arXiv:2512.19381v1 [math.CA] 22 Dec 2025

高阶 Painlev´e III 方程的渐近与单值化问题

Zikang Wang 和 Xiaomeng Xu

摘要

本文研究具有两个二阶极点的 $n\times n$ 一阶亚纯线性常微分方程系统的等单值变形方程。我们分析了解在等单值变形空间边界点处的渐近行为，并通过渐近参数给出解的参数化。随后，我们根据渐近参数推导出相关线性系统的斯托克斯矩阵与连接矩阵的显式公式。最后，我们将这些结果应用于 tt^* 方程的研究。

1 引言

本文研究具有两个二阶极点（位于 $\xi=0$ 和 $\xi=\infty$）的一阶亚纯线性常微分方程 $n\times n$ 系统的等单值变形

$$\frac{dF}{d\xi}=\left(U+\frac{A}{\xi}+\frac{GVG^{-1}}{\xi^2}\right)\cdot F(\xi), \tag{1.1}$$

其中 $A\in\mathfrak{gl}_n$, $G\in\mathrm{GL}_n$，且 $U=\mathrm{diag}(u_1,\ldots,u_n)$、$V=\mathrm{diag}(v_1,\ldots,v_n)$ 是对角矩阵，其中 $u_i\neq u_j$ 和 $v_i\neq v_j$ 适用于 $i\neq j$。

等单值变形方程是在辛空间 $T^*\mathrm{GL}_n$ 上的一个依赖于 $(u_1,\ldots u_n,\ v_1,\ldots v_n)$ 时间的哈密顿系统。对于矩阵对 $(G,\ A)\in T^*\mathrm{GL}_n\cong\mathrm{GL}_n\times\mathfrak{gl}_n$，该系统可写成关于矩阵值函数 $n\times n$ 函数 $A(\mathbf{u},\ \mathbf{v})$ 和$n\times n$ 可逆矩阵值函数 $G(\mathbf{u},\ \mathbf{v})$ 的完全可积非线性偏微分方程，其中 $2n$ 复变量 $\mathbf{u}=(u_1,\ldots u_n)$ 和 $\mathbf{v}=(v_1,\ldots v_n)$,

$$\frac{\partial A}{\partial u_k}=[\mathrm{ad}_U^{-1}\mathrm{ad}_{E_k}A,A]+\mathrm{ad}_{E_k}(GVG^{-1}), \tag{1.2}$$
$$\frac{\partial A}{\partial v_k}=\mathrm{ad}_U(GE_kG^{-1}), \tag{1.3}$$
$$\frac{\partial G}{\partial u_k}=(\mathrm{ad}_U^{-1}\mathrm{ad}_{E_k}A)\cdot G, \tag{1.4}$$
$$\frac{\partial G}{\partial v_k}=G\cdot(\mathrm{ad}_V^{-1}\mathrm{ad}_{E_k}(G^{-1}AG)). \tag{1.5}$$

这里 $E_k=$对角矩阵 $(0,\ \ldots,\ \underset{k\text{-th}}{1},\ \ldots,\ 0)$，对于任意 $n\times n$ 矩阵 A，$\mathrm{ad}_u^{-1}A$ 是一个 $n\times n$ 矩阵，其 $(i,\ j)$-项 ry

$$(\mathrm{ad}_U^{-1}A)_{ij}:=\begin{cases}\dfrac{1}{u_i-u_j}A_{ij} & ;i\neq j\\ 0 & ;i=j\end{cases}. \tag{1.6}$$

我们研究这一系统主要有两个原因。一方面，该系统处于多个学科的交汇点，与 tt^* 方程 [6, 8], 双辛群胚 [19, 5], 、表示论中的张量积规则等密切相关。另一方面，该系统的解具有显著的 Painlev´e 性质：根据 Miwa [20], , 解 $A(\mathbf{u},\mathbf{v})$ 和 $G(\mathbf{u},\mathbf{v})$ 的（1.2）-（1.5）是关于.....的多值亚纯函数

u_1，……，u_n和 v_1，……，v_n，其中，当 u或 v沿环路绕……移动时，会出现分支

$$\Delta_{\mathbf{u},\mathbf{v}} = \{(u_1, ..., u_n, v_1, ..., v_n) \in \mathbb{C}^{2n} \mid u_i = u_j \text{ or } v_i = v_j, \text{ for some } i \neq j\}. \tag{1.7}$$

因此，根据 Painlev´e 的原始构想，它们可以成为一类新的特殊函数。

特别是，当矩阵阶数 $n = 2$时，上述等单值变形方程等价于 Painlev´e III 方程 [21]。关于 Painlev [10] e 方程的研究历史与发展，读者可参阅 Fokas、Its、Kapaev 和 Novokshenov 的著作´。正如 [10, 15], 所强调的，Painlev´e 方程的解被视为非线性特殊函数，因为它们在非线性数学物理中所起的作用，与艾里函数、贝塞尔函数等经典特殊函数在线性物理中所起的作用相同。而正是通过临界点处的渐近行为对 Painlev´e 超越函数进行参数化，并求解单值化问题，才使 Painlev´e 超越函数在应用中能像线性特殊函数一样高效。

对于 $n > 2$，按照 [8], ，上述等单值变形方程可视为 Painlev´e III 的高阶推广。本文将 Painlev´e III（见 [16], [10]）关于渐近行为和单值化问题的结果推广到一般 n 情形。

1.1 等单值变形方程解的渐近行为

我们的第一个结果是建立等单值变形系统（1.2）-（1.5）中几乎所有多值亚纯解在迭代极限下的渐近行为，并通过余切丛 $T^*\mathrm{GL}_n$ 中的元素确定渐近参数，这些元素满足以下边界条件。

边界条件：若元素 $(G_0,\ A_0) \in T^*\mathrm{GL}_n \cong \mathrm{GL}_n \times \mathfrak{gl}_n$ 满足边界条件，则称其满足：

$$\left|\mathrm{Re}(\widehat{\lambda}_i^{(k)} - \widehat{\lambda}_j^{(k)})\right| < 1, \quad \left|\mathrm{Re}(\widetilde{\lambda}_i^{(k)} - \widetilde{\lambda}_j^{(k)})\right| < 1,\ k = 1, 2, ..., n;\ 1 \leq i, j \leq k. \tag{1.8}$$

这里，$\{\widehat{\lambda}_i^{(k)}\}_{i=1,...,k}$ 和 $\{\widetilde{\lambda}_i^{(k)}\}_{i=1,...,k}$ 分别是矩阵 $\widehat{A}_0$和 $\widetilde{A}_0 := -G_0^{-1}\widehat{A}_0 G_0$ 的左上角子矩阵的特征值集合。

为表述我们的结果，我们引入算子 $\delta_k A$，它提取 $n \times n$ 矩阵 A 的左上角 $k \times k$ 子矩阵和对角元：

$$(\delta_k A)_{ij} := \begin{cases} A_{ij} & ;1 \leqslant i, j \leqslant k \quad \text{or} \quad i = j \\ 0 & ;\text{otherwise} \end{cases}. \tag{1.9}$$

$$\delta A := \delta_1 A \text{ the diagonal part of } A \tag{1.10}$$

我们引入新的坐标系 $(\mathbf{z}\ t,\ \mathbf{w}) = (z_0,\ z_1,\ \ldots\ldots,\ z_{n-1},\ t,\ w_{n-1},\ \ldots\ldots,\ w_2,\ w_0)$：

$$z_0 = u_1, z_1 = u_2 - u_1, z_2 = \frac{u_3 - u_1}{u_2 - u_1}, ..., z_{n-1} = \frac{u_n - u_1}{u_{n-1} - u_1}, \tag{1.11}$$

$$t = (v_n - v_1)(u_n - u_1), \tag{1.12}$$

$$w_{n-1} = \frac{v_n - v_1}{v_{n-1} - v_1}, w_{n-2} = \frac{v_{n-1} - v_1}{v_{n-2} - v_1}, ..., w_2 = \frac{v_3 - v_1}{v_2 - v_1},\ w_0 = v_1. \tag{1.13}$$

我们采用约定 $w_1 := \dfrac{t}{z_1 \cdots z_{n-1} w_{n-1} \cdots w_2}$。（上述等单值变形方程在这一新坐标系下的形式由正文中的方程（4.1a）–（4.1f）给出。）

定理 1.1. 对于任何满足边界条件的 $(G_0, A_0) \in GL_n \times \mathfrak{gl}_n$，存在唯一的多值亚纯解 $A(z\ t, w; A_0, G_0)$ $G(z\ t, w; A_0, G_0)$，该解满足等单值变形方程 (4.1a)–(4.1f)，并且存在一个矩阵值函数 $n \times n$ 序列 $A_k(z_1, ..., z_k)$、 $A_k(w_1, \ldots, w_k)$，对应于 $k = 1, \ldots, n-1$ 和 G，使得

$$\lim_{t\to 0} A(\mathbf{z},t,\mathbf{w}) = \widehat{A}_{n-1}(\mathbf{z}),$$
$$\lim_{t\to 0} t^{-\widehat{A}_{n-1}} G(\mathbf{z},t,\mathbf{w})\cdot w_1^{\delta(G^{-1}AG)} = \widehat{G}(\mathbf{z},\mathbf{w}),$$
$$\widetilde{A}_{n-1}(\mathbf{w}) = -\widehat{G}^{-1}\widehat{A}_{n-1}\widehat{G},$$

and

$$\lim_{z_k\to\infty}\delta_k\widehat{A}_k = \delta_k\widehat{A}_{k-1},\ \lim_{z_k\to\infty} z_k^{\delta_k\widehat{A}_{k-1}}\cdot\widehat{A}_k\cdot z_k^{-\delta_k\widehat{A}_{k-1}} = \widehat{A}_{k-1},\ k=2,...,n-1,\ \widehat{A}_1 = z_1^{-\delta\widehat{A}_0}\cdot\widehat{A}_0\cdot z_1^{\delta\widehat{A}_0};$$
$$\lim_{w_k\to\infty}\delta_k\widetilde{A}_k = \delta_k\widetilde{A}_{k-1},\ \lim_{w_k\to\infty} w_k^{\delta_k\widetilde{A}_{k-1}}\cdot\widetilde{A}_k\cdot w_k^{-\delta_k\widetilde{A}_{k-1}} = \widetilde{A}_{k-1},\ k=2,...,n-1,\ \widetilde{A}_1 = \widetilde{A}_0;$$
$$\lim_{w_2\to\infty}\cdots\lim_{w_{n-1}\to\infty}\lim_{z_2\to\infty}\cdots\lim_{z_{n-1}\to\infty}\overrightarrow{\prod_{k=1}^{n-1}}\left(z_k^{\delta_k\widehat{A}_{k-1}}z_k^{-\widehat{A}_k}\right)\cdot(z_1\cdots z_{n-1}w_{n-1}\cdots w_2)^{\widehat{A}_{n-1}}\,\widehat{G}\cdot\overleftarrow{\prod_{k=2}^{n-1}}\left(w_k^{\widetilde{A}_k}w_k^{-\delta_k\widetilde{A}_{k-1}}\right) = G_0.$$

在最后一个恒等式中，我们令 $z_{n-1},...,z_2$ 和 $w_{n-1},...,w_2$ 依次趋于无穷。我们将 (A_0,G_0) 称为相应解在迭代极限点处的边界值

$$t\to 0, z_{n-1}\to\infty,...,z_2\to\infty, w_{n-1}\to\infty,...,w_2\to\infty. \tag{1.14}$$

此外，由满足边界条件的（A_0，G_0）G（A_0，G_0）参数化的解集 A，其中参数为（G_0，A_0）$\in \mathrm{GL}_n\times\mathfrak{gl}_n$s，几乎包含了等单值变形方程的所有解。

首先应注意，矩阵函数 A_{n-1}（z）和 A_{n-1}（w），它们分别仅依赖于变量z和 w，满足具有一个不规则奇点的亚纯线性常微分方程的等单值变形方程（方程（2.3））。我们的解的构造与刻画分为三个主要步骤:

1. 在定理 4.1 中，我们由中间对 A(z) $= A_{n-1}$(z)和 G(z, w) 构造解 (A(z t, w) G(z t, w))，它们满足特定的特征值条件及相应的方程。2. 随后，在命题 5.4 中，我们由满足边界条件的边界值(A_0, G_0)构造中间对 (A(z) G(w))。

3. 最后，在第 5.3 节中，我们提出了一个关于单值化数据的判据（定义 5.9），该判据选出一个开稠密子集，并证明所有满足此判据的解都属于集合 $\mathfrak{Sol}_{\mathrm{Shr}}$。

1.2 亚纯线性常微分方程的单值化问题

常微分方程 (1.1) 的单值化数据由以下部分组成：在 $\xi = 0$ 处的一对斯托克斯矩阵$S^{(0)}_{d\pm}$，(U,V,A,G)；在 $\xi=\infty$ 处的一对斯托克斯矩阵 $S^{(\infty)}_{d\pm}$，(U,V,A,G)；以及从 $\xi=0$ 到 $\xi=\infty$ 的连接矩阵 $C_d(A,G)$（对应于选定的可容许方向 d）。定义见第 3 节。

根据 [18],，当 A(u, v) G(u, v) 满足等单值变形方程 (1.2)-(1.5) 时，斯托克斯矩阵$S^{(0)}_{d\pm}$，(A(u, v) G(u, v)) 和 $S^{(\infty)}_{d\pm}$，(A(u, v) G(u, v)) 局部为常数（与 u 和 v 无关）。因此，斯托克斯矩阵是非线性方程 (1.2)-(1.5) 的第一积分。通过研究斯托克斯矩阵，可以得到非线性等单值变形方程的许多整体解析性质。我们的第二个结果是通过 (A(u, v) G(u, v)) 的边界值，推导出单值化数据的显式公式。

定理 *1.2.* 设 $A(A_0,G_0)$ $G(A_0,G_0)$ 是等单值变形方程 *(4.1a)–(4.1f)* 的解，其边界值 (A_0,G_0) $\in T^*GL_n$ 如定理 *1.1* 所示。选取 U,V 及方向 d，使得

$$\mathrm{Im}(u_1e^{\mathrm{i}d}) > ... > \mathrm{Im}(u_ne^{\mathrm{i}d}),\quad \mathrm{Im}(v_1e^{\mathrm{i}d}) < ... < \mathrm{Im}(v_ne^{\mathrm{i}d}), \tag{1.15}$$
$$-\pi < (d+\arg(u_{k+1}-u_k)) < 0,\quad 0 < (d+\arg(v_{k+1}-v_k)) < \pi,\ \textit{for}\ \ k=1,..,n-1. \tag{1.16}$$

Then

(1). 斯托克斯矩阵 $S^{(\infty)}_{d\pm}(U,V,A(\widehat{A}_0,G_0)\ G(\widehat{A}_0,G_0))$ 的次对角线为

$$(S^{(\infty)}_{d+}\cdot(U,\ V,\ A,\ G))_{k,\ k+1}=-2\pi\mathrm{i}$$
$$\times\sum_{i=1}^{k}\frac{\prod_{l=1,l\neq i}^{k}\Gamma(1+\widehat{\lambda}_i^{(k)}-\widehat{\lambda}_l^{(k)})}{\prod_{l=1}^{k+1}\Gamma(1+\widehat{\lambda}_i^{(k)}-\widehat{\lambda}_l^{(k+1)})}\frac{\prod_{l=1,l\neq i}^{k}\Gamma(\widehat{\lambda}_i^{(k)}-\widehat{\lambda}_l^{(k)})}{\prod_{l=1}^{k-1}\Gamma(1+\widehat{\lambda}_i^{(k)}-\widehat{\lambda}_l^{(k-1)})}\cdot\det(\widehat{\lambda}_i^{(k)}\mathrm{Id}-\widehat{A}_0)^{1,\dots,k-1,k}_{1,\dots,k-1,k+1},$$
$$(S^{(\infty)}_{d-}\cdot(U,\ V,\ A,\ G))_{k+1,\ k}=-2\pi\mathrm{i}\cdot\mathrm{e}^{\pi\mathrm{i}(\widehat{A}_0)_{k+1,\ k+1}-(\widehat{A}_0)_{k,\ k})}$$
$$\times\sum_{i=1}^{k}\frac{\prod_{l=1,l\neq i}^{k}\Gamma(1+\widehat{\lambda}_l^{(k)}-\widehat{\lambda}_i^{(k)})}{\prod_{l=1}^{k+1}\Gamma(1+\widehat{\lambda}_l^{(k+1)}-\widehat{\lambda}_i^{(k)})}\frac{\prod_{l=1,l\neq i}^{k}\Gamma(\widehat{\lambda}_l^{(k)}-\widehat{\lambda}_i^{(k)})}{\prod_{l=1}^{k-1}\Gamma(1+\widehat{\lambda}_l^{(k-1)}-\widehat{\lambda}_i^{(k)})}\cdot\det(\widehat{A}_0-\widehat{\lambda}_i^{(k)}\mathrm{Id})^{1,\dots,k-1,k+1}_{1,\dots,k-1,k}.$$

其中 $k=1,\dots,n-1$, Id 是 $n\times n$ 单位矩阵，而 $M^{a_1,\dots,a_k}_{b_1\dots b_k}$ 是由 $(a_1,\dots,a_k)$ 行和 $(b_1,\dots,b_k)$ 列构成的 $k\times k$ M 子矩阵。此外，其他元素也可由显式表达式给出。

(2)。斯托克斯矩阵 $S^{(0)}_{d\pm}(U,V,A(\widehat{A}_0,G_0)\ G(\widehat{A}_0,G_0))$ 的次对角线为

$$S^{(0)}_{d+}\ (U,\ V,\ A,\ G)_{k,\ k+1}=-2\pi\mathrm{i}\cdot\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}(\widetilde{A}_0)_{k,\ k}}$$
$$\times\sum_{i=1}^{k}\frac{\prod_{l=1,l\neq i}^{k}\Gamma(1+\widetilde{\lambda}_i^{(k)}-\widetilde{\lambda}_l^{(k)})}{\prod_{l=1}^{k+1}\Gamma(1+\widetilde{\lambda}_i^{(k)}-\widetilde{\lambda}_l^{(k+1)})}\frac{\prod_{l=1,l\neq i}^{k}\Gamma(\widetilde{\lambda}_i^{(k)}-\widetilde{\lambda}_l^{(k)})}{\prod_{l=1}^{k-1}\Gamma(1+\widetilde{\lambda}_i^{(k)}-\widetilde{\lambda}_l^{(k-1)})}\cdot\det(\widetilde{\lambda}_i^{(k)}\mathrm{Id}-\widetilde{A}_0)^{1,\dots,k-1,k}_{1,\dots,k-1,k+1},$$
$$S^{(\infty)}_{d-}\ (U,\ V,\ A,\ G)_{k+1,\ k}=-2\pi\mathrm{i}$$
$$\times\sum_{i=1}^{k}\frac{\prod_{l=1,l\neq i}^{k}\Gamma(1+\widetilde{\lambda}_l^{(k)}-\widetilde{\lambda}_i^{(k)})}{\prod_{l=1}^{k+1}\Gamma(1+\widetilde{\lambda}_l^{(k+1)}-\widetilde{\lambda}_i^{(k)})}\frac{\prod_{l=1,l\neq i}^{k}\Gamma(\widetilde{\lambda}_l^{(k)}-\widetilde{\lambda}_i^{(k)})}{\prod_{l=1}^{k-1}\Gamma(1+\widetilde{\lambda}_l^{(k-1)}-\widetilde{\lambda}_i^{(k)})}\cdot\det(\widetilde{A}_0-\widetilde{\lambda}_i^{(k)}\mathrm{Id})^{1,\dots,k-1,k+1}_{1,\dots,k-1,k}.$$

其中 $k=1,\dots,n-1$, $\widetilde{A}_0=-G_0^{-1}\widehat{A}_0G_0$，其他元素也由显式表达式给出。

(3)。连接矩阵为

$$C_d\left(U,V,A\left(\widehat{A}_0,G_0\right),G\left(\widehat{A}_0,G_0\right)\right)=e^{-\frac{\pi\mathrm{i}}{2}\delta\hat{A}_0}\cdot\left(\overrightarrow{\prod_{k=1,\dots,n-1}}\widehat{C}_k\right)\cdot P^{-1}(\widehat{A}_0)G_0P(\widetilde{A}_0)\cdot\left(\overrightarrow{\prod_{k=1,\dots,n-1}}\widetilde{C}_k\right)^{-1}\cdot e^{-\frac{\pi\mathrm{i}}{2}\delta\widetilde{A}_0},$$

$\longrightarrow$其中乘积 $\prod$ 按如下方式取值：若 $i>j$，则指标 i 位于 j 右侧，且 $n\times n$ 矩阵 $\widehat{C}_k$ 的元素为

$$\widehat{C}_{k,ij}=\frac{e^{\frac{\pi\mathrm{i}(\widehat{\lambda}_j^{(k+1)}-\widehat{\lambda}_i^{(k)})}{2}}}{(\widehat{\lambda}_j^{(k+1)}-\widehat{\lambda}_i^{(k)})}\frac{\prod_{v=1}^{k+1}\Gamma(1+\widehat{\lambda}_j^{(k+1)}-\widehat{\lambda}_v^{(k+1)})\prod_{v=1}^{k}\Gamma(1+\widehat{\lambda}_i^{(k)}-\widehat{\lambda}_v^{(k)})}{\prod_{v=1,v\neq i}^{k}\Gamma(1+\widehat{\lambda}_j^{(k+1)}-\widehat{\lambda}_v^{(k)})\prod_{v=1,v\neq j}^{k+1}\Gamma(1+\widehat{\lambda}_i^{(k)}-\widehat{\lambda}_v^{(k+1)})}$$
$$\cdot\frac{(-1)^{k+i}\det^{1,\dots,k}_{1,\dots,k-1,k+1}\left(\widehat{\lambda}_i^{(k)}-\widehat{A}_0\right)}{\sqrt{\prod_{l=1,l\neq i}^{k}(\widehat{\lambda}_i^{(k)}-\widehat{\lambda}_l^{(k)})\prod_{l=1}^{k-1}(\widehat{\lambda}_i^{(k)}-\widehat{\lambda}_l^{(k-1)})}}\sqrt{\frac{\prod_{v=1}^{k}(\widehat{\lambda}_j^{(k+1)}-\widehat{\lambda}_v^{(k)})}{\prod_{v=1,v\neq j}^{k+1}(\widehat{\lambda}_j^{(k+1)}-\widehat{\lambda}_v^{(k+1)})}},\tag{1.17}$$

当 $1\leq j\leq k+1, 1\leq i\leq k$ 时，以及

$$(\widehat{C}_k)_{k+1,j}=\frac{e^{\frac{\pi\mathrm{i}(\widehat{A}_{k+1,k+1}-\widehat{\lambda}_j^{(k+1)})}{2}}\prod_{v=1}^{k+1}\Gamma(1+\widehat{\lambda}_j^{(k+1)}-\widehat{\lambda}_v^{(k+1)})}{\prod_{v=1}^{k}\Gamma(1+\widehat{\lambda}_j^{(k+1)}-\widehat{\lambda}_v^{(k)})}\sqrt{\frac{\prod_{v=1}^{k}(\widehat{\lambda}_j^{(k+1)}-\widehat{\lambda}_v^{(k)})}{\prod_{v=1,v\neq j}^{k+1}(\widehat{\lambda}_j^{(k+1)}-\widehat{\lambda}_v^{(k+1)})}},\quad for\ 1\leq j\leq k+1,$$
$$\widehat{C}_{k,ii}=1,\qquad for\ k+1<i\leq n,$$
$$\widehat{C}_{k,ij}=0,\qquad otherwise.$$

$n\times n$ 矩阵 $\widetilde{C}$ 由与 $\widehat{C}$ 相同的公式给出，只需分别将 $\widehat{A}_0$ 和 $\widehat{\lambda}_i^{(k)}$ 替换为 $\widetilde{A}_0$ 和 $\widetilde{\lambda}_i^{(k)}$ 。

这里，对于任意矩阵 M， $P(M)$ 是其元素为

$$P(M)_{ij} = (-1)^{i+n} \frac{\det(M - \lambda_j^{(n)} I)^{1,\dots,n\setminus n}_{1,\dots,n\setminus i}}{\prod_{t=1}^{n-1}(\lambda_t^{(n-1)} - \lambda_j^{(n)})}, \tag{1.18}$$

$$(P(M)^{-1})_{ij} = (-1)^{n+j} \frac{\det(M - \lambda_i^{(n)} I)^{1,\dots,n\setminus j}_{1,\dots,n\setminus n}}{\prod_{s\neq i}(\lambda_s^{(n)} - \lambda_i^{(n)})}, \tag{1.19}$$

将 M 对角化，即 $P^{-1}(M) \cdot M \cdot P(M)$ =对角矩阵 $(\lambda_1^{(n)}, ..., \lambda_n^{(n)})$ 。

注 1.3. 当我们假设留数矩阵 A 具有互异特征值时，上述公式是良定义的。然而，由于斯托克斯矩阵和连接矩阵都是关于留数矩阵 A 和矩阵 G的解析函数，因此即使在 A不可对角化或具有重特征值的情况下，该公式仍可通过解析延拓成立。

注 1.4. 当对角元 u_i， v_i 不满足假设 (1.15)-(1.16)时，只要考虑参数 *[9]* 或 *[4]*变化所诱导的辫群在斯托克斯矩阵上的作用（见 u_i, v_i ），仍可显式计算相应的斯托克斯矩阵和连接矩阵。

这些单值化数据的表达式是在迭代极限点处计算得到的，这依赖于单值化数据在等单值变形下的不变性。本文的成果是用第一次取极限得到的极限系统的单值化数据来表示原方程的单值化数据， $t \to 0$ （见定理 5.3）。这需要系统（1.1）的解满足因子分解性质 $t \to 0$ （见定理 5.1）。最后一步是确定在 z_{n-1}、…、 $z_2 \to \infty$ 和 w_{n-1}、…、 $w_2 \to \infty$的连续极限下单值化数据的具体表达式；这些结果已在先前的工作中得到 [23, 22]。定理 1.2 的证明紧接在推论 5.7之后给出。

文中给出的具有一个二阶极点和一个简单极点的线性系统的单值化数据的显式表达式 [23] 与李代数对偶上的盖尔范德-采特林系统 [14], 密切相关，并被用于研究斯托克斯矩阵的 WKB 近似 [1], ， 以给出 $\mathfrak{gl}_n$-晶体结构的超越实现 [23] 以及杨表的某些组合算子 [24]，这些结构和算子源自表示论。定理1.2 中给出的具有两个二阶极点的线性系统的单值化数据表达式，可以看作一种双重构造或融合构造。它与李群余切丛上的盖尔范德-采特林型系统密切相关，并有望与晶体的张量积相关联，同时为 Littlewood-Richardson 规则提供一种超越诠释。未来将沿这一方向开展进一步研究。

1.3 C与 tt^* 方程的联系，以及不属于 $\mathfrak{Sol}_S$ 的解的示例

在方程（1.1）中，当我们令 $V = \overline{U}$并令 $A = -[U, q]$， $G = m$，其中 $q(\mathbf{u}\ \bar{}\ \mathbf{u})$ 是一个对称非对角矩阵函数，$m(\mathbf{u}\ \bar{}\ \mathbf{u})$ 是一个正交厄米矩阵函数，例如 $[U, q] = m[U, q]m$，我们得到以下方程：

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}\varphi = (U - \lambda^{-1}[U, q] - \lambda^{-2} m\overline{U} m^{-1})\varphi. \tag{1.20}$$

相应的 等单值变形方程是 tt^* 方程（带相似约化），该方程由 [8建立].

