谱图论中边谱 Tur´án 型问题综述：结果、猜想与未解决问题

YuantianYu*,[1]，Huihui Zhang†,[2]，and Minjie Zhang‡,[3]

[1]理学院，华东理工大学，南昌 330013，中国[2]数学学院，洛阳师范学院，洛阳 471000，中国[3]数学与统计学院，湖北文理学院，襄阳 441053，中国

arXiv:2512.19395v1 [math.CO] 22 Dec 2025

2025年12月23日

摘要

边谱 Tur´án 型问题也称为 Brualdi-Hoffman-Tur´án 型问题，是谱图论中的一个核心课题，旨在确定具有 m 条边的 F-自由图 G 的最大谱半径 $\lambda(G)$。近年来，该问题受到广泛关注。本文将梳理此类问题中若干密切相关的结果，并提出一些供进一步研究的猜想。

关键词： 边谱 Tur´án 型问题；谱半径；圈；θ 图；友谊图；扇图；轮图；色临界图

美国数学学会学科分类： 05C50；05C75

1. 引言

在这篇综述中，我们考虑有限、无向且简单的图（即没有自环或重边）。除非另有明确说明，我们遵循图论中常见的标准记号和术语（例如，参见 Bollob´as、Godsil 和 Royle [12]）。

设 $G=(V(G)\ E(G))$ 是一个图，其顶点集为 $V(G)=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$，边集为 $E(G)$。若两个顶点 v_i 和 v_j 在 G 中由一条边相连，则称它们相邻（或互为邻点），记作 $v_i\sim v_j$。图 G 的邻接矩阵 $A(G)=(a_{ij})$ 是一个 $n\times n$ (0, 1) 矩阵，当且仅当 v_i、v_j 相邻时，$a_{ij}=1$。由于 $A(G)$ 是实对称矩阵，$A(G)$ 的所有特征值 $\lambda_1(G)\geqslant\lambda_2(G)\geqslant\cdots\geqslant\lambda_n(G)$ 都是实数。通常，图 G 的谱半径 $\lambda(G)$ 是 $A(G)$ 的模最大的特征值。根据 Perron-Frobenius 定理，$\lambda(G)=\lambda_1(G)$，并且存在一个对应于 $\lambda(G)$ 的正特征向量 $\boldsymbol{x}$；如果 G 连通，该向量称为 G 的 Perron 向量。

给定一个图族 $\mathcal{F}$，如果一个图 G不包含与 $\mathcal{F}$ 中任何成员同构的子图，则称其为 $\mathcal{F}$-free 图。如果 $\mathcal{F}$由单个图 F组成，则称 G为 F-free 图。用 $\mathcal{G}(m,\mathcal{F})$ 表示具有 m 条边且不含孤立顶点的 $\mathcal{F}$-free 图的集合。在谱图论中，

*ytyumath@sina.com (Y. Yu)

†zhanghhmath@163.com (H. Zhang)

‡通讯作者，zhangmj1982@qq.com (M. Zhang)

存在两类极值问题。一类是顶点谱 Tur´an 型问题，也称为 Brualdi-Solheid-Tur´an 型问题 [4]:

问题 1（顶点谱 Tur´án 型问题）。确定所有 $\mathcal{F}$-自由图在 n 个顶点上的最大谱半径，并确定相应的极值图。

另一类是边谱 Tur´án 型问题，也称为 Brualdi-Hoffman-Tur´án 型问题 [3]:

问题 2（边谱 Tur´án 型问题）。确定所有 $\mathcal{G}(m, \mathcal{F})$ 图中的最大谱半径，并确定相应的极值图。

李、Liu 和 Feng [23] 综述了大量顶点谱 Tur´án 型结果。过去五年中，涌现出越来越多优秀的边谱 Tur´án 型结果。本文将对这些结果进行详细综述。为此，我们先介绍一些必要的记号和术语。

设 G 为一个图，u，v 为 G的两个顶点。若 $u \sim v$，则令 $G-uv$（分别为 $G-u$）表示从 G 中删除边 uv（分别删除顶点 u）后得到的图；此记号自然可扩展到删除多条边或多个顶点的情形。类似地，若 $u \nsim v$，令 $G+uv$ 表示在 G 中添加连接 u 与 v的边后得到的图。v 在 G 中的邻点集合记为 $N_G(v)$；其边数称为 v 在 G中的度，记为 $d_G(v)$。令 $N_G[v] = N_G(v) \cup \{v\}$（$v$的闭邻域）。

通常，令 P_n、C_n 和 K_n 分别表示阶为 n 的路径、圈和完全图。令 $K_{a,b}$ 表示顶点部大小分别为 a 和 b 的完全二部图。设 G_1 和 G_2 为两个图，并将它们的不交并记为 $G_1 \cup G_2$。那么，$G_1 \vee G_2$ 定义为它们的连接，即从 $G_1 \cup G_2$ 出发，添加边，使 G_1 中的每个顶点都与 G_2中的所有顶点相连。

如果为每个顶点指定一种颜色，使得每条边的两个端点颜色不同，则称图是正常着色的。图 G 的色数 $\chi(G)$ 定义为使 G 能够用 k 种颜色正常着色的最小数目 k。若图 G 中存在一条边 e，使得 $G-e$ 的色数满足 $\chi(G-e) < \chi(G)$，则称图 G 为色临界图。

2. 禁止涉及连续奇圈的子图

对 问题 2 的研究可追溯至 1970 年，当时 Nosal [38] 得到了以下结果 lt.

定理 2.1 (Nosal [38], 1970)。对所有图 $G \in \mathcal{G}(m, C_3)$，均有 $\lambda(G) \leqslant \sqrt{m}$。

Nikiforov [35] 在定理 2.1 中确定了相应的极值图。

定理 2.2 (Nikiforov [35], 2009)。对所有图 $G \in \mathcal{G}(m, C_3)$，均有 $\lambda(G) \leqslant \sqrt{m}$。当且仅当 G 是完全二部图时，等号成立。

设 G 为一个图。G的膨胀 是一个新图，由 G 通过将每个顶点$x \in V(G)$替换为一个独立集 I_x得到；对于任意两个顶点 x、$y \in V(G)$，若 $x \sim y$，则在 I_x 和 I_y 之间添加所有边。Lin、Ning 和 Wu [26] 扩展了定理 2.2，并得到以下两个结果。

定理 2.3（Lin、Ning 和 Wu [26], 2021）。对于所有满足 $m \geqslant 2$ 的图 $G \in \mathcal{G}$（m、C_3），有 s

$$\lambda_1^2(G) + \lambda_2^2(G) \leqslant m.$$

等号成立当且仅当 G 是 $\mathcal{G}$ 中某个成员的膨胀，其中

$$\mathcal{G} = \{P_2,\ 2P_2,\ P_4,\ P_5\}.$$

定理 2.4 (Lin、Ning 和 Wu [26], 2021)。设 G 是 $\mathcal{G}(m, C_3)$中的一个非二分图，则有$\lambda(G)$ $\leqslant \sqrt{m-1}$。等号成立当且仅当 $G \cong C_5$。

注意，定理 2.4 中的界仅在 $m = 5.$ 时可取到。为方便起见，令 $S_k(K_{a,b})$ 表示由完全二部图 $K_{a,b}$ 得到的图，其中一条边被一条长度为 $k+1$的路径替代，其中 $k \geq 1$ 且 $b \geqslant a \geqslant 1.$ Zhai 和 Shu [45] 得到了以下结果，该结果推广了定理 2.2 和定理 2.4。

定理 2.5 (Zhai 和 Shu [45], 2022)。设 G 是 $\mathcal{G}(m, C_3)$中的一个非二分图，则有$\lambda(G) \leqslant \lambda(S_1(K_{2,\frac{m-1}{2}}))$。等号成立当且仅当 m为奇数且 $G \cong S_1(K_{2,\frac{m-1}{2}})$。

定理 2.5 中的界仅当 m 为奇数时可取到。Zhai 和 Shu [45] 提出了以下问题：

问题 3 (Zhai 和 Shu [45], 2022)。对于偶数 m，在所有具有 m 条边且不含 C_3 的非二分图中，达到最大谱半径的极值图是什么？

对于奇数 k 和偶数 m，令 $S_k^+(K_{2,\frac{m-k-1}{2}})$ 为从 $S_k(K_{2,\frac{m-k-1}{2}})$ 得到的图，其中在一个最大度顶点上接一条悬挂边；若 $m - k \equiv 2$（模 3），则令 $S_k^-(K_{3,\frac{m-k+1}{3}})$ 为通过以下两步从 $K_{3,\frac{m-k+1}{3}}$ 得到的图：首先删去 $K_{3,\frac{m-k+1}{3}}$ 的一条边，这使所得图中出现一个度为 2 的顶点，记为 v，所得图记为 $K_{3,\frac{m-k+1}{3}}^-$。然后将 $K_{3,\frac{m-k+1}{3}}^-$ 中与 v 相 incident 的一条边替换为一条长度为 $k+1$ 的路径。李、Feng 和 Peng [19] 解决了偶数 $m \geqslant 4.7 \times 10^5$ 时的问题 3。最近，李、Zhao 和 Shen [16] 改进了 [19],，解决了偶数 $m \geqslant 70$ 时问题 3 的结果。

