 的附着胞腔，我们可以得到包含映射 $j\colon N \hookrightarrow K(A,\ 1) = BA$，这表明 N 是 BA的 3-骨架。因此，诱导映射 $j^*\colon H^3(A;\ \mathbb{Z}) \longrightarrow H^3(N;\ \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ 是单射。然而，由于 A 是有限群， $H^3(A;\mathbb{Z})$也是有限群。因此， $H^3(A;\ \mathbb{Z}) = 0$。□

以下命题恢复了 [DF16] 在定向情形下的主定理。

命题 4.3。 设 M 是一个 n 维几乎平坦可定向流形。若全纯群 G 中的2-*Sylow* 子群 $\mathrm{Syl}_2(G)$ 是循环群或广义四元数群，则 M 可作为某个可定向流形的边界。

证明。 假设 $\mathrm{Syl}_2(G)$ 是循环群或广义四元数群，这意味着$H^3(\mathrm{Syl}_2(G);\mathbb{Z}) = 0$ 由引理 4.2可得，进而可推出 M 是自旋的^c （由引理4.1）。因此， M 由定理 1.1可知其是某个流形的边界。□

例 4.4。 定理 1.1也可推出 [Xio16，定理 1。2], 其中假设 L 是一个单连通的二步幂零李群，且 $\dim[L,L] = 1$， 并且 G 在 L的中心上作用平凡。事实上，正如 [Xio16，定理 1。2]的证明所示，其中分类映射 $\varphi\colon M \longrightarrow BSO(n)$ 可分解为

$$\varphi : M \xrightarrow{\eta} BG \longrightarrow BU(m) \longrightarrow BSO(n)$$

对于适当的酉群 $U(m)$。因此， M 是自旋^c ，且定理 1.1适用，从而表明 M 是边界。

引理4.1 可以利用以下结果重新表述。

引理 4.5。 对于有限群 A， $H^3(A;\ \mathbb{Z}) = 0$ 当且仅当 $H_2(A;\ \mathbb{Z}) = 0$。

证明。 由于 A 是有限的，显然 $H^{>0}(A;\mathbb{Q}) = 0$。随后，由系数短正合序列所关联的上同调长正合序列

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

推出 $H^3(A;\mathbb{Z}) \cong H^2(A;\ \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$。对于后一个上同调群，泛系数定理表明

$$H^2(A;\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \cong \mathrm{Hom}(H_2(A;\mathbb{Z}),\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \oplus \mathrm{Ext}(H_1(A;\mathbb{Z}),\mathbb{Q}/\mathbb{Z}).$$

由于 $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ 是单射，Ext函子$(H_1(A;\ \mathbb{Z})\ \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = 0$，于是

$$H^3(A;\mathbb{Z}) \cong H^2(A;\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \cong \mathrm{Hom}(H_2(A;\mathbb{Z}),\mathbb{Q}/\mathbb{Z}).$$

特别地， $H^3(A;\ \mathbb{Z}) = 0$ 当且仅当 $\mathrm{Hom}(H_2(A;\ \mathbb{Z})\ \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = 0$。然而，显然 $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z},\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ 和 $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}/p^r,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ 对任意素数 p 都是非平凡的。因此，$\mathrm{Hom}(H_2(A;\ \mathbb{Z})\ \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = 0$ 当且仅 $H_2(A;\ \mathbb{Z}) = 0$，于是引理得证。□

结合引理4.1 和4.5，立即得到以下引理。

引理4.6. 若 $H_2(\mathrm{Syl}_2(G);\mathbb{Z}) = 0$，则几乎平坦流形 M 是自旋的^c。 □

备注 4.7. 子群包含 $\mathrm{Syl}_2(G) \overset{i}{\hookrightarrow} G$ 蕴含一个奇数度有限覆盖映射 $B\mathrm{Syl}_2(G) \xrightarrow{Bi} BG$。于是，在素数 2 处局部化后，它是一个同伦等价。因此，引理 4.6中的条件 $H_2(\mathrm{Syl}_2(G);\mathbb{Z}) = 0$ 等价于 $H_2(G;\mathbb{Z})$ 的阶为奇数。

在群论中，有限群 A 的第二同调群 $H_2(A;\mathbb{Z})$ 称为 A 的 舒尔乘子，这是 Issai Schur 于 1904年 引入的一个经典概念。

例 4.8。 假设 A 有一个表示 $A \cong F/R$，其中 F 是一个自由群。那么经典的霍普夫定理 [Bro82，定理 II.5。3] 推出 $H_2(A;\mathbb{Z}) \cong R \cap [F,F]/[F,R]$。特别地，$A$ 的舒尔乘子平凡，当且仅当$R \cap [F,F] = [F,R]$。

多亏了有限单群分类——这是 20 世纪数学的一项里程碑式成就——所有有限单群的舒尔乘子都已得到完整确定；例如参见 [Wil09，Wik]。下文将列出所有舒尔乘子含有奇阶挠元的有限单群。