在 $n = 2$ 的情形下， tt^* 方程等价于正弦-戈登 Painlev´e III 方程。另一个重要的特殊情形是 tt^*-Toda 方程，其中变量 u_1，……， u_n 是单个变量 x 的指定常数倍。

在第 6.1、6.2节中，我们将定理 1.1 和1.2 专门应用于这两个特殊情形，并说明我们的结果与已知的 Painlev´e III 方程的结果（见 [10] ）以及 tt^*-Toda 方程的结果（见[12, 11, 13]）一致。对于 tt^*-Toda 方程，一族解由某些渐近参数空间中的一个多面体参数化。我们进一步描述该多面体的哪一部分对应于集合 $\mathfrak{Sol}_{Shr}$中的解。通过这样做，我们还确定了一族已知的等单值变形方程解，它们不属于 $\mathfrak{Sol}_{Shr}$。

对于一般的 tt^*-Toda 方程，定理 1.1 使我们能够推导出 q 和 m 在 $t \to 0$下的局部行为，见推论 6.4。

致谢

作者谨向 Martin Guest、Alexander Its、唐倩和谢远程致谢，感谢他们提出的宝贵讨论意见和建议。作者受到国家重点研发计划（编号：2021YFA1002000）的资助。

2 关于具有一个二阶极点的亚纯线性系统的预备知识

本节回顾 [22, 23]中的主要结果。考虑如下关于函数的 $n \times n$ 亚纯微分方程线性系统 $F(z, u_1, \dots, u_n) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = \left(U + \frac{\Phi(\mathbf{u})}{z}\right) \cdot F, \tag{2.1a}$$

$$\frac{\partial F}{\partial u_k} = \left(E_k z + \mathrm{ad}_U^{-1}\mathrm{ad}_{E_k}\Phi(\mathbf{u})\right) \cdot F, \text{ for all } k = 1, \dots, n. \tag{2.1b}$$

其中 $U =$对角矩阵$\{u_1, u_2, ..., u_n\}$，并且留数矩阵 $\Phi(\mathbf{u}) = \Phi(u_1, ..., u_n)$ 是方程的一个解

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u_k} = [\mathrm{ad}_U^{-1}\mathrm{ad}_{E_k}\Phi, \Phi], \ k = 1, ..., n. \tag{2.2}$$

容易验证，(2.2) 是该线性系统的相容条件。

2.1 方程 (2.2)的一般解的长时间行为与参数化

根据 Miwa [20],，方程 $\Phi(\mathbf{u})$（2.2）的解是 u_1、.. .、 u_n的多值亚纯函数。当（u_1，...， u_n沿胖对角线周围的闭合回路移动时，会出现分支 Δ。方程（2.3）的解在临界点处的渐近行为（长时间行为）和边界条件见[22]。

为陈述结果，我们引入坐标 $z_0 = u_1$、 $z_1 = u_2 - u_1$、 $z_2 = \dfrac{u_3 - u_1}{u_2 - u_1}$、...、 $z_{n-1} = \dfrac{u_n - u_1}{u_{n-1} - u_1}$，则方程（2.2）变为

$$\frac{\partial \Phi(\mathbf{z})}{\partial z_k} = [\mathrm{ad}_U^{-1}\mathrm{ad}_{\frac{\partial U}{\partial z_k}}\Phi, \Phi], \ k = 0, ..., n-1, \tag{2.3}$$

其中

$$\frac{\partial U}{\partial z_k} = \frac{1}{z_k}(u_{k+1}E_{k+1} + ... + u_n E_n - z_0(E_{k+1} + ... + E_n)).$$

定理 2.1 ([22]). 给定任意常数 $n \times n$ 矩阵 Φ_0，满足系统的边界条件(2.3)

$$\left|\mathrm{Re}\left(\lambda_i^{(k-1)} - \lambda_j^{(k-1)}\right)\right| < 1, \quad \textit{for every } 1 \leqslant i, j \leqslant k-1, \tag{2.4}$$

其中 $\{\lambda_i^{(k-1)}\}_{i=1,\dots,k-1}$是左上角 $(k-1) \times (k-1)$子矩阵的特征值，存在方程 Φ_0的唯一解 $\Phi(\mathbf{z}; \Phi_0) = \Phi_{n-1}(\mathbf{z})$，以及一列矩阵函数 $\Phi_{n-1}, \dots, \Phi_1$，使得

$$\lim_{z_k \to \infty} \delta_k \Phi_k = \delta_k \Phi_{k-1}, \quad \lim_{z_k \to \infty} z_k^{\mathrm{ad}_{\delta_k}\Phi_{k-1}}\Phi_k = \Phi_{k-1} \quad \textit{for } k = 2, \dots n-1; \quad \textit{and} \quad z_1^{\mathrm{ad}_{\delta\Phi_1}}\Phi_1 = \Phi_0. \tag{2.5}$$

正则化极限 Φ_0 称为 边界值，它属于 $\Phi(\mathbf{z};\Phi_0)$ *(在迭代极限点* $z_{n-1},\dots,z_2\to\infty$*)*。此外，解集 $\Phi(\mathbf{z};\Phi_0)$由满足边界条件 Φ_0 的 (2.4)参数化，包含几乎所有解。

注 2.2. 该定理在 *[22]* 中的原始表述与此处给出的表述略有不同。差异源于 z坐标的定义不同（其中 $z_k=\dfrac{u_k-u_{k-1}}{u_{k-1}-u_{k-2}}$ 定义于 *[22]*）。在 *[22]*,的极限行为 $\Phi(\mathbf{u})$ 描述如下：

$$\lim_{u_k\to\infty}\delta_{k-1}\Phi_k=\delta_{k-1}\Phi_{k-1},\quad \lim_{u_k\to\infty}\left(\frac{u_k-u_{k-1}}{u_{k-1}-u_{k-2}}\right)^{\mathrm{ad}\delta_{k-1}\Phi_{k-1}}\Phi_k=\Phi_{k-1},\quad 1\le k\le n.$$

不过，目前的表述与该定理的原始版本等价，此处得到的 Φ_0 与原文中的 Φ_0 完全相同。

2.2 线性常微分方程的单值化矩阵

对于固定的 u_1，...，u_n，偏微分方程线性系统变为一个常微分方程（2.1a）。

定义 2.3. 线性常微分方程的反斯托克斯方向 (2.1a) 在 $\xi=\infty$ 处为

$$aS(u):=\{-\arg(u_i-u_j)+2k\pi:k\in\mathbb{Z},i\neq j\}.$$

选取一个初始反斯托克斯方向 $\tau_0\in(\pi,\pi)$，然后将反斯托克斯方向排列成一个严格单调递增序列

$$\cdots<\tau_{-1}<\tau_0<\tau_1<\cdots.$$

对于任意方向 $d\in(\tau_j,\tau_{j+1})$，***Stokes*** 扇区 **扇形域$_\mathbf{d}$** 为

$$Sect_d^{(\infty)}:=\left\{\phi\in\bar{\mathbb{C}}:\arg\phi\in\left(\tau_j-\frac{\pi}{2},\tau_{j+1}+\frac{\pi}{2}\right)\right\}\tag{2.6}$$

于是，重求和的标准理论表明，在这些扇区中的每一个上，都存在唯一的（因而是规范的）全纯解，满足指定渐近条件。参见例如 [2]。

定理 2.4。 在每个 扇形域$_d^{(\infty)}$ 上，都存在唯一的全纯基本解 $F_d(\xi)$，它是 （2.1a）的解，并满足指定渐近条件：

$$F_d(\xi)\cdot \mathrm{e}^{-\xi U}\xi^{-\delta\Phi}\sim \mathrm{Id}+O(\xi^{-1}),\quad as\ \xi\to\infty\ within\ \mathrm{Sect}_d^{(\infty)}.\tag{2.7}$$

定义 2.5。 关于方向 d 的斯托克斯矩阵由下式确定

$$S_d^{\pm}(U,\Phi):=F_{d\pm\pi}(\xi)^{-1}F_d(\xi),\tag{2.8}$$

斯托克斯矩阵被视为线性系统（2.1a）在 $\xi=\infty$处的内部单值化数据。现在我们引入从 $\xi=0$ 到 $\xi=\infty$的连接矩阵。首先，

引理 2.6。 在矩阵 Φ 的特征值之差不为正整数的假设下，线性常微分方程 （2.1a）具有一个基本解 $F^{(0)}(\xi)$，满足

$$F^{(0)}(\xi)\cdot\xi^{-\Phi}\sim \mathrm{Id}+O(\xi),\quad as\ \xi\to 0.\tag{2.9}$$

定义 2.7. 若 Φ 是非共振的，即 Φ的任意两个特征值之差都不是非零整数，则我们

定义 连接矩阵 $C_d(U,\Phi)$ 相对于方向 (2.1a)，定义为 d:

$$C_d(U,\Phi) = F_d(\xi)^{-1}F^{(0)}(\xi). \tag{2.10}$$

并且我们将 $F_d(\xi)$ 的单值矩阵 $\nu_d(U,\Phi)$ 定义为

$$\nu_d(U,\Phi) := F_d(\xi)^{-1}F_d(\xi \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}}). \tag{2.11}$$

注 2.8. 根据 扇形域$_d$ 在 (2.6)中的定义， $F_{d_1} = F_{d_2}$ 对于 $\tau_j < d_1 < d_2 < \tau_{j+1}$成立。因此，斯托克斯矩阵、连接矩阵和单值化矩阵在方向d 于扇区 (τ_j,τ_{j+1})内变化时均保持不变。

下面的命题是标准结果。例如，恒等式（2.15）可由以下事实推出：绕 0 的简单正向回路（即沿顺时针方向）是绕 ∞ 的简单负向回路（即沿逆时针方向）。

引理 2.9. 我们有如下单值关系

$$S_d^{\pm}(cU,\Phi) = c^{\delta\Phi}S_{d+\arg c}^{\pm}(U,\Phi)c^{-\delta\Phi}, \tag{2.12}$$

$$S_{d\mp\pi}^{\pm}(U,\Phi) = S_d^{\mp}(U,\Phi)^{-1}, \tag{2.13}$$

$$C_d(cU,\Phi) = c^{\delta\Phi}C_{d+\arg c}(U,\Phi)c^{-\Phi}, \tag{2.14}$$

$$\nu_d(U,\Phi) = S_d^{-1}(U,\Phi)^{-1}\cdot \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\delta\Phi}\cdot S_d^{+}(U,\Phi) = C_d(U,\Phi)\cdot \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\Phi}\cdot C_d(U,\Phi)^{-1}. \tag{2.15}$$

对于给定的 $d \notin aS(u)$，引入具有以下元素的 $n\times n$ 置换矩阵 P： $P_{ij} = \delta_{\sigma(i)j}$，其中 σ 是 $\{1,...,n\}$ 的一个置换，对应于 $\{e^{u_1 z},...,e^{u_n z}\}$ 沿方向 $d+\frac{\pi}{2}$ 的主导序。也就是说，当且仅当 $e^{(u_i-u_j)z}\to 0$ 沿 $d+\frac{\pi}{2}$ 满足$-z\to\infty$ 时， $\sigma(i) < \sigma(j)$。于是，斯托克斯矩阵经置换矩阵共轭后为三角矩阵。也就是说

引理 2.10。 矩阵 $P\cdot S_d^{+}(U,\Phi)\cdot P^{-1}$ 和 $P\cdot S_d^{-}(U,\Phi)\cdot P^{-1}$ 分别是上三角矩阵和下三角矩阵。此外，它们的对角线元素均为 1。

2.3 等单值性性质

回顾一下，第 2.2 节的讨论针对固定的 U =对角矩阵(u_1，...，u_n)。根据 Jimbo-Miwa-Ueno 的工作 [18]可知

命题 2.11。 若 $\Phi(\mathbf{u})$ 满足等单值变形方程 (2.2)，则斯托克斯矩阵 $S_d^{\pm}(U,\Phi)$ 局部为常数。特别地，对于任意方向 d，令

$$R_{u,d} := \{U\in\mathbb{C}^n\setminus\Delta \mid d\neq -\arg(u_i-u_j)+2k\pi,\ for\ all\ i\neq j,k\in\mathbb{Z}\} \tag{2.16}$$

令其为 $\mathbb{C}^n\setminus\Delta$ 中由所有满足 $d\notin aS(u)$ 的 u 组成的子集，则斯托克斯矩阵 $S_d^{\pm}(U,\Phi)$ 在 $R_{u,d}$ 的每个连通分支内，对所有 u 均为常数。

需要指出的是，定义 2.7 中定义的连接矩阵并非局部不变。具体而言，其演化由以下命题描述：

命题 2.12 ([18])。 给定等单值变形方程 (2.3)的一个非共振解 $\Phi(z_0,...,z_{n-1})$，将连接矩阵 $C_d(U,\Phi)$视为坐标 $(z_0, z_1,\dots,z_{n-1})$的函数，它满足以下关于矩阵函数 $X(\mathbf{z})$的方程组：

$$\frac{\partial X(\mathbf{z})}{\partial z_k} = -X(\mathbf{z})\cdot \mathrm{ad}_U^{-1}\mathrm{ad}_{\frac{\partial U}{\partial z_k}}\Phi, \quad k=0,\dots,n-1. \tag{2.17}$$

2.4 等单值变形与单值化问题

给定任意解 $\Phi(\mathbf{u};\Phi_0)$，其边界值为 Φ_0，根据命题 2.11，斯托克斯矩阵 $S_d^{\pm}(U,\Phi(u;\Phi_0))$ 在 $R_{u,d}\in\mathbb{C}^n\setminus\Delta$ 上为常数，因此仅取决于边界值（积分常数） Φ_0。以下定理给出了斯托克斯矩阵关于 Φ_0 的显式表达式。

定理 2.13 ([22])。 设 $R_{u,d}(J)$ 是 $R_{u,d}$ 由子集 $J\subset\{1,2,...,n-1\}$标记的连通分支，如下所示： $U=\mathrm{diag}(u_1,...,u_n)\in R_{u,d}(J)$ 当且仅当

$$\mathrm{Im}(u_{k+1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}d})<\min_{1\le j\le k}\mathrm{Im}(u_j\mathrm{e}^{\mathrm{i}d}),\ \textit{for } k\in J, \tag{2.18}$$

$$\mathrm{Im}(u_{k+1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}d})>\min_{1\le j\le k}\mathrm{Im}(u_j\mathrm{e}^{\mathrm{i}d}),\ \textit{for } k\notin J. \tag{2.19}$$

则对于 $U\in R_{u,d}(J)$，有

$$S_d^{-1}(U,\Phi)^{-1}\cdot\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\delta\Phi}\cdot S_d^{+}(U,\Phi)=\mathrm{Ad}\left(\prod_{k=1}^{\overrightarrow{n-1}}C_{d+\arg(u_{k+1}-u_k)}(E_{k+1},\delta_{k+1}(\Phi_0))\right)\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\Phi_0}. \tag{2.20}$$

这里，每个 $C_{d+\arg(u_{k+1}-u_k)}(E_{k+1},\delta_{k+1}(\Phi_0))\in\mathrm{GL}_n$ 都是该常微分方程线性系统 $n\times n$ 的连接矩阵

$$\frac{dF}{dz}=\left(E_{k+1}+\frac{\delta_{k+1}(\Phi_0)}{z}\right)\cdot F, \tag{2.21}$$

相对于方向 $d+\arg(u_{k+1}-u_k)$。

注 2.14。 当 $J=\{1,2,...,n-1\}$, $U\in R_{u,d}(J)$ 表示 $\mathrm{Im}(u_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}d})>\cdots>\mathrm{Im}(u_n\mathrm{e}^{\mathrm{i}d})$时，且若进一步令 $-\pi<d+\arg(u_{k+1}-u_k)<0$ 对于 $k=1,...,n-1$，则有

$$S_d^{-1}(U,\Phi)^{-1}\cdot\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\delta\Phi}\cdot S_d^{+}(U,\Phi)=\mathrm{Ad}\left(\prod_{k=1}^{\overrightarrow{n-1}}C_{-\frac{\pi}{2}}(E_{k+1},\delta_{k+1}(\Phi_0))\right)\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\Phi_0}.$$

上述定理给出了系统（2.1a）的（单值化数据的）因子分解，将其分解为多个系统（2.21），其中 $k=1,...,n-1$。由于系统（2.1a）对于 $k=1,...,n-1$ 是刚性的，因此可以得到连接矩阵 $C_{d+\arg(u_{k+1}-u_k)}(E_{k+1},\delta_{k+1}(\Phi_0))$ 的显式公式，从而得到 $S_d^{\pm}(U,\Phi(\mathbf{u};\Phi_0))$ 关于 Φ_0的显式公式。详见 [22, 23]。

作为单值化关系（2.15）和定理2.13的推论，我们还有

推论 2.15。 给定 $\Phi(\mathbf{u})=\Phi(\mathbf{u};\Phi_0)$，若 是非共振的，则对于所有 $_d(J)$，我们有

$$C_d(U,\Phi)\cdot\Phi\cdot C_d(U,\Phi)^{-1}=\mathrm{Ad}\left(\prod_{k=1}^{\overrightarrow{n-1}}C_{d+\arg(u_{k+1}-u_k)}(E_{k+1},\delta_{k+1}(\Phi_0))\right)\Phi_0. \tag{2.22}$$

3 具有两个不规则奇点的系统、其单值化数据和等单值变形方程

本节中，我们介绍具有两个二阶极点的系统，并定义其单值化数据和等单值变形方程。

3.1 非线性偏微分方程的 Lax 对 (1.2)-(1.5)

考虑如下关于函数 $F(\xi,\ u_1,\ \ldots\ldots,\ u_n,\ v_1,\ \ldots\ldots,\ v_n)$ 的 $n\times n$ 线性系统，其中 $\in \mathrm{GL}_n$ 的变量为复变量:

$$\frac{\partial F}{\partial \xi}=\left(U+\frac{A(\mathbf{u},\mathbf{v})}{\xi}+\frac{G(\mathbf{u},\mathbf{v})VG^{-1}(\mathbf{u},\mathbf{v})}{\xi^2}\right)F, \tag{3.1a}$$

$$\frac{\partial F}{\partial u_k}=(E_k\xi+\mathrm{ad}_U^{-1}\mathrm{ad}_{E_k}A(\mathbf{u},\mathbf{v}))F, \tag{3.1b}$$

$$\frac{\partial F}{\partial v_k}=\left(-\frac{G(\mathbf{u},\mathbf{v})E_kG^{-1}(\mathbf{u},\mathbf{v})}{\xi}\right)F, \tag{3.1c}$$

其中 U =对角矩阵$\{u_1,u_2,\ldots,u_n\}$, V =对角矩阵$\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$，且 $A(\mathbf{u},\mathbf{v})\in\mathfrak{gl}_n$, $G(\mathbf{u},\mathbf{v})\in\mathrm{GL}_n$ 是系统 (1.2)-(1.5) 的矩阵值解，其变量为 $(\mathbf{u},\mathbf{v})=(u_1,\ldots,u_n,v_1,\ldots,v_n)$。我们假设 $u_i-u_j\notin\mathbb{Z}, v_i-v_j\notin\mathbb{Z}$，其中 $i\neq j$。

3.2 单值化数据

对于固定的对角矩阵 U,V，在假设

$$u_i-u_j\notin\mathbb{Z},\quad v_i-v_j\notin\mathbb{Z},\ \text{for } i\neq j, \tag{3.2}$$

我们考虑常微分方程 (3.1a)。

定义 3.1。 方程 的反斯托克斯方向 (3.1a) 在 $\xi=\infty$ 为

$$aS(u):=\{-\arg(u_i-u_j)+2k\pi : k\in\mathbb{Z}, i\neq j\}.$$

若将这些方向排列成严格单调递增的序列 $\cdots<\tau_{-1}<\tau_0<\tau_1<\cdots$，则对任意 $d\in(\tau_j,\tau_{j+1})$，***Stokes*** 扇区**扇形域**$^{(\infty)}$ d 为

$$Sect_d^{(\infty)}:=\left\{\phi\in\bar{\mathbb{C}}:\arg\phi\in\left(\tau_j-\frac{\pi}{2},\tau_{j+1}+\frac{\pi}{2}\right)\right\}.$$

同理,

定义 3.2。 方程 （***3.1a***）的反斯托克斯方向 在 3.1a 处 $\xi=\mathbf{0}$ 为

$$aS(v):=\{\arg(v_i-v_j)+2k\pi : k\in\mathbb{Z}, i\neq j\}.$$

若将这些方向排列成严格单调递增的序列 $\cdots<\theta_{-1}<\theta_0<\theta_1<\cdots$，则对任意 $d\in(\theta_j,\theta_{j+1})$，***Stokes*** 扇区**扇形域**$^{(\mathbf{0})}$ d 为

$$Sect_d^{(0)}:=\left\{\phi\in\bar{\mathbb{C}}:\arg\phi\in\left(\theta_j-\frac{\pi}{2},\theta_{j+1}+\frac{\pi}{2}\right)\right\}.$$

与只有一个不规则极点的情形类似，在不同的 Stokes 扇区中，我们有具有指定渐近条件的不同全纯解。

命题 3.3 （例如参见 [2],[3]）。 对于固定的 u, v 并且对任意 $d\notin\mathrm{aSR}(u)$，在 $F_d^{(\infty)}$ (ξ) 上存在常微分方程 （3.1a）的唯一全纯基本解 $\widetilde{\mathbb{C}}$，且具有指定渐近行为:

$$F_d^{(\infty)}(\xi)\cdot \mathrm{e}^{-\xi U}\xi^{-\delta A}\sim \mathrm{Id}+O(\xi^{-1}),\quad as\ \xi\to\infty\quad within\ \mathrm{Sect}_d^{(\infty)}. \tag{3.3}$$

同时，对于任意 $d\notin\mathrm{aSR}(v)$，都存在唯一一个具有指定渐近行为的全纯解 $F_d^{(0)}$ (ξ):

$$F_d^{(0)}(\xi)\cdot \mathrm{e}^{\frac{V}{\xi}}\xi^{-\delta(G^{-1}AG)}\sim G+O(\xi),\quad as\ \xi\to 0\quad within\ \mathrm{Sect}_d^{(0)}. \tag{3.4}$$

下文将介绍单值化数据，即上述优选基本解之间的各种过渡矩阵。

定义 3.4. 方程 （***3.1a***）的斯托克斯矩阵 (3.1a) 在 $\xi=\infty$ 处（相对于任意给定方向 $d\notin \mathrm{aSR}(u)$为

$$S_{d,\pm}^{(\infty)}(U,V,A,G):=F_{d\pm\pi}^{(\infty)}(\xi)^{-1}F_{d}^{(\infty)}(\xi). \tag{3.5}$$

方程 （***3.1a***）的斯托克斯矩阵 （3.1a）在 $\xi=\mathbf{0}$ 处（相对于任意给定方向 $d\notin\mathrm{aSR}(v)$为

$$S_{d,\pm}^{(0)}(U,V,A,G):=F_{-d\mp\pi}^{(0)}(\xi)^{-1}F_{-d}^{(0)}(\xi). \tag{3.6}$$