定理 2.6 (李、Zhao 和 Shen [16], 2025+)。设 $m \geqslant 70$ 为偶数，且设 G 为 $\mathcal{G}(m, C_3)$ 中的非二分图。

(a) 若 $m \equiv 0$（模 *3*），则 $\lambda(G) \leq \lambda(S_1^-(K_{3,\frac{m}{3}}))$，当且仅当 $G \cong S_1^-(K_{3,\frac{m}{3}})$ 时等号成立。*(b)* 若 $m \equiv 1$（模 *3*），则 $\lambda(G) \leq \lambda(S_1(K_{3,\frac{m-1}{3}}))$，当且仅当 $G \cong S_1(K_{3,\frac{m-1}{3}})$ 时等号成立。*(c)* 若 $m \equiv 2$（模 *3*），则 $\lambda(G) \leq \lambda(S_1^+(K_{2,\frac{m-2}{2}}))$，当且仅当 $G \cong S_1^+(K_{2,\frac{m-2}{2}})$ 时等号成立。

注意到，C_5 是定理 2.4 中唯一的极值图，而定理 2.5 和定理 2.6 中的所有极值图都包含以 C_5 为子图。Sun 和李 [39]将定理 2.4 推广如下。

定理 2.7 (Sun 和李 [39], 2023)。设 G 是 $\mathcal{G}(m, \{C_3, C_5\})$中的一个非二分图，则有

$$\lambda^4(G) \leqslant \sum_{v \in V(G)} d_G(v)^2 + 4f - m - 5. \tag{2.1}$$

当且仅当 $G \cong C_7$ 时等号成立，其中 f 表示 G 中 4-圈的数量 .

事实上，(2.1) 也为边数为 m 的非二分 $\{C_3, C_5\}$-自由图中的 4-圈数量建立了下界。还可以注意到，定理 2.7 中的界只有在$m = 7$. Li、Peng [24] 和 Sun、Li [39], 分别独立地将定理 2.5 和定理 2.7 推广如下时才能达到。

定理 2.8 (Li，Peng [24], Sun，Li [39])。设 G 是 $\mathcal{G}(m, \{C_3, C_5\})$中的非二分图，则有 $\lambda(G) \leqslant \lambda(S_3(K_{2,\ \frac{m-3}{2}}))$。等号成立当且仅当 m 是奇数且 $G \cong S_3(K_{2,\ \frac{m-3}{2}})$。

同样，从定理 2.8 可知，相应的极值图仅在 m为奇数时才有定义。Sun 和 Li [39] 提出了以下问题:

问题 4 (Sun 和 Li [39], 2023)。对于偶数 m，在所有具有 m 条边的 $\{C_3, C_5\}$-自由非二分图中，哪一个极值图能达到最大谱半径?

Li 和 Yu [15] 解决了偶数 $m \geqslant 150$时的问题 4。

定理 2.9 (Li 和 Yu [15], 2023)。设 $m \geqslant 150$ 为偶数。假设 G 是 $\mathcal{G}(m, \{C_3, C_5\})$中的非二分图。

(a) 若 $m \equiv 0$ *(mod 3)*，则 $\lambda(G) \leqslant \lambda(S_3(K_{3,\frac{m-3}{3}}))$；当且仅当 $G \cong S_3(K_{3,\frac{m-3}{3}})$ 时等号成立。*(b)* 若 $m \equiv 1$ *(mod 3)*，则 $\lambda(G) \leqslant \lambda(S_3^+(K_{2,\frac{m-4}{2}}))$；当且仅当 $G \cong S_3^+(K_{2,\frac{m-4}{2}})$ 时等号成立。*(c)* 若 $m \equiv 2$ *(mod 3)*，则 $\lambda(G) \leqslant \lambda(S_3^-(K_{3,\frac{m-2}{3}}))$；当且仅当 $G \cong S_3^-(K_{3,\frac{m-2}{3}})$ 时等号成立。

Zhai、Lin 和 Shu [44] 证明，对于 $m \geqslant 8$，$K_2 \vee \frac{m-1}{2}K_1$ 是 $\mathcal{G}(m, C_5)$ 中谱半径最大的唯一图（见下文定理 3.9）；极值图 $K_2 \vee \frac{m-1}{2}K_1$ 仅在 m 为奇数时才有定义。Min、Lou 和 Huang [33] 推广了上述 Zhai-Lin-Shu 的结果，证明对于偶数 $m \geqslant 14$，$S^1_{\frac{m}{2}+2}$,2 是 $\mathcal{G}(m, C_5)$ 中谱半径最大的唯一图，其中 $S^1_{\frac{m}{2}+2}$,2 是从 $K_2 \vee \frac{m}{2}K_1$ 中删除一条与度为 2 的顶点关联的边得到的（见下文定理 3.18）。注意，若 G 是 $\{C_5, C_7, \ldots, C_{2k+1}\}$-free，则它也是 C_5-free。由于 $K_2 \vee \frac{m-1}{2}K_1$ 和 $S^1_{\frac{m}{2}+2}$,2 都是 $\{C_5, C_7, \ldots, C_{2k+1}\}$-free，因此可以推得，只要 $m \geqslant 8$，$K_2 \vee \frac{m-1}{2}K_1$ 就是 $\mathcal{G}(m, \{C_5, C_7, \ldots, C_{2k+1}\})$ 中谱半径最大的唯一图；对于偶数 m，只要 $m \geqslant 14$，$S^1_{\frac{m}{2}+2}$,2 就是 $\mathcal{G}(m, \{C_5, C_7, \ldots, C_{2k+1}\})$ 中谱半径最大的唯一图。

注意到，定理 2.8 中的极值图包含一个 C_7. Lou、Lu 和 Huang [30] 推广了定理 2.5 和定理 2.8，得到了如下结果，该结果由 Li 和 Peng [24] 作为猜想提出。

定理 2.10 (Lou、Lu 和 Huang [30], 2024)。对于 $k \geqslant 2$，如果 G 是$\mathcal{G}(m, \{C_3, C_5, \ldots, C_{2k+1}\})$中的非二分图，那么

$$\lambda(G) \leqslant \lambda(S_{2k-1}(K_{2,\frac{m-2k+1}{2}})).$$

当且仅当 m 为奇数且 $G \cong S_{2k-1}(K_{2,\ \frac{m-2k+1}{2}})$时等号成立。

还可以看出，定理 2.10 中的极值图只有在奇数 m时才能达到。因此，Li、Feng 和 Peng [19] 提出了以下问题。

问题 5 (李、Feng 和 Peng [19], 2024)。对于偶数 m，在所有具有 m 条边且不含 $\{C_3, C_5, \ldots, C_{2k+1}\}$的非二分的图中，达到最大谱半径的极值图是什么?