例 4.9。 设 A 是一个有限单群。舒尔乘子 $H_2(A;\mathbb{Z})$ 的阶为奇数，当且仅当属于以下情形：

(1). 循环群： $\mathbb{Z}/p$ with p 一个素数；(2). 李型群（其中 $q = p^k$ 为素数 p 且为正的 k）：– 切瓦莱群：(Ch1). 线性群 $A_n(q)$，其中 $(n+1, q-1)$ 为奇数，且 $(n,q) \neq (1,4), (2,2), (2,4), (3,2)$；(Ch2). 正交群 $B_n(q)$，其中 $n > 1$, q 为偶数，且 $(n,q) \neq (2,2), (3,2)$；(Ch3). 辛群 $C_n(q)$，其中 $n > 2$, q 为偶数，且 $(n,q) \neq (3,2)$；(Ch4). 正交群 $D_n(q)$，其中 $n > 3, (4, q^n - 1) = 1$，且 $(n,q) \neq (4,2)$；(Ch5). $E_6(q)$；(Ch6). $E_7(q)$，其中 q 为偶数；(Ch7). $E_8(q)$；(Ch8). $F_4(q)$，其中 $q \neq 2$；(Ch9). $G_2(q)$，其中 $q \neq 4$；– 斯坦伯格群：(S1). 酉群 ${}^2A_n(q^2)$，其中 $n > 1$，$(n+1, q+1)$ 为奇数，且 $(n,q) \neq (3,2), (5,2)$；(S2). 正交群 ${}^2D_n(q^2)$，其中 $n > 3, (4, q^n + 1) = 1$；(S3). ${}^2E_6(q^2)$，其中 $q \neq 2$；(S4). ${}^3D_4(q^3)$；– 铃木群： ${}^2B_2(2^{2n+1})$，其中 $n \geq 2$；– 里群和蒂茨群：(R1) 里群 ${}^2F_4(2^{2n+1})$，其中 $n \geq 1$；(R2) 蒂茨群 ${}^2F_4(2)'$；(R3) 里群 ${}^2G_2(3^{2n+1})$，其中 $n \geq 1$；(R4) 导出群 ${}^2G_2(3)'$；(3). 散在群：– 马蒂厄群：

(M1) M_{11}; (M2) M_{23}; (M3) M_{24}; – 扬科群: (J1) J_1; (J2) J_3; (J3) J_4; – 康威群: (C1) Co_2; (C2) Co_3; – 菲舍尔群: (F1) Fi_{23}; (F2) Fi'_{24}; – 麦克劳林群: McL; – 赫尔德群: He; – 奥南群: $O'N$; – 原田 - 诺顿群: HN; – 莱昂斯群: Ly; – 汤普森群: Th; – 菲舍尔-格里斯怪兽群, M。

我们现在可以证明定理 1.2。

定理 *1.2* 的证明。对于第一个结论，假设 G 的舒尔乘子阶为奇数。由备注 4.7，这等价于 $H_2(\mathrm{Syl}_2(G);\mathbb{Z}) = 0$。由此可知，根据引理 M 是自旋^c，因此由定理 4.6， M 有边界。1.1。

对于第二个结论，$\mathrm{Syl}_2(G)$ 为循环群或广义四元数群的情形由命题 4.3 得出。对于剩余情形，即有限单群 A 属于例 4.9 且 $\mathrm{Syl}_2(G) = \mathrm{Syl}_2(A)$，已知 $H_2(A;\mathbb{Z})$ 的阶为奇数。于是备注 4.7 蕴含 $H_2(\mathrm{Syl}_2(G);\mathbb{Z}) = H_2(\mathrm{Syl}_2(A);\mathbb{Z}) = 0$，或等价地， G 的舒尔乘子阶为奇数。因此，此情形下的第二个结论由第一个结论得出。□

5. The 4-dimensional case

设 M 是一个4维闭可定向光滑流形。吴 [Wu50]和希策布鲁赫-霍普夫 [HH58], 的经典结果，经泰希纳-福格特 [TV] 用现代语言重新证明后，表明 M 是自旋的^c。

以下引理归功于 Szczepa´nski [Szc18，引理1及其证明和（1）]。设 $b_i(M)$ 为 i的第 M 个贝蒂数。

引理5.1。 设 M 是一个近乎平坦的可定向4维流形。若 M 不是自旋的，则 $b_1(M) = 1$ 且 $b_2(M) = 0$。□

定理 *1.3* 的证明。 由 [Wu50, HH58, TV], 该近乎平坦可定向4维流形M 是自旋的^c。

(1)。假设 M 不是自旋的。那么根据引理 $b_2(M) = 0$ 可得5.1。因此，对于 ^{c} 上的任意自旋M， c结构 M， $c \in H^2(M;\mathbb{Z})$ 是一个挠类。于是$\langle c^2, [M]\rangle = 0$并且根据命题 3.6， M是一个自旋^c 流形的边界。

(2). 假设 M 是自旋的。众所周知，四维自旋配边群 $\Omega_4^{spin} = \mathbb{Z}$ ，其生成元可取为

$K3$曲面 X，其 $\widehat{A}$-亏格 $\widehat{A}(X) = 1$。由于 $\widehat{A}(M) = -\frac{1}{24}\int_{\underline{M}} p_1(M) = 0$， M 必须在 Ω_4^{spin} 中为 0。□