定义 3.5. 对于选定的方向 $d\notin\mathrm{aSR}(u)\cup\mathrm{aSR}(v)$，方程 的连接矩阵 (3.1a) 为

$$C_{d}(U,V,A,G):=F_{d}^{(\infty)}(\xi)^{-1}F_{-d}^{(0)}(\xi). \tag{3.7}$$

注 3.6. 经过变量代换 $\eta=\dfrac{1}{\xi}$，根据上述定义，*0* 处的单值化数据转化为新系统在 ∞ 处的单值化数据。

定义 3.7. 对于任意选定的方向 $d\notin\mathrm{aSR}(u)$，相应的单值矩阵 $\nu_{d}^{(\infty)}$ $(A,\ G)$ 方程 (3.1a) 在 $\xi=\infty$ 处为

$$\nu_{d}^{(\infty)}(U,V,A,G):=F_{d}^{(\infty)}(\xi)^{-1}F_{d}^{(\infty)}(\xi\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}}). \tag{3.8}$$

类似地，给定任意方向 $d\notin\mathrm{aSR}(v)$，在 $\xi=0$ 处相应的单值矩阵 $\nu_{d}^{(0)}$ (A,G) 为

$$\nu_{d}^{(0)}(U,V,A,G):=F_{d}^{(0)}(\xi)^{-1}F_{d}^{(0)}(\xi\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}}). \tag{3.9}$$

斯托克斯矩阵的以下三角性质以及单值化关系都是标准结果。参见例如[3],[18]。与引理 2.10类似，两对斯托克斯矩阵分别经两个置换矩阵共轭后为上三角和下三角矩阵。特别地，我们有

引理 3.8. 设 $d\notin aS(u)\cup aS(v)$。

(a)。如果

$$\mathrm{Im}(u_1e^{\mathrm{i}d})>\ldots>\mathrm{Im}(u_ne^{\mathrm{i}d}), \tag{3.10}$$

则斯托克斯矩阵 $S_{d\ +}^{(\infty)},(U,V,A,G)$ 和 $S_{d\ -}^{(\infty)},(U,V,A,G)$ 分别为上三角和下三角矩阵，且对角线上均为1。

(b)。如果

$$\mathrm{Im}(v_1e^{\mathrm{i}d})<\ldots<\mathrm{Im}(v_ne^{\mathrm{i}d}), \tag{3.11}$$

那么，斯托克斯矩阵 $S_{d\ +}^{(0)},(U,V,A,G)$ 和 $S_{d\ -}^{(0)},(U,V,A,G)$ 分别是上三角矩阵和下三角矩阵，对角线上均为 1。

引理 3.9 ([18])。 假设 $d\notin aS(u)\cup aS(v)$，我们有如下单值化矩阵、斯托克斯矩阵与连接矩阵之间的单值关系

$$\nu_{d}^{(\infty)}(U,V,A,G)=S_{d,-}^{(\infty)}(U,V,A,G)^{-1}\cdot\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\delta A}\cdot S_{d,+}^{(\infty)}(U,V,A,G), \tag{3.12}$$

$$\nu_{d}^{(0)}(U,V,A,G)=S_{-d,-}^{(0)}(U,V,A,G)^{-1}\cdot\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}\delta(G^{-1}AG)}\cdot S_{-d,+}^{(0)}(U,V,A,G), \tag{3.13}$$

$$\nu_{d}^{(\infty)}(U,V,A,G)=C_{d}(U,V,A,G)\cdot\nu_{-d}^{(0)}(U,V,A,G)^{-1}\cdot C_{d}(U,V,A,G)^{-1}. \tag{3.14}$$

注意，根据引理 3.8，在假设 (3.10) 和 (3.11) 下，恒等式 (3.12) 和 (3.13) 分别给出了矩阵 $\nu_{d}^{(\infty)}(U,V,A,G)$ 和 $\nu_{d}^{(0)}(U,V,A,G)$ 的 LU 分解。

3.3 等单值性性质

命题 *3.10* ([18])。当 $A(u,v)$ $G(u,v)$ 满足等单值变形方程 *(1.2)-(1.5)* 时，*(3.1a)* 的 *Stokes* 矩阵 $S^{(\infty)}_{d\pm}$、(U,V,A,G)、$S^{(0)}_{d\pm}$、(U,V,A,G) 以及连接矩阵 $C_d(U,V,A,G)$ 都是局部常数（与 u 和 v 无关）。

特别地，对于任意方向 d，令

$$R_{u,d} := \{U \in \mathbb{C}^n \setminus \Delta \mid d \neq -\arg(u_i - u_j) + 2k\pi, \text{ for all } i \neq j, k \in \mathbb{Z}\}, \tag{3.15}$$
$$R_{v,d} := \{V \in \mathbb{C}^n \setminus \Delta \mid d \neq \arg(v_i - v_j) + 2k\pi, \text{ for all } i \neq j, k \in \mathbb{Z}\}. \tag{3.16}$$

则斯托克斯矩阵 $S^{(\infty)}_{d\pm}(U,V,A,G)$ 在每个连通分支 $R_{u,d}$ 中对所有 u 都是常数； $S^{(0)}_{d\pm}(U,V,A,G)$ 在每个连通分支 $R_{v,d}$ 中对所有 V 都是常数；连接矩阵 $C_d(U,V,A,G)$ 在上述两个连通区域的交集上为常数。

4 当 $t \to 0 \to 0$ 时满足指定渐近条件的等单值变形方程的解的构造

回顾一下，我们引入了一个新的坐标系（1.11）–（1.13）。也就是说，

$$u_1 = z_0, u_2 = z_1 + z_0, ..., u_n = z_1 z_2 \cdots z_{n-1} + z_0,$$
$$v_n = \frac{t}{z_1 z_2 \cdots z_{n-1}} + w_0, ..., v_2 = \frac{t}{z_1 z_2 \cdots z_{n-1} w_{n-1} \cdots w_2} + w_0, \ v_1 = w_0.$$

为方便起见，我们也记 $w_1 := v_2 - v_1 = \dfrac{t}{z_1 \cdots z_{n-1} w_{n-1} \cdots w_2}$

在这个坐标系中，等单值变形方程化为关于矩阵值函数$A(\mathbf{z}\ t,\ \mathbf{w}) \in \mathfrak{gl}_n$和 $G(\mathbf{z}\ t,\ \mathbf{w}) \in \mathrm{GL}_n$的非线性偏微分方程，其中变量为 $\mathbf{z} = (z_0,\ z_1,\ \ldots,\ z_{n-1})$ 和 $\mathbf{w} = (w_{n-1},\ \ldots,\ w_2,\ w_0)$:

$$\frac{\partial A}{\partial z_0} = 0, \ \frac{\partial A}{\partial z_k} = \left[\mathrm{ad}_U^{-1}\mathrm{ad}_{\frac{\partial U}{\partial z_k}} A, A\right] + \left[\frac{\partial U}{\partial z_k}, GVG^{-1}\right] - \frac{1}{z_k}[U, GVG^{-1}], \ k = 1, \ldots, n-1, \tag{4.1a}$$
$$\frac{\partial A}{\partial t} = \left[U, \frac{1}{t} GVG^{-1}\right] = \left[U, \frac{1}{t}(GVG^{-1} - w_0 \mathrm{Id})\right], \tag{4.1b}$$
$$\frac{\partial A}{\partial w_0} = 0, \ \frac{\partial A}{\partial w_k} = \left[U, G\frac{\partial V}{\partial w_k} G^{-1}\right], \ k = 2, \ldots, n-1. \tag{4.1c}$$
$$\frac{\partial G}{\partial z_0} = 0, \ \frac{\partial G}{\partial z_k} = \left(\mathrm{ad}_U^{-1}\mathrm{ad}_{\frac{\partial U}{\partial z_k}} A\right) \cdot G - \frac{1}{z_k} AG + \frac{1}{z_k} G \cdot \delta(G^{-1}AG), \ k = 1, \ldots, n, \tag{4.1d}$$
$$\frac{\partial G}{\partial t} = \frac{1}{t} AG - \frac{1}{t} G \cdot \delta(G^{-1}AG), \tag{4.1e}$$
$$\frac{\partial G}{\partial w_0} = 0, \frac{\partial G}{\partial w_k} = G \cdot \left(\mathrm{ad}_{\widetilde{V}}^{-1}\mathrm{ad}_{\frac{\partial \widetilde{V}}{\partial w_k}} (G^{-1}AG)\right) - \frac{1}{w_k} AG + \frac{1}{w_k} G \cdot \delta(G^{-1}AG), \ k = 2, \ldots, n. \tag{4.1f}$$

这里的 $n \times n$ 对角矩阵

$$\frac{\partial U}{\partial z_k} = \frac{1}{z_k}(u_{k+1}E_{k+1} + ... + u_n E_n - z_0(E_{k+1} + ... + E_n)), \tag{4.2}$$
$$\frac{\partial V}{\partial w_k} = -\frac{1}{w_k}(v_1 E_1 + ... + v_k E_k - w_0(E_1 + ... + E_k)), \tag{4.3}$$

and

$$\widetilde{V} = \mathrm{diag}(\widetilde{v}_1, ..., \widetilde{v}_n), \ \text{ with entries } \ \widetilde{v}_k = \frac{v_k - v_1}{v_2 - v_1}. \tag{4.4}$$

在本节余下部分，我们将针对参数 t，分离并研究非线性常微分系统（4.1b）和（4.1e）。更准确地说，我们将构造一个解 A（$\mathbf{z}\ t,\ \mathbf{w}$） G（$\mathbf{z}\ t,\ \mathbf{w}$）

$\widehat{}$ $\widehat{}$上述系统的一个解，取自给定的某个更简单的完全可积系统的解 $A(\mathbf{z},\ \mathbf{w})$ $G(\mathbf{z},\ \mathbf{w})$

$$\frac{\partial \widehat{A}}{\partial z_0}=0, \frac{\partial \widehat{A}}{\partial z_k}=\left[\mathrm{ad}_U^{-1}\mathrm{ad}_{\frac{\partial U}{\partial z_k}}\widehat{A},\widehat{A}\right], \quad \frac{\partial \widehat{A}}{\partial w_k}=0, \quad k=1,2,\ldots,n-1, \tag{4.5a}$$

$$\frac{\partial \widehat{G}}{\partial z_0}=0, \frac{\partial \widehat{G}}{\partial z_k}=\left(\mathrm{ad}_U^{-1}\mathrm{ad}_{\frac{\partial U}{\partial z_k}}\widehat{A}\right)\widehat{G}-\frac{1}{z_k}\widehat{A}\widehat{G}, \quad k=1,\ldots,n-1, \tag{4.5b}$$

$$\frac{\partial \widehat{G}}{\partial w_0}=0, \frac{\partial \widehat{G}}{\partial w_k}=\widehat{G}\left(\mathrm{ad}_{\widehat{V}}^{-1}\mathrm{ad}_{\frac{\partial \widehat{V}}{\partial w_k}}(\widehat{G}^{-1}\widehat{A}\widehat{G})\right)-\frac{1}{w_k}\widehat{A}\widehat{G}, \quad k=2,\ldots,n. \tag{4.5c}$$

$\widehat{}$ $\widehat{}$**定理 4.1**。给定任意多值亚纯解 $A(\mathbf{z},\ \mathbf{w})\in\mathfrak{gl}_n$, $G(\mathbf{z},\ \mathbf{w})\in\mathrm{GL}_n$ 的系统 (4.5a)-$\widehat{}$(4.5c)，若特征值 μ_1，...，μ_n 属于 A 满足

$$\max_{1\le j,k\le n}|\mathrm{Re}(\mu_j-\mu_k)|<1, \tag{4.6}$$

则存在等单值变形方程 (4.1a)-(4.1f) $A(\mathbf{z}\ t,\ \mathbf{w})$ $G(\mathbf{z}\ t,\ \mathbf{w})$的唯一解，使得

$$\lim_{t\to 0}A(\mathbf{z},t,\mathbf{w})=\widehat{A}(\mathbf{z}), \quad \lim_{t\to 0}t^{-\widehat{A}}G(\mathbf{z},t,\mathbf{w})\cdot w_1^{\delta(G^{-1}AG)}=\widehat{G}(\mathbf{z},\mathbf{w}). \tag{4.7}$$

$\widehat{}$我们注意到，特征值 μ_1，...，μ_n 属于 A，由于方程（4.5a）而为常数。本定理的证明将在本扇形域的其余部分给出。首先固定 $\mathbf{z}$，$\mathbf{w}$，并仅考虑关于 4.1b）和（4.1e）的系统 t:

$$\frac{\partial A}{\partial t}=\left[U,\frac{1}{t}GVG^{-1}\right]=\left[U,\frac{1}{t}(GVG^{-1}-w_0\mathrm{Id})\right], \tag{4.8}$$

$$\frac{\partial G}{\partial t}=\frac{1}{t}AG-\frac{1}{t}G\cdot\delta(G^{-1}AG). \tag{4.9}$$

在命题4.2中，我们证明了对于固定的 z和 w，方程（4.8）和（**4.9**）存在具有行为（**4.7**）的解。然后，通过证明当 $\mathbf{z}$ 和 w变化时，这些解也满足完整的等单值变形方程（4.1a）-（4.1f），完成证明。

$\widehat{}$ $\widehat{}$**命题 4.2.** 考虑 A, G 如定理 *4.1*所述。固定 $\mathbf{z}=(z_0,\ \ldots z_{n-1})$, $\mathbf{w}=(w_{n-1},\ \ldots w_2,\ w_0)$，并选取实常数 σ_1, σ_2, $K>0$ 使得:

$$\max_{1\le j,k\le n}|\mathrm{Re}(\mu_j-\mu_k)|<\sigma_2<\sigma_1<1, \tag{4.10}$$

$$\max\left\{\left|\frac{U}{u_n-u_1}\right|,|\widehat{A}|,|\widehat{G}|,\left|\widehat{G}\frac{(u_n-u_1)(V-w_0\mathrm{Id})}{t}\widehat{G}^{-1}\right|\right\}<K. \tag{4.11}$$

那么，对于任意角度 ϕ，存在一个 $\epsilon>0$，使得系统 (4.8) 和 (4.9) 存在唯一解 $A(\mathbf{z}\ t,\mathbf{w}(\mathbf{z}\ t,\mathbf{w},\ \phi:=\{t\in\mathbb{C}\mid 0<|t|<\epsilon,|\arg\ t|<\phi\}$，满足:

$$|A-\widehat{A}|\le K|t|^{1-\sigma_1}, \quad |t^{-\widehat{A}}(A-\widehat{A})t^{\widehat{A}}|\le K|t|^{1-\sigma_1}, \tag{4.12}$$

$$|t^{-\widehat{A}}Gw_1^{\delta(G^{-1}AG)}-\widehat{G}|\le K|t|^{1-\sigma_1}. \tag{4.13}$$

证明。令 $\widetilde{U}=\dfrac{U}{u_n-u_1}$, $\widetilde{B}=t^{-\widehat{A}}\cdot\dfrac{(u_n-u_1)(G(t)VG^{-1}(t)\,t}{}-w_0\cdot t^{\widehat{A}}\mathrm{Id})$, $\widetilde{G}=t^{-\widehat{A}}\cdot G\cdot w^{\delta(G^{-1}AG}$ $_1$，并将（4.8）和（4.9）改写为

$$\frac{\partial A}{\partial t}=\left[\widetilde{U},t^{\widehat{A}}\widetilde{B}t^{-\widehat{A}}\right], \tag{4.14a}$$

$$\frac{\partial \widetilde{G}}{\partial t}=\frac{1}{t}t^{-\widehat{A}}(A-\widehat{A})t^{\widehat{A}}\cdot\widetilde{G}. \tag{4.14b}$$

~注意，辅助矩阵函数 $B(t)$ 的方程为

$$\frac{\partial \widetilde{B}(t)}{\partial t}=\frac{1}{t}\left[t^{-\widehat{A}}(A-\widehat{A})t^{\widehat{A}},\widetilde{B}\right]. \tag{4.15}$$

令 $A^{(0)}(t)=\widehat{A}$，$\widetilde{G}^{(0)}(t)=\widehat{G}$，$\widetilde{B}^{(0)}(t)=\widehat{B}=\underline{\widehat{G}(u_n-u_1)(V-w_0\mathrm{Id})}_{t}$ $\widehat{G}^{-1}$，并递归定义 $A^{(k)}(t)$ $\widetilde{G}^{(k)}(t)$ $\widetilde{B}^{(k)}(t)$，（$k=0,1,2,\ldots\ldots$）如下：

$$A^{(k)}(t)=\widehat{A}+\int_0^t\left[\widetilde{U},s^{\widehat{A}}\widetilde{B}^{(k-1)}s^{-\widehat{A}}\right]ds, \tag{4.16}$$

$$\widetilde{G}^{(k)}(t)=\widehat{G}+\int_0^t\frac{1}{s}s^{-\widehat{A}}(A^{(k-1)}(s)-\widehat{A})s^{\widehat{A}}\cdot\widetilde{G}^{(k-1)}ds, \tag{4.17}$$

$$\widetilde{B}^{(k)}(t)=\widehat{B}+\int_0^t\frac{1}{s}\left[s^{-\widehat{A}}(A^{(k-1)}(s)-\widehat{A})s^{\widehat{A}},\widetilde{B}^{(k-1)}\right]. \tag{4.18}$$

这里的积分路径为 $\{s=re^{i\theta}|0<r<|t|,\theta=\arg\ t\}$。

令 δ_0 为满足 $0<\delta_0<1$的常数。对于一个依赖于 K的常数 C_K，以及满足$0<|t|<\epsilon$，的充分小的 ϵ，我们断言如下结论

$$|A^{(k)}(t)-\widehat{A}|\le K|t|^{1-\sigma_1}, \tag{4.19a}$$

$$|t^{-\widehat{A}}(A^{(k)}(t)-\widehat{A})t^{\widehat{A}}|\le\frac{1}{\sigma_2}4K^2C_K^2|t|^{1-\sigma_2}, \tag{4.19b}$$

$$|\widetilde{B}^{(k)}(t)-\widehat{B}|\le K|t|^{1-\sigma_1}, \tag{4.19c}$$

$$|\widetilde{G}^{(k)}(t)-\widehat{G}|\le K|t|^{1-\sigma_1}, \tag{4.19d}$$

$$|A^{(k)}(t)-A^{(k-1)}(t)|\le K\delta_0^{k-1}|t|^{1-\sigma_1}, \tag{4.19e}$$

$$|t^{-\widehat{A}}(A^{(k)}(t)-A^{(k-1)})t^{\widehat{A}}|\le K\delta_0^{k-1}|t|^{1-\sigma_2}, \tag{4.19f}$$

$$|\widetilde{B}^{(k)}(t)-\widetilde{B}^{(k-1)}|\le K\delta_0^{k-1}|t|^{1-\sigma_1}, \tag{4.19g}$$

$$|\widetilde{G}^{(k)}(t)-\widetilde{G}^{(k-1)}|\le K\delta_0^{k-1}|t|^{1-\sigma_1}. \tag{4.19h}$$

接下来，我们需要以下引理，该引理已在 [17]中得到证明：

引理 *4.3* ([17]). 设 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 是满足 $|X(t)|\le C_1,|Y(t)|\le C_2$ for$t\in\mathcal{S}_{\epsilon,\phi}$ 的 $n\times n$ 矩阵函数，并设 $f(t)$ 是 $\{t:|t|<1\}$ 中的全纯函数，满足 $|f(t)|\le C_f$。设 M为一个矩阵，使得$|M|<K$ 且其特征值为 $\mu_i,\ i=1,\ldots,n$，并且对于某个常数σ_2,σ_2，$\max_{1\le j,k\le n}|\mathrm{Re}(\mu_j-\mu_k)|<\sigma_2<\sigma_2<1$。那么存在一个常数 C_K(仅依赖于 K)，以及一个与 C_1,C_2 和 M 均无关的常数 δ，使得对于任意满足 $0<\epsilon<\delta$ 的 ϵ，以下结论对 $t\in\mathcal{S}_{\epsilon,\phi}$ 成立

$$\left|t^MX(t)t^{-M}\right|\le C_1C_K\left|t\right|^{-\sigma_2},\quad\left|t^MY(t)t^{-M}\right|\le C_2C_K\left|t\right|^{-\sigma_2}, \tag{4.20}$$

$$\left|\int_0^t t^MX(s)s^{-M}Y(s)s^Mf(s)t^{-M}\mathrm{d}s\right|\le C_1C_2C_K^2C_f\left|t\right|^{1-\sigma_2}, \tag{4.21}$$

$$\left|\int_0^t t^Ms^{-M}Y(s)s^MX(s)f(s)t^{-M}\mathrm{d}s\right|\le C_1C_2C_K^2C_f\left|t\right|^{1-\sigma_2}. \tag{4.22}$$

引理 *4.3* 的证明。考虑 $D+N$ 的 Jordan-Chevalley 分解 M，其中 $D=\mu_1P_1+\ldots+\mu_nP_n$ 是 M 的半单部分，而 N 是 M 的幂零部分。于是

$$\left|t^MX(t)t^{-M}\right|=\left|\sum_{1\le i,j\le n}t^{\mu_i-\mu_j}P_it^NX(t)t^{-N}P_j\right|,\quad\left|t^MY(t)t^{-M}\right|=\left|\sum_{1\le i,j\le n}t^{\mu_i-\mu_j}P_it^NY(t)t^{-N}P_j\right|.$$

由于 D 和 N 是 b oth 中系数由有限个元素的和与积所界定的多项式 f

M，不等式 (4.20) 成立。对于
(4.21)，考虑

$$\left|\int_0^t t^M X(s)s^{-M}Y(s)s^M f(s)t^{-M}\mathrm{d}s\right| = \left|\int_0^t t^M X(s)t^{-M}\left(\frac{s}{t}\right)^{-M} Y(s)\left(\frac{s}{t}\right)^M f(s)\mathrm{d}s\right|$$
$$\leq \int_0^1 |t|\left|t^M X(s)t^{-M}\right|\left|\widetilde{s}^{-M}Y(s)\widetilde{s}^M\right||f(s)|\mathrm{d}\widetilde{s} \leq C_1C_2C_K^2C_f|t|^{1-\sigma_2}.$$

（4.22）的证明类似。 □

现在回到命题的证明。假设（4.19a）-（4.19d）对 $k-1$ 成立。在引理 4.3 中，取 $M=A$，得到

$$|A^{(k)}(t)-\widehat{A}| \leq 2\int_0^{|t|}\left|\widetilde{U}\right|\left|s^{\widehat{A}}\widetilde{B}^{(k-1)}s^{-\widehat{A}}\right|\mathrm{d}|s| \leq \frac{1}{\sigma_2}4K^2C_K|t|^{1-\sigma_2} \leq K|t|^{1-\sigma_1}.$$

这里在第二个不等式中，我们选择 $\epsilon<1$ 使得 $|\widetilde{B}^{(k-1)}|\leq 2K$，并在第三个不等式中选择 $\frac{1}{\sigma_2}4K^2C_K^2\epsilon^{\sigma_1-\sigma_2}<1$。

类似地，

$$|t^{-\widehat{A}}(A^{(k)}(t)-\widehat{A})t^{\widehat{A}}| = \left|t^{-\widehat{A}}\int_0^t\left[\widetilde{U},s^{\widehat{A}}\widetilde{B}^{(k-1)}s^{-\widehat{A}}\right]\mathrm{d}s\ t^{\widehat{A}}\right|$$
$$\leq \int_0^t\left|t^{-\widehat{A}}\widetilde{U}s^{\widehat{A}}\widetilde{B}^{(k-1)}s^{-\widehat{A}}t^{\widehat{A}}\right|\mathrm{d}s + \int_0^t\left|t^{-\widehat{A}}s^{\widehat{A}}\widetilde{B}^{(k-1)}s^{-\widehat{A}}\widetilde{U}t^{\widehat{A}}\right|\mathrm{d}s$$
$$\leq \frac{1}{\sigma_2}4K^2C_K^2t^{1-\sigma_2},$$

$$|\widetilde{B}^{(k)}(t)-\widehat{B}| \leq 2\int_0^{|t|}\frac{1}{|s|}\left|s^{-\widehat{A}}(A^{(k-1)}(s)-\widehat{A})s^{\widehat{A}}\right||\widetilde{B}^{(k-1)}|\mathrm{d}|s| \leq \frac{1}{\sigma_2}4K^2C_K^2|t|^{1-\sigma_2} \leq K|t|^{1-\sigma_1},$$

$$|\widetilde{G}^{(k)}(t)-\widehat{G}| \leq \int_0^{|t|}\frac{1}{|s|}\left|s^{-\widehat{A}}(A^{(k-1)}(s)-\widehat{A})s^{\widehat{A}}\right|\cdot|\widetilde{G}^{(k-1)}|\mathrm{d}|s| \leq \frac{1}{\sigma_2}2K^2C_K^2|t|^{1-\sigma_2} \leq K|t|^{1-\sigma_1}.$$