通过观察 [19, 定理 7] 和定理 2.9 中的极值图，Li 和余 [15]提出了如下猜想。

猜想 2.11 (Li 和 Yu [15], 2023)。令 $k \geqslant 1$。存在一个整数 $N(k)$。假设 G 是 $\mathcal{G}(m, \{C_3, C_5, \ldots, C_{2k+1}\})$ 中具有偶数 $m \geqslant N(k)$ 的非二分图。

(a) 如果 $m-(2k-1) \equiv 0$ *(模 3)*，则 $\lambda(G) \leqslant \lambda(S_{2k-1}(K_3, \frac{m-(2k-1)}{3}))$，且当且仅当 $G \cong S_{2k-1}(K_3, \frac{m-(2k-1)}{3})$ 时等号成立。*(b)* 如果 $m-(2k-1) \equiv 1$ *(模 3)*，则 $\lambda(G) \leqslant \lambda(S^{+}_{2k-1}(K_2, \frac{m-(2k-1)-1}{2}))$，且当且仅当 $G \cong S^{+}_{2k-1}(K_2, \frac{m-(2k-1)-1}{2})$ 时等号成立。*(c)* 如果 $m-(2k-1) \equiv 2$ *(模 3)*，则 $\lambda(G) \leqslant \lambda(S^{-}_{2k-1}(K_3, \frac{m-(2k-1)+1}{3}))$，且当且仅当 $G \cong S^{-}_{2k-1}(K_3, \frac{m-(2k-1)+1}{3})$ 时等号成立。

最近，Lou、Lu 和 Zhai [31, 定理 1.4] 用 $m \geqslant 30k+45$ 证实了猜想 2.11。

3. 禁止色数至多为 3 的子图

本节综述关于问题 2 的结果，重点讨论禁止色数至多为 3 的子图的情形。

Nikiforov [36] 针对 C_4研究了问题 2，并得到了以下结果。

定理 3.1 (Nikiforov [36], 2009)。对于满足 $m \geqslant 10$ 的任意图 $G \in \mathcal{G}(m, C_4)$，有 $\lambda(G) \leqslant \sqrt{m}$。当且仅当 $G \cong K_{1,m}$ 时，等号成立。

注意，$K_{1,m}$ 是一个二分图。对于整数 $a \geqslant 1$ 和 $b \geqslant 2$，令 $K^{+}_{a,b}$ 表示由 $K_{a,b}$ 在其含有 b 个顶点的顶点部内添加一条边后得到的图。Zhai 和 Shu [45] 将定理 3.1 推广为以下形式。

定理 3.2 (Zhai 和 Shu [45], 2022)。对于任意图 $G \in \mathcal{G}(m, C_4)$，满足 $m \geqslant 26$。若 G 是非二分的，则 $\lambda(G) \leqslant \lambda(K^{+}_{1,\, m-1})$。当且仅当 $G \cong K^{+}_{1,\, m-1}$ 时等号成立。

另一方面，注意到 $C_4 \cong K_{2,\, 2}$。Zhai、Lin 和 Shu [44] 将定理 3.1 扩展为以下形式。

定理 3.3 (Zhai、Lin 和 Shu [44], 2021)。对于任意图 $G \in \mathcal{G}(m, K_{2,\, r+1})$，满足 $r \geqslant 2$ 且 $m \geqslant 16r^2$，有 $\lambda(G) \leqslant \sqrt{m}$。当且仅当 $G \cong K_{1,\, m}$ 时等号成立。

Fang 和 You [8]通过证明以下结果推广了定理 3.2 和 3.3。

定理 3.4 (Fang 和 You [8], 2023)。对于任意图 $G \in \mathcal{G}(m, K_{2,r+1}) \backslash \{K_{1,m}\}$，若 $r \geqslant 1$ 且$m \geqslant (4r+2)^2+1$，则有 $\lambda(G) \leqslant \lambda(K^{+}_{1,m-1})$。等号成立当且仅当 $G \cong K^{+}_{1,m-1}$。

令 $B_{2,r+1} = K_2 \vee (r+1)K_1$ 表示一个书图，它可以通过在 $K_{2,r+1}$ 中添加一条连接两个度为 $r+1$的顶点的边得到。Zhai、Lin 和 Shu [44] 提出了以下关于书图的猜想。

猜想 3.5 (Zhai、Lin 和 Shu [44], 2021)。对于任意图 $G \in \mathcal{G}(m, B_{2,r+1})$，若 $m \geqslant m_0(r)$，则当 $m_0(r)$ 足够大时，有 $\lambda(G) \leqslant \sqrt{m}$. 等号成立当且仅当 G 是完全二部图。

令 $bk(G)$ 表示 G 的书本数，即 G 中具有同一条边的三角形的最大数量。Nikiforov [37] 通过证明以下结果，证实了上述猜想。

定理 3.6 (Nikiforov [37], 2021)。 如果 G 是一个有 m 条边且满足 $\lambda(G) \geqslant \sqrt{m}$的图，那么 $bk(G) > \frac{1}{12}\sqrt[4]{m}$，除非 G 是一个完全二部图。

由定理 3.6 可知，猜想 3.5 在 $m_0(r) \geqslant (12r)^4$. 的情况下成立。最近，Li、Liu 和 Zhang [20] 改进了 Nikiforov 关于 $bk(G)$的界。

定理 3.7 (Li、Liu 和 Zhang [20], 2025)。 如果 G 是一个有 m 条边且满足 $\lambda(G) \geqslant \sqrt{m}$的图，那么$bk(G) > \frac{1}{144}\sqrt{m}$，除非 G 是一个完全二部图。

定理 3.7 证明了猜想 3.5 在 $m_0(r) \geqslant (144r)^2$. 的情况下成立。Li、Liu 和 Zhang [20] 还证明，定理 3.7 中的阶数 $\sqrt{m}$ 是最优的。

注意，定理 3.7 中的极值图是二分图。受定理 3.2 和定理 3.4 的启发，可以提出以下问题：

问题 6. 在所有具有 m 条边的 $B_{2,r+1}$-自由非二分图中，达到最大谱半径的极值图是什么？

Liu 和 Miao [28] 猜想，问题 6 中的极值图是$K^+_{1,m-1}$。但注意到$K^+_{r,\frac{m-1}{r}}$是 $B_{2,r+1}$-自由的，并且简单计算可知，当 $m \geqslant r^2$ 且 $m \equiv 1$ (模 r) 时，$\lambda(K^+_{r,\frac{m-1}{r}}) > \lambda(K^+_{1,m-1})$。我们认为以下猜想成立。

猜想 3.8. 设 $r \geqslant 1$ 和 m 充分大。若 G 是一个边数为 m 的 $B_{2,r+1}$-自由非二分图，则 $\lambda(G) \leqslant \rho(m, r)$，其中 $\rho(m, r)$ 是 $x^3 - x^2 - (m-1)x + m - 2r - 1 = 0$. 的最大零点。当且仅当 $m \equiv 1$ (模 r) 且 $G \cong K^+_{r,\frac{m-1}{r}}$ 时，等号成立。

对于长度为 5 和 6 的圈，Zhai、Lin 和 Shu [44]证明了以下结果。

定理 3.9 (Zhai、Lin 和 Shu [44], 2021)。 **</style}若** (m, C_5) 满足 $m \geqslant 8$，或 $G \in \mathcal{G}(m, C_6)$满足 $m \geqslant 22$，则 $\lambda(G) \leqslant \frac{1+\sqrt{4m-3}}{2}$。等号成立当且仅当 $G \cong K_2 \vee \frac{m-1}{2}K_1$.

基于定理 3.9，Zhai、Lin 和 Shu [44]提出了以下猜想。

猜想 3.10 (Zhai、Lin 和 Shu [44], 2021)。 **</style}设 为一个固定整数。若** $(m, C_{2k+1}) \cup \mathcal{G}(m, C_{2k+2})$ 且 m 足够大，则 $\lambda(G) \leqslant \frac{k-1+\sqrt{4m-k^2+1}}{2}$. 等号成立当且仅当 $G \cong K_k \vee (\frac{m}{k} - \frac{k-1}{2})K_1$。

回忆一下，对于 $q \geqslant p \geqslant 2$，$\theta$ 图 $\theta_{1,\ p,\ q}$ 是通过连接两个不同的顶点，并用三条内部不相交、长度分别为 1，p，q 的路径而得到的。注意，$\theta_{1,\ 2,\ 2}$是一个有 4 个顶点的书图。定理 3.7 告诉我们，若 $m \geqslant 12^4$ 且 $G \in \mathcal{G}(m,\ \theta_{1,\ 2,\ 2})$，则 $\lambda(G) \leqslant \sqrt{m}$.等号成立当且仅当 G 是一个完全二部图。不久之后，Y.T. Li 提出了一个比猜想 3.10 更强的猜想（另见 [30]），如下所示：

猜想 3.11 ([30])。 令 $k \geqslant 2$为一个固定整数。若 $G \in \mathcal{G}(m, \theta_{1,\ 2,\ 2k-1}) \cup \mathcal{G}(m, \theta_{1,\ 2,\ 2k})$ 且 m充分大，则 $\lambda(G) \leqslant \frac{k-1+\sqrt{4m-k^2+1}}{2}$. 当且仅当 $G \cong K_k \vee (\frac{m}{k} - \frac{k-1}{2})K_1$时等号成立。

注意，$\mathcal{G}(m,\ C_{2k+1}) \cup \mathcal{G}(m,\ C_{2k+2}) \subseteq \mathcal{G}(m,\ \theta_{1,\ 2,\ 2k-1}) \cup \mathcal{G}(m,\ \theta_{1,\ 2,\ 2k})$。如果猜想 3.11 成立，则猜想 3.11 蕴含猜想 3.10。