References

[Bro82] K. S. Brown，《群的上同调》，数学研究生教材第87卷，Springer-Verlag，纽约-柏林，1982年，x+306页。4 8[CG-86] J. Cheeger 和 M. Gromov，*Collapsing Riemannian manifolds while keeping their curvature bounded I*，《微分几何杂志》（），–。[92] CFG J. Cheeger、K. Fukaya 和 M. Gromov，*Nilpotent structures and invariant metrics on collapsed manifolds*，《美国数学会杂志》（），-。[16] DF J. F. Davis 和 F. Fang，*An almost flat manifold with a cyclic or quaternionic holonomy group bounds*，《微分几何杂志》（），-。[83] FH F. T. Farrell 和 W. C. Hsiang，*Topological characterization of flat and almost flat Riemannian manifolds M^n $n \neq 3$ 4*，《美国数学杂志》（），-。[83] FZ F. T. Farrell 和 S. Zdravkovska，，《密歇根数学杂志》30（1983），-。Gro M. Gromov，*Almost flat manifolds*，《微分几何杂志》13（1978），第2期，231-241。[25] HHZ F. Han、R. Huang 和 W. Zhang，*Wu classes and elliptic genus*，预印本，。HR G. C. Hamrick 和 D. C. Royster，，《数学发明》[94] HBJ F. Hirzebruch、T. Berger 和 R. Jung，《流形与模形式》，数学论题丛书，第二版（Friedrich Vieweg and Sohn，布伦瑞克，1994）；附录由 N.-P. Skoruppa 和 P. Baum 撰写。2[HH58] F. Hirzebruch 和 H. Hopf，*Felder von Flächenelementen in 4-dimensionalen Mannigfaltigkeiten*，《数学年刊》（），-。[Hop45] H. Hopf，*Über die Bettischen Gruppen, die zu einer beliebigen Gruppe gehören*，《海尔维提数学评论》[05] HS M. J. Hopkins 和 I. M. Singer，*Quadratic functions in geometry, topology, and M-theory*，《微分几何杂志》[20] LR D. D. Long 和 A. W. Reid，*On the geometric boundaries of hyperbolic 4-manifolds*，《几何与拓扑》[57] Mil J. Milnor，*Groups which act on S^n without fixed points*，《美国数学杂志》79（1957），623-630。4[MS75] J. Milnor 和 J. Stasheff，《特征类》，载于《数学年刊研究》第76卷，第vii+331页，普林斯顿，新泽西州：普林斯顿大学出版社和东京大学出版社，。Mo Victor H. Moll，《数与函数》，美国数学会，。[12] Ont P. Ontaneda，，《高等科学研究所数学出版物》-（）。[82] Ruh E. A. Ruh，，《微分几何杂志》：（），-。[31] ST H. Seifert 和 W. Threlfall，*Topologische Untersuchung der Diskontinuitätsbereiche endlicher Bewegungsgruppen des dreidimensionalen sphärischen Raumes*，《数学年刊》（1931），-。Sto R. E. Stong，《配边理论札记》，数学札记，普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州；东京大学出版社，东京，[68] Szc A. Szczepanski，，《数学档案》110（2018），455-458。5[TV] P. Teichner 和 E. Vogt，*Intersection forms of almost-flat 4-manifolds*，未发表的札记，可从作者的网页获取：https://math.berkeley.edu/ teichner/Papers/spin.pdf。[01] Upa S. Upadhyay，，《美国数学会汇刊》[60] Wal C. T. C. Wall，*A bounding question for almost flat manifolds*，《数学年刊》（2）72（1960），292-311。3[Wik] 维基百科贡献者，*List of finite simple groups*，网址：https://en.wikipedia.org/wiki/List of finite simple groups，[09] Wil R. A. Wilson，《有限单群》，数学研究生教材第251卷，Springer-Verlag London, Ltd.，伦敦，2009年，xvi+298页。4

[Wu50] W.-T. Wu, *Classes caractéristiques et i-carrés d'une variété*, 巴黎科学院院报230（ 1950 508 511 2, 5, 5 ）, -。Xio Y. Xiong,
[16] *An alternative proof of a theorem of Davis and Fang*, 《微分几何及其应用》第 **48** 2016 38 45 1, 1, 4, 4 4 卷（）, -。. Yau S. T. Yau, , 纯粹
[93] *Open problems in geometry* 数学专题研讨会论文集第1部分54（1993）, 1-28。

1Department of Mathematics, National University of Singapore, Singapore 119076*Email address*: mathanf@nus.edu.sg
State Key Laboratory of Mathematical Sciences & Institute of Mathematics, Academy of Mathematics and Systems Science, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190, China*Email address*: huangrz@amss.ac.cn*URL*: https://sites.google.com/site/hrzsea/Weiping Zhang, Chern Institute of Mathematics & LPMC, Nankai University, Tianjin300071, China. *Email address*: weiping@nankai.edu.cn