对于（4.19e）-（4.19h），假设它们对 $k-1$ 成立，则同样由引理 4.3，可得

$$\left|A^{(k+1)}(t)-A^{(k)}(t)\right| \leq \int_0^t\left|\widetilde{U}s^{\widehat{A}}(\widetilde{B}^{(k)}-\widetilde{B}^{(k-1)})s^{-\widehat{A}}\right|\mathrm{d}s + \int_0^t\left|s^{\widehat{A}}(\widetilde{B}^{(k)}-\widetilde{B}^{(k-1)})s^{-\widehat{A}}\widetilde{U}\right|\mathrm{d}s$$
$$\leq \int_0^t\left|\widetilde{U}s^{\widehat{A}}(K\delta_0^{k-1}|s|^{1-\sigma_1})s^{-\widehat{A}}\right|\mathrm{d}s + \int_0^t\left|s^{\widehat{A}}(K\delta_0^{k-1}|s|^{1-\sigma_1})s^{-\widehat{A}}\widetilde{U}\right|\mathrm{d}s$$
$$\leq 2K^2C_K\delta_0^{k-1}|t|^{2-\sigma_1-\sigma_2} \leq K\delta_0^k|t|^{1-\sigma_1},$$

$$\left|t^{-\widehat{A}}(A^{(k+1)}(t)-A^{(k)}(t))t^{\widehat{A}}\right| \leq \int_0^t\left|t^{-\widehat{A}}\widetilde{U}s^{\widehat{A}}(\widetilde{B}^{(k)}-\widetilde{B}^{(k-1)})s^{-\widehat{A}}t^{\widehat{A}}\right|\mathrm{d}s + \int_0^t\left|t^{-\widehat{A}}s^{\widehat{A}}(\widetilde{B}^{(k)}-\widetilde{B}^{(k-1)})s^{-\widehat{A}}\widetilde{U}t^{-\widehat{A}}\right|\mathrm{d}s$$
$$\leq 2K^2C_K^2\delta_0^{k-1}\delta_0^k|t|^{2-\sigma_1-\sigma_2} \leq K\delta_0^k|t|^{1-\sigma_2}.$$

对于满足 $2KC_K^2\epsilon^{1-\sigma_1}<\delta_0$ 的 ϵ。类似地，我们有

$$\left|\widetilde{B}^{(k+1)}(t)-\widetilde{B}^{(k)}(t)\right| = \left|\int_0^t\frac{1}{s}\left[s^{-\widehat{A}}(A^{(k)}-A^{(k-1)})s^{\widehat{A}},\widetilde{B}^{(k)}\right]+\frac{1}{s}\left[s^{-\widehat{A}}(A^{(k-1)}-\widehat{A})s^{\widehat{A}},\widetilde{B}^{(k)}-\widetilde{B}^{(k-1)}\right]\mathrm{d}s\right|$$
$$\leq 8K^2C_K^2\delta_0^{k-1}|t|^{1-\sigma_2} \leq K\delta_0^k|t|^{1-\sigma_1},$$

$$|\widetilde{G}^{(k+1)}(t)-\widetilde{G}^{(k)}|=\left|\int_0^t\frac{1}{s}s^{-\widehat{A}}(A^{(k)}-A^{(k-1)})s^{\widehat{A}}\widetilde{G}^{(k)}+\frac{1}{s}s^{-\widehat{A}}(A^{(k)}-\widehat{A})s^{\widehat{A}}(\widetilde{G}^{(k)}-\widetilde{G}^{(k-1)})\mathrm{d}s\right|$$
$$\leq 4K^2C_K^2\delta_0^{k-1}|t|^{1-\sigma_2}\leq K\delta_0^k|t|^{1-\sigma_1},$$

对于满足 $8KC_K^2\epsilon^{\sigma_1-\sigma_2}\leq\delta_0$ 的 ϵ。

因此，我们证明了在4.14a)-(4.15的某个邻域内，存在满足方程组的解 p_0。令

$$A(\mathbf{z},t,\mathbf{w})=\lim_{k\to\infty}A^{(k)}(\mathbf{z},t,\mathbf{w}),\tag{4.23}$$
$$G(\mathbf{z},t,\mathbf{w})w_1^{\delta(G^{-1}AG)}=t^{\widehat{A}}\cdot\lim_{k\to\infty}\widetilde{G}^{(k)}(\mathbf{z},t,\mathbf{w}),\tag{4.24}$$
$$B(\mathbf{z},t,\mathbf{w})=t\cdot t^{\widehat{A}}\lim_{k\to\infty}\widetilde{B}^{(k)}(\mathbf{z},t,\mathbf{w})t^{-\widehat{A}}+w_0\mathrm{Id}.$$

~ ~ ~ ~ ~ ~为证明 A,B,G的唯一性，假设A,B,G)和(A',B',G')是方程组(4.14a)-(4.15)的两个解，且具有相同的渐近主项 $\widehat{A},\widehat{G},\widehat{B}=\widehat{G}(u_n-u_1)(V-w_0\mathrm{Id})_t$ $\widehat{G}^{-1}$。于是得到以下积分方程

$$A-A'=\int_0^t\left[\widetilde{U},s^{\widehat{A}}(\widetilde{B}-\widetilde{B}')s^{-\widehat{A}}\right]\mathrm{d}s,$$
$$\widetilde{B}-\widetilde{B}'=\int_t\frac{1}{s}\left[s^{-\widehat{A}}(A(s)-A'(s))s^{\widehat{A}},\ \widetilde{B}\right]+\frac{1}{s}\left[s^{-\widehat{A}}(A'(s)-\widehat{A})s^{\widehat{A}},\ \widetilde{B}-\widetilde{B}'\right]\mathrm{d}s,$$
$$\widetilde{G}-\widetilde{G}'=\int_0^t\frac{1}{s}s^{-\widehat{A}}(A(s)-A'(s))s^{\widehat{A}}\widetilde{G}+\frac{1}{s}s^{-\widehat{A}}(A'(s)-\widehat{A})s^{\widehat{A}}(\widetilde{G}-\widetilde{G}')\mathrm{d}s.$$

根据引理4.3，对于足够小的 ϵ，使得 $0<|t|\leq\epsilon$，我们有

$$\max_{0<|t|\leq\epsilon}|A-A'|\leq\frac{1}{\sigma_1}2KC_K\max_{0<|t|\leq\epsilon}|\widetilde{B}-\widetilde{B}'|\cdot|t|^{1-\sigma_1},$$
$$\max_{0<|t|\leq\epsilon}|t^{-\widehat{A}}(A-A')t^{\widehat{A}}|\leq\frac{1}{\sigma_1}2KC_K^2\max_{0<|t|\leq\epsilon}|\widetilde{B}-\widetilde{B}'|\cdot|t|^{1-\sigma_1}.$$

~ ~ ~ ~将上述两个不等式代入 $B-B'$ 和 $G-G'$的积分方程，得到

$$\max_{0<|t|\leq\epsilon}|\widetilde{B}-\widetilde{B}'|\leq\frac{1}{\sigma_1^2}4K^2C_K^2\max_{0<|t|\leq\epsilon}|\widetilde{B}-\widetilde{B}'|\cdot|t|^{1-\sigma_1}+\frac{1}{\sigma_1}2KC_K^2\left(\max_{0<|t|\leq\epsilon}|\widetilde{B}-\widetilde{B}'|\right)^2\cdot|t|^{1-\sigma_1}$$
$$\max_{0<|t|\leq\epsilon}|\widetilde{G}-\widetilde{G}'|\leq\frac{1}{\sigma_1^2}2K^2C_K^2\max_{0<|t|\leq\epsilon}|\widetilde{B}-\widetilde{B}'|\cdot|t|^{1-\sigma_1}+\frac{1}{\sigma_1}2KC_K^2\max_{0<|t|\leq\epsilon}|\widetilde{B}-\widetilde{B}'|\cdot\max_{0<|t|\leq\epsilon}|\widetilde{G}-\widetilde{G}'|\cdot|t|^{1-\sigma_1}$$

~ ~ ~ ~因此，对于足够小的 ϵ，有$(A,B,G)=(A',B',G')$，其中 $0\leq|t|\leq\epsilon$。

最后，由于 GVG^{-1} 满足与 B相同的方程，且具有相同的渐近行为，根据唯一性$B=GVG^{-1}$。因此， A,G 由式(4.23)和(4.24)构造的解是(4.8)和(4.9)的解。

□

现在我们使用 (4.1a)-(4.1f)的相容条件，完成对 A,G渐近行为的分析 .

定理 *4.1*的证明。 根据命题 4.2，还需证明，当改变（z， w）时，上文构造的函数A（z t， w） G（z t， w）也满足关于 z和 w的等单值变形方程。

注意，当 $\widehat{A}$满足 (4.5a) 时， $\widehat{A}$的 Jordan标准形保持不变。因此，对于任意 $p_0=(z_0^{(0)},\ldots,w_0^{(0)})$，我们都可以选取一个邻域 $D(p_0)$，使条件 (4.10) 和 (4.11) 一致成立，从而可以使用引理 4.3，并按照相同的步骤证明命题 4.2。因此，极限 (4.7) 关于 z、w 局部^ ^一致收敛；当 A、G在 $D(p_0)$ 中全纯时， A、G 也关于 (z, w) 全纯。

Let

$$\widetilde{G} = t^{-\widehat{A}} G w^{\delta(G^{-1}AG)\mathbf{1}}, \tag{4.25}$$

$$L_k = \left[\mathrm{ad}_U^{-1}\mathrm{ad}_{\frac{\partial U}{\partial z_k}} A, A\right] + t\left[\frac{\partial U}{\partial z_k}, t^{\widehat{A}}\widetilde{G}\frac{V}{t}\widetilde{G}^{-1}t^{-\widehat{A}}\right] - \frac{t}{z_k}\left[U, t^{\widehat{A}}\widetilde{G}\frac{V}{t}\widetilde{G}^{-1}t^{-\widehat{A}}\right], \tag{4.26}$$

$$J_k = \left(\mathrm{ad}_U^{-1}\mathrm{ad}_{\frac{\partial U}{\partial z_k}} A\right)\cdot\widetilde{G} - \frac{1}{z_k}t^{-\widehat{A}}At^{\widehat{A}}\widetilde{G} + t^{-\widehat{A}}\left(\mathrm{ad}_U^{-1}\mathrm{ad}_{\frac{\partial U}{\partial z_k}}(A-\widehat{A})\right)t^{\widehat{A}}\widetilde{G}. \tag{4.27}$$

对于 z_k中的方程，我们需要证明

$$\frac{\partial A}{\partial z_k} = L_k \quad \text{and} \quad \frac{\partial \widetilde{G}}{\partial z_k} = J_k.$$

为推导出该结果，我们按以下步骤进行：首先，我们断言 $\underline{\begin{pmatrix}\partial A\\ \partial z_k\end{pmatrix}}, \underline{\begin{pmatrix}\partial \widetilde{G}\\ \partial z_k\end{pmatrix}}$ 和 $(L_k,\ J_k)$ 满足关于 t 的相同方程：

$$\begin{aligned}
\frac{\partial X}{\partial t} &= \left[\frac{\partial U}{\partial z_k}, \frac{1}{t}t^{\widehat{A}}\widetilde{G}V\widetilde{G}^{-1}t^{-\widehat{A}}\right] \\
&\quad + \frac{1}{t}\left[U, \left[t^{\widehat{A}}Y\widetilde{G}^{-1}t^{-\widehat{A}} + \mathrm{ad}_U^{-1}\mathrm{ad}_{\frac{\partial U}{\partial z_k}}\widehat{A} - t^{\widehat{A}}\left(\mathrm{ad}_U^{-1}\mathrm{ad}_{\frac{\partial U}{\partial z_k}}\widehat{A}\right)t^{-\widehat{A}}, t^{\widehat{A}}\widetilde{G}V\widetilde{G}^{-1}t^{-\widehat{A}}\right] - \frac{1}{z_k}t^{\widehat{A}}\widetilde{G}V\widetilde{G}^{-1}t^{-\widehat{A}}\right], \\
\frac{\partial Y}{\partial t} &= \frac{1}{t}\left[\mathrm{ad}_U^{-1}\mathrm{ad}_{\frac{\partial U}{\partial z_k}}\widehat{A}, t^{-\widehat{A}}(A-\widehat{A})t^{\widehat{A}}\right]\widetilde{G} - \frac{1}{t}t^{-\widehat{A}}\left[\mathrm{ad}_U^{-1}\mathrm{ad}_{\frac{\partial U}{\partial z_k}}\widehat{A}, A\right]t^{\widehat{A}}\widetilde{G} + \frac{1}{t}t^{-\widehat{A}}Xt^{\widehat{A}}\widetilde{G} + \frac{1}{t}t^{-\widehat{A}}(A-\widehat{A})t^{\widehat{A}}Y.
\end{aligned}$$

对于 $(L_k,\ J_k)$，这可由直接计算得到；对于 $\underline{\begin{pmatrix}\partial A\\ \partial z_k\end{pmatrix}}, \underline{\begin{pmatrix}\partial \widetilde{G}\\ \partial z_k\end{pmatrix}}$，注意到

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial A}{\partial z_k}\right) &= \frac{\partial}{\partial z_k}\left(\frac{\partial A}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial z_k}\left(\left[U, \frac{1}{t}t^{\widehat{A}}\widetilde{G}V\widetilde{G}^{-1}t^{-\widehat{A}}\right]\right), \\
\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \widetilde{G}}{\partial z_k}\right) &= \frac{\partial}{\partial z_k}\left(\frac{\partial \widetilde{G}}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial z_k}\left(\frac{1}{t}t^{-\widehat{A}}(A-\widehat{A})t^{\widehat{A}}\widetilde{G}\right).
\end{aligned}$$

~因此，令 $\underline{P = \frac{\partial A}{\partial z_k}} - L_k,\quad \underline{Q = \frac{\partial G}{\partial z_k}} - J_k$，我们有

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \left[U, t^{\widehat{A}}\left[Q\widetilde{G}^{-1}, \widetilde{G}\frac{V}{t}\widetilde{G}^{-1}\right]t^{-\widehat{A}}\right], \tag{4.28a}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = \frac{1}{t}\left(t^{-\widehat{A}}Pt^{\widehat{A}}\widetilde{G} + t^{-\widehat{A}}(A-\widehat{A})t^{\widehat{A}}Q\right). \tag{4.28b}$$

其次，我们考察 P和 Q在 $t\to 0$时的渐近行为：由于在 (4.12)-(4.13) 中， K 是 $D(p_0$中的一个常数，因此

$$\lim_{t\to 0}\frac{\partial A}{\partial z_k} = \frac{\partial \widehat{A}}{\partial z_k}, \quad \lim_{t\to 0}\frac{\partial \widetilde{G}}{\partial z_k} = \frac{\partial \widehat{G}}{\partial z_k}.$$

并利用命题 4.2，我们可知 $L_k = \underline{\left[\mathrm{ad}_U^{-1}\,\mathrm{ad}_{\frac{\partial U}{\partial z_k}}\widehat{A},\ \widehat{A}\right]} + O(t^{1-\sigma_1})$，由于 $t\to 0$，因此

$$\lim_{t\to 0} P = 0.$$

为了证明 $\lim_{t\to 0} Q = 0$，比较 J_k (4.27) 的表达式，我们只需证明

$$\lim_{t\to 0} t^{-\widehat{A}}\left(\mathrm{ad}_U^{-1}\mathrm{ad}_{\frac{\partial U}{\partial z_k}}(A-\widehat{A})\right)t^{\widehat{A}} = 0. \tag{4.29}$$

事实上

$$\begin{aligned} t^{-\widehat{A}}\left(\mathrm{ad}_U^{-1}\mathrm{ad}_{\frac{\partial U}{\partial z_k}}(A-\widehat{A})\right)t^{\widehat{A}} &= t^{-\widehat{A}}\mathrm{ad}_U^{-1}\mathrm{ad}_{\frac{\partial U}{\partial z_k}}\left(\int_0^t \mathrm{ad}_{\widetilde{U}}(s^{\widehat{A}}\widetilde{B}s^{-\widehat{A}})\mathrm{d}s\right)t^{\widehat{A}} \\ &= t^{-\widehat{A}}\left(\int_0^t \mathrm{ad}_U^{-1}\mathrm{ad}_{\frac{\partial U}{\partial z_k}}\mathrm{ad}_{\widetilde{U}}(s^{\widehat{A}}\widetilde{B}s^{-\widehat{A}})\mathrm{d}s\right)t^{\widehat{A}} \\ &= t^{-\widehat{A}}\left(\int_0^t \left[\frac{1}{u_n-u_1}\frac{\partial U}{\partial z_k},\ s^{\widehat{A}}\widetilde{B}s^{-\widehat{A}}\right]\mathrm{d}s\right)t^{\widehat{A}}. \end{aligned}$$

于是由引理 4.3，(4.29得证。

第三，我们考虑方程 (4.28a) 和 (4.28b) 的右端。由定理4.2，对于足够小的 ϵ使得 $0<|t|<\epsilon$，存在一个常数 $0<\sigma<1$ 和一个常数 C，使得

$$\left|\left[U,\ t^{\widehat{A}}\left[Q\widetilde{G}^{-1},\ \widetilde{G}\frac{V}{t}\widetilde{G}^{-1}\right]t^{-\widehat{A}}\right]\right| \le C|t|^{-\sigma}.$$

并且由于

$$\begin{aligned} |t^{-\widehat{A}}Pt^{\widehat{A}}| &= \left|\frac{\partial}{\partial z_k}(t^{-\widehat{A}}At^{\widehat{A}}-\widehat{A}) - \left[\mathrm{ad}_U^{-1}\mathrm{ad}_{\frac{\partial U}{\partial z_k}}\widehat{A}, t^{-\widehat{A}}At^{\widehat{A}}-\widehat{A}\right] - \left[t^{-\widehat{A}}\left(\mathrm{ad}_U^{-1}\mathrm{ad}_{\frac{\partial U}{\partial z_k}}(A-\widehat{A})\right)t^{\widehat{A}}, t^{-\widehat{A}}At^{\widehat{A}}\right] + O(|t|^{1-\sigma_1})\right| \\ &\le C|t|^{1-\sigma}, \end{aligned}$$

我们也有

$$\left|\frac{1}{t}\left(t^{-\widehat{A}}Pt^{\widehat{A}}\widetilde{G}+t^{-\widehat{A}}(A-\widehat{A})t^{\widehat{A}}Q\right)\right| \le C'|t|^{-\sigma},$$

对于某个常数 C'。因此，通过皮卡迭代可知 $P=Q=0$。

w_k 中关于 A，G 的方程可以用同样的方法得到，令

$$\begin{aligned} L_k' &= \left[U, t^{\widehat{A}}\widetilde{G}\frac{\partial V}{\partial w_k}\widetilde{G}^{-1}t^{-\widehat{A}}\right], \\ J_k' &= \widetilde{G}\cdot\left(\mathrm{ad}_{\widetilde{V}}^{-1}\mathrm{ad}_{\frac{\partial \widetilde{V}}{\partial w_k}}\left(w_1^{-\delta(G^{-1}AG)}G^{-1}AGw_1^{\delta(G^{-1}AG)}\right)\right) - \frac{1}{w_k}t^{-\widehat{A}}At^{\widehat{A}}\widetilde{G}. \end{aligned}$$

~~并令 $P'=\frac{\partial A}{\partial w_k}-L_k'$, $Q'=\frac{\partial G}{\partial w_k}-J_k'$，~~我们可以推导出

$$\frac{\partial P'}{\partial t} = \left[U, \frac{1}{t}t^{\widehat{A}}(Q'V\widetilde{G}^{-1}-\widetilde{G}V\widetilde{G}^{-1}Q'\widetilde{G}^{-1})t^{-\widehat{A}}\right], \tag{4.30}$$

$$\frac{\partial Q'}{\partial t} = \left[\frac{1}{t}t^{-\widehat{A}}P't^{\widehat{A}}\widetilde{G}+\frac{1}{t}t^{-\widehat{A}}(A-\widehat{A})t^{\widehat{A}}Q'\right]. \tag{4.31}$$

我们可以验证 $\lim_{t\to 0}P'=\lim_{t\to 0}Q'=0$ 利用命题 4.2，并使用皮卡迭代证明 $P'=Q'=0$。 □

推论 *4.4.* 设 *A(z t, w)*、*G(z t, w)* 为系统 *(4.1a)–(4.1f)* 的解，它们由给定的 *(4.5a)-(4.5c)* 的解~~A(z, w) G(z, w)~~ 按照定理 *4.1* 构造，则

$$\lim_{t\to 0} w_1^{-\delta(G^{-1}AG)}(G^{-1}AG)w_1^{\delta(G^{-1}AG)} = \widehat{G}^{-1}\widehat{A}\widehat{G}. \tag{4.32}$$

证明。由此可得

$$\lim_{t\to 0}\left(w_1^{-\delta(G^{-1}AG)}G^{-1}AGw_1^{\delta(G^{-1}AG)}\right) = \lim_{t\to 0}\left(w_1^{-\delta(G^{-1}AG)}G^{-1}t^{\widehat{A}}\right)\left(t^{-\widehat{A}}At^{\widehat{A}}\right)\left(t^{-\widehat{A}}Gw_1^{\delta(G^{-1}AG)}\right) = \widehat{G}^{-1}\widehat{A}\widehat{G}.$$

□

通过直接计算可得

推论 4.5。 矩阵值函数

$$\widetilde{A}(\mathbf{z},\mathbf{w}) := -\widehat{G}^{-1}\widehat{A}\widehat{G} \tag{4.33}$$

满足以下方程

$$\frac{\partial \widetilde{A}}{\partial z_k} = 0,\ k = 0,1,...,n-1, \tag{4.34}$$

$$\frac{\partial \widetilde{A}}{\partial w_0} = 0,\ \frac{\partial \widetilde{A}}{\partial w_k} = \left[\mathrm{ad}^{-1}_{\widetilde{V}}\mathrm{ad}_{\frac{\partial \widetilde{V}}{\partial w_k}}\widetilde{A},\widetilde{A}\right],\ k = 2,...,n. \tag{4.35}$$

5 具有 2 个不规则奇点的线性系统的单值化与黎曼–希尔伯特对应

本节将完成定理 1.1 和定理 1.2 的证明。在上一节中，对于某些给定的 (A,G)，我们构造了等单值变形方程的一个解 (A,G)，该解呈现出相应的渐近行为。在第 5.1 节中，我们将证明，对于这样的解，系统（1.1）可以分解为两个分别具有留数矩阵 A 和 A 的二阶极点系统。此外，原系统的单值化矩阵可以用这两个分解后^系统的单值化矩阵显式表示。在第 5.2 节中，我们构造具有常数边界值 (A_0,G_0) 且满足边界条件的解 (A,G)。我们将这样的 (A,G) 称为收缩解。随后，我们用 (A_0,G_0) 表示单值化^矩阵。在第 5.3 节中，我们给出关于单值矩阵的一个具体判据，证明由此判据确定的收缩解集合是开且稠密的。

5.1 当 (3.1a)-(3.1c) 时系统的分解 $t \to 0$

本节将研究系统（3.1a)-（3.1c）在$t \to 0$时的解和单值化数据的行为。考虑坐标（ξ，z_0，z_1...，z_{n-1}，t，w_{n-1}，$\cdots w_2$，w_0）下的系统（

$$\frac{\partial F}{\partial \xi} = \left(U + \frac{A}{\xi} + \frac{B}{\xi^2}\right)F,\quad B = GVG^{-1}, \tag{5.1a}$$

$$\frac{\partial F}{\partial t} = -\frac{B - w_0\cdot \mathrm{Id}}{t\xi}\cdot F, \tag{5.1b}$$

$$\frac{\partial F}{\partial z_k} = \left(\frac{\partial U}{\partial z_k}\xi + \mathrm{ad}^{-1}_U\mathrm{ad}_{\frac{\partial U}{\partial z_k}}A + \frac{B - w_0\cdot \mathrm{Id}}{z_k\xi}\right)F,\ k = 0,1,2,...,n-1, \tag{5.1c}$$

$$\frac{\partial F}{\partial w_k} = -\frac{G\frac{\partial V}{\partial w_k}G^{-1}}{\xi}\cdot F,\ k = 0,2,3,...,n-1. \tag{5.1d}$$

首先，我们研究线性系统在 $t \to 0$时的分解。在下面的定理中，我们将根据两个极限系统的解构造系统（5.1a)-（5.1b）的解。

定理 5.1. 固定 $z_0, z_1..., z_{n-1}, w_{n-1}, \cdots w_2, w_0$。假设系统（*5.1a*）-（*5.1b*）中的 $A(z\ t, w)$ $G(z\ t, w)$ 是按照定理 *4.1* 由 $\widehat{A}(z, w)$ $\widehat{G}(z, w)$ 构造的。线性系统（*5.1a*）-（*5.1b*）在 $\xi = \infty$ 和 $\xi = 0$ 处的基本解 $F_d^{(\infty)}(\xi, t)$ 和 $F^{(0)}{}_d(\xi, t)$（见命题 *3.3*）具有如下分解：

$$(1)\quad F_d^{(\infty)}(\xi,t) = L(\xi,t)\cdot \mathrm{e}^{-\frac{w_0}{\xi}}Y_d^{(\infty)}(\xi). \tag{5.2}$$

$$(2)\quad F_d^{(0)}(\xi,t) = \mathrm{e}^{-\frac{w_0}{\xi}}Y^{(0)}(\xi)\cdot H\left(\xi,\frac{t}{\xi}\right)\cdot\left(\frac{t}{\xi}\right)^{\widehat{A}}\cdot\widehat{G}\cdot K^{(\infty)}_{-d+\arg(w_1)}\left(\frac{w_1}{\xi}\right). \tag{5.3}$$