作为定理 3.9 的推广，Sun、Li 和 Wei [40] 通过证明以下结果，解决了 $k = 2$ 的猜想 3.11。

定理 3.12 (Sun、Li 和 Wei [40], 2023)。设 G 是 $\mathcal{G}(m,\theta_{1,2,r})$中的一个图。则有以下结论。

(i) 若 $r = 3$ 且 $m \geqslant 8$，则 $\lambda(G) \leqslant \frac{1+\sqrt{4m-3}}{2}$，且当且仅当 $G \cong K_2 \vee {}_2^{m-1}K_1$.时等号成立

(ii) 若 $r = 4$ 且 $m \geqslant 22$，则 $\lambda(G) \leqslant \frac{1+\sqrt{4m-3}}{2}$，且当且仅当 $G \cong K_2 \vee {}_2^{m-1}K_1$.时等号成立

Lu、Lu 和 Li [32] 研究了 $k = 3$情形下的猜想 3.11。

定理 3.13 (Lu、Lu 和 Li [32], 2024)。设 G 是 $\mathcal{G}(m,\theta_{1,2,5})$中的一个图。若 $m \geqslant 38$，则$\lambda(G) \leqslant 1 + \sqrt{m-2}$. 当且仅当 $G \cong K_3 \vee {}_3^{m-3}K_1$时等号成立。

Li、Zhai 和 Shu [18] 完全解决了猜想 3.11（针对 $k \geqslant 3$ ）。

定理 3.14 (Li、Zhai 和 Shu [18], 2024)。设 $k \geqslant 3$ 和 $m \geqslant 4(k^2+3k+1)^2$。若 $G \in \mathcal{G}(m,\theta_{1,2,2k-1}) \cup \mathcal{G}(m,\theta_{1,2,2k})$，则 $\lambda(G) \leqslant \frac{k-1+\sqrt{4m-k^2+1}}{2}$. 当且仅当 $G \cong K_k \vee ({}_k^m - {}_2^{k-1})K_1$时等号成立。

因此，猜想 3.10 也得到了解决。

此外，M_{2k+2}和 P_{2k+2}是$\theta_{1,2,2k}$,的子图，其中 M_{2k+2}是由 $k+1$条孤立边组成的图。根据定理 3.14，Li、Zhai 和 Shu [18] 得到了以下两个结果。

定理 3.15 (Li、Zhai 和 Shu [18], 2024)。设 $k \geqslant 3$ 和 $m \geqslant 4(k^2+3k+1)^2$。若 $G \in \mathcal{G}(m, M_{2k+2})$，则 $\lambda(G) \leqslant \frac{k-1+\sqrt{4m-k^2+1}}{2}$。等号成立当且仅当$G \cong K_k \vee ({}_k^m - {}_2^{k-1})K_1$。

定理 3.16 (Li、Zhai 和 Shu [18], 2024)。设 $k \geqslant 3$ 和 $m \geqslant 4(k^2+3k+1)^2$。若 $G \in \mathcal{G}(m, P_{2k+2})$，则 $\lambda(G) \leqslant \frac{k-1+\sqrt{4m-k^2+1}}{2}$。等号成立当且仅当$G \cong K_k \vee ({}_k^m - {}_2^{k-1})K_1$。

Wang 和 Wang [41] 研究了奇数阶路径的 问题 2。

定理 3.17 (Wang 和 Wang [41], 2025)。设 $k \geqslant 4$ 和 $m \geqslant 4(k+1)^4$。若 $G \in \mathcal{G}(m, P_{2k+1})$，则 $\lambda(G) \leqslant \frac{k-2+\sqrt{4m-k^2+2k}}{2}$. 当且仅当 $G \cong K_{k-1} \vee ({}_{k-1}^m - {}_2^{k-2})K_1$时等号成立。

注意，定理 3.9 和定理 3.12 中的极值图仅在 m 为奇数时才有定义。令$S_{n,k}^t$为从 $K_k \vee (n-t-k)K_1$ 得到的图：在 $K_k \vee (n-t-k)K_1$的一个最大度顶点上附加 t 个悬挂顶点；令 S_n^k为通过在其独立集中添加 k条互不相交的边，从 $K_{1,n-1}$得到的图。Min、Lou 和 Huang [33] 通过证明以下结果扩展了定理 3.9。

定理 3.18 (Min、Lou 和 Huang [33], 2022)。令 $\tilde{p}(m)$ 为 $x^4 - mx^2 - (m-2)x + \binom{m}{2} - 1) = 0$ 的最大根,且 G 为一个边数为偶数 m 且没有孤立顶点的图。若 G 是一个 C_5-自由图，且满足 $m \geqslant 14$ ；或是一个 C_6-自由图，且满足 $m \geqslant 74$，则 $\lambda(G) \leqslant \tilde{p}(m)$，当且仅当$G \cong S^1_{\frac{m}{2}+2,2}$时等号成立。

随后，Sun、Li 和 Wei [40] 采用了一种统一方法（不论 m的奇偶性），确定了在 $\mathfrak{G}(m,C_5):=\mathcal{G}(m,C_5)\backslash\{K_2\vee\frac{m-1}{2}K_1\}$或 $\mathfrak{G}(m,C_6):=\mathcal{G}(m,C_6)\setminus\{K_2\vee\frac{m-1}{2}K_1\}$ 范围内，具有最大谱半径的所有图，其中 $m\geqslant 22$。

令 $\rho_1(m)$ 为 $\psi_1(x)$ 的最大零点，其中

$$\psi_1(x)=\begin{cases}x^4-mx^2-(m-2)x+\frac{m}{2}-1, & \text{if } m \text{ is even;}\\ x^4-mx^2-(m-3)x+m-3, & \text{if } m \text{ is odd,}\end{cases}$$

并令 $\rho_2(m)$ 为 $\psi_2(x)$ 的最大零点，其中

$$\psi_2(x)=\begin{cases}x^3-2x^2-(m-3)x+m-6, & \text{if } m \text{ is even and } 22\leqslant m\leqslant 72;\\ x^4-mx^2-(m-2)x+\frac{m}{2}-1, & \text{if } m \text{ is even and } m\geqslant 74;\\ x^5-x^4-(m-1)x^3-2x^2+\frac{3m-17}{2}x-\frac{m-7}{2}, & \text{if } m \text{ is odd and } 23\leqslant m\leqslant 71;\\ x^4-mx^2-(m-3)x+m-3, & \text{if } m \text{ is odd and } m\geqslant 73.\end{cases}$$

下面的两个结果分别确定了在$\mathfrak{G}(m,C_5)$ 和 $\mathfrak{G}(m,C_6)$ 中具有最大谱半径的所有图。

定理 3.19 (Sun、Li 和 Wei [40], 2023)。设 G 属于 $\mathfrak{G}(m,C_5)$ 且满足 $m\geqslant 22$。则 $\lambda(G)\leqslant\rho_1(m)$。当且仅当 $G\cong S^1_{\frac{m+4}{2},2}$（若 m 为偶数）以及 $G\cong S^2_{\frac{m+5}{2},2}$（若 m 为奇数）时等号成立。

定理 3.20 (Sun、Li 和 Wei [40], 2023)。设 G 属于 $\mathfrak{G}(m,C_6)$ 且满足 $m\geqslant 22$。则 $\lambda(G)\leqslant\rho_2(m)$。当且仅当

$$G\cong\begin{cases}K_1\vee S^1_{\frac{m}{2}}, & \textit{if } m \textit{ is even and } 22\leqslant m\leqslant 72;\\ S^1_{\frac{m+4}{2},2}, & \textit{if } m \textit{ is even and } m\geqslant 74;\\ K_1\vee(S^1_{\frac{m-1}{2}}\cup K_1), & \textit{if } m \textit{ is odd and } 23\leqslant m\leqslant 71;\\ S^2_{\frac{m+5}{2},2}, & \textit{if } m \textit{ is odd and } m\geqslant 73.\end{cases}$$

Fang、You [8] 和 Liu、Wang [29]通过证明以下结果推广了定理 3.12、3.18、3.19 和 3.20。

定理 3.21 (Fang 和 You [8], 2023)。设 G 属于 $\mathcal{G}(m,\theta_{1,2,3})\setminus\{K_2\vee\frac{m-1}{2}K_1\}$，且满足 $m\geqslant 22$。则 $\lambda(G)\leqslant\rho_1(m)$。等号成立当且仅当 $G\cong S^1_{\frac{m+4}{2},2}$（若 m 为偶数）且 $G\cong S^2_{\frac{m+5}{2},2}$（若 m 为奇数）。

定理 3.22 (Liu 和 Wang [29], 2024)。设 G 属于 $\mathcal{G}(m,\theta_{1,2,4})$ 且 $m\geqslant 74$为偶数。则$\lambda(G)\leqslant\rho_1(m)$。等号成立当且仅当 $G\cong S^1_{\frac{m+4}{2},2}$。