这里回顾一下 $w_1 = \dfrac{t}{z_1\cdots z_{n-1}w_{n-1}\cdots w_2} = v_2 - v_1$，各因子定义如下：

- $Y_{d}^{(\infty)}(x)$ 是下列方程的解（含一个不规则奇点）：

$$\frac{\partial Y}{\partial x}=\left(U+\frac{\widehat{A}(\mathbf{z})}{x}\right)\cdot Y(x), \tag{5.4}$$

满足指定渐近条件

$$Y_{d}^{(\infty)}(x)x^{-\delta\widehat{A}}e^{-Ux}\sim \mathrm{Id}+O(x^{-1}),\quad as\ x\to\infty\ within\ \mathrm{Sect}_{d}^{(\infty)}; \tag{5.5}$$

- $Y_{(0)}(x)$ 是方程 (5.4) 的解，满足指定渐近条件

$$Y^{(0)}(x)x^{-\widehat{A}}\sim \mathrm{Id}+O(x),\quad as\ x\to 0; \tag{5.6}$$

- $L(\xi,t)$ 是(5.1b)的解，在 $\mathcal{S}_{\epsilon,\phi}=\{t\in\mathbb{C}\mid 0<|t|<\epsilon,|\arg\ t|<\phi\}$ 中定义，其中 ϵ 足够小且 ϕ为任意有限值，并满足

$$\lim_{t\to 0}L(\xi,t)=\lim_{\xi\to\infty}L(\xi,t)=\mathrm{Id}; \tag{5.7}$$

- $K_{d}^{(\infty}\begin{pmatrix}w_1\\ \xi\end{pmatrix})$ 是以下关于变量 $\gamma=\dfrac{w_1}{\xi}$ 的方程的解，

$$\frac{\partial K}{\partial\gamma}=\left(-\widetilde{V}+\frac{\widetilde{A}(\mathbf{w})}{\gamma}\right)\cdot K(\gamma),\quad where\ \widetilde{V}:=\frac{1}{w_1}(V-w_0\mathrm{Id}),\ \widetilde{A}:=-\widehat{G}^{-1}\widehat{A}\widehat{G}, \tag{5.8}$$

满足指定渐近条件

$$K_{d}^{(\infty)}\left(\frac{w_1}{\xi}\right)\cdot e^{\frac{w_1}{\xi}\widetilde{V}}\cdot\left(\frac{w_1}{\xi}\right)^{-\delta\widetilde{A}}\sim \mathrm{Id}+O\left(\frac{w_1}{\xi}\right)^{-1},\quad as\ \frac{w_1}{\xi}\to\infty\ within\ \mathrm{Sect}_{d}^{(\infty)}; \tag{5.9}$$

- 此外，$H(x,y)$ 是方程 (5.14)的解，在 $\mathcal{S}'_{\epsilon,\phi}=\{(x,y)|0<|x|<\epsilon,0<|xy|<\epsilon,|\arg(x)|+|\arg(y)|<\phi\}$ 中定义，其中 ϵ 足够小且 ϕ为有限值，使得

$$\lim_{x\to 0}H(x,\ y)=\mathrm{Id},\qquad \lim_{x\to 0}\frac{\partial H}{\partial y}=0. \tag{5.10}$$

证明。(1)：令

$$L(\xi,t)=\mathrm{Id}+\sum_{k=1}^{\infty}\int_{0}^{t}\mathrm{d}t_1\int_{0}^{t_1}\mathrm{d}t_2\cdots\int_{0}^{t_{k-1}}\mathrm{d}t_k\left(\frac{-B(t_1)+w_0\cdot\mathrm{Id}}{t_1\xi}\cdots\frac{-B(t_k)+w_0\cdot\mathrm{Id}}{t_k\xi}\right). \tag{5.11}$$

积分沿连接 0 与 t 于 $\mathcal{S}_{\epsilon,\ \phi}$ 中的线段进行。根据命题 4.2，当 ϵ 足够小时，存在一个常数 C，以及 $0<\sigma<1$，使得

$$\left|\frac{-B(t_1)+w_0\cdot\mathrm{Id}}{t_1\xi}\cdots\frac{-B(t_k)+w_0\cdot\mathrm{Id}}{t_k\xi}\right|\leq|t_1|^{-\sigma}\cdots|t_k|^{-\sigma}\frac{C^k}{\xi^k}.$$

因此，$L(\xi,\ t)$ 关于 ξ 在 $\{\xi\in\mathbb{C}$ 的每个紧子集上一致收敛 $|\xi|>0\}$：。通过直接计算，$L(\xi,\ t)$ 是（5.1b）的解，并且 $\lim_{t\to 0}L(\xi,\ t)=\lim_{\xi\to\infty}L(\xi,\ t)=\mathrm{Id}$。

于是将 (5.1a) 和 (5.1b) 的系数分别记为 $A_1,\ A_2$。由这两个方程的相容性可得 $\left(\dfrac{\partial}{\partial t}-A_2\right)\left(\dfrac{\partial}{\partial\xi}-A_1\right)L=0$。由于 $\left(\dfrac{\partial}{\partial t}-A_2\right)L=0,\ \left(\dfrac{\partial}{\partial\xi}-A_1\right)L=LR(\xi)$ 是一个函数 $R(\xi)$

与 t 无关，并且

$$R(\xi)=L^{-1}\frac{\partial L}{\partial \xi}-L^{-1}\left(U+\frac{A}{\xi}+\frac{B}{\xi^2}\right)L. \tag{5.12}$$

令 $t\to 0$ 代入 (5.12)。由定理 4.1，可得 $R(\xi)=-\left(U+\frac{\widehat{A}}{\xi}+\frac{w_0\cdot \mathrm{Id}}{\xi^2}\right)$。因此 $L(\xi,\ t)\cdot \mathrm{e}^{-\frac{w_0}{\xi}}Y_{(\infty)d}(\xi)$ 是 (5.1a) 和 (5.1b) 的解。

最后，比较 $F_{(\infty)d}(\xi,t)$ 和 $L(\xi,t)\cdot \mathrm{e}^{-\frac{w_0}{\xi}}Y_{(\infty)d}(\xi)$ 在 $\xi\to\infty$ 位于扇形域 $\overset{(\infty)}{d}$ 内时的渐近行为，我们可以看到

$$F_d^{(\infty)}(\xi,t)=L(\xi,t)\cdot \mathrm{e}^{-\frac{w_0}{\xi}}Y_d^{(\infty)}(\xi).$$

这也表明，$\lim_{t\to 0}F_{(\infty)d}(\xi,t)=\mathrm{e}^{-\frac{w_0}{\xi}}Y_{(\infty)d}(\xi)$。

(2)：设

$$x=\xi,\ y=\frac{t}{\xi}.$$

于是，系统（5.1a）和（5.1b）变为

$$\frac{\partial F}{\partial x}=\left(U+\frac{A}{x}+\frac{w_0\cdot \mathrm{Id}}{x^2}\right)F, \tag{5.13a}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}=-\frac{B-w_0\cdot \mathrm{Id}}{xy}F. \tag{5.13b}$$

与（1）类似，我们将 $F_d^{(0)}(\xi,t)$ 分解为以下三个步骤：

步骤 1：令 $Y^{(0)}(x)=\Psi(x)\cdot x^{\widehat{A}}$，其中 $\Psi(x)$ 是 $x=0$ 附近的全纯函数，

$$\Psi(x)=\mathrm{Id}+\sum_{k=1}^{\infty}\Psi_k x^k,\quad |x|<\rho.$$

假设 $H(x,\ y)=(\mathrm{e}^{-\frac{w_0}{x}}Y_{(0)}(x))^{-1}Q(x,\ y)$，那么 Q 是方程 (5.13a) 的解，当且仅当 $H(x,\ y)$ 满足以下方程：

$$\frac{\partial H}{\partial x}=\left(x^{-\widehat{A}}\Psi^{-1}(x)\frac{(A(xy)-\widehat{A})}{x}\Psi(x)x^{\widehat{A}}\right)H. \tag{5.14}$$

为简便起见，将 (5.14) 的系数记为：$x^{-\widehat{A}}\Psi^{-1}(x)\frac{(A(xy)-A)}{x}\Psi(x)x^{\widehat{A}}$，记作 $P(x,\ y)$。与 (1) 类似，令

$$H(x,y)=\mathrm{Id}+\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^x \mathrm{d}x_1\int_0^{x_1}\mathrm{d}x_2\cdots\int_0^{x_{k-1}}\mathrm{d}x_k P(x_1,y)\cdots P(x_k,y). \tag{5.15}$$

积分沿连接 0 和 x 的线段进行，其中 y 为 $\mathcal{S}'_{\epsilon,\ \phi}=\{(x,\ y)|0<|x|<\epsilon,\ 0<|xy|<\epsilon,\ |\arg(x)|+|\arg(y)|<\phi\}$ 中的任意固定值。注意，对于足够小的 ϵ，

$$\begin{aligned}\left|x^{-\widehat{A}}(A(xy)-\widehat{A})x^{\widehat{A}}\right|&=\left|\int_0^{xy}x^{-\widehat{A}}\left[\frac{U}{u_n-u_1},\tau^{\widehat{A}}\cdot\widetilde{B}(\tau)\cdot\tau^{-\widehat{A}}\right]x^{\widehat{A}}\mathrm{d}\tau\right|=\left|\int_0^{xy}\left[x^{-\widehat{A}}\frac{U}{u_n-u_1}x^{\widehat{A}},(\frac{\tau}{x})^{\widehat{A}}\widetilde{B}(\frac{\tau}{x})^{-\widehat{A}}\right]\mathrm{d}\tau\right|\\&\overset{\tilde{\tau}=\tau/x}{=}|x|\left|\int_0^{y}\left[x^{-\widehat{A}}\frac{U}{u_n-u_1}x^{\widehat{A}},\tilde{\tau}^{\widehat{A}}\widetilde{B}\tilde{\tau}^{-\widehat{A}}\right]\mathrm{d}\tilde{\tau}\right|\le C_1'|xy|^{1-\sigma_1}.\end{aligned} \tag{5.16}$$

这里 $\widetilde{B}(t)=t^{-\widehat{A}}\cdot(u_n-u_1)\left(G(t)VG(\frac{t^{-1}-v_1\cdot}{t})\cdot t^{\widehat{A}}\right)\mathrm{Id}$，第一个等式由命题 4.2 推导得出，

最后一个不等式由引理 4.3 推导得出。另外请注意,

$$x^{-\widehat{A}}\Psi(x)x^{\widehat{A}} = \mathrm{Id} + x\cdot x^{-\widehat{A}}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\Psi_{k+1}\cdot x^{k}\right)x^{\widehat{A}} = \mathrm{Id} + O(x^{1-\sigma_1}). \tag{5.17}$$

由（5.16）和（5.17），可得

$$\begin{aligned}|P(x,y)| &\le \left|\left(x^{-\widehat{A}}\Psi(x)x^{\widehat{A}}\right)^{-1}\right|\left|\left(x^{-\widehat{A}}\frac{(A(xy)-\widehat{A})}{x}x^{\widehat{A}}\right)\right|\left|\left(x^{-\widehat{A}}\Psi(x)x^{\widehat{A}}\right)\right| \\ &\le C_1^{''}|x|^{-\sigma_1}|y|^{1-\sigma_1}.\end{aligned}$$

因此可以看出， $H(x,\ y)$关于任意有界的 y一致收敛，并且

$$\lim_{x\to 0} H(x,y) = \mathrm{Id}, \quad (x,y)\in\mathcal{S}'_{\epsilon,\phi}.$$

同时，由命题 4.2

$$\begin{aligned}&\left|\left[x^{-\widehat{A}}Ux^{\widehat{A}}, x^{-\widehat{A}}\frac{G(xy)VG(xy)^{-1}-v_1\cdot\mathrm{Id}}{xy}x^{\widehat{A}}\right]\right| \le 2\left|x^{-\widehat{A}}Ux^{\widehat{A}}\right|\cdot\left|x^{-\widehat{A}}\frac{G(xy)VG(xy)^{-1}-v_1\cdot\mathrm{Id}}{xy}x^{\widehat{A}}\right| \\ &= 2\left|x^{-\widehat{A}}Ux^{\widehat{A}}\right|\cdot\left|y^{\widehat{A}}\cdot(xy)^{-\widehat{A}}\frac{G(xy)VG(xy)^{-1}-v_1\cdot\mathrm{Id}}{xy}(xy)^{\widehat{A}}\cdot y^{-\widehat{A}}\right| \le C_2'|xy|^{-\sigma_1}.\end{aligned}$$

Then

$$\left|\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}\right| \le \left|\left(x^{-\widehat{A}}\Psi(x)x^{\widehat{A}}\right)^{-1}\right|\left|\left[x^{-\widehat{A}}Ux^{\widehat{A}}, x^{-\widehat{A}}\frac{G(xy)VG(xy)^{-1}-w_0\cdot\mathrm{Id}}{xy}x^{\widehat{A}}\right]\right|\left|\left(x^{-\widehat{A}}\Psi(x)x^{\widehat{A}}\right)\right| \le C_2''|xy|^{-\sigma_1}.$$

因此，$\dfrac{\partial H}{\partial y}$ 在 $\{y\in\mathbb{C}$ 的每个紧子集上关于 y 一致收敛：$|y|>0\}$，并且

$$\lim_{x\to 0}\frac{\partial H}{\partial y} = 0, \quad (x,y)\in\mathcal{S}'_{\epsilon,\phi}.$$

步骤 2：分别用 A_1和 A_2 表示（5.13a）和（5.13b）的系数。由这两个方程的相容性可得 $\left(\dfrac{\partial}{\partial x}-A_1\right)\left(\dfrac{\partial}{\partial y}-A_2\right)Q = 0$，其中 $Q(x,\ y) = \mathrm{e}^{-\frac{w_0}{x}}Y_{(0)}(x)H(x,\ y)$。由于$\left(\dfrac{\partial}{\partial x}-A_{\mathrm{I}}\right)Q = 0$，因此对于一个与 x无关的矩阵函数 $R(y)$，有 $\left(\dfrac{\partial}{\partial y}-A_2\right)Q = QR(y)$，并且

$$\begin{aligned}R(y) &= Q^{-1}\frac{\partial Q}{\partial y} + Q^{-1}\frac{B-w_0\cdot\mathrm{Id}}{xy}Q \\ &= H^{-1}\frac{\partial H}{\partial y} + \left(x^{-\widehat{A}}Y^{(0)}(x)H(x,y)\right)^{-1}\left(x^{-\widehat{A}}\frac{B-w_0\cdot\mathrm{Id}}{xy}x^{\widehat{A}}\right)\left(x^{-\widehat{A}}Y^{(0)}(x)H(x,y)\right).\end{aligned} \tag{5.18}$$

我们计算 $R(y)$，其形式为 $x\to 0$，如式（5.18）所示。利用我们在步骤 1 中证明的式（5.10）和定理4.2，可得

$$R(y) = \lim_{x\to 0}x^{-\widehat{A}}\frac{B-w_0\cdot\mathrm{Id}}{xy}x^{\widehat{A}} = y^{\widehat{A}}\widehat{G}\frac{V-w_0\cdot\mathrm{Id}}{t}\widehat{G}^{-1}y^{-\widehat{A}}.$$

于是我们可以验证

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(y^{\widehat{A}}\widehat{G}K^{(\infty)}_{-d+\arg(w_1)}\left(\frac{w_1}{t}y\right)\right) = -R(y)\left(y^{\widehat{A}}\widehat{G}K^{(\infty)}_{-d+\arg(w_1)}\left(\frac{w_1}{t}y\right)\right).$$

这里注意到，$\frac{w_1}{t}$是一个固定常数。因此，

$$\Xi(x,y) := \mathrm{e}^{-\frac{w_0}{x}} Y^{(0)}(x) H(x,y) y^{\widehat{A}} \widehat{G} K^{(\infty)}_{-d+\arg(w_1)}\left(\frac{w_1}{t} y\right)$$

是（5.13a）和（5.13b）的解。

步骤3：现在令 $x = \frac{t}{y}$ 和 y 为变量，可知存在一个常数矩阵 C，使得

$$\Xi(\frac{t}{y}, y) = F_d^{(0)}(\frac{t}{y}, t) \cdot C.$$

根据该定理的步骤 1 和步骤 2，当固定 y 并令 $t \to 0$ 时，有

$$\begin{aligned} t^{-\widehat{A}} \cdot \mathrm{e}^{\frac{w_0 y}{t}} \Xi\left(\frac{t}{y}, y\right) &= \left(t^{-\widehat{A}} \Psi(\frac{t}{y}) t^{\widehat{A}}\right) \cdot y^{-\widehat{A}} H\left(\frac{t}{y}, y\right) y^{\widehat{A}} \cdot \widehat{G} K^{(\infty)}_{-d+\arg(w_1)}\left(\frac{w_1}{t} y\right) \\ &\to \widehat{G} K^{(\infty)}_{-d+\arg(w_1)}\left(\frac{y}{z_1 \cdots z_{n-1} w_{n-1} \cdots w_2}\right). \end{aligned} \tag{5.19}$$

另一方面，假设 $F(\xi)$ 满足以下方程：

$$\frac{\partial \widetilde{F}}{\partial \xi} = \left(-\widetilde{V} - \frac{w_1^{\delta\widetilde{A}} G^{-1} A G w_1^{-\delta\widetilde{A}}}{\xi} - \frac{w_1^{\delta\widetilde{A}} G^{-1} w_1 U G w_1^{-\delta\widetilde{A}}}{\xi^2}\right) \widetilde{F}. \tag{5.20}$$

可以验证，$w_1^{\delta\widetilde{A}} G^{-1} \cdot \mathrm{e}^{\frac{w_0 \xi}{w_1}} F\left(\frac{w_1}{\xi}, t\right)$ 也满足上述方程（5.20），其中 $F\left(\frac{w_1}{\xi}, t\right)$ 是（5.1a）和（5.1b）的解，并以 $\frac{w_1}{\xi}$ 和 t 为变量。于是，当 $\xi \to 0$ 位于扇形域 $_d^{(0)}$ 内时，比较 $F^{(0)}(\xi, t)$ 与 $\widetilde{F}^{(\infty)}(\frac{w_1}{\xi}, t)$ 的渐近行为，可得

$$\mathrm{e}^{\frac{w_0}{\xi}} F_d^{(0)}(\xi, t) = G w_1^{-\delta\widetilde{A}} \widetilde{F}^{(\infty)}_{-d+\arg(w_1)}\left(\frac{w_1}{\xi}, t\right).$$

因此，根据5.2式（该定理的这一结论已在（1）中证明），固定 y，并令 $t \to 0$ ，

$$\begin{aligned} t^{-\widehat{A}} \cdot \mathrm{e}^{\frac{w_0 y}{t}} F_d^{(0)}(\frac{t}{y}, t) &= t^{-\widehat{A}} G w_1^{-\delta\widetilde{A}} \widetilde{F}^{(\infty)}_{-d+\arg(w_1)}\left(\frac{w_1}{t} y, t\right) \\ &\to \widehat{G} K^{(\infty)}_{-d+\arg(w_1)}\left(\frac{y}{z_1 \cdots z_{n-1} w_{n-1} \cdots w_2}\right). \end{aligned} \tag{5.21}$$

因此 比较5.19式和5.21式，可知常数 C =Id，以及恒等式5.3式成立 s. □

推论5.2。 在与定理*5.1*相同的条件下，有：

$$F_d^{(\infty)}(\xi, t) \cdot C_d(U, \widehat{A}) = \mathrm{e}^{-\frac{w_0}{\xi}} Y^{(0)}(\xi) H\left(\xi, \frac{t}{\xi}\right) \left(\frac{t}{\xi}\right)^{\widehat{A}} \widehat{G} K^{(0)}\left(\frac{w_1}{\xi}\right) \cdot (z_1 \cdots z_{n-1} w_{n-1} \cdots w_2)^{\widetilde{A}} \widehat{G}^{-1}. \tag{5.22}$$

这里回顾一下，$C_d(U, \widehat{A})$ 是系统(5.4)的连接矩阵，$Y_{(0)}(x)$ $H(x, y)$ 在定理*5.1*中定义。而 $K^{(0)}(\frac{w_1}{\xi})$ 是(5.8) 的解，其渐近行为已指定

$$K^{(0)}\left(\frac{w_1}{\xi}\right) \cdot \left(\frac{w_1}{\xi}\right)^{-\widetilde{A}} \sim \mathrm{Id} + O\left(\frac{w_1}{\xi}\right), \ \frac{w_1}{\xi} \to 0.$$

证明。 根据定理 5.1，等式 (5.22) 两边都是方程 (5.1a) 和 (5.1b) 的解，因此我们只需比较两边在 $t \to 0$处的渐近行为。

由 (5.2)，$\lim_{t\to 0}\left(F(\infty)_d(\xi,t)\cdot C_d(U,\widehat{A})\right)=\mathrm{e}^{-\frac{w_0}{\xi}}Y(\infty)_d(\xi)\cdot C_d(U,\widehat{A})=\mathrm{e}^{-\frac{w_0}{\xi}}Y(0)(\xi)$。由 (5.10)，$\lim_{t\to 0}H(\xi,\frac{t}{\xi})=\mathrm{Id}$，且

$$\begin{aligned}&\left(\frac{t}{\xi}\right)^{\widehat{A}}\widehat{G}K^{(0)}\left(\frac{w_1}{\xi}\right)\cdot(z_1\cdots z_{n-1}w_{n-1}\cdots w_2)^{\widetilde{A}}\widehat{G}^{-1}\\ =&\widehat{G}\cdot\left(\frac{t}{\xi}\right)^{-\widetilde{A}}\left(\mathrm{Id}+\sum_{i=1}^{\infty}K_{0,i}\left(\frac{w_1}{\xi}\right)^i\right)\left(\frac{t}{\xi}\right)^{\widetilde{A}}\cdot\widehat{G}^{-1}\to\mathrm{Id},\quad\text{as } t\to 0.\end{aligned}$$

因此，当 $t\to 0$ 时，(5.22) 右侧的极限也为 $\mathrm{e}^{-\frac{w_0}{\xi}}Y_{(0)}(\xi)$，等式成立 . □

现在我们可以利用解的分解来计算单值化矩阵。

定理 5.3. 假设系统 (5.1a)-(5.1d) 中的 $A(z,t,w)$ $G(z,t,w)$ 可以按照定理 4.1 由 $A(z,w)$ $G(z,w)$ 构造得到，则有

(1) 线性系统 $\xi=\infty$ 的斯托克斯矩阵 (5.1a) 与系统 (5.4)的斯托克斯矩阵相同，即

$$S^{(\infty)}_{d,\pm}(U,V,A,G)=S^{\pm}_{d}(U,\widehat{A}). \tag{5.23}$$

(2) 系统 $\xi=0$ 的斯托克斯矩阵 (5.1a) 与系统 (5.8)的斯托克斯矩阵相同，即

$$S^{(0)}_{d,\pm}(U,V,A,G)=S^{\pm}_{d+\arg(w_1)}(-\widetilde{V},\widetilde{A}). \tag{5.24}$$

(3) 系统 C_d的连接矩阵(U,V,A,G) 可以表示为系统 (5.1a) 的连接矩阵与系统 (5.4) 和 (5.8)的连接矩阵的组合:

$$C_d(U,V,A,G)=C_d(U,\widehat{A})\cdot(z_1\cdots z_{n-1}w_{n-1}\cdots w_2)^{\widehat{A}}\widehat{G}\cdot C_{d+\arg(w_1)}(-\widetilde{V},\widetilde{A})^{-1}. \tag{5.25}$$

证明。(1)：由定理 5.2) 中的 (5.1，

$$S^{(\infty)}_{d,\pm}(U,V,A,G)=F^{(\infty)}_{d\pm\pi}(\xi,t)^{-1}F^{(\infty)}_{d}(\xi,t)=Y^{(\infty)}_{d\pm\pi}(\xi)^{-1}Y^{(\infty)}_{d}(\xi)=S^{\pm}_{d}(U,\widehat{A}).$$

(2)：由定理 5.3) 中的 (5.1，

$$S^{(0)}_{d,\pm}(U,V,A,G)=F^{(0)}_{-d\mp\pi}(\xi,t)^{-1}F^{(0)}_{-d}(\xi,t)=K^{(\infty)}_{d\pm\pi+\arg(w_1)}\left(\frac{w_1}{\xi}\right)^{-1}K^{(\infty)}_{d+\arg(w_1)}\left(\frac{w_1}{\xi}\right)=S^{\pm}_{d+\arg(w_1)}(-\widetilde{V},\widetilde{A}).$$

(3)：比较定理 5.3) 中的 (5.1 和推论 (5.22) 中的 5.22 ，可得

$$\begin{aligned}C_d(U,V,A,G)&=(F^{(\infty)}_d)^{-1}F^{(0)}_{-d}\\&=C_d(U,\widehat{A})\widehat{G}\cdot(z_1\cdots z_{n-1}w_{n-1}\cdots w_2)^{-\widetilde{A}}K^{(0)}\left(\frac{w_1}{\xi}\right)^{-1}K^{(\infty)}_{d+\arg(w_1)}\left(\frac{w_1}{\xi}\right)\\&=C_d(U,\widehat{A})\widehat{G}\cdot(z_1\cdots z_{n-1}w_{n-1}\cdots w_2)^{-\widetilde{A}}C_{d+\arg(w_1)}(-\widetilde{V},\widetilde{A})^{-1}.\end{aligned}$$