值得注意的是，定理 3.14 中的极值图 $K_k\vee(\frac{m}{k}-\frac{k-1}{2})K_1$ 仅当 $m+\frac{k(k+1)}{2}\equiv 0\pmod k$ 时才有定义。自然会引出以下问题。

问题 7 (Liu 等人 [27], 2026)。对于 $k\geqslant 3$，当 $m+\frac{k(k+1)}{2}\equiv l\pmod k$ 且 $1\leqslant l\leqslant k-1$ 时，$\mathcal{G}(m,\theta_{1,2,2k-1})\cup\mathcal{G}(m,\theta_{1,2,2k})$ 中哪些图的谱半径最大？

令 $S^{1,l}_{n,k}:=K_l\vee((K_{k-l}\vee(n-k-1)K_1)\cup K_1)$. 通过结合 k-核分析与谱技术，Liu 等人 [27]解决了问题 7，如下所示。

定理 *3.23*（*Liu* 等人 [27], 2026）。假设 $1 \leqslant l < k$ 和 $m \geqslant 144k^4$ 满足 $k \geqslant 3$。若$G \in \mathcal{G}(m, \theta_{1,2,2k-1}) \cup \mathcal{G}(m, \theta_{1,2,2k})$，则对于 $m + k(k+1)$，有 $\lambda(G) \leqslant \lambda(S^1_{l, \frac{m-l}{k} + \frac{k+3}{2}, k})$ $\equiv l$ (模 k)。当且仅当 $G \cong S^1_{l, \frac{m-l}{k} + \frac{k+3}{2}, k}$ 时，等号成立。

因此，Liu 等人 [27]推导出了以下结果。

定理 *3.24*（*Liu* 等人 [27], 2026）。设 $1 \leqslant l < k$ 且 $m \geqslant 144k^4$ 满足 $k \geqslant 3$。若$G \in \mathcal{G}(m, C_{2k+1}) \cup \mathcal{G}(m, C_{2k+2})$，则 $\lambda(G) \leqslant \lambda(S^1_{l, \frac{m-l}{k} + \frac{k+3}{2}, k})$，其中 $m + k(k+1) \equiv l$ (模 k)。等号成立当且仅当 $G \cong S^1_{l, \frac{m-l}{k} + \frac{k+3}{2}, k}$。

类似于定理 3.15 和定理 3.16，我们可以从定理 3.21、3.22 和 3.23 推导出以下两个结果。

推论 3.25。设 $1 \leqslant l < k$ 且 $m \geqslant 144k^4$ 满足 $k \geqslant 2$。若 $G \in \mathcal{G}(m, M_{2k+2})$，则$\lambda(G) \leqslant \lambda(S^1_{l, \frac{m-l}{k} + \frac{k+3}{2}, k})$其中 $m + k(k+1) \equiv l$(模 k)。等号成立当且仅当 $G \cong S^1_{l, \frac{m-l}{k} + \frac{k+3}{2}, k}$。

推论 3.26. 假设 $1 \leqslant l < k$ 和 $m \geqslant 144k^4$ 满足 $k \geqslant 2$。若 $G \in \mathcal{G}(m, P_{2k+2})$，则$\lambda(G) \leqslant \lambda(S^1_{l, \frac{m-l}{k} + \frac{k+3}{2}, k})$对于 $m + k(k+1) \equiv l$(模 k)成立。当且仅当 $G \cong S^1_{l, \frac{m-l}{k} + \frac{k+3}{2}, k}$时，等号成立。

受定理 3.14 启发，李、Zhao 和 Zou [17]提出了以下问题。

问题 8 (李、Zhao 和 Zou [17], 2025)。在$\mathcal{G}(m, \theta_{1,p,q})$ 中，图的最大谱半径是多少（对于 $q \geqslant p \geqslant 3$）？

Gao 和李 [10] 解决了关于 $q = p = 3$ 的问题 8。

定理 3.27 (Gao 和李 [10], 2025)。设 $G \in \mathcal{G}(m, \theta_{1,3,3})$ 满足 $m \geqslant 43.$，则 $\lambda(G) \leqslant \frac{1+\sqrt{4m-3}}{2}$，且当且仅当 $G \cong K_2 \vee \frac{m-1}{2} K_1.$ 时等号成立

对于 $k \geqslant 2$，友谊图 $F_{k,\ 3}$ 定义为 $F_{k,\ 3} = K_1 \vee kK_2.$ Li、Lu和Peng [25] 提出了如下猜想，针对不含$F_{k,\ 3}$的图。

猜想 3.28（Li、Lu和Peng [25], 2023）。设定 $k \geqslant 2$，且 m 足够大。如果$G \in \mathcal{G}$（m, $F_{k,\ 3}$），则 λ（G） $\leqslant \frac{k-1+\sqrt{4m-k^2+1}}{2}$.等号成立当且仅当$G \cong K_k \vee$（$\frac{m}{k} - \frac{k-1}{2}$）$K_1$。

Li、Lu和Peng [25] 证明了猜想 3.28 对于 $k = 2$.成立

定理3.29（Li、Lu和Peng [25], 2023）。如果 $G \in \mathcal{G}$（m, $F_{2,\ 3}$） 且 $m \geqslant 8$，则 λ（G）$\leqslant \frac{1+\sqrt{4m-3}}{2}$.等号成立当且仅当 $G \cong K_2 \vee \frac{m-1}{2} K_1$。

Yu、Li和Peng [42] 解决了 $k = 3.$ 的猜想 3.28

定理3.30 (Yu、Li和Peng [42], 2025)。若 $G \in \mathcal{G}(m, F_{3,3})$ 满足 $m \geqslant 33$，则 $\lambda(G) \leqslant 1 + \sqrt{m-2}.$ 当且仅当 $G \cong K_3 \vee \frac{m-3}{3} K_1$ 时等号成立。

将 $F_t = K_1 \vee P_{t-1}$ 定义为具有 t 个顶点的扇图 。值得注意的是， F_3 是一个三角形，而 F_4 是一个具有4个顶点的书图。关于具有给定边数 m 的 $F_t(3 \leqslant t \leqslant 4)$-自由图的谱极值问题，Nosal [38], Nikiforov [35, 37] 以及 Li、Liu 和 Zhang [20], 进行了研究，参见定理2.1、2.2、3.6和3.7。Zhang和Wang [46] 提出了以下问题。

问题9 (Zhang和Wang [46])。 在所有边数为 m 的 F_t-自由图中，当 $t \geqslant 5$时，最大谱半径是多少？相应的极值图是什么？

Zhang、Wang [46] 和余、李、Peng [42] 分别解决了 $t = 5$ 的问题9。

定理3.31 (余、李、Peng [42] 和 Zhang、Wang [46])。 若 $G \in \mathcal{G}(m, F_5)$ 且满足 $m \geqslant 8$，则$\lambda(G) \leqslant \frac{1+\sqrt{4m-3}}{2}$. 当且仅当 $G \cong K_2 \vee {}^{m-1}_{2} K_1$ 时等号成立。

Gao 和李 [9] 解决了 $t = 6$ 的问题9。

定理3.32 (Gao 和李 [9], 2026)。 若 $G \in \mathcal{G}(m, F_6)$ 且满足 $m \geqslant 88$，则 $\lambda(G) \leqslant \frac{1+\sqrt{4m-3}}{2}$。当且仅当 $G \cong K_2 \vee {}^{m-1}_{2} K_1$ 时等号成立。

Zhang和Wang [47] 解决了 $t = 7$ 的问题9。

定理3.33 (Zhang和Wang [47], 2025)。 如果 $G \in \mathcal{G}(m, F_7)$ 满足 $m \geqslant 33$，则 $\lambda(G) \leqslant 1 + \sqrt{m-2}$。等号成立当且仅当 $G \cong K_3 \vee {}^{m-3}_{3} K_1$。

Yu、Li和Peng [42] 对问题9提出了如下猜想。

猜想 3.34 (Yu、Li和Peng [42], 2025)。 令 $k \geqslant 2$ 固定，且令 m 充分大。如果$G \in \mathcal{G}(m, F_{2k+1})$ 或 $G \in \mathcal{G}(m, F_{2k+2})$，则 $\lambda(G) \leqslant \frac{k-1+\sqrt{4m-k^2+1}}{2}$. 等号成立当且仅当$G \cong K_k \vee ({}^{m}_{k} - {}^{k-1}_{2})K_1$。

最近，Li、Zhao 和 Zou [17] 完全解决了关于 $k \geqslant 3$ 的猜想 3.34。

定理 3.35 (Li、Zhao 和 Zou [17], 2025)。 设 $k \geqslant 3$ 且 $m \geqslant \frac{9}{4}k^6 + 6k^5 + 46k^4 + 56k^3 + 196k^2$。若 $G \in \mathcal{G}(m, F_{2k+2})$，则 $\lambda(G) \leqslant \frac{k-1+\sqrt{4m-k^2+1}}{2}$. 当且仅当 $G \cong K_k \vee ({}^{m}_{k} - {}^{k-1}_{2})K_1$ 时等号成立。

注意， $\mathcal{G}(m, F_{2k+1}) \subseteq \mathcal{G}(m, F_{2k+2})$，且 $K_k \vee (\frac{m}{k} - \frac{k-1}{2})K_1 \in \mathcal{G}(m, F_{2k+1})$。因此，猜想 3.34 可直接由定理 3.32 和 3.35 得出。

可以看出，对于 $q \geqslant p \geqslant 3, s \geqslant r \geqslant 3, p + q = 2k + 1$ 和 $r + s = 2k + 2$, $\mathcal{G}(m, \theta_{1,p,q}) \cup \mathcal{G}(m, \theta_{1,s,t}) \subseteq \mathcal{G}(m, F_{2k+2})$，且在 $K_k \vee ({}^{m}_{k} - {}^{k-1}_{2})K_1$. 中不存在 $\theta_{1,p,q}$ 或 $\theta_{1,s,t}$。根据定理 3.35，Li、Zhao 和 Zou [17]得到了以下结果。

定理 3.36 (Li、Zhao 和 Zou [17], 2025)。 设 $k \geqslant 3$和 $m \geqslant \frac{9}{4}k^6 + 6k^5 + 46k^4 + 56k^3 + 196k^2$。若 $G \in \mathcal{G}(m, \theta_{1,p,q})$ 或 $G \in \mathcal{G}(m, \theta_{1,r,s})$ 满足 $q \geqslant p \geqslant 3, s \geqslant r \geqslant 3, p + q = 2k + 1$ 和 $r + s = 2k + 2$, 则 $\lambda(G) \leqslant \frac{k-1+\sqrt{4m-k^2+1}}{2}$. 当且仅当 $G \cong K_k \vee ({}^{m}_{k} - {}^{k-1}_{2})K_1$时等号成立。

定理 3.36 与定理 3.27 一起彻底解决了问题 8。受定理 3.36 的启发，Li、Zhao 和 Zou [17]提出了以下问题。

问题 10 (Li、Zhao 和 Zou [17], 2025)。 如何刻画 $\mathcal{G}(m, \theta_{r,p,q})$ 中具有最大谱半径的图？

注意到 $\theta_{2,\,2,\,2} \cong K_{2,\,3}$。Zhai、Lin 和 Shu [44] 解决了 $r = p = q = 2$ 的问题 10（见定理 3.3）。最近，Gao 和李 [11] 解决了 $r = 2$, $p = 2$ 和 $q = 3$ 的问题 10。

定理 3.37 (Gao 和 李 [11], 2025)。 设 $G \in \mathcal{G}(m, \theta_{2,2,3})$ 满足 $m \geqslant 57$，则 $\lambda(G) \leqslant \frac{1+\sqrt{4m-3}}{2}$. 当且仅当 $G \cong K_2 \vee {}^{m-1}_{2} K_1$ 时等号成立。

还可以看出 $\mathcal{G}(m,\ F_{k,\ 3}) \subseteq \mathcal{G}(m,\ F_{2k+2})$，且 $K_k \vee (\binom{m}{k} - \frac{k-1}{2})$ 中不存在 $F_{k,\ 3}$。根据定理 3.35，Li、Zhao 和 Zou [17] 得到了以下结果。

定理 3.38 (Li、Zhao 和 Zou [17], 2025)。设 $k \geqslant 3$ 和 $m \geqslant \frac{9}{4}k^6 + 6k^5 + 46k^4 + 56k^3 + 196k^2$。若 $G \in \mathcal{G}(m, F_{k,3})$，则 $\lambda(G) \leqslant \frac{k-1+\sqrt{4m-k^2+1}}{2}$，当且仅当 $G \cong K_k \vee (\binom{m}{k} - \frac{k-1}{2})K_1$ 时等号成立。

结合定理 3.29 和 3.38，猜想 3.28 得到了证实。

注意到，定理 3.27、3.29、3.31 和 3.32 中的界仅在 m 为奇数时可取到；而定理 3.35、3.36 和 3.38 中的界仅在 $m + \binom{k}{(k+1)/2} \equiv 0$ (模 k)。受定理 3.23 的启发，我们可以提出以下三个猜想。

猜想 *3.39.* 令 $k \geqslant 2$. 存在一个 m_0，使得对所有 $m \geqslant m_0$，以及对所有 $G \in \mathcal{G}(m,\theta_{1,p,q}) \cup \mathcal{G}(m,\theta_{1,r,s})$，其中 $q \geqslant p \geqslant 3$、$s \geqslant r \geqslant 3$、$p+q = 2k+1$ 且 $r+s = 2k+2$. 若 $m + \binom{k}{(k+1)/2} \equiv l$ (模 k) 且 $1 \leqslant l \leqslant k-1$，则 $\lambda(G) \leqslant \lambda(S^1, \frac{m-l}{k} + \frac{k+3}{2}, k)$。等号成立当且仅当 $G \cong S^1 \vee (\frac{m-l}{k} + \frac{k+3}{2}) \vee k$。

猜想 3.40。令 $k \geqslant 2$. 存在一个 m_0，使得对所有 $m \geqslant m_0$，以及对所有 $G \in \mathcal{G}(m, F_{k,3})$。若 $m + \binom{k}{(k+1)/2} \equiv l$ (模 k) 且 $1 \leqslant l \leqslant k-1$，则 $\lambda(G) \leqslant \lambda(S^1 \vee (\frac{m-l}{k} + \frac{k+3}{2}) \vee k)$。等号成立当且仅当 $G \cong S^1 \vee (\frac{m-l}{k} + \frac{k+3}{2}) \vee k$。

猜想 3.41. 设 $k \geqslant 2$. 存在一个 m_0，使得对所有 $m \geqslant m_0$ 以及所有 $G \in \mathcal{G}(m, F_{2k+2})$，若 $m + \binom{k}{(k+1)/2} \equiv l$ (模 k) 且 $1 \leqslant l \leqslant k-1$，则 $\lambda(G) \leqslant \lambda(S^1, \frac{m-l}{k} + \frac{k+3}{2}, k)$。当且仅当 $G \cong S^1, \frac{m-l}{k} + \frac{k+3}{2}, k$ 时，等号成立。

Chen 和 Yuan [5] 得到了以下结果。

定理 3.42 (Chen 和 Yuan [5], 2025)。若 $m \geqslant 92$ 是偶数，且 $G \in \mathcal{G}(m, F_5)$，则 $\lambda(G) \leqslant \lambda(S^1, \frac{m+4}{2}, 2)$。当且仅当 $G \cong S^1, \frac{m+4}{2}, 2$ 时，等号成立。

注意，$F_{2,\ 3}$ 是 F_5 的子图，定理 3.42 推出 $k = 2$ 的猜想 3.40。Chen 等人 [6] 独立地确认了 $k = 2$ 的猜想 3.40，如下所示。

定理 3.43 (Chen 等人 [6], 2025)。若 $m \geqslant 16$ 为偶数，且 $G \in \mathcal{G}(m, F_{2,\ 3})$，则 $\lambda(G) \leqslant \lambda(S^1, \frac{m+4}{2}, 2)$。当且仅当 $G \cong S^1, \frac{m+4}{2}, 2$ 时，等号成立。

顶点数为 k 的轮图定义为 $W_k = K_1 \vee C_{k-1}$。若轮图的阶为奇数（分别为偶数），则称其为奇轮图（分别为偶轮图）。Yu、Li和Peng [42] 针对奇轮图提出了以下猜想。

猜想 3.44. 令 $k \geqslant 2$ 为固定值，且 m 充分大，G 是一个有 m 条边的 W_{2k+1}-自由图。

(i) 若 $m + \binom{k}{(k+1)/2} \equiv 0 \pmod{k}$，则 $\lambda(G) \leq \frac{k-1+\sqrt{4m-k^2+1}}{2}$，当且仅当 $G = K_k \vee \left(\binom{m}{k} - \frac{k-1}{2}\right) K_1$ 时等号成立。（*Lu*、李、*Peng* [42], 2025）