□

5.2 等单值变形方程收缩解的渐近行为

在前一小节中，我们始终假设，等单值变形方程的解 $A(\mathbf{z},t,\mathbf{w})$ 和 $G(\mathbf{z},t,\mathbf{w})$ 是由给定的渐近数据 $A(\mathbf{z},\mathbf{w})$ 和 $G(\mathbf{z},\mathbf{w})$ 构造的。在本小节中，我们进一步拓展这一分析，深入研究 A 和 G 的渐近行为。

命题 5.4。 给定常矩阵 $\widehat{A}_0$、$\widetilde{A}_0\in\mathfrak{gl}_n$ 和 $G_0\in\mathrm{GL}_n$，使得 $\widetilde{A}_0=-G_0^{-1}\widehat{A}_0G_0$，以及

其左上角 $k\times k$ 子矩阵的特征值 $\widehat{\lambda}_i^{(k)}$ 和 $\widetilde{\lambda}_i^{(k)}$ 满足

$$\left|\mathrm{Re}\left(\widehat{\lambda}_i^{(k)}-\widehat{\lambda}_j^{(k)}\right)\right|<1,\quad \left|\mathrm{Re}\left(\widetilde{\lambda}_i^{(k)}-\widetilde{\lambda}_j^{(k)}\right)\right|<1,\ k=1,2,...,n;\ 1\le i,j\le k. \tag{5.26}$$

设 $\widehat{A}\left(z\ \widehat{A}_0\right)$ 和 $\widetilde{A}\left(w;\ \widetilde{A}_0\right)$ 分别为方程 *(4.5a)* 和 *(4.34)* 的解，它们由定理 *2.1* 在边界值 $\widehat{A}_0$ 和 $\widetilde{A}_0$下给出。则系统 *(4.5b)* 和 *(4.5c)* 有唯一解 $\widehat{G}(z,w)$，满足 $\widetilde{A}\left(w\ \widetilde{A}_0\right)=-\widehat{G}(z,w)^{-1}\,\widehat{A}\left(z\ \widehat{A}_0\right)\widehat{G}(z,w)$，并且当 $z_{n-1}\to\infty,\ldots,z_2\to\infty$; $w_{n-1}\to\infty,\ldots,w_2\to\infty$ 依次成立时，

$$\lim_{w_2\to\infty}\cdots\lim_{w_{n-1}\to\infty}\lim_{z_2\to\infty}\cdots\lim_{z_{n-1}\to\infty}\overrightarrow{\prod_{k=1}^{n-1}}\left(z_k^{\delta_k\widehat{A}_{k-1}}z_k^{-\widehat{A}_k}\right)(z_1\cdots z_{n-1}w_{n-1}\cdots w_2)^{\widehat{A}}\,\widehat{G}\overleftarrow{\prod_{k=2}^{n-1}}\left(w_k^{\widetilde{A}_k}w_k^{-\delta_k\widetilde{A}_{k-1}}\right)=G_0. \tag{5.27}$$

证明。由于变量 $\mathbf{z}=(z_1,\ldots,z_{n-1})$ 中的方程 (4.5a) 与等单值变形方程 (2.3) 相同，定理 2.1 保证存在一个唯一解 $\widehat{A}_{n-1}=\widehat{A}\left(\mathbf{z}\ \widehat{A}_0\right)$，其特征是渐近数据序列 $\widehat{A}_{n-2},\ldots,\widehat{A}_1,\widehat{A}_0$。类似地，对于满足 (4.34) 的 A，同一定理保证存在一个唯一解 $\widetilde{A}\left(\mathbf{w}\ \widetilde{A}_0\right)=\widetilde{A}_{n-1}$，并具有相应的渐近数据 $\widetilde{A}_{n-2},\ldots,\widetilde{A}_1=\widetilde{A}_0,\ \widetilde{A}_0$。

为构造 G，我们需要以下关于具有一个不规则奇点的系统的连接矩阵 $C_d(U,\ \Phi)$ 的引理:

引理 *5.5*（[22, 第 *4.2*] 节）。设 $\Phi_{n-1}=\Phi(z;\Phi_0)$ 是等单值变形方程 *(2.3)* 的一个非共振解，其渐近行为序列为 $\Phi_{n-2},\ldots,\Phi_0$，定义见定理 *2.1*。设 $X(z\ \Phi_{n-1})$ 是系统 *(2.17)* 的一个亚纯多值解，其中 $\Phi=\Phi_{n-1}$。当 $z_{n-1}\to\infty,\ldots,z_2\to\infty$ 依次成立时，存在一个常数 X_0，使得

$$\lim_{z_2\to\infty}\cdots\lim_{z_{n-1}\to\infty}X(\mathbf{z},\Phi_{n-1})\cdot\overleftarrow{\prod_{k=1}^{n-1}}(z_k^{\Phi_k}z_k^{-\delta_k\Phi_{k-1}})=X_0. \tag{5.28}$$

特别地，当 $X(\mathbf{z})=C_d(U,\Phi_{n-1})$ 在给定连通区域 $R_{u,\ d}(J)$内对 U 成立时，渐近常数 X_0 为

$$X_0=\overrightarrow{\prod_{k=1}^{n-1}}C_{d+\arg(u_{k+1}-u_k)}(E_{k+1},\delta_{k+1}(\Phi_0)),\quad for\ U\in R_{u,d}(J).$$

回到命题的证明。设 $\mathfrak{C}(\mathbf{z}\ A_{n-1})$ 是与 $\Phi=\widehat{A}(\mathbf{z}\ A_0)$ 对应的方程 (2.17) 的解，而 $\mathfrak{C}(\mathbf{w}\ A_{n-1})$ 是与 $U=V,\ \Phi=\widetilde{A}(\mathbf{w}\ A_0)$ 对应的方程 (2.17) 的解，使得式 (5.28) 中两个渐近常数均为 Id。根据引理 5.5，在任意区域 $R_{u,\ d}(J)$,

$$\widehat{\mathfrak{C}}(\mathbf{z},\widehat{A}_{n-1})=\left(\overrightarrow{\prod_{k=1}^{n-1}}C_{d+\arg(u_{k+1}-u_k)}(E_{k+1},\delta_{k+1}(\widehat{A}_0))\right)^{-1}C_d(U,\widehat{A}_{n-1}),$$

以及在任意区域 $R_{\widetilde{v},\ d}(J)$,

$$\widetilde{\mathfrak{C}}(\mathbf{w},\widetilde{A}_{n-1})=\left(\overrightarrow{\prod_{k=1}^{n-1}}C_{d+\arg(\widetilde{v}_{k+1}-\widetilde{v}_k)}(E_{k+1},\delta_{k+1}(\widetilde{A}_0))\right)^{-1}C_d(\widetilde{V},\widetilde{A}_{n-1}),\quad \text{where }\widetilde{v}_k=\frac{v_k-w_0}{w_1}.$$

因此，由推论 2.15，$\mathrm{Ad}\left(\widehat{\mathfrak{C}}(\mathbf{z}\ \widehat{A}_{n-1})\right)\widehat{A}=\widehat{A}_0$，$\mathrm{Ad}\left(\widetilde{\mathfrak{C}}(\mathbf{w}\ \widetilde{A}_{n-1})\right)\widetilde{A}=\widetilde{A}_0$。

现在令

$$\widehat{G}=\mathrm{e}^{\pi\mathrm{i}\widehat{A}}(z_1\cdots z_{n-1}w_{n-1}\cdots w_2)^{-\widehat{A}}\cdot\widehat{\mathfrak{C}}(\mathbf{z},\widehat{A}_{n-1})^{-1}\cdot G_0\mathrm{e}^{\pi\mathrm{i}\widetilde{A}_0}\cdot\widetilde{\mathfrak{C}}(\mathbf{w},\widetilde{A}_{n-1}). \tag{5.29}$$

注意到

$$\begin{aligned}\widehat{G}^{-1}\widehat{A}\widehat{G} &= \mathrm{Ad}\left(\widetilde{\mathfrak{C}}(\mathbf{w},\widetilde{A}_{n-1})^{-1}\cdot \mathrm{e}^{-\pi \mathrm{i}\widetilde{A}_0}G_0^{-1}\cdot\widehat{\mathfrak{C}}(\mathbf{z},\widehat{A}_{n-1})\right)\widehat{A}\\ &= -\mathrm{Ad}\left(\widetilde{\mathfrak{C}}(\mathbf{w},\widetilde{A}_{n-1})^{-1}\right)\widetilde{A}_0\\ &= -\widetilde{A}.\end{aligned}$$

在建立 $\widetilde{A}=-\widehat{G}^{-1}\widehat{A}\widehat{G}$ 这一关系后， $\widehat{G}$ 的方程和渐近行为可以直接根据$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$ $\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$相应的性质 $\mathfrak{C}(\mathbf{z}$ $A_{n-1})$ 和 $\mathfrak{C}(\mathbf{w}$ $A_{n-1})$ 计算得出。特别地，我们可以使用 (5.29) 计算$\widehat{\ }$关于变量 G 的方程，其中变量为 $w_0, w_2, \ldots,$ w_{n-1}；也可以使用下式（它与 (5.29) 等价）计算关于变量 $z_0, z_1, \ldots,$ z_{n-1}的方程:

$$\widehat{G}=\widehat{\mathfrak{C}}(\mathbf{z},\widehat{A}_{n-1})^{-1}\cdot G_0\mathrm{e}^{\pi\mathrm{i}\widetilde{A}_0}\cdot\widetilde{\mathfrak{C}}(\mathbf{w},\widetilde{A}_{n-1})\cdot(z_1\cdots z_{n-1}w_{n-1}\cdots w_2)^{\widetilde{A}}\mathrm{e}^{-\pi\mathrm{i}\widetilde{A}}.$$

$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$要证明 G的唯一性，只需证明任何满足 (5.26) 和 (5.27) 的 G 都必须由 (5.29) 给出。根据定理 4.1，存在满足方程 (4.1a)–(4.1f) 的等单值解 (A,G)，其$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$首项渐近行为分别为 A 和 G。定理 5.3 进而表明

$$\begin{aligned}C_d(U,V,A,G) &= C_d(U,\widehat{A})\cdot(z_1\cdots z_{n-1}w_{n-1}\cdots w_2)^{\widehat{A}}\widehat{G}\cdot C_{d+\arg(w_1)}(-\widetilde{V},\widetilde{A})^{-1}\\ &= C_d(U,\widehat{A})\cdot(z_1\cdots z_{n-1}w_{n-1}\cdots w_2)^{\widehat{A}}\widehat{G}\cdot\mathrm{e}^{\pi\mathrm{i}\widetilde{A}}C_{d+\pi+\arg(w_1)}(\widetilde{V},\widetilde{A})^{-1}\mathrm{e}^{-\pi\mathrm{i}\delta\widetilde{A}}.\end{aligned}\tag{5.30}$$

结合渐近行为（5.28）、（5.27）和（2.5），在连通区域 $R_{u,d}(J_1)\times R_{v,d}(J_2)$ 中，常数$C_d(U,V,A,G)$ 为

$$\begin{aligned}C_d =& C_d(U,\widehat{A})\prod_{k=1}^{\overleftarrow{n-1}}\left(z_k^{\widehat{A}_k}z_k^{-\delta_k\widehat{A}_{k-1}}\right)\\ &\cdot\prod_{k=1}^{\overrightarrow{n-1}}\left(z_k^{\delta_k\widehat{A}_{k-1}}z_k^{-\widehat{A}_k}\right)(z_1\cdots z_{n-1}w_{n-1}\cdots w_2)^{\widehat{A}}\widehat{G}\prod_{k=2}^{\overleftarrow{n-1}}\left(w_k^{\widetilde{A}_k}w_k^{-\delta_k\widetilde{A}_{k-1}}\right)\\ &\cdot\prod_{k=2}^{\overrightarrow{n-1}}\left(w_k^{\delta_k\widetilde{A}_{k-1}}w_k^{-\widetilde{A}_k}\right)\mathrm{e}^{\pi\mathrm{i}\widetilde{A}}\prod_{k=2}^{\overleftarrow{n-1}}\left(w_k^{\widetilde{A}_k}w_k^{-\delta_k\widetilde{A}_{k-1}}\right)\prod_{k=2}^{\overrightarrow{n-1}}\left(w_k^{\delta_k\widetilde{A}_{k-1}}w_k^{-\widetilde{A}_k}\right)C_{d+\pi+\arg(w_1)}(\widetilde{V},\widetilde{A})^{-1}\mathrm{e}^{-\pi\mathrm{i}\delta\widetilde{A}}\\ =&\left(\prod_{k=1}^{\overrightarrow{n-1}}C_{d+\arg(u_{k+1}-u_k)}\left(E_{k+1},\delta_{k+1}\widehat{A}_0\right)\right)\cdot G_0\mathrm{e}^{\pi\mathrm{i}\widetilde{A}_0}\cdot\left(\prod_{k=1}^{\overrightarrow{n-1}}C_{d+\pi+\arg(v_{k+1}-v_k)}\left(E_{k+1},\delta_{k+1}\widetilde{A}_0\right)\right)^{-1}\mathrm{e}^{-\pi\mathrm{i}\delta\widetilde{A}}.\end{aligned}\tag{5.31}$$

$\widehat{\ }$将其代回（5.30），即可得到所需的 G表达式。 □

$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$由命题5.4 得到的矩阵 (A,G) 满足特征值条件（4.6）以及方程（4.5a）-（4.5c）。因此，根据定理4.1，它们给出满足指定渐近行为的等单值变形方程的解。这些解恰好是定理$\widehat{\ }(A_0,G_0)$ 中由边界值参数化的解，我们称之为收缩解。1.1

定义 5.6。 给定 $\widehat{A}_0, G_0$，满足边界条件(1.8)，通过命题 $A\left(\widehat{A}_0,G_0\right)$ 和 $G\left(\widehat{A}_0,G_0\right)$ 构造的等单值变形方程的解 5.4 以及定理4.1称为收缩解。所有收缩解组成的集合记为 $\mathfrak{Sol}_{Shr}$。

我们还计算了单值化数据的具体表达式。

推论 5.7。 设 $A\left(\widehat{A}_0,G_0\right)$， $G\left(\widehat{A}_0,G_0\right)$ 为等单值变形方程 (4.1a)–(4.1f)的收缩解。

当 $U \in R_{u,\ d}$ 满足 $\mathrm{Im}(u_1 e^{\mathrm{i}d}) > ... > \mathrm{Im}(u_n e^{\mathrm{i}d}),\quad -\pi < (d + \arg(u_{k+1} - u_k)) < 0,$

$$\nu_d^{(\infty)}\left(U, V, A\left(\widehat{A}_0, G_0\right), G\left(\widehat{A}_0, G_0\right)\right) = \mathrm{Ad}\left(\prod_{k=1}^{\overrightarrow{n-1}} C_{-\frac{\pi}{2}}\left(E_{k+1}, \delta_{k+1}\widehat{A}_0\right)\right) \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}\widehat{A}_0}. \tag{5.32}$$

当 $V \in R_{v,\ d}$，使得 $\mathrm{Im}(v_1 e^{\mathrm{i}d}) < ... < \mathrm{Im}(v_n e^{\mathrm{i}d})\quad 0 < (d + \arg(v_{k+1} - v_k)) < \pi,$

$$\nu_{-d}^{(0)}\left(U, V, A\left(\widehat{A}_0, G_0\right), G\left(\widehat{A}_0, G_0\right)\right) = \mathrm{Ad}\left(\prod_{k=1}^{\overrightarrow{n-1}} C_{\frac{\pi}{2}}\left(-E_{k+1}, \delta_{k+1}\widetilde{A}_0\right)\right) \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}\widetilde{A}_0}. \tag{5.33}$$

并且当

$$\begin{aligned} &\mathrm{Im}(u_1 e^{\mathrm{i}d}) > ... > \mathrm{Im}(u_n e^{\mathrm{i}d}),\quad \mathrm{Im}(v_1 e^{\mathrm{i}d}) < ... < \mathrm{Im}(v_n e^{\mathrm{i}d}), \\ &-\pi < (d + \arg(u_{k+1} - u_k)) < 0,\quad 0 < (d + \arg(v_{k+1} - v_k)) < \pi,\ \textit{for}\ \ k = 1, .., n-1, \end{aligned} \tag{5.34}$$

我们有

$$C_d\left(U, V, A\left(\widehat{A}_0, G_0\right), G\left(\widehat{A}_0, G_0\right)\right) = \left(\prod_{k=1}^{\overrightarrow{n-1}} C_{-\frac{\pi}{2}}\left(E_{k+1}, \delta_{k+1}\widehat{A}_0\right)\right) \cdot G_0 \cdot \left(\prod_{k=1}^{\overrightarrow{n-1}} C_{\frac{\pi}{2}}\left(-E_{k+1}, \delta_{k+1}\widetilde{A}_0\right)\right)^{-1}, \tag{5.35}$$

证明。 由定理 5.3 (2),(3.13) 引理 3.9中的，以及引理 2.122.9中的（2.12），我们知道

$$\begin{aligned} \nu_d^{(\infty)}\left(U, V, A\left(\widehat{A}_0, G_0\right), G\left(\widehat{A}_0, G_0\right)\right) &= \nu_d\left(U, \widehat{A}\left(\widehat{A}_0\right)\right), \\ \nu_{-d}^{(0)}\left(U, V, A\left(\widehat{A}_0, G_0\right), G\left(\widehat{A}_0, G_0\right)\right) &= \nu_{d+\arg(w_1)}\left(-\widetilde{V}, \widetilde{A}\left(\widetilde{A}_0\right)\right), \end{aligned}$$

其中 $\widehat{A}\left(\widehat{A}_0\right)$, $\widetilde{A}\left(\widetilde{A}_0\right)$ 分别表示由 $\widehat{A}_0$ 和 $\widetilde{A}_0$ 构造的方程（4.5a）和（4.34）的解。然后由定理 2.13，我们得到 $\nu_d^{(\infty)}$ 和 $\nu_{-d}^{(0)}$ 的表达式。对于特殊条件（5.34），当 $\mathrm{Im}(u_1 e^{\mathrm{i}d}) > ... > \mathrm{Im}(u_n e^{\mathrm{i}d})\quad 0 < (d + \arg(u_k - u_{k+1})) < \pi$ 时，所有方向 $d + \arg(u_{k+1} - u_k) \in (-\pi,\ 0)$。并且由于当 $C_{d+\arg(u_{k+1}-u_k)}(E_{k+1},\ \delta_{k+1}A_0)$ 时，$-\pi$ 与 0 之间没有反斯托克斯方向，因此我们可以选择方向 $-\pi/2$ 来表示 $d + \arg(u_{k+1} - u_k)$。类似地，我们选择方向 $\pi/2$ 来表示$d + \arg(v_{k+1} - v_k)$。

在命题 5.4的证明中，我们已经得到了 C_d 在（5.31）中的表达式。然后利用下面的公式，并选取辐角，我们得到（5.35）中的形式：

$$C_{d+\arg(v_{k+1}-v_k)}\left(-E_{k+1}, \delta_{k+1}\widetilde{A}_0\right) = \mathrm{e}^{\pi \mathrm{i}\delta_k \widetilde{A}_0} C_{d+\pi+\arg(v_{k+1}-v_k)}\left(E_{k+1}, \delta_{k+1}\widetilde{A}_0\right) \mathrm{e}^{-\pi \mathrm{i}\delta_{k+1}\widetilde{A}_0}. \tag{5.36}$$

□

定理 1.2 的证明。 $C_{-\frac{\pi}{2}}\left(E_{k+1}, \delta_{k+1}\widehat{A}_0\right)$ 和 $C_{\frac{\pi}{2}}\left(-E_{k+1}, \delta_{k+1}\widetilde{A}_0\right)$ 的表达式是已知结果，参见[3] 或 [23, 第 3 节。6], [22, 附录 A]。因此，由（5.35）可知，计算 C_d（U，V，A，G）归结为直接代入。对于斯托克斯矩阵的计算，根据引理 3.8 和引理 3.9，我们只需计算 $\nu_d^{(\infty)}$ 和 $\nu_d^{(0)}$ 的 LU 分解。有关该分解的详细步骤，请参见 [23, 第 3 节。6], [22,附录 A]。

□

5.3 等单值变形方程的几乎所有解都是收缩解

回顾一下，我们在定义 $\nu_d^{(\infty)}$（U，V，A，G）和 $\nu_d^{(0)}$（U，V，A，G）中定义了系统（3.1a）的单值化矩阵 3.7。本节将给出一个关于单值化数据的充分条件，用以识别收缩

解等单值变形方程。因此，我们可以证明几乎每个解都是收缩解。

定义 5.8。 给定对角矩阵 $\Lambda = \mathrm{diag}(\phi_{11}, ..., \phi_{nn})$，定义集合 $\mathcal{M}(\Lambda) \subset \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{C})$，它由所有满足以下条件的矩阵 M 构成：对每个 $1 \le k \le n$，都存在一组 $\sigma_k = \{\lambda_j^{(k)} : j = 1, ..., k\}$，使得

$$\sigma(M^{[k]}) = \{e^{2\pi i\lambda} : \lambda \in \sigma_k\}, \quad \sum_{j=1}^{k} \lambda_j^{(k)} = \sum_{j=1}^{k} \phi_{jj}, \tag{5.37}$$

$$\left|\mathrm{Re}\left(\lambda_{j_1}^{(k)} - \lambda_{j_2}^{(k)}\right)\right| < 1, \quad \textit{for every } 1 \le j_1, j_2 \le k, \tag{5.38}$$

$$\lambda_{j_1}^{(k+1)} - \lambda_{j_2}^{(k)} \notin \mathbb{Z} \setminus \{0\}, \quad \textit{for every } 1 \le j_1 \le k+1,\ 1 \le j_2 \le k. \tag{5.39}$$

这里， $\sigma(M^{[k]})$ 表示 M 的左上角 $k \times k$ 子矩阵的谱。

定义 5.9。 系统 (1.1)的单值化数据

$$\left(\delta A, \delta(G^{-1}AG), \nu_d^{(\infty)}(U,V,A,G), \nu_{-d}^{(0)}(U,V,A,G), C_d(U,V,A,G)\right) \in (\mathrm{Diag}_n(\mathbb{C}))^2 \times (\mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{C}))^3,$$

称为严格（左上角）对数受限的，如果对于 U、V 和某个方向 d，满足

$$\mathrm{Im}(u_1 e^{\mathrm{i}d}) > ... > \mathrm{Im}(u_n e^{\mathrm{i}d}), \quad \mathrm{Im}(v_1 e^{\mathrm{i}d}) < ... < \mathrm{Im}(v_n e^{\mathrm{i}d}), \tag{5.40}$$

我们有

$$\nu_d^{(\infty)} \in \mathcal{M}(\delta A) \quad \textit{and} \quad \nu_{-d}^{(0)} \in \mathcal{M}(\delta(G^{-1}AG)).$$

注 5.10。 如第 *3.3* 节所述，单值化数据在 $R_{u,d} \times R_{v,d}$ 的每个连通分支上都是常数。严格对数受限检验针对的是与 (5.40). 对应的连通分支上的单值化数据。

本节余下部分中，我们始终假设系统（1.1）的单值化数据是在假设（5.40）下取得的。下面的引理表明，严格的（左上）对数约束条件是一般成立的。

引理 **5 11** [22] 1 1 U V A G Y =。()。考虑系统 (.)的 $\nu_{-d}^{(0)}$ U V A G $1 \le k \le n$ $\sigma_k = \{\lambda_j^{(k)}$ $j = 1$ ... $k\}$ 单值化数据。设 $X = \nu_d^{(\infty)}(,,,)$ 和 $(,,,)$。那么对每个，存在一个集合 :,,, 使得

$$\sigma(X^{[k]}) = \{\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\lambda} : \lambda \in \sigma_k\}, \quad \sum_{j=1}^{k} \lambda_j^{(k)} = \mathrm{trace}(A^{[k]}), \tag{5.41}$$

$$\left|\mathrm{Re}\left(\lambda_{j_1}^{(k)} - \lambda_{j_2}^{(k)}\right)\right| \le 1, \ \textit{for every } 1 \le j_1, j_2 \le k. \tag{5.42}$$

此外，如果序列 σ_k 满足

$$\left|\mathrm{Re}\left(\lambda_{j_1}^{(k)} - \lambda_{j_2}^{(k)}\right)\right| < 1, \quad \textit{for every } j_1, j_2, \tag{5.43}$$

那么集合 σ_k 的选取是唯一的。

类似地， 我们对 Y 也有相同的结论，只需将 $\mathrm{trace}(A^{[k]})$ 替换为 $-\mathrm{trace}((G^{-1}AG)^{[k]})$ 在 (5.4 1).

证明。 设 $\{\mu_j^{(k)} :$ $j = 1,$ ....., $k\}$ 是 $X^{[k]}$的特征值。根据假设（5.40），再由引理 3.8 和引理 3.12中的（3.9），可得

$$e^{2\pi\mathrm{i}\left(\mathrm{trace}(A^{[k]})\right)} = \det(X^{[k]}) = \prod_{j=1}^{k} \mu_j^{(k)}.$$

$_k$因此，我们可以找到 $\lambda_j^{(k)}$、 $j = 1$..... k，使得 $\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\lambda_j^{(k)}} = \mu_j^{(k)}$ 且 $\sum \lambda_j^{(k)} =$ 迹$(A^{[k]})$。这就是 (5.41)。 $_{j=1}$

为满足 (5.42) 中的条件，我们可以对集合 $\{\lambda_j^{(k)}\}$ 进行逐次两两调整，通过变换 $(\lambda_i^{(k)}、\ \lambda_j^{(k)}) \to (\lambda_i^{(k)}+1、\ \lambda_j^{(k)}-1)$，直至所有 $\mathrm{Re}\lambda_j^{(k)}$ 都落入长度为 I 的闭区间$(I)=1$。这一过程保持恒等式 (5.41) 不变，并在有限步内结束。

由调整过程可知，最终满足条件 $\lambda_j^{(k)}$ （5.43）的序列是唯一确定的，因为任何进一步的单位转移都会导致一个不可容许序列（即满足 $\mathrm{Re}\lambda_j \notin I$）。

对于 $Y=\nu_{-d}^{(0)}(U,\ V,\ A,\ G)$，我们还有

$$e^{-2\pi \mathrm{i}\left(\mathrm{trace}((G^{-1}AG)^{[k]})\right)}=\det(Y^{[k]}),$$

因此，用同样的方法即可得出结论。

□

我们将利用等单值变形方程的解所对应的单值化数据来刻画这些解。下面的引理首先证明了这种方法的可行性。

引理 5.12。 如果两个系统

$$\frac{dF}{d\xi}=\left(U+A_1\cdot\xi^{-1}+G_1VG_1^{-1}\cdot\xi^{-2}\right)F,\quad \frac{dF}{d\xi}=\left(U+A_2\cdot\xi^{-1}+G_2VG_2^{-1}\cdot\xi^{-2}\right)F,$$

具有相同的单值化数据，即

$$\nu_d^{(\infty)}(U,V,A_1,G_1)=\nu_d^{(\infty)}(U,V,A_2,G_2),\quad \nu_d^{(0)}(U,V,A_1,G_1)=\nu_d^{(0)}(U,V,A_2,G_2), \tag{5.44}$$

$$C_d(U,V,A_1,G_1)=C_d(U,V,A_2,G_2), \tag{5.45}$$

$$\delta A_1=\delta A_2,\quad \delta(G_1^{-1}A_1G_1)=\delta(G_2^{-1}A_2G_2), \tag{5.46}$$

那么 $A_1=A_2,\ G_1=G_2$。

证明。分别考虑命题 3.3 中为这两个系统定义的基本解 $F(\infty)_d(\xi,A_1,G_1)$、$F_{-d}^{(0)}(\xi,A_1,G_1)$ 和 $F(\infty)_d(\xi,A_2,G_2)$、$F_{-d}^{(0)}(\xi,A_2,G_2)$。我们有

$$\begin{aligned}F_d^{(\infty)}(\xi,A_1,G_1)\cdot F_d^{(\infty)}(\xi,A_2,G_2)^{-1}&=(F_d^{(\infty)}(\xi,A_1,G_1)C_d(U,V,A_1,G_1))\cdot(F_d^{(\infty)}(\xi,A_2,G_2)C_d(U,V,A_2,G_2))^{-1}\\&=F_{-d}^{(0)}(\xi,A_1,G_1)\cdot F_{-d}^{(0)}(\xi,A_2,G_2)^{-1}.\end{aligned}$$

注意，$F_d^{(\infty)}(\xi,A_1,G_1)F(\infty)_d(\xi,A_2,G_2)^{-1}$ 以及 $F(0)_{-d}(\xi,A_1,G_1)F(0)_{-d}(\xi,A_2,G_2)^{-1}$ 均为单值的，并且当 ξ趋近于各自的奇点（∞和 0）时趋于 Id。因此，$F(\xi)=F_d^{(\infty)}(\xi,A_1,G_1)\cdot F(\infty)_d(\xi,A_2,G_2)^{-1}$ 在 $\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ 上全纯，因此 $F(\xi)=F(\infty)=$Id。 □

现在我们证明，与严格对数受限的单值化数据相对应的等单值变形方程的解是一个收缩解。

定理 5.13. 设 $A(u,v)$ $G(u,v)$ 是等单值变形方程 *(1.2)-(1.5)* 的解，它们是系统（*1.1*）的系数矩阵。取系统（*1.1*）的单值化数据，若其严格对数受限，则 $A(u,v)$ $G(u,v)$ 是一个收缩解。

证明需要以下引理，可将其视为 (2.20) 的逆公式:

引理 5.14 ([22,第 5 扇形域。2]). 设

$$V\in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}),\quad \Lambda=\mathrm{diag}(\phi_{11},...,\phi_{nn}).$$

若 $V\in\mathcal{M}(\Lambda)$，则 存在唯一的 $\Phi_0\in\mathrm{gl}_n(\mathbb{C})$，使得对于每个 $1\le k\le n$ 其谱 $\sigma(\Phi_0^{[k]})$ s

左上子矩阵 $\Phi_0^{[k]}$ 恰好是保证 σ_k 的集合 $V \in \mathcal{M}(\Lambda)$ 满足定义 5.8，而且，

$$\mathrm{Ad}\left(\prod_{k=1}^{\overrightarrow{n-1}} C_{d+\arg(u_{k+1}-u_k)}(E_{k+1}, \delta_{k+1}(\Phi_0))\right) \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}\Phi_0} = V, \tag{5.47}$$

对于某些 $u_1, ..., u_n$，$d \notin aS(u)$，满足$\mathrm{Im}(u_1 e^{\mathrm{i}d}) > ... > \mathrm{Im}(u_n e^{\mathrm{i}d})$。

定理 5.13 的证明。令 $X = \nu_d^{(\infty)}(U, V, A, G)$ 和 $Y = \mathrm{e}^{\pi \mathrm{i}\delta \widetilde{A}_0} \nu_{-d}^{(0)}(U, V, A, G) \mathrm{e}^{-\pi \mathrm{i}\delta \widetilde{A}_0}$。由引理 5.14，我们可以求得 $\widehat{A}_0$ 和 $\widetilde{A}_0$，使其满足边界条件（5.26），从而

$$\begin{aligned}
&\delta \widehat{A}_0 = \delta A,\ \sigma(X^{[k]}) = \{\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}\lambda} : \lambda \in \sigma(\widehat{A}_0^{[k]})\}; \quad \delta \widetilde{A}_0 = -\delta(G^{-1}AG),\ \sigma(Y^{[k]}) = \{\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}\lambda} : \lambda \in \sigma(\widetilde{A}_0^{[k]})\}; \\
&\mathrm{Ad}\left(\prod_{k=1}^{\overrightarrow{n-1}} C_{d+\arg(u_{k+1}-u_k)}\left(E_{k+1}, \delta_{k+1}\widehat{A}_0\right)\right) \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}\widehat{A}_0} = X, \\
&\mathrm{Ad}\left(\prod_{k=1}^{\overrightarrow{n-1}} C_{d+\pi+\arg(v_{k+1}-v_k)}\left(E_{k+1}, \delta_{k+1}\widetilde{A}_0\right)\right) \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}\widetilde{A}_0} = Y.
\end{aligned} \tag{5.48}$$

利用（5.36），方程（5.48）等价于

$$\mathrm{Ad}\left(\prod_{k=1}^{\overrightarrow{n-1}} C_{d+\arg(v_{k+1}-v_k)}\left(-E_{k+1}, \delta_{k+1}\widetilde{A}_0\right)\right) \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}\widetilde{A}_0} = \nu_{-d}^{(0)}(U, V, A, G).$$

由引理 3.9，$\nu_d^{(\infty)}$ 和 $\left(\nu_{-d}^{(0)}\right)^{-1}$ 是相似矩阵，因此根据引理 5.11 中的唯一性判据，可得 $\sigma(A_0) = -\sigma(A_0)$.

Let

$$G_0 = \left(\prod_{k=1}^{\overrightarrow{n-1}} C_{d+\arg(u_{k+1}-u_k)}\left(E_{k+1}, \delta_{k+1}\widehat{A}_0\right)\right)^{-1} C_d(U, V, A, G) \left(\prod_{k=1}^{\overrightarrow{n-1}} C_{d+\arg(v_{k+1}-v_k)}\left(-E_{k+1}, \delta_{k+1}\widetilde{A}_0\right)\right).$$

此外，利用引理 3.14 中的3.9，我们可以验证 $\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}G_0^{-1}\widehat{A}_0 G_0} = \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i}\widetilde{A}_0}$。结合谱条件 $\sigma(A_0) = -\sigma(A_0)$ 以及边界条件，可得

$$-G_0^{-1}\widehat{A}_0 G_0 = \widetilde{A}_0.$$

因此，我们可以按照命题 $A\left(\widehat{A}_0, G_0\right)$ 和 $G\left(\widehat{A}_0, G_0\right)$ 中的方式构造5.4。最后，由推论 5.7，系数为 $A\left(\widehat{A}_0, G_0\right)$ 和 $G\left(\widehat{A}_0, G_0\right)$ 的线性系统的单值化数据与原系统（其系数为 A 和 G）的单值化数据一致。因此，由引理 5.12，我们得到 $A = A\left(\widehat{A}_0, G_0\right)$ 和 $G = G\left(\widehat{A}_0, G_0\right)$.

□

最后，我们证明，几乎每个等单值变形方程的解都是收缩解 n.

命题 5.15. 严格对数约束的单值化数据集合是系统 (1.1)的整个单值化数据空间中的开稠密子集。因此，几乎所有等单值变形方程的解都可归类为收缩解。

证明. 引理5.11 s 指出，如果单值化数据不是严格对数受限的，那么只能是以下情况： r

某些集合 σ_k 在定义5.8中，出现以下条件：

$$\left|\mathrm{Re}\left(\lambda_{j_1}^{(k)}-\lambda_{j_2}^{(k)}\right)\right|=1,\quad \text{for some } 1\le j_1,j_2\le k, \tag{5.49}$$

$$\lambda_{j_1}^{(k+1)}-\lambda_{j_2}^{(k)}\in\mathbb{Z}\setminus\{0\},\quad \text{for some } 1\le j_1\le k+1,\ 1\le j_2\le k. \tag{5.50}$$

另一方面 ，由引理 5.14 和定理 5.13 的构造可知，任意满足 le

$$(h_1,h_2,V_1,V_2,C)\in\left(\mathrm{Diag}_n(\mathbb{C})\right)^2\times\left(\mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{C})\right)^3$$

使得 $V_1=CV_2C^{-1}$， $V_1\in\mathcal{M}(h_1)$ 和 $V_2\in\mathcal{M}(h_2)$ 都可作为系统（1.1）的单值化数据。这意味着，满足条件（5.49）和（5.50）的单值化数据集合，在所有单值化数据构成的空间中包含于一个低维闭子集。因此，严格对数约束的单值化数据集合是开且稠密的。

□

注 5.16. 对于收缩解 $A(\widehat{A}_0,\ G_0)$ $G(\widehat{A}_0,\ G_0)$，令 $\sigma_k=\sigma(\widehat{A}_0^{[k]})$ 如定义 5.8所述。则条件 (5.37) 和 (5.38) 均成立。因此，具有严格对数约束单值化数据的解在 $\mathfrak{Sol}_{Shr}$中开且稠密。

6 tt^* 方程的应用

本节探讨我们的结果在 tt^* 方程中的应用。在第 6.1 节中，我们考虑矩阵阶数为 tt^* 的 $n=2$ 阶方程；这些方程等价于正弦-戈登 Painlev´é III 方程。通过将我们的渐近结果和斯托克斯矩阵公式专门应用于此情形，我们发现其与 [10] 中的已知结果一致。在第 6.2 节中，我们考虑一类特殊的 tt^* 阶方程，称为 A_n 型 tt^*-Toda 方程。将我们的渐近分析与 [12, 11, 13] 中详述的全局光滑解的某些渐近结果进行比较后发现，这些解中的一部分对应于我们的非收缩解。最后，在第 6.3 节中，我们考虑 tt^* 阶方程，该方程在 [8] 中提出。将我们的渐近结果应用于这些方程，可描述一族解在 $t=0$ 附近的局部行为。

6.1 正弦-戈登 Painlev´e III 方程

我们将利用渐近结果和单值化公式，推导一类特定 Painlev´e III 方程的相应结果。考虑以下相容系统

$$\frac{\partial Y}{\partial\xi}=\left(\frac{\mathrm{i}}{16}\sigma_3-\frac{\mathrm{i}xu_x}{4\xi}\sigma_1-\frac{\mathrm{i}x^2}{\xi^2}G\cdot\sigma_3\cdot G^{-1}\right)Y, \tag{6.1}$$

$$\frac{\partial Y}{\partial x}=\left(\frac{2\mathrm{i}x}{\xi}G\cdot\sigma_3\cdot G^{-1}\right)Y, \tag{6.2}$$

其中 σ_1,σ_3 为泡利矩阵，

$$\sigma_1=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\quad \sigma_3=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix},$$

u,u_x 是定义在 $\mathbb{C}^*$ 上、变量为 x 的亚纯函数，且

$$G=\begin{pmatrix}\cos\dfrac{u}{2}&-\mathrm{i}\sin\dfrac{u}{2}\\-\mathrm{i}\sin\dfrac{u}{2}&\cos\dfrac{u}{2}\end{pmatrix}.$$

取方向 $d=0$，我们可以对系统（6.1）的斯托克斯矩阵与连接矩阵参数化，该系统定义于 3.4 和 3.5 中，如下所示（详情请参见 [10,第 13] 章）：

$$S_{0,+}^{(\infty)}=\begin{pmatrix}1 & -(p+q)\\ 0 & 1\end{pmatrix},\quad S_{0,-}^{(\infty)}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ p+q & 1\end{pmatrix},\quad S_{0,+}^{(0)}=\begin{pmatrix}1 & p+q\\ 0 & 1\end{pmatrix},\quad S_{0,-}^{(0)}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -(p+q) & 1\end{pmatrix}, \tag{6.3}$$

$$C_0=\frac{1}{\sqrt{1+pq}}\begin{pmatrix}1 & q\\ -p & 1\end{pmatrix}. \tag{6.4}$$

Th方程（6.1）的等单值变形方程可化简为正弦-戈登 Painlev´e III 方程 ：

$$u_{xx}+\frac{1}{x}u_x+\sin u=0. \tag{6.5}$$

这等价于矩阵阶数为 $n=2$ 的情形； tt^* 中的方程如 [8]所述。应用我们的命题 4.2，我们可以重现其解的渐近行为以及边界条件，如 $x\to 0$ 中所示 [10]:

推论 6.1。 对于任意给定的 r， $s\in\mathbb{C}$ 满足 $|\mathrm{Im}(r)|<2$，存在唯一解 $u(x)$ ，它是(6.5)的解，并且在零附近具有以下行为：

$$u(x)=r\log x+s,\ \ as\ x\to 0. \tag{6.6}$$

证明。 对于方程 (6.1)，变量 t 在 (z t， w) 坐标系 (1.11)-(1.13) 中由 $t=\frac{x^2}{4}$ 给出。应用命题4.2，对于任意指定的

$$\widehat{A}=\begin{pmatrix}0 & -\frac{r\mathrm{i}}{4}\\ -\frac{r\mathrm{i}}{4} & 0\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\frac{r\mathrm{i}}{4} & 0\\ 0 & -\frac{r\mathrm{i}}{4}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}, \tag{6.7}$$

$$\widehat{G}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}s}{2}}\cdot 2^{\frac{\mathrm{i}r}{2}} & 0\\ 0 & \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}s}{2}}\cdot 2^{-\frac{\mathrm{i}r}{2}}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}, \tag{6.8}$$

满足 $|\mathrm{Im}(r)|<2$，存在唯一解 ($A(t)$ $G(t)$)，它满足 (4.8) 和 (4.9)（其中 $U=\mathrm{i}16^{\sigma_3}$， $V=-\mathrm{i}x^2\underline{\sigma_3}$，以及 $\delta($ $G^{-1}AG)$ $=0$），使得

$$A\to\widehat{A},\quad t^{-\widehat{A}}G\to\widehat{G},\quad \text{as } t\to 0. \tag{6.9}$$

按照命题 4.16)–(4.18) 中的皮卡迭代4.2，解 $A(t)$ $G(t$仍保持上述形式⌢ ⌢A， G，因此可表示为（6.1）的形式，其中函数 $u(x)$ 满足方程（6.5）。于是，渐近行为（6.9）转化为

$$xu_x\to r,\quad x^{-\frac{\mathrm{i}r}{2}}\cdot\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}u}{2}}\to\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}s}{2}}.$$

最后，我们可以选择一个对数分支，使得 $u(x)$ 满足渐近行为（6.6），于是方程（ $u(x)$ 的解（6.5）由 $A(t)$ $G(t)$ 唯一确定。 □

此外，应用定理 1.2 后，我们可以重新得到 [10] 中以渐近参数 r 表示的单值化矩阵的显式公式 s。

推论 6.2. 单值化参数 p， q 在 (6.3)-(6.4) 与推论*6.1* 中构造的解相关，可表示为

$$p=\frac{\alpha e^{-\frac{\pi r}{4}}-\beta e^{\frac{\pi r}{4}}}{\alpha+\beta},\quad q=\frac{\beta e^{-\frac{\pi r}{4}}-\alpha e^{\frac{\pi r}{4}}}{\alpha+\beta}, \tag{6.10}$$

$$where\ \alpha=2^{\frac{3ir}{2}}e^{\frac{is}{2}}\Gamma^2\left(\frac{1}{2}+\frac{ir}{4}\right),\quad \beta=2^{-\frac{3ir}{2}}e^{-\frac{is}{2}}\Gamma^2\left(\frac{1}{2}-\frac{ir}{4}\right)$$

.

证明. 根据推论 6.1,

$$\widetilde{A} = -\widehat{G}^{-1}\widehat{A}\widehat{G} = -\widehat{A} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{r\mathrm{i}}{4} \\ \frac{r\mathrm{i}}{4} & 0 \end{pmatrix}, \quad \delta(\widehat{A}) = \delta(\widetilde{A}) = 0.$$

由定理 1.1 的 (b) 部分可得，$A_0 = A$、$G_0 = G$、$A_0 = A$。使用定理 1.2 中的记号，我们有$\widehat{\lambda}_1^{(1)} = \widetilde{\lambda}_1^{(1)} = 0$、$\widehat{\lambda}_1^{(2)} = \widetilde{\lambda}_2^{(2)} = \frac{r}{2}\mathrm{i}$、$\widehat{\lambda}_2^{(2)} = \widetilde{\lambda}_1^{(2)} = -\frac{r}{2}\mathrm{i}$、$(\widehat{A}_0)_{12} = (\widehat{A}_0)_{21} = -\frac{r}{4}\mathrm{i}$、$(\widetilde{A}_0)_{12} = (\widetilde{A}_0)_{21} = \frac{r}{4}\mathrm{i}$，以及$H_0 = \mathrm{diag}(\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}s}{2}}2^{\frac{r}{2}}\mathrm{i}, \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}s}{2}}2^{-\frac{r}{2}}\mathrm{i})$。将这些参数代入定理 1.2，并利用伽马函数的以下恒等式，即可得到上述表达式。

$$\Gamma\left(1-\frac{r\mathrm{i}}{4}\right)\Gamma\left(1+\frac{r\mathrm{i}}{4}\right) = \frac{\pi\frac{r\mathrm{i}}{4}}{\sin\pi\frac{r\mathrm{i}}{4}} = \frac{\pi r}{2(\mathrm{e}^{\frac{\pi r}{4}} - \mathrm{e}^{\frac{-\pi r}{4}})},$$
$$\Gamma\left(1\pm\frac{r\mathrm{i}}{4}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\pm\frac{r\mathrm{i}}{4}\right) = 2^{\pm\frac{r\mathrm{i}}{2}}\sqrt{\pi}\cdot\Gamma(1\pm\frac{r\mathrm{i}}{2}).$$

□

根据单值化参数的表达式 p, q 在 (6.10) 中，推论 6.1 中得到的解构成了正弦-戈登 Painlevé III 方程的所有可能解，但以下情形除外：p, q 满足 $p+q = \kappa\mathrm{i}$, $\kappa \in \mathbb{R}$时，且 $|\kappa| \geq 2$。

6.2 tt^*-Toda 方程与一族非收缩解

本节将我们的结果与 tt^*-Toda 方程的某些已知渐近结果进行比较。首先简要回顾 tt^*-Toda 方程的设定，该设定见 [12, 11, 13], ，并遵循其中的约定。

tt^*-Toda 方程（A_n 型）为

$$2(w_i)_{z\bar{z}} = -\mathrm{e}^{2(w_{i+1}-w_i)} + \mathrm{e}^{2(w_i-w_{i-1})}, \ w_i : U \subset \mathbb{C} \to \mathbb{R}, \ i \in \mathbb{Z}, \tag{6.11}$$

其中，函数 $w_i(z, \bar{z})$ 满足条件 $w_i = w_{i+n+1}$、$w_i = w_i(|z|)$ 和 $w_i + w_{n-i} = 0$。该系统可改写为具有两个二阶极点的线性常微分方程组的等单值变形方程，如下所示。

假设 $w = \mathrm{diag}(w_0, \ldots, w_n)$, $\Omega = (\Omega_{kj})_{0\leq k,j\leq n}$ 和 D 为由以下公式定义的 $(n+1)\times(n+1)$ 矩阵

$$\Omega_{kj} = \mathrm{e}^{kj\frac{2\pi\mathrm{i}}{n+1}}, \quad D = \mathrm{diag}\left(1, \mathrm{e}^{\frac{2\pi\mathrm{i}}{n+1}}, \mathrm{e}^{\frac{4\pi\mathrm{i}}{n+1}}, \ldots, \mathrm{e}^{\frac{2n\pi\mathrm{i}}{n+1}}\right).$$

Let

$$W = e^{-w}\Omega D\Omega^{-1}e^{w} = \begin{pmatrix} & e^{w_1-w_0} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{w_n-w_{n-1}} \\ e^{w_0-w_n} & & & \end{pmatrix}. \tag{6.12}$$

取 $x = |z|$，则具有径向解 $w_i(x)$ 的 tt^*-Toda 方程可写为 a s

$$(xw_x)_x = 2x[W^t, W], \tag{6.13}$$

其中 W^t 是 W 的转置。它是以下系统的相容条件：

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \xi} = \left(W^t - \frac{1}{\xi} x w_x - \frac{x^2}{\xi^2} W \right) \Phi, \tag{6.14}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \left(\frac{2x}{\xi} W + w_x \right) \Phi. \tag{6.15}$$

令 $\Psi = \Omega \mathrm{e}^{-w} \cdot \Phi(\xi, x)$，则 Ψ 满足

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \xi} = \left(D - \frac{1}{\xi} \Omega (x w_x) \Omega^{-1} - \frac{x^2}{\xi^2} G D G^{-1} \right) \Psi, \tag{6.16}$$

其中 $G = \Omega \mathrm{e}^{-2w} \Omega$。

虽然 $x = |z|$ 是 tt^*-Toda 方程中的实变量，$w(x)$ 根据这些等单值变形方程的 Painlevé 性质，可以解析延拓为定义在 $\mathbb{C}$ 上的多值亚纯函数。因此，应用命题4.2，可得

推论 6.3。对于任意给定的 $m_i \in \mathbb{R}$, $l_i \in \mathbb{R}_+$, $i = 0, ..., n$，使得

$$|m_i - m_j| < 1, \ m_i + m_{n-i} = 0, \ l_i \cdot l_{n-i} = 1, \tag{6.17}$$

存在唯一解 $w_i(x)$ $i = 0, 1, ..., n$，满足 (6.13) 且在零点附近具有以下行为：

$$w_i = m_i \log x - \frac{1}{2} \log l_i + o(1), \ i = 0, ..., n, \ as \ x \to 0 \tag{6.18}$$

证明。由于 sine-Gordon Painlev´e III 方程是 tt^* -Toda 方程中 A_n 型的二阶矩阵情形，因此这里的证明与推论6.1的证明平行。如上所述，我们将 tt^*-Toda 方程（6.13）与系统（6.16）的等单值变形方程等同起来。在（$\mathbf{z}$ t, $\mathbf{w}$）坐标系（1.11）–（1.13）中，变量 t 由 $t = -(1 - \mathrm{e}^{-\frac{2\pi}{\mathrm{i}(n+1)}})^2 x^2$ 给出。根据命题 4.2，对于任意指定的

$$\widehat{A} := -\Omega \cdot \Lambda \cdot \Omega^{-1}, \quad \Lambda := \mathrm{diag}(m_0, \ldots, m_n),$$

$$\widehat{G} := \Omega \left(-(1 - \mathrm{e}^{-\frac{2\pi \mathrm{i}}{n+1}})^2 \right)^{\Lambda} \cdot L \cdot \Omega, \quad L := \mathrm{diag}(l_0, \ldots, l_n),$$