(ii) 若 $m + \binom{k}{(k+1)/2} \equiv l \pmod{k}$ 且 $1 \leqslant l \leqslant k-1$，则 $\lambda(G) \leqslant \lambda(S^1, \frac{m-l}{k} + \frac{k+3}{2}, k)$，当且仅当 $G \cong S^1, \frac{m-l}{k} + \frac{k+3}{2}, k$ 时等号成立。

猜想 3.44 仍未解决。Li、Liu 和 Zhai [14] 得到了以下结果。

定理 3.45 (Li、Liu 和 Zhai [14], 2025)。设 G 是一个边数为 $m \geqslant 25$ 且没有孤立顶点的图。如果 $\lambda(G) \geqslant \frac{1+\sqrt{4m-5}}{2}$，那么 G 包含一个轮图，除非 G 同构于 $K_2 \vee \frac{m-1}{2} K_1$ 或 $S^1_{\frac{m+4}{2}}$，2。

M受定理 3.45 启发，我们可以提出一个比猜想 3.44 弱一些的猜想。

猜想 3.46. 设 $k \geqslant 2$ 为固定值，且 m 足够大。若 $G \in \mathcal{G}(m, \{W_t : t \geqslant 2k+1\})$，则 $\lambda(G) \leqslant \frac{k-1+\sqrt{4m-k^2+1}}{2}$。当且仅当 $G \cong K_k \vee (\binom{m}{k} - \frac{k-1}{2}) K_1$ 时等号成立。

若图 F 是色临界的，且满足 $\chi(F) = 3$ 或为二分图，则称其为近似二部 图。

定义 3.47. 对于近似二部图 F，令 $\mathcal{A}_F$ 为由 $V(F) \setminus I$ 诱导的子图构成的族，其中 I 遍历 F 的极大独立集。令 $\mathcal{M}_F$ 为 $\mathcal{A}_F$-自由图构成的族。

最近，Li、Liu 和 Zhang [22] 获得了以下漂亮的结果。

定理 3.48 (Li、Liu 和 Zhang [22], 2025)。 对于任意不是星图的近似二部图 F，若 m 足够大，且 G 在所有属于 $\mathcal{G}(m, F)$ 的图中取得最大谱半径，则以下结论之一成立：

(i) G 是完全二部图。(ii) G 具有一个顶点划分 $A \cup C$，使得 $|A| < |F|$ 为非空图，$G[A]$ 是 $\mathcal{M}_F$ 中的独立集，且 C 中至多有一个顶点不与 A 中的所有顶点相邻。

作为定理 3.48 的推论，Li、Liu 和 Zhang [22] 解决了大量近似二部图的 问题 2（见 [22, 表 1]）。特别地，Li、Liu 和 Zhang [22] 采用了与 Liu 等人 [27], 完全不同的方法解决了问题 7, 并完全解决了问题 10 和猜想 3.39。

平面图 G是指可以绘制在平面上的图，其中 G的边仅在端点处相交。若图 G 在平面上的绘图满足 $\mathbb{R}^2$ 中每条边 G 至多与 k 条其他边交叉，则称其为 k-平面图。Fan、Kang 和 Wu [7] 确定了平面图的最大谱半径，并刻画了相应的极值图。

定理 3.49 (Fan、Kang 和 Wu [7], 2026)。 设 G 是一个有 m 条边的平面图。若 m 充分大，则对于奇数 m，$\lambda(G) \leqslant \lambda(K_2 \vee \frac{m-1}{2} K_1)$，等号成立当且仅当 $G \cong K_2 \vee \frac{m-1}{2} K_1$；对于偶数 m，$\lambda(G) \leqslant \lambda(S^1_{\frac{m+4}{2}, 2})$，等号成立当且仅当 $G \cong S^1_{\frac{m+4}{2}, 2}$。

众所周知，若 G是平面图，则 G是 $K_{3,\ 3}$-自由的；并且存在一个 t_0，使得任意 k-平面图 G 对于每个 $t \geqslant t_0$ 都是 $K_{3,\ t}$-自由的（见 [13]）。作为定理 3.48 的推论，Li、Liu 和 Zhang [22]还证明了定理 3.49，并给出了以下结果。

定理 3.50 (Li、Liu 和 Zhang [22], 2026). 设 G 是一张有 m 条边的 k-平面图。假设 m 足够大，则当 m 为奇数时，$\lambda(G) \leqslant \lambda(K_2 \vee \frac{m-1}{2} K_1)$，当且仅当 $G \cong K_2 \vee \frac{m-1}{2} K_1$ 时等号成立；当 m 为偶数时，$\lambda(G) \leqslant \lambda(S^1_{\frac{m+4}{2}, 2})$，当且仅当 $G \cong S^1_{\frac{m+4}{2}, 2}$ 时等号成立。

Nikiforov [34, 35] 解决了完全图的 问题 2。

定理4.1 (Nikiforov [34, 35])。 对于 $r \geqslant 3$, 令 $G \in \mathcal{G}(m, K_{r+1})$。则有 $\lambda(G) \leqslant \sqrt{2m(r-1)/r}$. 当且仅当 G 是一个完全正则 r部图时等号成立。

Bollob´as 和 Nikiforov [2]进一步提出了以下猜想。

猜想4.2 (Bollob´as 和 Nikiforov [2])。 设 G 是一个 K_{r+1}-自由图，边数为 $m \geqslant r+1$. 则

$$\lambda_1^2(G) + \lambda_2^2(G) \leqslant 2m(1 - \frac{1}{r}).$$

Lin、Ning 和 Wu [26] 解决了 $r = 2$ 情形下的猜想4.2（见定理2.3），而对于 $r \geqslant 3$.，猜想4.2仍未解决

注意，在 $\mathcal{G}(m, K_{r+1})$ 中具有最大谱半径的图是 r部图。Lou、Lu 和 Zhai [31] 提出了以下问题。

问题11 (Lou、Lu 和 Zhai [31], 2025)。 对于每个 $r \geqslant 3$ 以及每个正整数 $m = ar + b$，其中 a 是非负整数且 $1 \leqslant b \leqslant r$，在所有具有 m 条边的非r部图 K_{r+1}自由图中，谱半径最大的极值图是什么?

对于 $k \geqslant 1$, $r \geqslant 3$，广义书图定义为 $B_{r,\ k+1} = K_r \vee (k+1)K_1$. 显然，$B_{r,\ k+1}$ 包含 $k+1$ 个 K_{r+1} 的副本。李、Liu 和 Feng [23] 提出了一个比定理4.1更一般的猜想。

猜想4.3 (李、Liu 和 Feng [23], 2022)。 对于 $k \geqslant 1$、$r \geqslant 3$ 且充分大的 $m.$，若$G \in \mathcal{G}(m, B_{r,\ k+1})$，则 $\lambda(G) \leqslant \sqrt{2m(r-1)/r}$. 当且仅当 G 是一个完全正则r部图时，等号成立。

Li、Liu 和 Zhang [20] 通过证明以下结果解决了猜想4.3。

定理4.4 (Li、Liu 和 Zhang [20], 2025)。 每个具有 m 条边的图 G，若满足 $\lambda^2(G) > (1 - \frac{1}{r}) \cdot 2m$，则包含 B_r 的一个副本，$_{k+1}$ 且满足 $\overline{k} = \Omega_r(\sqrt{m})$。此外，存在最大广义书图规模为 $O_r(\sqrt{m})$ 的此类图。

对于偶轮图，余、李和Peng [42] 提出了以下猜想。

猜想4.5 (余、李和Peng [42], 2025)。 设 $k \geqslant 2$ 固定且 m 足够大。若$G \in \mathcal{G}(m, W_{2k+2})$，则 $\lambda(G) \leqslant \sqrt{4m/3}$. 当且仅当 G 是一个正则完全3部图时，等号成立。

最近，Li、Liu 和 Zhang [21] 给出了 Erd¨os-Stone-Simonovits 定理的边谱版本，并对任意图 F 渐近地解决了问题 2。

定理 4.6 (Li、Liu 和 Zhang [21], 2025)。 若 $\chi(F) = r + 1 \geqslant 3$ 且 $G \in \mathcal{G}(m, F)$，则

$$\lambda^2(G) \leqslant (1 - \frac{1}{r} + o(1)) \cdot 2m.$$

注意， K_{r+1}、$B_{r,\ k+1}$ 和 W_{2k+2} 都是色临界图。受定理4.1、猜想4.3和4.5的启发，余和李 [43] 提出了以下问题。

问题12。 给定一个色临界图 F，其具有 $\chi(F) = r+1$，确定在所有具有 m 条边的 F-自由图中，哪些图达到最大谱半径。

最近，Li、Liu 和 Zhang [22] 通过证明以下优美结果，解决了问题12。

定理4.7 (Li、Liu 和 Zhang [22], 2025)。 设 F是一个色临界图，满足 $\chi(F) = r+1 \geqslant 4$。对于充分大的 m，若 $G \in \mathcal{G}(m, F)$，则

$$\lambda_1^2(G) \leqslant (1 - \frac{1}{r})2m.$$

等号成立当且仅当 G 是一个正则完全 r部图。

由此，猜想4.3和4.5得到了彻底解决。

注意，对于一个固定的色临界图 F，若满足 $\chi(F) = r+1 \geqslant 4$，则在 $\mathcal{G}(m, F)$中，最大谱半径的图是 r部图。受问题11启发，自然会考虑以下问题。

问题13。 设 F 是一个色临界图，满足 $\chi(F) = r+1 \geqslant 4$。对于所有充分大的 m，在所有具有 m 条边的非r部 F-自由图中，谱半径最大的极值图是什么？

问题14。 已解决完全图、广义书图和偶轮图中的问题*13*。

利益冲突声明

作者声明，他们并无已知的可能影响本文所报告工作的竞争性财务利益或个人关系。

致谢

Minjie Zhang 获得了中国教育部非线性分析与应用重点实验室开放研究基金（华中师范大学）资助，项目编号NAA2025ORG010。

数据可用性

本文所述研究未使用任何数据。

参考文献

[1] B. Bollob´as, 《现代图论》，施普林格科学与商业媒体，1998 年。[2] B. Bollob´as，V. Nikiforov, 团与谱半径，《组合理论杂志 B 辑》97 (5) (2007) 859–865。[3] R.A. Brualdi，A.J. Hoffman，关于 (0,1) 矩阵的谱半径，《线性代数及其应用》65 (1985) 133–146。[4] R.A. Brualdi，E.S. Solheid，关于互补零一无环矩阵的谱半径，SIAM《代数离散方法杂志》7 (2) (1986) 265–272。[5] F. Chen，X.Y. Yuan, 宝石图的 Brualdi-Hoffman-Tur´an 问题，《离散数学》348 (10) (2025) 114528。[6] Y. Chen，S.C. Li, L.Y. Zhang，M.J. Zhang，重新探讨给定边数的无 F_2 图的谱极值，《离散应用数学》375 (2025) 294–307。

[7] L.D. Fan，L.Y. Kang，J.D. Wu，关于固定边数平面图的谱半径，《离散数学》349 (2) (2026) 114774。[8] X.N. Fang，L.H. You，关于禁用子图的给定边数图的最大谱半径，《线性代数及其应用》666 (2023) 114–128。[9] J. Gao，X.L. Li，关于禁用扇图 F_6 的给定边数图的谱半径，《离散数学》349 (2) (2026) 114695。[10] J. Gao，X.L. Li，关于给定边数无 theta 图的图的最大谱半径，《马来西亚数学科学学会通报》48 (6) (2025) 第 206 号论文，13 页。[11] J. Gao，X.L. Li，关于不含 theta 子图的图的最大谱半径，《离散应用数学》380 (2026) 619–628。[12] C. Godsil，G. Royle，《代数图论》，《数学研究生教材》第 207 卷，施普林格出版社，纽约，2001 年。[13] D. Kleitman，$K_{5,\ n}$，的交叉数，《组合理论杂志》9 (4) (1970) 315–323。[14] R. Li，B. Liu，M.Q. Zhai，轮图上的谱 Mantel 定理推广，《离散数学》348 (2025) 114573。[15] S.C. Li，Y.T. Yu，固定边数图的谱极值：禁用三角形和五边形，《离散数学》347 (2024) 114151。[16] S.C. Li，S.S. Zhao，C.L. Shen，固定边数非二分图的谱极值：禁用三角形，已投稿至《韩国数学会杂志》，2024 年。[17] S.C. Li，S.S. Zhao，L.T. Zou，固定边数图的谱极值：禁用扇图、友谊图或 theta 图，《图论杂志》110 (4) (2025) 483-495。[18] X. Li，M.Q. Zhai，J.L. Shu，关于圈的 Brualdi-Hoffman-Tur´an 问题，《欧洲组合学杂志》120 (2024) 103966。[19] Y.T. Li，L.H. Feng，Y.J. Peng，关于非二分无三角形图的谱极值问题，《电子组合学杂志》31 (1) (2024) 1.52。[20] Y.T. Li，H. Liu，S.T. Zhang，关于 Nosal 谱定理的进一步结果：书图和 4-圈，arXiv:2508.14366。[21]Y.T. Li，H. Liu，S.T. Zhang，一个边谱 Erd¨os-Stone-Simonovits 定理及其稳定性，arXiv:2508.15271。[22] Y.T. Li，H. Liu，S.T. Zhang，色临界图的边谱 Tur´an 定理及其应用，arXiv:2511.15431。[23] Y.T. Li，W.J. Liu，L.H. Feng，若干极值图问题谱条件的综述，中国科学：数学 51 (2) (2022) 193–258。[24] Y.T. Li，Y.J. Peng，禁用短奇圈的非二分图的最大谱半径，《电子组合学杂志》29 (4) (2022) 4.2。[25] Y.T. Li，L. Lu，Y.J Peng，蝴蝶图的谱极值图，《离散数学》346 (2023) 113680。[26] H.Q. Lin，B. Ning，B.Y.D.R. Wu，图的特征值与三角形，《组合、概率与计算》30 (2) (2021) 258–270。[27] C. Liu，J.P. Li，S.C. Li，Y.T. Yu，关于 theta 图的 Brualdi-Hoffman-Tur´an 问题，《应用数学进展》173 (2026) 第 10300 号论文。[28] R.F. Liu，L. Miao，非二分图的谱 Tur´an 问题：禁用书图，《欧洲组合学杂志》126 (2025) 104136。[29] Y.X. Liu，L.G. Wang，禁用子图的给定边数图的谱半径，《线性代数及其应用》689 (2024) 108–125。[30] Z.Z. Lou，L. Lu，X.Y. Huang，给定边数且奇围长受限的图的谱半径，《电子组合学杂志》31 (1) (2024) #1.58。[31] Z.Z. Lou，L. Lu，M.Q. Zhai，对谱 Mantel 定理的加强，《欧洲组合学杂志》127 (2025) 104142。[32] J.Y. Lu，L. Lu，Y.T. Li，禁用 C_7 或 $C_6^{\triangle}$ 的图的谱半径，《离散数学》347 (2) (2024) 113781。

[33] G. Min, Z.Z. Lou, Q.X. Huang，给定边数下无 C_5/无 C_6 图的谱半径尖锐上界，《线性代数及其应用》640 (2022) 162–178。[34] V. Nikiforov，关于图的最大特征值的一些不等式，《组合、概率与计算》11 (2) (2002) 179–189。[35] V. Nikiforov，关于团数和独立数的更多谱界，《组合理论杂志 B 辑》99 (6) (2009) 819–826。[36] V. Nikiforov，给定阶数和边数的无 C_4 图的最大谱半径，《线性代数及其应用》430 (2009) 2898–2905。[37] V. Nikiforov，关于 Nosal 定理，arXiv:2104.12171。[38] E. Nosal，《图的特征值》（硕士论文），卡尔加里大学，1970 年。[39] W.T. Sun, S.C. Li，给定边数的无 $\{C_3, C_5\}$ 图的最大谱半径，《离散数学》346 (7) (2023) 113440。[40] W.T. Sun, S.C. Li, W. Wei，给定边数的无 C_5/C_6 图谱极值的推广，《离散数学》346 (12) (2023) 113591。[41] B.J. Wang, B. Wang，给定边数的无 P_{2k+1} 图的最大谱半径，《线性代数及其应用》708 (2025) 302–314。[42] L.J. Yu, Y.T. Li, Y.J. Peng，扇图的谱极值图，《离散数学》348 (5) (2025) 114391。[43] Y.T. Yu, S.C. Li，非 r 部图中的谱 Tur´án 型问题：禁用广义书图 $B_{r,\ k}$，arXiv:2508.12034。[44] M.Q. Zhai, H.Q. Lin, J.L. Shu，固定边数图的谱极值：圈和完全二部图，《欧洲组合学杂志》95 (2021) 103322。[45] M.Q. Zhai, J.L. Shu，Mantel 定理的谱版本，《离散数学》345 (2022) 112630。[46] Y.T. Zhang, L.G. Wang，无宝石图的图的谱半径，《离散数学》347 (11) (2024) 114171。[47] Y.T. Zhang, L.G. Wang，给定边数且禁用子图的图的谱半径最大化，《线性代数及其应用》727 (2025) 10–23。