满足条件 (6.17)，存在一个唯一解 ($A(t)$ $G(t)$)，满足方程 (4.8) 和 (4.9)（其中 $U = D$, $V = -x^2 D$, 以及$\delta(G^{-1} A G) = 0$），使得

$$A \to \widehat{A}, \quad t^{-\widehat{A}} G \to \widehat{G}, \quad \text{as } t \to 0. \tag{6.19}$$

此外，由于 $\Omega^{-1} \widehat{A} \Omega$ 和 $\Omega^{-1} \widehat{G} \Omega^{-1}$ 均为对角矩阵，命题 4.16–(4.18) 中的皮卡迭代（4.2）保证 $\Omega^{-1} A \Omega$ 和 $\Omega^{-1} G \Omega^{-1}$ 也保持为对角矩阵。

令 $\mathrm{e}^{-2w} = \Omega^{-1} G \Omega^{-1}$，则关于 G 的方程 (4.9) $x w_x = -\Omega^{-1} A \Omega$ 等价于，而关于 $A(t)$ 的方程 (4.8) $w(x)$ 化简为关于6.13) 的方程 ($w(x)$。此外，渐近行为 (6.19) 可写为：

$$x w_x \to \mathrm{diag}(m_0, \ldots, m_n), \quad \text{as } x \to 0,$$

$$\mathrm{e}^{2(-w + \Lambda \log x)} \to \mathrm{diag}(l_0, \ldots, l_n), \quad \text{as } x \to 0.$$

因此，我们可以选择一个对数分支，使得 $w(x)$ 满足渐近行为 (6.18)，于是方程 (6.13) 的解 $w(x)$ 由关系 $\mathrm{e}^{-2w} = \Omega^{-1} G \Omega^{-1}$ 唯一确定。由于 m_i, l_i 为实数，因此 $w(x)$ 限制在正实轴上时为实值。而条件 (6.17) 意味着 $w_i(x) = w_{n-i}(x)$。因此，$w(x)$ 确实是 tt^*-Toda 方程的一个解。

□

在 [12, 11, 13], 全局光滑解 $w(z, \bar{z})$ 在 $\mathbb{C}^*$ 上定义的研究中，考察了这些解。它们在无穷远处具有给定的渐近行为（$w_i(x) \to 0$ 当 $x \to \infty$时），因此仅由原点处的

参数 $m_i,\ i=0,\dots,n$, 参数化。全局光滑解的 l_i 关于参数 m_i 的显式表达式见 [13]。

在 [13], 中，所有全局光滑解的参数范围为

$$\{m\in\mathbb{R}^{n+1}:m_i-m_{i-1}\le 1,\ m_i+m_{n-i}=0\}.$$

此范围比边界条件（6.17）更广。（可以将这些 tt^*-Toda 方程的解视为一般秩 $\frac{n}{2}$ 等单值变形方程的 n 参数族解，其中 $2n^2$ 为参数。我们的边界条件在 $2n^2$ 参数空间中开且稠密，但限制在 $2n$ 参数切片上时并不稠密）。因此，一些 tt^*-Toda 方程的全局光滑解会产生不属于集合$\mathfrak{Sol}_{Shr}$的解，这也意味着它们的单值化数据不满足定义5.9中的严格对数约束条件。正如命题 5.15的证明所示，只可能出现恒等式（5.49）和（5.50）。

对于 4 阶和 5 阶矩阵，我们进一步通过数值计算考察与这些非收缩解相对应的单值化数据中具体出现的是两个恒等式（5.49）和（5.50）中的哪一个。文中给出了 4、5、6 阶矩阵的斯托克斯矩阵关于渐近参数的显式公式 [12]。计入辫群作用后，我们得到点 U、V 及方向 d处满足定义 5.40）要求的单值化矩阵，符合定义 5.9。数值验证表明，无穷远处的单值矩阵 $M=\nu_d^{(\infty)}$ 总是具有若干左上子矩阵 $M^{[k]}$，其特征值为成对负实特征值，从而对某个 $|\mathrm{Re}(\lambda_i^{(k)}-\lambda_j^{(k)})|=1$ 成立。 $1\le i<j\le k$。

对于四阶矩阵，一个典型的数值例子如下。我们取 A 的特征值为 $(m_0,m_1,m_2,m_3)=(0.4,-0.55,-0.4,0.55)$，它们不满足边界条件 (4.6)。（这一特征值条件对应于 [12, 定理 A、定理 B], 中的情形 4a，其参数分别为 $\gamma=0.8,\ \delta=-1.1$。）根据 [12, 推论 4。7],给出的公式，斯托克斯矩阵为

$$\left(S^{(\infty)}_{\frac{\pi}{8},+}\right)^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&2.04909\mathrm{i}&-0.33219+0.33219\mathrm{i}\\-0.33219+0.33219\mathrm{i}&1&-0.34850-0.34850\mathrm{i}&1.82839\mathrm{i}\\0&0&1&0.33219+0.33219\mathrm{i}\\0&0&0&1\end{pmatrix},$$

$$S^{(\infty)}_{\frac{\pi}{8},-}=\begin{pmatrix}1&0.33219+0.33219\mathrm{i}&0&0\\0&1&0&0\\2.04909\mathrm{i}&-0.33219+0.33219\mathrm{i}&1&0\\-0.34850-0.34850\mathrm{i}&1.82839\mathrm{i}&-0.33219+0.33219\mathrm{i}&1\end{pmatrix}.$$

这里，$\left(S^{(\infty)}_{\frac{\pi}{8},+}\right)^{-1}, S^{(\infty)}_{\frac{\pi}{8}-}$ 分别是 S_1,S_2 在 [12] 中。由于上述斯托克斯矩阵是在 $(u_1,u_2,u_3,u_4)=(1,\mathrm{i},-1,-\mathrm{i})$ 处计算的，我们应用以下辫群作用，将它们变换为 $(u_1,u_2,u_3,u_4)=(\mathrm{i},1,-1,-\mathrm{i})$ 处的斯托克斯矩阵，从而满足条件 (5.40)：令

$$\mathcal{B}_1=\mathrm{Id}_4+s_1E_{21}=\mathrm{Id}_4+(-0.33219+0.33219\mathrm{i})E_{21},$$
$$\mathcal{B}_2=\mathrm{Id}_4-\bar{s}_1E_{12}=\mathrm{Id}_4+(0.33219+0.33219\mathrm{i})E_{12},$$

其中 $s_1=2\mathrm{e}^{\frac{3\pi\mathrm{i}}{4}}\left(\cos\frac{\pi}{4}(1+2m_0)+\cos\frac{\pi}{4}(3+2m_1)\right)$ 如 [12], 和 E_{ij} 表示 4×4 在（i, j）位置为 1、其余位置为 0 的矩阵。因此，在 $(\mathrm{i},1,-1,-\mathrm{i})$ 处的斯托克斯矩阵为

$$S_1'=\mathcal{B}_1^{-1}\left(S^{(\infty)}_{\frac{\pi}{8},+}\right)^{-1}\mathcal{B}_2,\quad S_2'=\mathcal{B}_2^{-1}S^{(\infty)}_{\frac{\pi}{8},-}\mathcal{B}_1.$$

因此，在 (i1, −1, –i) 处的单值矩阵 $\nu_{\frac{\pi}{8}}^{(\infty)}$ 为

$$\nu_{\frac{\pi}{8}}^{(\infty)} = (S_1' S_2')^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -0.33219 - 0.33219\mathrm{i} & -1.82839\mathrm{i} & -0.95587 + 0.95585\mathrm{i} \\ 0.33219 - 0.33219\mathrm{i} & 0.77930 & -0.93956 - 0.93956\mathrm{i} & -1.19333\mathrm{i} \\ -2.04909\mathrm{i} & -0.34850 + 0.34850\mathrm{i} & -2.96752 & 1.01911 + 1.01911\mathrm{i} \\ -0.33219 - 0.33219\mathrm{i} & -1.82839\mathrm{i} & -0.95587 + 0.95587\mathrm{i} & -2.33219 \end{pmatrix}.$$

左上角 3×3 子矩阵 $\nu_{\frac{\pi}{8}}^{(\infty)}$ 的特征值为（−1.53758、1、−0.65037）。因此，定义 σ_3 5.8中的−0.5、0、0.5）不满足条件（5.38）。

下面的两幅散点图1、2 总结了我们的数值结果。坐标轴 γ 和 δ 分别对应于 $2m_0$ 和 $2m_1$ （ A的特征值的两倍）。彩色点表示相应的 γ、δ取值，此时 M 的相应子矩阵具有成对负实特征值，因此相应的单值化数据并非严格对数受限。在 $|\gamma| < 1$、$|\delta| < 1$的区域内，没有出现彩色点。这表明对应于这些（γ、δ）取值的单值化矩阵严格对数受限，这与我们的理论预期一致。

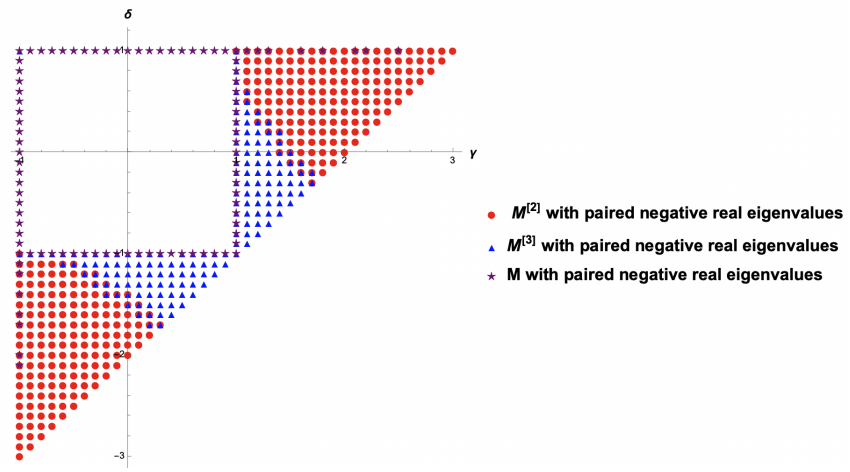

图 1：4 阶单值矩阵的判别 $M = \nu_{\frac{\pi}{8}}^{(\infty)}$

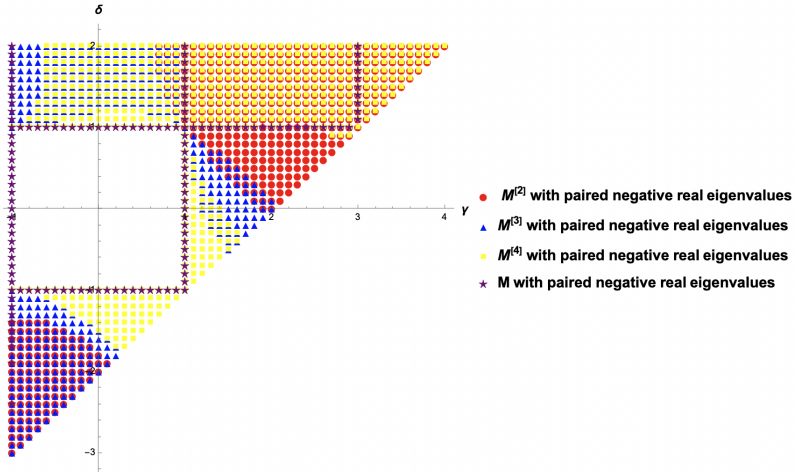

图 2：5 阶单值矩阵的判别 $M = \nu_{\frac{\pi}{10}}^{(\infty)}$

6.3 一般 tt^* 方程

本节将运用我们的渐近结果，描述一般 tt^*方程在相似约化下的局部行为，其中 $t \to 0$。 tt^* 方程源于对 $N = 2$ 超对称量子场论的研究， [6, 7]，其解表示超对称基态的度量。

Dubrovin 对 tt^* 方程作出了数学诠释， [8], 将其表述为一个线性偏微分方程组的相容条件。此外， tt^* 方程的解在 Frobenius流形上定义了一种几何结构（特殊几何结构）。

根据 [8],，假设 $\mathbf{u}=(u_1,...,u_n)$ 是 Frobenius流形上的典范坐标， $\bar{\mathbf{u}}=(\bar{u}_1,...,\bar{u}_n)$ 是$\mathbf{u}$的共轭坐标，设 $q(\mathbf{u},\bar{\mathbf{u}})$ 是对称非对角矩阵函数， $m(\mathbf{u},\bar{\mathbf{u}})$ 是正交厄米矩阵函数，例如

$$[U,q]=m[\overline{U},\bar{q}]\overline{m},\quad U=\mathrm{diag}(u_1,...,u_n).$$

带相似约化的 tt^* 方程是关于 $q(\mathbf{u},\bar{\mathbf{u}})$ $m(\mathbf{u},\bar{\mathbf{u}})$ 的方程，如下所示 ，

$$-[U,\frac{\partial}{\partial u_k}q]=[\mathrm{ad}_{E_k}q,\mathrm{ad}_U q]+[E_k,\ q+m\overline{U}m^{-1}], \tag{6.20}$$

$$\frac{\partial}{\partial\bar{u}_k}q=mE_km^{-1}, \tag{6.21}$$

$$\frac{\partial}{\partial u_k}m=-[E_k,q]\cdot m, \tag{6.22}$$

$$\frac{\partial}{\partial\bar{u}_k}m=m\cdot[E_k,\bar{q}]. \tag{6.23}$$

这些 方程恰好是以下线性偏微分方程组的相容条件 ：

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}\varphi=(U-\lambda^{-1}[U,q]-\lambda^{-2}m\bar{U}m^{-1})\varphi, \tag{6.24}$$

$$\frac{\partial}{\partial u_k}\varphi=(\lambda E_{kk}-[E_{kk},q])\varphi, \tag{6.25}$$

$$\frac{\partial}{\partial\bar{u}_k}\varphi=\lambda^{-1}mE_{kk}m^{-1}\varphi. \tag{6.26}$$

方程 (6.24) 恰好是方程 (1.1) 的特例。因此，这些 tt^* 方程等价于我们正在研究的等单值变形方程。此外，假设 $u_1=0$ (对于任意 u_1，只需令 $\phi=\mathrm{e}^{-u_1\lambda-\frac{\bar{u}_1}{\lambda}}\varphi$ 并考虑 ϕ)，并令 $\xi=|u_n|\cdot\lambda$, (6.24) 变为

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\varphi=\left(\frac{1}{|u_n|}U-\lambda^{-1}[U,q]-\lambda^{-2}|u_n|m\bar{U}\bar{m}\right)\varphi. \tag{6.27}$$

(6.27) 的等单值变形方程仍是 tt^* 方程，而我们的 $(\mathbf{z},t,\mathbf{w})$ 坐标现在按如下方式变换:

$$t=|u_n|^2,\ z_{n-1}=\frac{u_n}{u_{n-1}},\cdots,z_2=\frac{u_3}{u_2},\ z_1=\frac{u_2}{|u_n|},\ w_{n-1}=\bar{z}_{n-1},\cdots,w_2=\bar{z}_2,$$

因此， t 表示 φ 的尺度，而 z_1 表示 φ的旋转角。

与 tt^*-Toda 情形类似，根据 Painlev´e 性质， $q(\mathbf{z},\bar{\mathbf{z}})$ $m(\mathbf{z},\bar{\mathbf{z}})$ 可解析延拓为定义在$\mathbb{C}^{2n}\setminus\Delta_{\mathbf{u},\mathbf{v}}$上的多值亚纯函数。因此应用定理 1.1，可得

推论 6.4 A_0 m_0 $A_0=$.. 给定一个反对称矩阵和一个正交厄米矩阵，使得它们满足特征值条件 (.). 设 $\widehat{A}\left(\mathbf{z},\widehat{A}_0\right)$ (以下用此符号表示)为方程 (4.5a) 的解，具有边界值 A_0，如定理 2.1所给出；并设 $\mathbf{z}=(z_1,...,z_{n-1})$，

$$\widehat{m}(\mathbf{z},\bar{\mathbf{z}}):=|z_1|^{2\widehat{A}}\cdot\widehat{\mathfrak{C}}^{-1}\cdot m_0\cdot\mathrm{e}^{\pi\mathrm{i}\widehat{A}_0}\cdot\overline{\widehat{\mathfrak{C}}}\cdot\mathrm{e}^{\pi\mathrm{i}\widehat{A}}.$$

以下 $\mathfrak{C}$ 是对应于 (2.17) 的解 $U=$对角矩阵$(0,1,z_2,\cdots,z_2\cdots z_{n-1})$ $\Phi=A(\mathbf{z},A_0)$，使得 — ((5.28)中的渐近常数为 Id。并且 $\mathfrak{C}$ 是 $\mathfrak{C}$的复共轭。那么存在唯一解

$(q(t,\mathbf{z}\ \bar{}\mathbf{z})\ m(t,\mathbf{z}\ \bar{}\mathbf{z}))$ 满足以下渐近行为的 tt^* 方程，在 $t=0$ 附近：

$$A=-[U,q]\to\widehat{A},\quad t^{-\widehat{A}}m\to\widehat{m},\quad as\ t\to 0. \tag{6.28}$$

此外，$(A,\widehat{m})$ 在 $z_{n-1}\to\infty,\cdots z_2\to\infty$ 依次趋近时满足以下渐近行为：

$$\lim_{z_k\to\infty}\delta_k\widehat{A}_k=\delta_k\widehat{A}_{k-1},\ \lim_{z_k\to\infty}z_k^{\delta_k\widehat{A}_{k-1}}\cdot\widehat{A}_k\cdot z_k^{-\delta_k\widehat{A}_{k-1}}=\widehat{A}_{k-1},\ k=2,...,n-1,\ \widehat{A}_1=\widehat{A}_0;$$
$$\prod_{k=1}^{\overrightarrow{n-1}}\left(z_k^{\delta_k\widehat{A}_{k-1}}z_k^{-\widehat{A}_k}\right)\left(z_1\cdot|z_2|^2\cdots|z_{n-1}|^2\right)^{\widehat{A}}\widehat{m}\prod_{k=2}^{\overleftarrow{n-1}}\overline{\left(z_k^{\widehat{A}_k}z_k^{-\delta_k\widehat{A}_{k-1}}\right)}\to m_0.$$

另一方面，当系统(6.27)或(6.24) 的单值化数据如定义5.9所述严格对数受限时，tt^* 方程的相应解在 $t=0$附近必须满足这些渐近行为。

证明。从满足推论条件的一对 $(\widehat{A}_0,m_0)$ 出发，关系 $\widetilde{A}_0=-m_0^{-1}\widehat{A}_0m_0=\widehat{\overline{A}}_0$ 意味着，关于 A_0 的收缩条件等价于关于 A_0的收缩条件。根据命题5.4，我们使用方程 (5.29)，由 $A(\mathbf{z}\ A_0)$ 和 $A(\mathbf{w}\ A_0)$ 构造 $\widehat{m}(\mathbf{z},\mathbf{w})$。根据定理 4.1，我们得到等单值变形方程的多值亚纯解，记为 $(A(\mathbf{z}\ t,\mathbf{w})\ m(\mathbf{z}\ t,\mathbf{w}))$，其定义域为$\mathbb{C}^{2n}\setminus\Delta_{\mathbf{u},\mathbf{v}}$。

将这些解限制到 $V=U$，并运用定理 2.1 中的唯一性结果，我们得到 $A(\bar{z},A_0)=\widehat{\overline{A}}(z,A_0)$ 和 $C_{-d}(U,A)=\overline{C_d(U,A)}=C_d(U,A)$。因此，$\widehat{m}(\mathbf{z}\ \bar{}\mathbf{z})$ 可表示为本推论所指定的形式。此外，定理 4.1 中的唯一性性质给出以下对称性：

$$-A^T(\mathbf{z},t,\bar{\mathbf{z}})=A(\mathbf{z},t,\bar{\mathbf{z}}),\quad m^{-T}(\mathbf{z},t,\bar{\mathbf{z}})=m(\mathbf{z},t,\bar{\mathbf{z}});$$
$$-m(\mathbf{z},t,\bar{\mathbf{z}})\overline{A}(\mathbf{z},t,\bar{\mathbf{z}})\overline{m}^{-1}(\mathbf{z},t,\bar{\mathbf{z}})=A(\mathbf{z},t,\bar{\mathbf{z}}),\quad \overline{m}^T(\mathbf{z},t,\bar{\mathbf{z}})=m(\mathbf{z},t,\bar{\mathbf{z}}).$$

反过来，设系统 (6.27) 或 (6.24) 的单值化数据是严格对数受限的。在这种情况下，定理 5.13 保证存在定义在 $\mathbb{C}^{2n}\setminus\Delta_{\mathbf{u},\mathbf{v}}$ 上的多值亚纯解 $(A(\mathbf{z}\ t,\mathbf{w})\ m(\mathbf{z}\ t,\mathbf{w}))$。将这些解限制到 $U=V$ 后，单值化数据的不变性和引理 5.12 表明，$(A(\mathbf{z}\ t,\bar{}\mathbf{z})\ m(\mathbf{z}\ t,\bar{}\mathbf{z}))$ 正是我们最初出发的 tt^* 方程（如系统 (6.27) 或 (6.24) 所示）的解。最后，根据 A 和 m 之间的代数关系，我们可以通过极限过程推得 $\widehat{A}_0$ 是反对称的，m_0 是正交且厄米的，并且恒等式 $\widehat{A}_0=-m_0\widehat{A}_0m_0^{-1}$ 成立。□

参考文献

[1] A. Alekseev、A. Neitzke、X. Xu 和 Y. Zhou。斯托克斯矩阵、谱曲线的 WKB 渐近以及菱形不等式。《数学物理通讯》，405(11):269，2024。[2] W. Balser。形式幂级数与亚纯常微分方程的线性系统。施普林格出版社，纽约，2000。[3] W. Balser、W. B. Jurkat 和 D. A. Lutz。将具有不规则奇点的微分方程的联络问题化归为仅具有正则奇点的问题。I。《工业与应用数学学会数学分析杂志》，12(5):691–721，1981。[4] P. Boalch。G-丛、等单值变形与量子魏尔群。《国际数学研究通知》，(22):1129–1166，2002。[5] P. Boalch。亚纯联络的拟哈密顿几何。《杜克数学杂志》，139(2):369–405，2007。[6] S. Cecotti 和 C. Vafa。拓扑-反拓扑融合。《核物理*B*辑》，367(2):359–461，1991。[7]S. Cecotti 和 C. Vafa。关于 $N=2$ 超对称理论的分类。《*Communications in Mathematical Physics*》，158(3):569–644，1993。

[8]B. Dubrovin。拓扑-反拓扑融合的几何与可积性。《Communications in Mathematical Physics》，152:539–564，1993。[9] B. Dubrovin。二维拓扑场论的几何。载于《可积系统与量子群》（蒙特卡蒂尼泰尔梅，1993），《数学讲义》第1620卷，第120–348页。施普林格，柏林，1996。[10] A. S. Fokas、A. R. Its、A. A. Kapaev 和 V. Yu. Novokshenov。Painlev´é超越函数，《数学调查与专著》第128卷。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2006。黎曼-希尔伯特方法。[11] M.A. Guest、A.R. Its 和 C.-S. Lin。Cecotti 和 Vafa 的 tt*方程的等单值方面 II：黎曼-希尔伯特问题。《Communications in Mathematical Physics》，336:337–380，2015。[12] M.A. Guest、A.R. Its 和 C.-S. Lin。Cecotti 和 Vafa 的 tt*方程的等单值方面 I：斯托克斯数据。《国际数学研究通知》，2015(22):11745–11784，2015。[13] M.A. Guest、A.R. Its 和 C.-S. Lin。 A_n 型 tt*-Toda 方程。arXiv 预印本 arXiv:2302.04597，2023。[14] V. Guillemin 和 S. Sternberg。Gelfand-Cetlin系统与复旗流形的量子化。《Journal of Functional Analysis》，52(1):106–128，1983。[15] A. R. Its 和 V. Yu. Novokshenov。Painlev´é 方程理论中的等单值变形方法，《数学讲义》第1191卷。施普林格出版社，柏林，1986。[16] M. Jimbo。某些 Painlev´é 方程的单值化问题与边界条件。《数理科学研究所出版物》，18(3):1137–1161，1982。[17] M. Jimbo、T. Miwa 和 M. Sato。全纯量子场。II——黎曼-希尔伯特问题。《数理科学研究所出版物》，15:201–278，1979。[18] M. Jimbo、T. Miwa 和 K. Ueno。具有有理系数的线性常微分方程的保单值变形。I. 一般理论与 τ-函数。《Phys. D》，2(2):306–352，1981。[19] J.-H. Lu 和 A. Weinstein。李-泊松群的双辛群胚。《巴黎科学院报告》S´er. I Math，309(18):951–954，1989。[20] T. Miwa。保单值变形方程的 Painlev´é 性质与 τ 函数的解析性。《数理科学研究所出版物》，17(2):703–721，1981。[21] P. Painlev´é。关于其通解为单值的二阶及高阶´微分´方程。《Acta Math.》，25(1):1–85，1902。[22] Q. Tang 和 X. Xu。某些等单值变形方程的边界条件。arXiv:2402.07269v2，2024。[23] X. Xu。斯托克斯矩阵的正则化极限、等单值变形与晶体基。arXiv 预印本，arXiv:1912.07196v5。[24] X. Xu。斯托克斯矩阵的渐近行为、晶体与杨表的组合学。arXiv 预印本 arXiv:2105.13149v2，2021。